# Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:

# Informe Tarea n° 8

María Constanza Flores V.

18 de noviembre de 2015

## 1. Pregunta 1

### 1.1. Introducción

Se busca encontrar la posición del centro de masas de un sólido descrito por la intersección de un toro y un cilindro dados por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Toro}: \; z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leqslant 1 \tag{1}$$

$$\text{Cilindro}: \; (x-2)^2 + z^2 \leqslant 1 \tag{2}$$

Y cuya densidad varía según la siguiente fórmula:

$$\rho(x,y,z) = 0{,}5 * (x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

### 1.2. Procedimiento

El centro de masas está dada por la siguiente fórmula:

$$r_{cm} = \frac{\int_v \rho(r)\, r\, dv}{\int_v \rho(r)\, dv} \tag{4}$$

Por lo que para poder calcular la posición $X_{cm}$, $Y_{cm}$ y $Z_{cm}$ es necesario calcular las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_x \int_y \int_z \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{5}$$

$$I_2 = \int_x \int_y \int_z \rho(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

$$I_3 = \int_x \int_y \int_z \rho(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz \tag{7}$$

$$I_4 = \int_x \int_y \int_z \rho(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz \tag{8}$$

En donde los valores de $X_{cm}$, $Y_{cm}$ y $Z_{cm}$ están dados por:

$$X_{cm} = I_2/I_1, \qquad Y_{cm} = I_3/I_1, \qquad Z_{cm} = I_4/I_1$$

Por otro lado, se tiene que el toro puede parametrizarse de la siguiente forma:

$$x = cos\theta(3 + cos\phi)$$

$$y = sin\theta(3 + cos\phi)$$

$$z = rsin\phi$$

De lo que fácilmente puede concluirse los siguientes límites para la superficie:

$$x \in [-4, 4], \qquad y \in [-4, 4], \qquad z \in [-1, 1]$$

Y los límites del cilindro están dados por:

$$x \in [1, 3], \qquad y \in [-\infty, \infty], \qquad z \in [-1, 1]$$

Por lo que al intersectar ambos conjuntos de límites se puede obtener el mínimo volumen que encierra a la superficie completa, dado por los siguientes intervalos:

$$x \in [1, 3], \qquad y \in [-4, 4], \qquad z \in [-1, 1] \tag{9}$$

Finalmente se utiliza el algoritmo de Monte-Carlo 1 para encontrar los valores de las integrales (5), (6), (7), y (8). Se utiliza `np.ramdom.uniform` para obtener variables aleatorias con distribuciones uniformes en los intervalos definidos en (9), se pregunta por la condición si está dentro del toro (pues para el cilindro ya se está dentro dado el escoger variables uniformes por los límites de (9)) y se procede a utilizar el algoritmo de Monte-Carlo 1.

## 1.3. Resultados

El resultado arrojado por el código está dado por las siguientes coordenadas:

$$(X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}) = (2{,}10, 0{,}00, 0{,}00) \tag{10}$$

### 1.4. Conclusiones

El cálculo de la posición del centro de masa fue estimado de forma satisfactoria, pues se encontró un valor intuitivamente correcto. Los valores de $Y_{cm}$ y $Z_{cm}$ se estimaba que fueran nulos debido a la simetria existente tanto en el toro como en el cilindro (y la densidad también), y el valor de $X_{cm}$ se encuentra dentro de un rango aceptable. Cabe mencionar también que faltó la inclusion de los errores asociados al cálculo.

## 2. Pregunta 2

### 2.1. Introducción

Se desea obtener una muestra aleatoria de números con la distribución (no normalizada) dada por la siguiente ecuación:

$$W(x) = 3{,}5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1{,}5)^2}{0{,}5}\right) \tag{11}$$

Para ello, se pide utilizar el algoritmo de Metrópolis, con proposición dada xp = xn + $\delta$ * r, con $\delta$ a determinar, y r una variable aleatoria con distribución uniforme U(-1,1).

