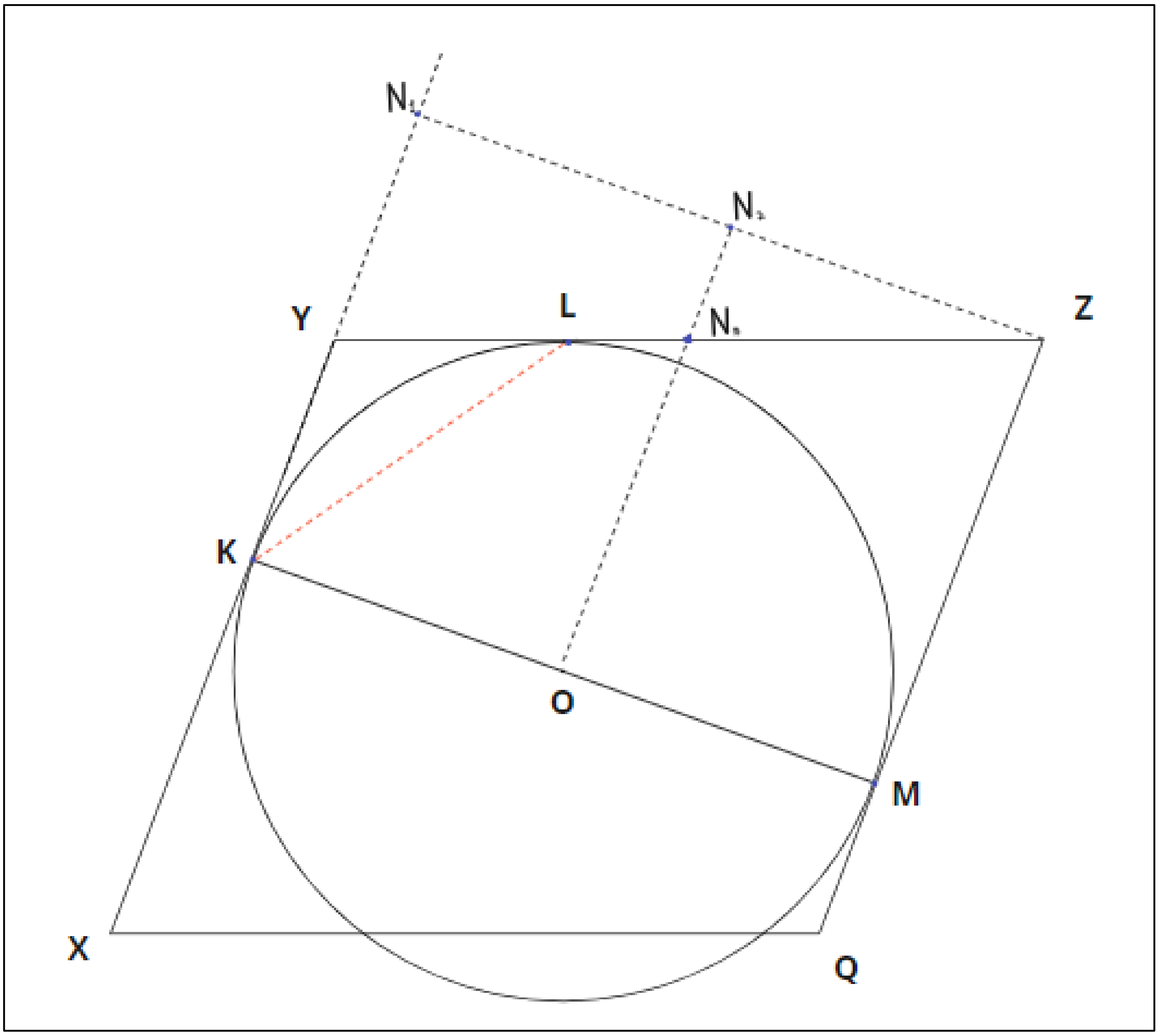
Окружность касается сторон XY, YZ и ZQ параллелограмма XYZQ в точках K, L, M соответственно.

Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины Z на XY.



Решение:

Учитывая очевидные рассуждения:

- ZMKN1 - прямоугольник

MK - диаметр, перпендикулярен касательной XY
ZN1 - высота, перпендикулярна стороне XY.
MK & ZN1 ортогональны одной прямой, значит ||

Выберем середину стороны прямоугольника N2.

- XY и ZQ - параллельны, как стороны параллелограмма.
- Перпендикуляр, опущенный из точки N2 также будет параллелен сторонам KN1 & MZ. Это верно потому что KN1, N2O, MZ будут одновременно перпендикулярны общей стороне KM.

- O - центра окружности (OK = OM).

Это верно так как N2 - середина стороны ZN1. Поэтому перпендикуляр из точки N2 будет делить сторону прямоугольника ZMKN1 пополам. Это верно вследствие симметрии. N20 - серединный перпендикуляр.

