

# Глава 1

## Выражение и множество его значений

В этой главе рассказывается о множествах и их элементах, о способах задания множеств, о подмножествах; вводятся соответствующие обозначения. Темы «Числовые выражения» и «Выражения с переменными» вам хорошо знакомы из курса математики 5—6 классов. С пункта «Статистические характеристики» начинается систематическое изучение элементов математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей. Здесь будет рассказано о том, что такое выборка, ряд данных, а также о том, какие статистические характеристики для них существуют.

### § 1. Множества

#### 1. Множество. Элемент множества

В жизни часто приходится встречаться с различными совокупностями объектов, объединённых в одно целое по некоторому признаку. Для обозначения этих совокупностей используются различные слова. Например, говорят: стадо коров, букет цветов, команда футболистов и т. д.

В математике в целях единообразия для обозначения совокупностей употребляется единый термин — множество. Например, говорят: множество чётных чисел, множество двузначных чисел, множество правильных дробей со знаменателем 5.

Термин «множество» употребляется и тогда, когда речь идёт о нечисловых множествах. Например, говорят о множестве диагоналей многоугольника, о множестве точек координатной плоскости, о множестве прямых, проходящих через данную точку.

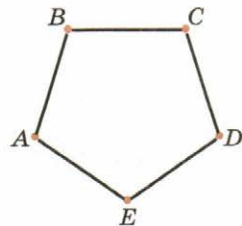


Рис. 1

Объекты или предметы, составляющие множество, называют элементами множества. Например, число 89 — элемент множества двузначных чисел; точка  $B$  (рис. 1) — элемент множества вершин многоугольника  $ABCDE$ .

Множества бывают конечные и бесконечные. Например, множество двузначных чисел — конечное множество (оно содержит 90 элементов), а множество чётных чисел — бесконечное множество.

Конечное множество может содержать миллиард элементов, 2 элемента, 1 элемент или даже не содержать ни одного элемента.

Рассмотрим множество простых чисел, заключённых между натуральными числами  $m$  и  $n$ . Если  $m = 10$  и  $n = 20$ , то между ними заключено 4 простых числа. Это числа 11, 13, 17 и 19. Если  $m = 20$  и  $n = 25$ , то между ними заключено только одно простое число — число 23. Если  $m = 32$  и  $n = 37$ , то между ними нет ни одного простого числа. В этом случае говорят, что множество простых чисел, заключённых между числами 32 и 37, — пустое множество.

Вообще пустым называют множество, не содержащее ни одного элемента. Для его обозначения ввели специальный знак  $\emptyset$ .

Конечные множества обычно записывают с помощью фигурных скобок. Например, множество вершин пятиугольника  $ABCDE$  (см. рис. 1) можно записать так:

$$\{A; B; C; D; E\},$$

а множество двузначных чисел, кратных 15, так:

$$\{15; 30; 45; 60; 75; 90\}.$$

В таких случаях говорят, что множество задано *перечислением его элементов*.

Множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита. Например, рассмотренные выше множества вершин пятиугольника и двузначных чисел, кратных 15, можно обозначить соответственно буквами  $K$  и  $L$  и записать так:

$$K = \{A; B; C; D; E\};$$

$$L = \{15; 30; 45; 60; 75; 90\}.$$

Для основных числовых множеств введены специальные обозначения: множество натуральных чисел обозначают буквой  $N$  (от латинского слова *natural* — естественный), множество целых чисел — буквой  $Z$  (от немецкого слова *zahl* — число), множество рациональных чисел — буквой  $Q$  (от латинского слова *quotient* — отношение).

Число  $-8$  является элементом множества  $Z$ . Иначе говорят, что число  $-8$  принадлежит множеству  $Z$ . Это предложение записывают короче:  $-8 \in Z$ . Число  $0,17$  не принадлежит множеству  $N$  (не является элементом множества  $N$ ). Для выражения этого факта принята следующая запись:  $0,17 \notin N$ . Вообще если  $a$  — элемент множества  $A$ , то пишут  $a \in A$ , если же  $b$  не принадлежит множеству  $A$ , то записывают  $b \notin A$ .

В тех случаях, когда задание множества перечислением элементов невозможно (как для бесконечного множества) или громоздко (как для конечного множества с большим числом элементов), множество задают описанием, указав его характеристическое свойство, т. е. свойство, которым обладают все элементы этого множества и не обладают никакие другие объекты.

Зададим с помощью описания некоторые множества.



