

# Moderné regulárne výrazy

Tatiana Tóthová\*

Školiteľ: Michal Forišek†

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Regulárne výrazy implementované v súčasných programovacích jazykoch ponúkajú omnoho viac operácií ako pôvodný model z teórie jazykov. Už konštrukciou spätných referencií bola prekročená hranica regulárnych jazykov. Náš model obsahuje navyše konštrukcie lookahead, lookbehind a ich negatívne verzie. V článku uvádzame zaradenie modelu zodpovedajúcej triedy jazykov do Chomského hierarchie, vlastnosti tejto triedy a výsledky z oblasti priestorovej zložitosti.

*Kľúčové slová:* regulárny výraz, regex, lookahead, lookbehind, spätné referencie, negatívny lookahead

## 1 Úvod

Regulárne výrazy vznikli v 60tych rokoch v teórii jazykov ako ďalší model na vyjadrenie regulárnych jazykov. Z ich popisu ľudský mozog rýchlejšie pochopil o aký jazyk sa jedná, než zo zápisu konečného automatu, či regulárnej gramatiky. Ďalšou výhodou bol kratší a kompaktný zápis.

Vďaka týmto vlastnostiam boli implementované ako vyhľadávacie nástroje. Postupom času sa iniciatívou používateľov s vyššími nárokmi pridávali nové konštrukcie na uľahčenie práce. Nástroj takto rozvíjali až do dnešnej podoby. My sa budeme opierať o špecifikáciu regulárnych výrazov v jazyku Python [Python documentation, 2012].

Ako čoskoro zistíme, nové regulárne výrazy vedú reprezentovať zložitejšie jazyky ako regulárne, preto je dobré ich nejakým spôsobom odlíšiť. V literatúre sa zaužíval výraz „regex“ z anglického *regular expression*, ktorý budeme používať aj my.

### 1.1 Základná definícia

Regulárne výrazy sú zložené zo znakov a metaznakov. Znak  $a$  predstavuje jazyk  $L(a) = \{a\}$ . Metaznak alebo skupina metaznakov určuje, aká operácia sa so znakmi udeje. Základné operácie sú zret'azenie (je definované tým, že regulárne výrazy idú po sebe, bez

metaznaku), Kleeneho uzáver ( $(0 - \infty)$ -krát zopakuj výraz, metaznak  $*$ ) a alternácia (vyber výraz naľavo alebo napravo, metaznak  $|$ ). Navyše sa využíva metaznak  $\backslash$ , ktorý robí z metaznakov obyčajné znaky a okrúhle zátvorky na logické oddelenie regulárnych výrazov.

Pre regulárny výraz  $\alpha$  a slovo  $w \in L(\alpha)$  hovoríme, že  $\alpha$  vyhovuje slovu  $w$  resp.  $\alpha$  matchuje slovo  $w$ . Tiež budeme hovoriť, že  $\alpha$  generuje jazyk  $L(\alpha)$ .

### 1.2 Nové jednoduché konštrukcie

- $+$  – Kleeneho uzáver opakujúci  $(1 - \infty)$ -krát
- $\{n, m\}$  ( $\{n\}$ ) – opakuj regulárny výraz aspoň  $n$  a najviac  $m$ -krát (opakuj  $n$ -krát)
- $[a_1 a_2 \dots a_n]$  – predstavuje ľubovoľný znak z množiny  $\{a_1, \dots, a_n\}$
- $[\wedge a_1 a_2 \dots a_n]$  – predstavuje ľubovoľný znak, ktorý nepatrí do množiny  $\{a_1, \dots, a_n\}$
- $.$  – predstavuje ľubovoľný znak
- $?$  – ak samostatne: opakuj 0 alebo 1-krát ak za operáciou: namiesto greedy implementácie použi minimalistickú, t.j. zober čo najmenej znakov (platí pre  $*, +, ?, \{n, m\}$ )<sup>1</sup>
- $^$  – metaznak označujúci začiatok slova
- $\$$  – metaznak označujúci koniec slova
- $(\# \text{ komentár})$  – komentár sa pri vykonávaní regexu úplne ignoruje

Všetky tieto konštrukcie sú len „kozmetickou“ úpravou pôvodných regexov – to isté vieme popísať pôvodnými regulárnymi výrazmi, akurát je to dlhšie a menej prehľadné.

Rozdiely medzi minimalistickou a greedy verziou operácií vníma iba používateľ, pretože ak existuje zhoda regexu so slovom, v oboch prípadoch sa nájde. Viditeľné sú až pri výstupnej informácii pre používateľa, ktorú môže použiť ďalej a ktorá je v teoretickom modeli nepotrebná.

\*tothova166@uniba.sk

†forisek@dcs.fmph.uniba.sk

<sup>1</sup>všetky spomenuté operácie sú implementované greedy algoritmom

### 1.3 Zložitejšie konštrukcie

#### Spätné referencie

Najprv potrebujeme očíslovať všetky zátvorky v regexe. Čísľujú sa všetky, ktoré nie sú tvaru  $(? \dots)$ . Poradie je určené podľa otváraciej zátvorky.

Spätné referencie umožňujú odkazovať sa na konkrétne zátvorky. Zápis je  $\backslash k$  a môže sa nachádzať až za  $k$ -tymi zátvorkami. Skutočná hodnota  $\backslash k$  sa určí až počas výpočtu – predstavuje podslovo zo vstupného slova, ktoré matchovali  $k$ -te zátvorky. Ak je takých viac, platí vždy to posledné. Regex  $\alpha(\beta)\gamma\backslash k\delta$  na  $w$ :

$$w = \underbrace{x_1 \dots x_{i-1}}_{\alpha} \underbrace{\overbrace{x_i \dots x_{j-1}}^{w_k} \underbrace{x_j \dots x_{l-1}}_{\gamma}}_{(\beta)} \underbrace{\overbrace{x_l \dots x_{m-1}}^{w_k} x_m \dots x_n}_{\delta} \backslash k$$

$$x_i \dots x_{j-1} = x_l \dots x_{m-1}$$

#### Lookahead

Zapísaný formou  $(?= \dots)$ , vnútri je validný regex.