Надо доказать, что KL будет диагональю прямоугольника **KN1N2O:**

$$\overline{N_2N_3} - \text{средняя линия треугольника } YZN_1.$$

$$\text{Пусть } LZ = ZM = x,$$

$$\text{и } KY = YL = y$$

$$\text{тогда } YN_1 = x - y$$

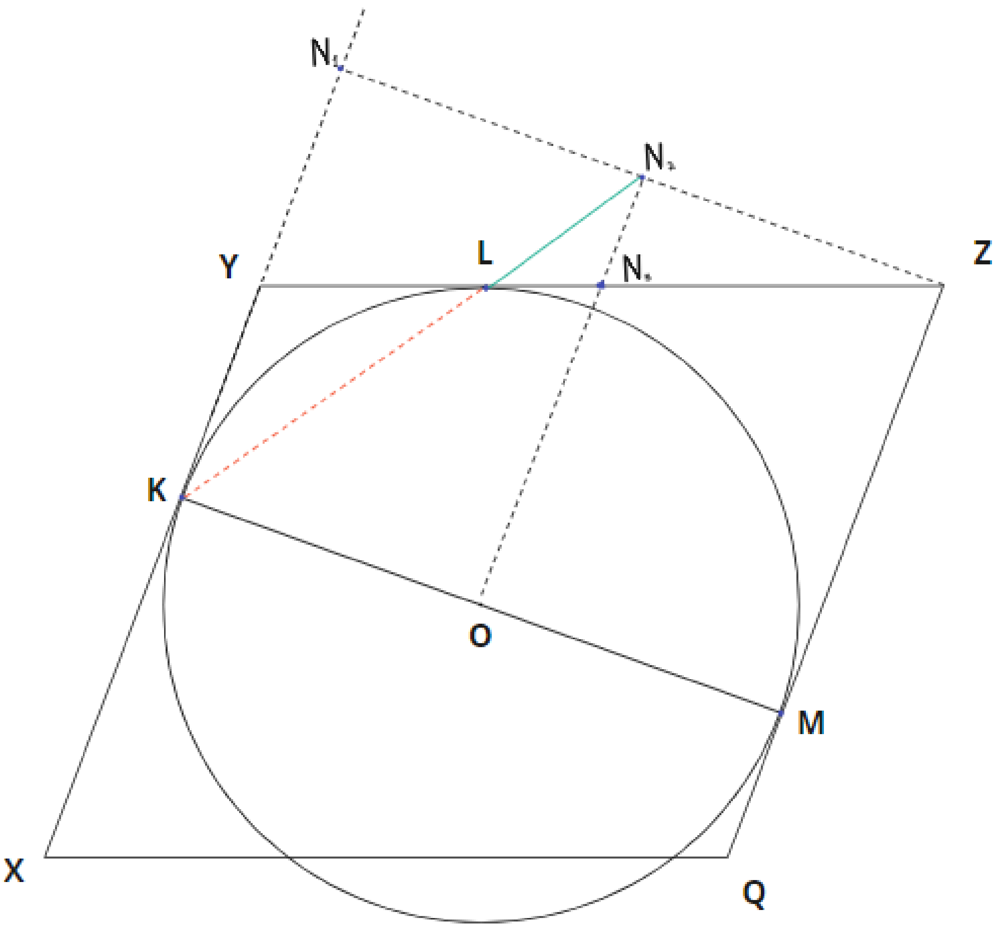
$$N_2N_3 = \frac{1}{2}(YN_1) = \frac{x-y}{2}$$

$$YN_3 = \frac{1}{2}YZ = \frac{1}{2}(x+y)$$

$$LN_3 = YN_3 - YL = \frac{1}{2}(x+y) - y = \frac{x-y}{2}$$

Построим из точки L отрезок LN_2

В треугольнике LN_2N_3 стороны $N_2N_3 = LN_3$



Требуется показать, что точки K, L, N_2 принадлежат одной прямой.

Секущая YZ пересекает параллельные прямые KN_1 и N_2O

$$\angle N_2N_3L = \angle KYL \text{ как накрест лежащие}$$

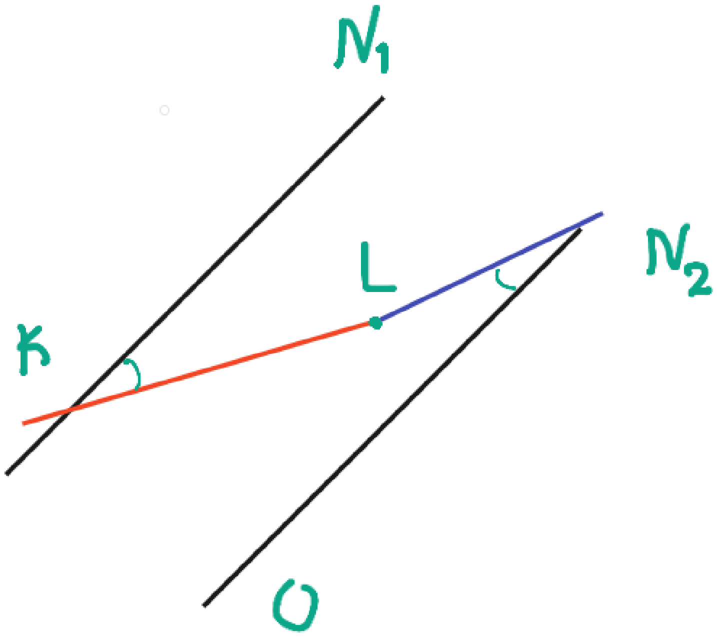
$$\Delta KYL \text{ подобен } \Delta LN_2N_3$$

$$\angle LN_2N_3 = \angle YKL$$

Поскольку прямые KN_1 и N_2O параллельны, а вышеуказанные углы равны, то

KN_2 очевидно является секущей а углы

$\angle LN_2N_3 = \angle YKL$ накрест лежащими углами.



Такая ситуация невозможна, так как в этом случае вышеуказанные углы не будут равны.

Ответ: точки K, L, N_2 лежат на одной прямой, значит прямая KL проходит через середину высоты.