Пусть

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}.$$

Зададим это множество описанием, используя понятие характеристического свойства. Множество  $A$  можно охарактеризовать как

«множество всех натуральных чисел от 1 до 14 включительно»,  
или как

«множество всех натуральных чисел, меньших 15»,

или, используя знаки  $\in$ ,  $<$  и букву  $x$  для произвольного элемента множества  $A$ , как

«множество значений  $x$ , где  $x \in N$  и  $x < 15$ ».

Тот факт, что множество  $A$  состоит из элементов  $x$ , удовлетворяющих этим условиям, будем записывать так:

$$A = \{x \mid x \in N, x < 15\}.$$

В фигурных скобках сначала пишется буква  $x$  (или какая-либо другая буква) — обозначение произвольного элемента множества, затем после вертикальной черты описывается условие, которому должны удовлетворять значения  $x$ .

Пусть  $B$  — множество натуральных чисел, кратных 5. Множество  $B$  является бесконечным. Запишем первые его элементы в порядке возрастания: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Множество  $B$  с помощью его характеристического свойства можно задать так:

$$B = \{x \mid x = 5n, n \in N\}.$$

Рассмотрим множества

$$C = \{y \mid y = 2x, x \in N, x < 7\} \text{ и } D = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}.$$

Эти множества состоят из одних и тех же элементов. В таких случаях говорят, что множества равны, и пишут  $C = D$ .

Заметим, что порядок элементов в записи множеств не имеет значения. Например, множества  $\{3; 4; 5; 6; 7\}$  и  $\{5; 3; 7; 4; 6\}$  равны, хотя элементы в этих множествах записаны в различном порядке.

## Упражнения

1. Запишите с помощью перечисления элементов, используя фигурные скобки, множество:
  - а) двузначных чисел, начинающихся цифрой 6;
  - б) двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7;
  - в) натуральных чисел, заключённых между числами 63 и 67;
  - г) натуральных чисел, заключённых между числами 31 и 33.
2. Пусть  $A$  — множество двузначных чисел,  $B$  — множество трёхзначных чисел. Запишите, используя знак  $\in$ , какое из чисел 48, 732, 29 принадлежит множеству  $A$ , а какое — множеству  $B$ .

3. Прочитайте запись:

- а)  $276 \in \mathbb{N}$ ;      в)  $3,7 \notin \mathbb{Z}$ ;      д)  $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ ;  
б)  $-8 \notin \mathbb{N}$ ;      г)  $0 \notin \mathbb{N}$ ;      е)  $-243 \in \mathbb{Q}$ .

4. Запишите, используя знаки  $\in$  или  $\notin$ , следующее высказывание:

- а) число 15 принадлежит множеству  $\mathbb{N}$ ;  
б) число 283 — натуральное;  
в) число  $-41$  не является натуральным;  
г) число  $-579$  — целое;  
д) число 0,125 не является целым.

5. Запишите с помощью перечисления элементов:

- а) множество однозначных чисел;  
б) множество целых чисел, модуль которых меньше 4;  
в) множество натуральных чисел, кратных 3 и меньших 20;  
г) множество правильных дробей со знаменателем 5.

6. Запишите с помощью перечисления элементов:

- а) множество  $M$  сторон пятиугольника  $ABCDE$  (см. рис. 1);  
б) множество  $L$  букв, которые использовались для записи слова «коробка».

7. Определите, по какому признаку составлено множество чисел:

- а)  $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30\}$ ;  
б)  $B = \{17; 34; 51; 68; 85\}$ ;  
в)  $C = \{17; 27; 37; 47; 57; 67; 77; 87; 97\}$ ;  
г)  $D = \{13; 23; 43; 53; 73; 83\}$ .

Сформулируйте и запишите соответствующий признак для каждого из множеств.

8. Известно, что  $A$  — множество двузначных чисел, цифры десятков и единиц которых одинаковы,  $B$  — множество натуральных чисел, заключённых между числами 19 и 30,  $C$  — множество натуральных чисел, меньших 100 и кратных 11,  $D$  — множество двузначных чисел, в которых цифра десятков равна 2. Выделите из этих множеств равные множества.

9. Запишите с помощью перечисления элементов множество:

- а)  $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 8\}$ ;  
б)  $Y = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 17 \text{ и } x < 25\}$ ;  
в)  $K = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -5 \text{ и } x < 3\}$ ;  
г)  $L = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 5\}$ .

10. Задайте множество характеристическим свойством, обозначив произвольный элемент множества буквой  $x$ :

- а)  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ;  
б)  $B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ ;  
в)  $C$  — множество натуральных чисел, больших 100.