Keď v regexe prideme na pozíciu lookaheadu, zoberieme regex vo vnútri a snažíme sa v slove matchovať ľubovoľný prefix zostávajúcej časti slova. Ak sa to podarí, pokračujeme vo vonkajšom regexe ďalej a v slove od pozície, kde lookahead začína (tzn. akoby v regexe nikdy nebol). Regex  $\alpha(=\beta)\gamma$ :

$$w = \underbrace{x_1 \dots x_{i-1}}_{\alpha} \underbrace{\overbrace{x_i \dots x_j}^{\beta} x_{j+1} \dots x_n}_{\gamma}$$

Má aj negatívnu verziu – negatívny lookahead  $(?! \dots)$ . Vykonáva sa rovnako ako lookahead, ale má opačnú akceptáciu. Teda ak neexistuje vyhovujúci prefix, akceptuje.

#### Lookbehind

Zapísaný formou  $(?<= \dots)$ , vnútri je validný regex.

Pri výpočte zoberieme regex vnútri lookbehindu a snažíme sa vyhovieť ľubovoľnému sufixu už matchovanej časti slova. Ak vyhovíme, pokračujeme v slove a regexe akoby tam lookbehind vôbec nebol. Regex  $\alpha(?<=\beta)\gamma$  matchuje slovo  $w$ :

$$w = \underbrace{x_1 \dots x_{i-1}}_{\alpha} \underbrace{\overbrace{x_i \dots x_j}^{\beta} x_{j+1} \dots x_n}_{\gamma}$$

Aj lookbehind má negatívnu verziu – negatívny lookbehind  $(?!< \dots)$  – a má otočenú akceptáciu podobne ako negatívny lookahead.

Lookahead a lookbehind (spolu nazývané jedným slovom **lookaround**) sú v rôznych implementáciách rôzne obmedzované, aby výpočet netrval príliš dlho. V teórii tieto obmedzenia ignorujeme a prezentujeme model v plnej sile – výsledky tak prezentujú hornú hranicu toho, čo implementácie dokážu.

### 1.4 Priorita

Pri interakcii toľkých operácií je nutné vedieť ich priority. Existujú také, ktoré sa správajú ako znak, čomu zodpovedajú  $[ ]$ ,  $[^ ]$ ,  $.$  a každá spätná referencia. Špeciálne sú lookahead a lookbehind – tie sa vykonajú hneď akonáhle na ne narazíme. Ostatné zoradíme v tabuľke:

priorita	3	2	1	0
operácia	$()$	$* + ? \{ \}$	zreťazenie	$ $

### 1.5 Triedy a množiny

Kvôli porovnávaniu a vytvoreniu hierarchie sme rozdelili operácie do niekoľkých množín:

*Regex* – množina operácií, pomocou ktorých vieme popísať iba regulárne jazyky; presnejšie všetky znaky a metaznaky (bez zložitejších operácií)

*Eregex* – *Regex* so spätnými referenciami

*LEregex* – *Eregex* s pozitívnym lookaroundom

*nLEregex* – *LEregex* s negatívnym lookaroundom

$\mathcal{L}_{RE}$  – trieda jazykov nad *Regex* ( $= \mathcal{R}$ )

$\mathcal{L}_{ERE}$  – trieda jazykov nad *Eregex*

$\mathcal{L}_{LERE}$  – trieda jazykov nad *LEregex*

$\mathcal{L}_{nLERE}$  – trieda jazykov nad *nLEregex*

Trieda  $\mathcal{L}_{ERE}$  už bola hlbšie preskúmaná a výsledky čerpáme z článkov [Câmpeanu et al., 2003] a [Carle and Nadendran, 2009].

## 2 Formalizácia modelu

Pri zložitejších dôkazoch sa ukázala potreba lepšieho formalizmu, než len množiny operácií. Kvôli jednoduchosti sme vybrali len potrebné operácie – zret'azenie, alternáciu, Kleeneho \*, spätné referencie a pozitívny a negatívny lookaround – a pokúsili sa tu popísať model, ktorý pracuje v krokoch podobne ako Turingov stroj.

Základným prvkom je **konfigurácia**. Je to dvojica regex  $r_1 \dots r_n$  a vstupné slovo  $w_1 \dots w_m$ , pričom v oboch reťazcoch sa navyše nachádza ukazovateľ pozície  $\lceil$  (ako hlava Turingovho stroja):  $(r_1 \dots \lceil r_i \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$ . Špeciálne rozoznávame počiatočnú konfiguráciu  $(\lceil r_1 \dots r_n, \lceil w_1 \dots w_m)$  a akceptačnú konfiguráciu  $(r_1 \dots r_n \lceil, w_1 \dots w_m \lceil)$ .

Znaky slova  $(w_1 \dots w_m)$  v konfigurácii budú niest' nejakú informáciu navyše, preto použijeme poschodové symboly. Na najspodnejšom poschodí bude uchovaná informácia o skutočnom znaku na zodpovedajúcej pozícii v slove a nebude sa meniť. Obsah vrchných poschodí bude špecifikovaný v kroku výpočtu. Z celého poschodového symbolu budeme zobrazovať vždy len tú informáciu, ktorú práve potrebujeme, tzn.  $w_j$  bude predstavovať iba znak na najspodnejšom poschodí. Nezabúdajme však, že na ostatných poschodiach môže mať zapísané čokoľvek, čo možno neskôr v inom kroku využijeme.

Najprv si definujeme potrebné pojmy indexovateľnosti a alternovateľnosti. *Indexovateľné zátvorky* sú také, kde za otváracou zátvorkou nenasleduje ? (t.j. všetky prípady okrem lookaroundu). Tieto zátvorky budeme číslovať. *Alternovateľný regex* je taký, ktorý sa môže vyskytovať v alternácii. Sú 3 prípady: regex sa môže nachádzať naľavo od |, napravo od | alebo je z oboch strán ohraničený |. Ak alternácia nie je uzavretá zátvorkami, ľavý a pravý krajný regex siaha až ku kraju slova, pretože alternácia je operácia s najmenšou prioritou. Inak sú pre nich hranicou zátvorky uzatváracie alternáciu.

Vďaka definovaniu týchto pojmov vidíme, že vieme algoritmicky zistiť, ktoré zátvorky sú indexovateľné a ktoré regexy sú alternovateľné.