### 2.2. Procedimiento

El algoritmo de Metrópolis busca generar una secuencia de valores $x_i$ con una distribución W(x) conocida (y no necesariamente normalizada). Para ello se procede a seguir los siguientes pasos:

1. Asumir que ya se tiene $x_n$
2. Generar un número aleatorio $x_p$
3. Probar con el criterio de metrópolis y decidir si el valor $x_p$ se acepta o rechaza, de la siguiente forma:
   - Si $x_p$ se acepta, entonces $x_{n+1} = x_p$
   - Si $x_p$ se rechaza, entonces $x_{n+1} = x_n$

   El criterio de metrópolis es el siguiente: Si W($x_p$)/W($x_n$) ¿r , $x_p$ se acepta. La variable r es una variable aleatoria con distribución uniforme U(0,1)

Cabe destacar que el valor de $x_p$ es el propuesto en la introducción de esta sección, es decir:

$$x_p = x_n + \delta * r \tag{12}$$

Y para escoger delta se crea una función que, usando el algoritmo de metrópolis, guarde la cantidad de veces que el valor $x_p$ es aceptado, y si ésta es mayor al 50 % de las veces totales, se utiliza dicho delta.

Se utiliza el algoritmo de metrópolis $10^7$ veces, y se grafica un hitograma con los resultados.

### 2.3. Resultados

El gráfico obtenido se muestra en la figura a continuación:

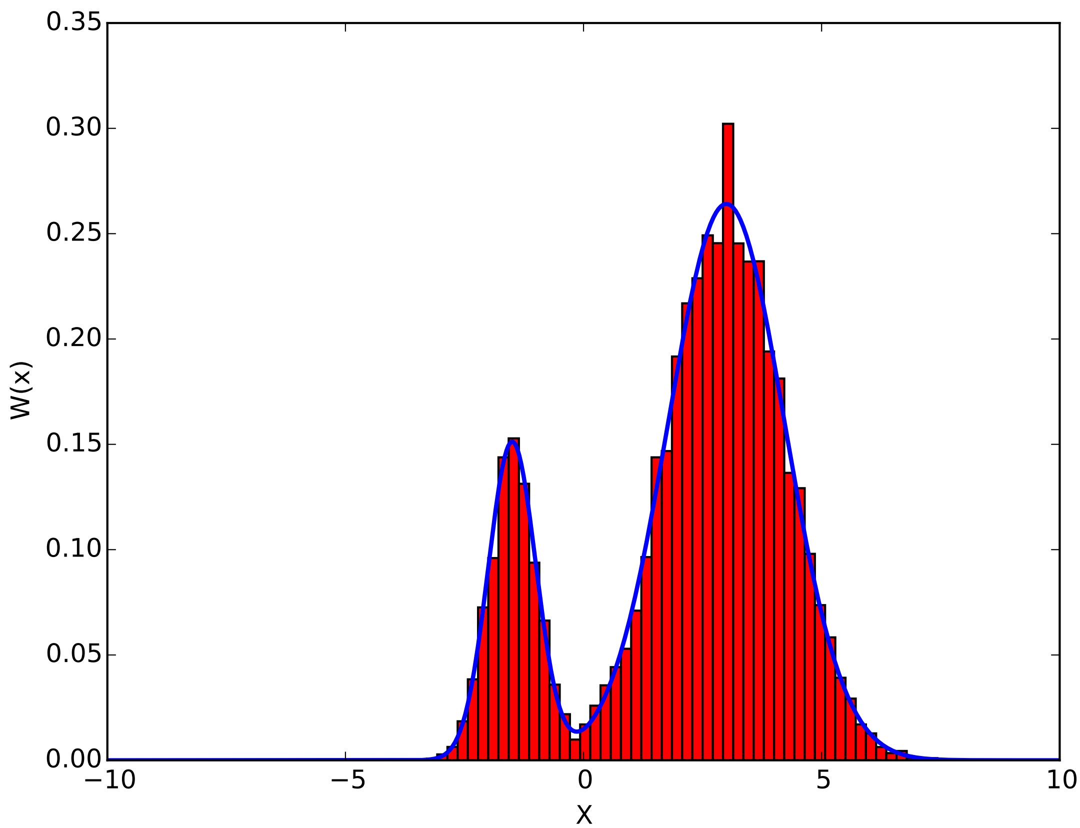


Figura 1: Histograma(en rojo) de la muestra. En azul se ve la distribución de densidad W(x) de la ecuación (11)

Es importante mencionar que en el script se calculó una vez el valor de delta (debido a lo poco eficiente que era), y luego fue utilizado su valor dejando comentado la parte del script que lo calculaba.

## 2.4. Conclusiones

La distribución obtenida utilizando el algoritmo de Metrópolis fue calculada de forma satisfactoria, y eso puede notarse en la Figura 1 pues la distribución de los valores x graficados en el histograma es bastante similar a lo que es graficar la distribución W(x) en función de x.