**Definícia 1.** *Krok výpočtu* je relácia  $\vdash$  na konfiguráciách definovaná nasledovne:

### I. zhoda písmenka

$$\forall a \in \Sigma: (r_1 \dots \lceil a \dots r_n, w_1 \dots \lceil a \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots a \lceil \dots r_n, w_1 \dots a \lceil \dots w_m)$$

### II. zápis adresy zátvorky (

*Nech  $\lceil$  je indexovateľná, k-ta v poradí:*

$$(r_1 \dots \lceil (\dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

$$(1) \vdash (r_1 \dots (\lceil \dots r_n, w_1 \dots \lceil^k w_j \dots w_m)$$

*Ak za jej uzatváracou zátvorkou nasleduje \*, t.j.  $\alpha$  je tvaru  $r_1 \dots \lceil (\dots) * \dots r_n$ , potom*

$$(2) \vdash (r_1 \dots (\dots) * \lceil \dots r_n, w_1 \dots \lceil^k w_j \dots w_m)$$

### III. zápis adresy zátvorky )

*Nech  $\lceil$  je indexovateľná, k-ta v poradí:*

$$(r_1 \dots \lceil) \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots \lceil) \lceil \dots r_n, w_1 \dots \lceil^k w_j \dots w_m)$$

### IV. výber možnosti v alternácii

*Nech podslová  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A$  regexu  $\alpha$  sú všetkými členmi zobrazenej alternácie:*

$$(r_1 \dots \lceil \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_A \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

$$(1) \vdash d' \text{alší prechod v } \alpha_1$$

$$(2) \vdash (r_1 \dots \alpha_1 | \lceil \alpha_2 | \dots | \alpha_A \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

⋮

$$(A) \vdash (r_1 \dots \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \lceil \alpha_A \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

### V. skok z dokončenej možnosti na koniec alternácie

*Nech podslová  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A$  regexu  $\alpha$  sú všetkými členmi zobrazenej alternácie, potom pre všetky možnosti:*

$$(r_1 \dots \alpha_1 \lceil | \alpha_2 | \dots | \alpha_A \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m),$$

$$(r_1 \dots \alpha_1 | \alpha_2 \lceil | \dots | \alpha_A \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m),$$

⋮

$$(r_1 \dots \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_{A-1} \lceil | \alpha_A \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_A \lceil \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

### VI. skok Kleeneho \* za znakom

$$(r_1 \dots a \lceil * \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

$$(1) \vdash (r_1 \dots a * \lceil \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

$$(2) \vdash (r_1 \dots \lceil a * \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m)$$

VII. skok Kleeneho \* za regexom v ( )

$$(r_1 \dots \underbrace{(\dots)}_k \lceil \underbrace{* \dots r_n, w_1 \dots w_a \dots w_b \dots}_{k'} \rceil w_j \dots w_m)^2$$

$$(1) \vdash (r_1 \dots \underbrace{(\dots)}_k \lceil \underbrace{\dots r_n, w_1 \dots w_a \dots w_b \dots}_{k'} \rceil w_j \dots w_m)$$

$$(2) \vdash (r_1 \dots \underbrace{(\dots)}_k \lceil \underbrace{\dots r_n, w_1 \dots w_a \dots w_b \dots}_{k'} \rceil w_j \dots w_m)$$

VIII. špeciálny ukazovateľ – zjavenie

$$(r_1 \dots \lceil \backslash k \dots r_n, w_1 \dots w_a \dots w_b \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots \lceil \backslash k \dots r_n, w_1 \dots \top w_a \dots w_b \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

IX. porovnávanie spätnej referencie

$$(r_1 \dots \lceil \backslash k \dots r_n, w_1 \dots w_a \dots \top w_c \dots w_b \dots \rceil w_j \dots w_m),$$

kde  $a \leq c < b$  a zároveň  $w_c = w_j$ <sup>3</sup>

$$\vdash (r_1 \dots \lceil \backslash k \dots r_n, w_1 \dots w_a \dots w_c \top \dots w_b \dots w_j \rceil \dots w_m)$$

X. špeciálny ukazovateľ – zmiznutie

$$(r_1 \dots \lceil \backslash k \dots r_n, w_1 \dots w_a \dots \top w_b \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots \backslash k \lceil \dots r_n, w_1 \dots w_a \dots w_b \dots w_j \rceil \dots w_m)$$

XI. lookahead – začiatok a jeho záznam

Nech  $(?= \dots)$  je  $k$ -ty pozitívny lookahead v poradí:

$$(r_1 \dots \lceil (=? \dots) \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots (=? \dots) \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m \rceil)$$

XII. lookahead – koniec, skok a vymazanie záznamu  
Nech  $)$  patrí ku  $k$ -temu pozitívnemu lookaheadu v poradí:

$$(r_1 \dots (?= \dots \rceil) \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_l \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots (?= \dots) \lceil \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_l \dots w_j \dots w_m)$$

XIII. lookbehind – začiatok, jeho záznam a skok

Nech  $(?<= \dots)$  je  $k$ -ty pozitívny lookbehind v poradí,  $\forall L \in \{0, \dots, j-1\}$ :

$$(r_1 \dots \lceil (?<= \dots) \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots (?<= \dots) \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_{j-L} \dots w_j \dots w_m \rceil)$$

XIV. lookbehind – koniec a vymazanie záznamu

Nech  $)$  patrí ku  $k$ -temu pozitívnemu lookbehindu v poradí:

$$(r_1 \dots (?<= \dots \rceil) \dots r_n, w_1 \dots \lceil w_j \dots w_m \rceil)$$

$$\vdash (r_1 \dots (?<= \dots) \lceil \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

XV. negatívny lookahead

$$Ak \nexists p \in \{j, \dots, m\} : (\lceil r_k \dots r_l, \lceil w_j \dots w_p \rceil) \vdash^*$$

$$(r_k \dots r_l \lceil, w_j \dots w_p \rceil), \text{ potom:}$$

$$(r_1 \dots \lceil (?! r_k \dots r_l) \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots (?! r_k \dots r_l) \lceil \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

XVI. negatívny lookbehind

$$Ak \nexists p \in \{1, \dots, j-1\} : (\lceil r_k \dots r_l, \lceil w_p \dots w_{j-1} \rceil) \vdash^*$$

$$(r_k \dots r_l \lceil, w_p \dots w_{j-1} \rceil), \text{ potom:}$$

$$(r_1 \dots \lceil (?<! r_k \dots r_l) \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

$$\vdash (r_1 \dots (?<! r_k \dots r_l) \lceil \dots r_n, w_1 \dots \rceil w_j \dots w_m)$$

**Akceptačný výpočet** je postupnosť konfigurácií  $(\lceil R, \lceil W \rceil) \vdash^* (R \lceil, W \rceil)$ . Ak existuje akceptačný výpočet pre daný regex  $R$  a slovo  $W$  hovoríme, že regex  $R$  matchuje slovo  $W$  respektívne slovo  $W$  vyhovuje regexu  $R$ . **Jazyk** vyhovujúci danému regexu je množina slov, pre ktoré existuje akceptačný výpočet.

Vďaka týmto definíciám sme schopný odhadnúť dĺžku výpočtu:

**Lema 1.** Nech  $\alpha \in \mathcal{L}_{ERE}$  a  $w \in L(\alpha)$ . Potom existuje akceptačný výpočet, ktorý má najviac  $3 \cdot |\alpha| \cdot |w|^2$  konfigurácií.

**Dôkaz.** Vo väčšine krokov výpočtu sa posúvame dopredu – buď v regexe alebo v slove alebo v oboch. Takéto kroky vedú k postupnosti dĺžky najviac  $|\alpha| + |w|$ .

Výpočet môže predĺžiť skákanie ukazovateľ a dozadu. V krokoch VI.(2), VII.(2) sa pri Kleeneho \* rozhodneme urobiť ďalšiu iteráciu. Zamyslime sa nad samotným akceptačným výpočtom. Ak existuje,

<sup>2</sup>Podľa definície spätných referencií platí podsledné pod-slovo nájdené regexom v  $k$ -tych zátvorkách. Pri tejto pracovnej pozícii v regexe je zjavné, že nejde o prvý prechod cez tieto zátvorky a teda existuje také  $a, b$ , že  $k$  je v slove nad  $w_a$  a  $k'$  nad  $w_b$ . Ak nastane prechod (2), pôvodné horné indexy  $k, k'$  miznú a pridáva sa  $k$  nad  $w_j$ .

<sup>3</sup> $w_c$  a  $w_j$  sú poschodové symboly, avšak pri tejto rovnosti poschodia ignorujeme – chceme porovnať iba písmenká v slove, prislúchajúce týmto pozíciám.

potom existuje aj taká jeho verzia, kde každé opakovanie regexu pomocou Kleeneho  $*$  matchuje aspoň 1 znak – prázdne iterácie môžeme vyhodit', lebo ukazovateľ v slove zostal na mieste a konfigurácia skoku je rovnaká, takže postupnosť sa priamo naviaže. Jediná prázdna iterácia môže zostať ako posledná, pokiaľ sa jedná o krok VII.(2) a na zátvorky pred  $*$  sa odkazuje spätná referencia – vtedy môže nastať prípad, kedy potrebujeme mať posledné matchované podslovo prázdne. Vieme, že regex opakovaný operáciou  $*$  je dlhý nanajvýš  $|\alpha|$  znakov a podľa úvahy ho treba opakovať najviac  $|w|$ -krát<sup>4</sup>. Medzi návratmi používame nenávratové kroky, ktorých je najviac  $|w| + |\alpha|$ , takže spolu má akceptačný výpočet najviac  $|w| \cdot (|w| + |\alpha|)$  konfigurácií.

V krokoch VIII. a X. sa žiaden ukazovateľ nepohne. Oba kroky sa vyskytujú 1x ku každej spätnej referencii, ktorých je najviac  $|\alpha|$ . Každá spätná referencia sa môže nachádzať v poli pôsobnosti nejakej  $*$ , teda môže byť opakovaná najviac toľkokrát, koľko je iterácií a tých je dohromady najviac  $|w|$ . Tieto kroky nastanú najviac  $(|\alpha| \cdot |w|)$ -krát.

Z toho vyplýva, že najkratší akceptačný výpočet má najviac  $|w| \cdot (|w| + |\alpha|) + |w| \cdot |\alpha| \leq 3 \cdot |w|^2 \cdot |\alpha|$  konfigurácií.  $\square$

**Lema 2.** *Nech  $\alpha \in \mathcal{L}_{LRE}$ ,  $s \in L(\alpha)$ ,  $r = |\alpha|$  a  $w = |s|$ . Potom existuje akceptačný výpočet, ktorý má nanajvýš  $O(r^2 w^3)$  konfigurácií.*

*Dôkaz.* Spočítajme, koľko je všetkých konfigurácií pre regex  $\alpha$  a slovo  $s$ .

Ukazovateľ v regexe môže mať  $(r + 1)$  rôznych pozícií. Ukazovateľ v slove môže mať  $(w + 1)$  rôznych pozícií. V slove môžu byť niekedy 2 ukazovatele. Spolu máme  $(r + 1)(w + 1) + (r + 1)(w + 1)^2 = (r + 1)(w + 1)(w + 2)$  možností.

V konfiguráciách sú v poschodových symboloch zapísané informácie potrebné k výpočtu. Pre každé spätné referencie sú to 2 zápisy a pre každý lookaround 1. Dokopy je to najviac  $r$  operácií, teda  $2r$  zápisov. Každá informácia buď v regexe ešte nie je zapísaná alebo má  $w$  možností, kde zapísaná môže byť. Pre informácie máme dokopy  $2r(w + 1)$  možností.

Všetkých možných konfigurácií je dohromady

$$(r + 1)(w + 1)(w + 2) \cdot 2r(w + 1) = O(r^2 w^3) \quad (1)$$

<sup>4</sup>Ked' v každej iterácii matchujeme aspoň 1 písmenko, potrebujeme najviac  $|w| - 1$  návratov. Zarátaním možnej poslednej prázdnej iterácie dostávame  $|w|$  iterácií.

Späť k akceptačnému výpočtu. Nech sú všetky akceptačné výpočty dlhšie ako (1). Vyberme si jeden z nich. Potom tento výpočet musí nutne obsahovať 2 rovnaké konfigurácie. Keď vymažeme úsek medzi rovnakými konfiguráciami a napojíme postupnosť, dostaneme opäť validný akceptačný výpočet. Postup opakujeme, pokiaľ výpočet obsahuje nejaké 2 rovnaké konfigurácie. Keď skončíme, stále je validný a všetky konfigurácie vo výpočte sú rôzne a preto má najviac (1) konfigurácií.  $\square$

### 3 Vlastnosti lookaroundu

Na zoznámenie s novou operáciou sme zistovali správanie sa tried Chomského hierarchie.

**Veta 1.**  *$\mathcal{R}$  je uzavretá na negatívny a pozitívny lookaround.*

*Dôkaz.* Nech  $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{R}$ . Chceme ukázať, že  $L_1(=L_2)L_3$ ,  $L_1(<=L_2)L_3$ ,  $L_1(!L_2)L_3$ ,  $L_1(<!L_2)L_3 \in \mathcal{R}$ . Pre každé  $L_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  existuje determinický konečný automat  $A_i$ , ktorý ho akceptuje.

Máme zreteľ z  $L_1$  a  $L_3$ . Preto prepojíme akceptačný stav  $A_1$  s počiatočným stavom  $A_3$ . Výsledný automat sa nedeterministicky rozhoduje, či z akceptačného stavu  $A_1$  pokračuje ďalej v  $A_1$  alebo  $A_3$ . Teraz k nim vhodne napojíme automat  $A_2$ . Spravíme konštrukciu pre prienik regulárnych jazykov, ale mierne upravenú.

V pozitívnom lookaheade  $A_2$  a  $A_3$  začínajú naraz. Akonáhle  $A_2$  akceptuje, vo výpočte bude pokračovať už len samotný  $A_3$ , kým dočíta slovo. Podobne pre pozitívny lookbehind –  $A_1$  začne sám a nedeterministicky v nejakom kroku začne výpočet aj  $A_2$ . Akceptovať musia spolu.

Pre negatívne formy musíme navyše upraviť akceptáciu. Ak  $A_2$  pre lookahead akceptuje, celý automat sa zasekne a zamietne.  $A_2$  musí dočítať slovo bez dosiahnutia akceptačného stavu alebo sa zaseknúť. Pre lookbehind v každom kroku  $A_1$  spúšťať ďalší  $A_2$  a držíme si množinu stavov, v ktorých sa všetky nachádzajú. Úspech je, ak  $A_1$  akceptuje a množina stavov pre automaty  $A_2$  neobsahuje akceptačný stav.  $\square$

**Veta 2.**  *$\mathcal{L}_{CF}$  nie je uzavretá na pozitívny lookaround.*

Vieme totiž vygenerovať jazyk  $L = \{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$  pomocou jazykov  $L_1 = \{a * b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$  a  $L_2 = \{a^n b^n c * | n \in \mathbb{N}\}$  takto  $L = (?=L_1)L_2 = L_1(<=L_2)$ .

Takýto výsledok bol očakávateľný, pretože lookaround vytvára uzavretosť na prienik a to trieda bezkontextových jazykov nie je.

**Veta 3.**  $\mathcal{L}_{CS}$  je uzavretá na pozitívny lookaround.

*Dôkaz.* Nech jazyky  $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}_{CS}$ , potom ukážeme, že  $L_1(?=L_2)L_3, L_1(?<=L_2)L_3 \in \mathcal{L}_{CS}$ . Ku každému  $L_i$  existuje Turingov stroj  $T_i$ , ktorý ho akceptuje. Zostrojíme nedeterministický Turingov stroj  $T$  pre lookahead.

$T$  bude mať vstupnú read-only pásku.  $T$  si nedeterministicky rozdelí vstupné slovo  $w$  na  $w_1, w_2, w_3$  tak, že  $w = w_1w_3$  a  $w_3 = w_2x$  pre nejaké  $x$  ( $w_1 = xw_2$  v prípade lookbehindu). Na jednu pracovnú pásku prepíše  $w_1$  a bude simulovať  $T_1$ . Keď akceptuje, pásku vymaže, zapíše tam  $w_2$  a bude simulovať  $T_2$ . Ak aj ten akceptuje, pásku vymaže, zapíše tam  $w_3$  a bude simulovať  $T_3$ . Ak  $T_3$  akceptuje, bude akceptovať aj  $T$ . Zrejme akceptuje požadovaný jazyk.  $\square$

Teraz zistíme, čo robí lookaround s regexami (zatiaľ bez spätných referencií) a napíšeme nejaké jeho vlastnosti.

**Veta 4.** Trieda jazykov nad *Regex* s pozitívnym a negatívnym lookaroundom je ekvivalentná  $\mathcal{R}$ .

*Dôkaz.* Trieda jazykov nad *Regex* pokrýva triedu regulárnych jazykov a tá je na lookaround uzavretá (veta 1). Keďže pracujeme s množinou operácií, treba overiť, či nejaká ich kombinácia nie je náhodou silnejšia. Ak regex umiestníme do lookaroundu, či pred alebo za neho, vždy to bude regulárny jazyk a celý regex bude tiež definovať regulárny jazyk. Teda nás zaujíma vloženie lookaroundu dovnútra inej operácie. V tomto prípade prichádza do úvahy  $*$ ,  $+$  a  $?$ , ktoré menia počet lookaroundov a vynútiť ich simuláciu na rôznych častiach slova.

Operácia  $?$  veľa nespraví – lookaround tam buď bude 1x alebo nebude vôbec.  $+$  je prípad  $*$  s jedným lookaroundom istým. Teda chceme overiť, že  $(L_1(?=L_2)L_3) * L_4, L_4(L_1(?<=L_2)L_3)* \in \mathcal{R}$  pre  $L_1, \dots, L_4 \in \mathcal{R}$ . K týmto jazykom vieme zostrojiť konečné automaty podobným spôsobom ako vo vete 1.

Ku kostre z automatov  $A_1, A_3, A_4$  pripojíme  $A_2$  pre lookahead tak, že v každej iterácii zároveň s  $A_3$  spustíme aj  $A_2$ , pričom  $A_2$  môže skončiť kedykoľvek. Budeme mať množinu stavov  $A_2$ , čo budú stavy všetkých spustených automatov. Ak nejaký stav v množine prejde do akceptačného stavu, ten už nepíšeme.

Jediná požiadavka je, aby množina stavov  $A_2$  bola po dočítaní slova prázdna.

Automat  $A_2$  pre lookbehind ku kostre pripájame tak, že kedykoľvek počas behu sa môže spustiť 1 jeho inštancia. Podmienka je, že ak sme v počiatčnom stave  $A_3$ , množina stavov  $A_2$  musí obsahovať aspoň 1 akceptačný stav. Ten sa potom môžeme rozhodnúť odstrániť alebo nechať, ak predpokladáme, že je to ďalšia inštancia  $A_2$  v rovnakom stave taká, že sa vymaže neskôr.  $\square$

Nasledujúca veta hovorí, že do lookaheadu stačí dávať z každého jazyka jeho prefixovú podmnožinu<sup>5</sup>. Akonáhle lookahead nájde prefix, akceptuje a ku zvyšku slova sa nikdy neprepracuje. Podobne to platí pre lookbehind a sufixovú podmnožinu jazyka.

Samozrejme toto platí pre lookaheady bez  $\$$  a lookbehindy bez  $^$ .

**Veta 5.** Nech  $L$  je ľubovoľný jazyk a  $L_p = L \cup \{uv \mid u \in L\}$ . Nech  $\alpha$  je ľubovoľný regulárny výraz taký, že obsahuje  $(?=L_p)$ . Potom ak prepíšeme tento lookahead na  $(?=L)$  (nazvime to  $\alpha'$ ), bude platiť  $L(\alpha') = L(\alpha)$ . Analogicky platí pre lookbehind s  $L_s = \{vu \mid u \in L\}$ .

*Dôkaz.*  $\subseteq$ : triviálne,  $L \subseteq L_p$ .

$\supseteq$ : Majme  $w \in L(\alpha)$  a nech  $x$  je také podslovo  $w$ , ktoré sa zhodovalo práve s daným lookaheadom. Potom  $x \in L_p$ , teda  $x = uv$ , kde  $u \in L$ . Ak  $v = \varepsilon$ ,  $x \in L$  a máme čo sme chceli. Nech  $v \neq \varepsilon$ . Ale celá zhoda lookaheadu sa môže zúžiť len na  $u$ , keďže  $u \in L_p$ , a bude to platná zhoda s  $w$ . Čo znamená, že  $w \in L(\alpha')$ .  $\square$

**Dôsledok 1.** Nech  $\alpha$  je regulárny výraz, ktorý obsahuje nejaký taký lookahead  $(?=L)$  (lookbehind  $(?<=L)$ ), že  $\varepsilon \in L$ . Nech je  $\alpha'$  regulárny výraz bez tohto lookaheadu (lookbehindu). Potom  $L(\alpha') = L(\alpha)$ .

*Dôkaz.* Uvedomme si, že lookaround nie je fixovaný na dĺžku vstupu – musí sa zhodovať s nejakým podslavom začínajúcim sa (končiacim sa) na konkrétnom mieste. Tým pádom akonáhle si môže regulárny výraz vnútri tejto operácie vybrať  $\varepsilon$ , bude hlásiť zhodu vždy.  $\square$

<sup>5</sup>T.j. z jazyka  $L$  stačí  $L_p = \{u \mid u \in L \wedge \nexists v \in L : u = vx\}$ .

## 4 Chomského hierarchia

Zaradíme zadané triedy do Chomského hierarchie.

**Veta 6.**  $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{L}_{ERE} \subsetneq \mathcal{L}_{LRE} \subseteq \mathcal{L}_{nLRE} \subsetneq \mathcal{L}_{CS}$

*Dôkaz.* Všetky  $\subseteq$  okrem poslednej triviálne platia. Posledná platí, lebo vieme na lineárne ohraničenom Turingovom stroji  $T$  simulovať ľubovoľný regex  $\in \mathcal{L}_{nLRE}$ . Opierať sa budeme o formálny model a definíciu 1. Ľavú stranu konfigurácie (regex) bude mať  $T$  v stave a pravú stranu aj s poschodovými symbolmi bude simulovať na vstupnej páske. Kroky odvodenia pre negatívny lookaround bude simulovať spustením nového Turingového stroja pre vnútorný regex – tento Turingov stroj bude mať ohraničený vstup (konkrétne podslovo) a opačnú akceptáciu.<sup>6</sup> Keďže regex je konečný,  $T$  bude spúšťať konečný počet nových Turingových strojov, preto vieme dopredu povedať, koľko stôp na vstupnej páske budeme potrebovať.

$\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{L}_{ERE}$ :  $\alpha = (a|b)^* \setminus 1, L_1 = L(\alpha) = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\} \notin \mathcal{R}$

$\mathcal{L}_{ERE} \subsetneq \mathcal{L}_{LRE}$ : Nerovnosť dokazuje jazyk  $L_2 = \{a^i b a^{i+1} b a^i k \mid k = i(i+1)k' \text{ pre nejaké } k' > 0, i > 0\}$ .  $L \notin Eregex$  podľa pumpovacej lemy z [Carle and Nadendran, 2009] a tu je regex z  $L Eregex$  pre  $L_2$ :  $\alpha = (a^* \underset{1}{b} (\underset{1}{\setminus} 1 a) \underset{2}{b} (\underset{2}{?} (\underset{1}{\setminus} 1) * \$) (\underset{2}{\setminus} 2) * \setminus k + 2$

$\mathcal{L}_{LRE}, \mathcal{L}_{nLRE} \subsetneq \mathcal{L}_{CS}$ : Triedy  $\mathcal{L}_{LRE}$  a  $\mathcal{L}_{nLRE}$  sú neporovnateľné s  $\mathcal{L}_{CF}$ . Vyššie spomínaný jazyk  $L_1 \notin \mathcal{L}_{CS}$ . Ani jedna z tried neobsahuje jazyk  $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{L}_{CF}$ .  $\square$

Intuitívne by malo platiť aj  $\mathcal{L}_{LRE} \subsetneq \mathcal{L}_{nLRE}$ , pretože negatívny lookaround pridáva uzavretosť na komplement. Jazyk dokazujúci nerovnosť by mohol byť napríklad regex  $\alpha = (?! (aaa^*) \setminus 1 (\setminus 1) * \$)$ , kde  $L(\alpha) = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$ . Avšak na dokázanie  $L(\alpha) \notin \mathcal{L}_{LRE}$  zatiaľ nemáme šikovné prostriedky a preto to zostáva netriviálnym otvoreným problémom.

## 5 Vlastnosti triedy $\mathcal{L}_{LRE}$

Keďže sa ukázalo, že množina  $L Eregex$  je silnejšia ako skúmaná  $\mathcal{L}_{ERE}$ , intenzívnejšie sme sa povenovali jej vlastnostiam.

<sup>6</sup>Regexy majú tú vlastnosť, že vieme pre ne zostrojiť taký Turingov stroj, ktorý sa nezacyklí.

Očividne operácia lookahead/lookbehind pridala uzavretosť na prienik. Nech  $\alpha, \beta \in L Eregex$ , potom  $L(\alpha) \cap L(\beta) = L(\gamma)$ , kde  $\gamma = (?=\alpha\$)\beta$  alebo  $\beta(?<=\alpha)$ .

Naopak ohrozila uzavretosť na základnú operáciu – zreteženie. Pri zretežení 2 jazykov, ktorých regexy nutne musia obsahovať lookahead resp. lookbehind nastáva problém. Nemôžeme tieto regexy len tak položiť za seba. Ak sa napríklad v prvom z jazykov nachádza lookahead, počas výpočtu môže zasahovať aj do časti vstupu, ktorú matchuje druhý regex a tým zmeniť výsledok celého výpočtu. Nakoniec sa ukázalo:

**Veta 7.**  $\mathcal{L}_{LRE}$  je uzavretá na zreteženie.

*Dôkaz.* Nech  $\alpha, \beta \in L Eregex$ . Jazyku  $L(\alpha)L(\beta)$  bude zodpovedať regex

$$\gamma = (?=(\underset{1}{\alpha}) (\underset{1}{\beta}) \underset{k+2}{\$}) \alpha' \setminus k+2 (?<=\setminus 1 \beta')$$

V  $\alpha, \beta$  treba vhodne prepísať označenie zátvoriek (po poradí).  $\alpha'$  je  $\alpha$  prepísaný tak, že pre každý lookahead:

- bez  $\$$  – na koniec pridáme  $.* \setminus k+2$
- s  $\$$  – pred  $\$$  pridáme  $\setminus k+2$

$\beta'$  je  $\beta$  prepísaný tak, že pre každý lookbehind:

- bez  $\wedge$  – na začiatok pridáme  $\wedge \setminus 1.*$
- s  $\wedge$  – pred  $\wedge$  pridáme  $\wedge \setminus 1$

Slovami vyjadrené, regex  $\gamma$  najprv rozdelí vstupné slovo na 2 podslová  $w_1, w_2$  patriace do príslušných jazykov  $L(\alpha), L(\beta)$ . Potom spustí ešte raz regex  $\alpha$  upravený tak, že jeho lookaheady sú „skrotené“, pretože ich na konci donúti matchovať  $w_2$ . Rovnako lookbehindy v  $\beta'$  donúti na začiatku matchovať  $w_1$ , až potom normálne pokračuje ich výpočet.

Zrejme  $L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta)$ .  $\square$

Otvoreným problémom je, či platí aj uzavretosť na  $*$ . Podľa komplikovanosti zreteženia sa domnievame, že uzavretosť neplatí.

Pre model  $\mathcal{L}_{ERE}$  existuje pumpovacia lema. Ukázalo sa, že  $L Eregex$  túto vlastnosť nezachováva.

**Veta 8.** Nech  $\alpha \in L Eregex$  nad unárnou abecedou  $\Sigma = \{a\}$ , že neobsahuje lookahead s  $\$$  ani lookbehind s  $\wedge$  vnútri iterácie. Existuje konštanta  $N$  taká, že ak  $w \in L(\alpha)$  a  $|w| > N$ , potom existuje dekompozícia  $w = xy$  s nasledujúcimi vlastnosťami:

(i)  $|y| \geq 1$

(ii)  $\exists k \in \mathbb{N}, k \neq 0; \forall j = 1, 2, \dots : xy^{kj} \in L(\alpha)$

*Dôkaz.* Pokiaľ  $\alpha \in Eregex$ , tak pre  $\alpha$  platí pumpovacia lema z [Câmpeanu et al., 2003, Lemma 1], t.j.  $w = a_0 b a_1 b \dots a_m$  pre nejaké  $m$  a  $a_0 b^j a_1 b^j \dots a_m \in L(\alpha) \forall j$ . My pracujeme nad unárnym jazykom, teda na poradí nezáleží:  $x = a_0 a_1 \dots a_m, y = b^m, k = 1$  a  $xy^j \in L(\alpha) \forall j$ .

Pokiaľ  $\alpha$  neobsahuje spätné referencie, potom podľa vety 4 generuje regulárny jazyk a pre ten existuje pumpovacia lema. Podľa nej splníme podmienky tejto vety. Nech  $\alpha$  obsahuje aspoň 1 spätnú referenciu.

Definujme teraz konštantu  $N$ . Dostatočne dlhé slovo je také, kedy s istotou vieme povedať, že aspoň jedna Kleeneho  $*$  (+) spravila viac ako 1 iteráciu. Nestačí nastaviť  $N = |\alpha|$ , lebo operácie  $\{n\}, \{n, m\}$  a spätné referencie môžu slovo predĺžiť namiesto  $*$ . Preto nech  $d$  je súčet dĺžky regexu v  $k$ -tych zátvorkách pre všetky  $k$  v  $\alpha$ , plus  $n$ -krát dĺžky regexov opakovaných  $\{n\}$ , plus  $m$ -krát dĺžky regexov opakovaných  $\{n, m\}$ . Potom  $N = |\alpha| + d$  je dostatočne veľká konštanta – predlžovať slovo môže len  $*, +$ .

Zoberme teraz tú  $*$ <sup>7</sup>, ktorá iterovala aspoň 2x. Tá generuje nejaké  $a^s$ .

Podľa predošlých úvah  $\alpha$  musí obsahovať spätné referencie. Niektoré spätné referencie sa môžu odkazovať na našu vybranú  $*$ , na tieto spätné referencie sa môžu odkazovať na ďalšie spätné referencie, atď. V konečnom dôsledku síce  $*$  generuje  $a^s$ , ale dokopy je generované  $a^{ms} = a^n$ . Nazvime tieto miesta, závislé od vybranej  $*$ , generovacie miesta.

Tiež vieme, že  $\alpha$  musí obsahovať nejaký lookahead. Ten môže ovplyvňovať nejaké miesto generovania (prípadne aj viac). Máme 3 prípady interakcie:

1. Žiaden lookahead nezasahuje do generujúcich miest. Nech  $w = a^t$ , potom  $x = a^{t-n}, y = a^n, k = 1$  a platí  $xy^j \in L(\alpha) \forall j$ .

2. Lookahead bez  $\$$  a/alebo lookbehind bez  $^$  zasahuje do generujúceho miesta alebo sa môže nachádzať vnútri iterovania  $*$ . Podľa vety 5 vieme, že v lookaheade stačí prefixová podmnožina, čo nad unárnou abecedou dáva jazyk s 1 slovom. Toto slovo obmedzuje iterovanie zdola – slovo v lookaheade určuje minimálnu dĺžku slova od daného miesta. (Podobne pre lookbehind.)  $w$  už túto podmienku spĺňa, teda máme generovacie miesta bez obmedzení a to je predošlý prípad.

<sup>7</sup>+ je tiež v podstate  $*$

3. generovacie miesto je v oblasti pôsobenia lookaheadu s  $\$$  a/alebo lookbehindu s  $^$ . Takýto lookahead tvorí prienik. Keďže slovo je dostatočne dlhé, musí byť iterujúca  $*$  aj v takýchto lookarounds.

Rozoberme si prípad  $*$  a 1 lookaheadu.  $*$  generuje  $a^s$ , lookahead generuje  $a^l$ . Lookaround robí prienik jazykov, takže v danom úseku sú dobré len slová tvaru  $a^b$ , kde  $b = j \cdot nsn(s, l)$ <sup>8</sup>.

Všeobecnejšie, nech máme 1 lookahead a  $*$  s niekoľkými spätnými referenciami. Potom sčítame to, čo generujú  $*$  so spätnými referenciami – spolu nejaké  $a^r$ . Opäť výsledné slovo bude prienik s lookaroundom (ten nech generuje  $a^l$ ), teda  $a^b$ , kde  $b = j \cdot nsn(r, l)$  – teda násobok najmenšieho spoločného násobku.

Týmto spôsobom vieme spočítať koeficient spoločného generovaného prvku – postupne sčítavame  $*$  a spätné referencie a keď sa vyskytne lookahead spravíme najmenší spoločný násobok ich generovaných prvkov. Potom nech  $v$  je výsledný koeficient,  $x = a^{t-1}, y = a, k = v$  a platí  $xy^{jk} \in L(\alpha)$ .  $\square$

Podmienka „neobsahuje lookahead s  $\$$  ani lookbehind s  $^$  vnútri iterácie“ je opodstatnená. Takáto kombinácia je vôbec ťažko predstaviteľná a preto sa pre ňu ťažko dokazujú tvrdenia. Napríklad regex

$$\underbrace{((?= (a^m) * \$) (a^{m+1}) * a\{1, m-1\} \$ | a^m \$) a^m) +}_{a^{km}, k \in \mathbb{N} \quad \text{vie } a^* \text{ okrem } a^{m+1}, a^{m(m+1)l}, l \in \mathbb{N}} \quad a^{km} \text{ také, že nevie } a^{m(m+1)l}, l \in \mathbb{N}$$

generuje konečný jazyk obsahujúci slová  $a^m, a^{2m}, \dots, a^{(m-1)(m+1)}$ . Hlavný lookahead je spúšťaný každú iteráciu, teda pre slovo  $a^{zm}$  musí matchovať všetky  $a^{im}$  pre  $i \in \{1, \dots, z\}$ .

A teraz dôkaz, že všeobecná pumpovacia lema určite neexistuje:

**Veta 9.** Jazyk všetkých platných výpočtov Turingovho stroja patrí do  $\mathcal{L}_{LRE}$ .

*Dôkaz.* Takýto jazyk pre konkrétny Turingov stroj  $M$  obsahuje slová, ktoré sú tvorené postupnosťou konfigurácií oddelených oddelovačom  $\#$ . Každá postupnosť zodpovedá akceptačnému výpočtu na nejakom slove. Jazyk obsahuje akceptačné výpočty na všetkých slovách, ktoré sú v jazyku  $L(M)$ .

Turingov stroj má konečný zápis, preto je možné regex pre takýto jazyk vytvoriť. Konštrukcia regexu:

<sup>8</sup>najmenší spoločný násobok



$\gamma = \gamma_1 \mid \gamma_2 \mid \gamma_3$ . Prvok  $\gamma_i$  generuje validnú konfiguráciu a zároveň kontroluje pomocou lookaheadu, či nasledujúca konfigurácia môže podľa  $\delta$ -funkcie nasledovať. Rozpíšeme si iba jednu možnosť:

platí pre  $\forall q \in K, \forall x, y \in \Sigma$  a kde  $\xi = \xi_1 \mid \xi_2 \mid \dots \mid \xi_n$ .

- Ak  $(p, z, 0) \in \delta(q, y)$ , potom  $\xi_i = (\backslash k x p z \backslash k + 1)$  pre nejaké  $i$
- Ak  $(p, z, 1) \in \delta(q, y)$ , potom  $\xi_i = (\backslash k x z p \backslash k + 1)$  pre nejaké  $i$
- Ak  $(p, z, -1) \in \delta(q, y)$ , potom  $\xi_i = (\backslash k p x z \backslash k + 1)$  pre nejaké  $i$

Zrejme  $L(\gamma)$  je požadovaný jazyk.

**Veta 10.**  $\mathcal{L}_{LRE} \subseteq NSPACE(\log n)$ , kde  $n$  je veľkosť vstupu.

Výpočet Turingovho stroja bude prebiehať podľa postupnosti konfigurácií formálneho modelu. Nemôžeme nič zapísať na vstupnú pásku a máme k dispozícii menej priestoru ako je dĺžka vstupu. Využijeme to, že pre vstup dĺžky  $n$  vieme uložiť ľubovoľnú pozíciu na vstupe do adresy dĺžky  $\log n$ . Ukážeme, že takýchto adries potrebujeme konečný počet. Potom ich vieme písať nad seba do niekoľkých stôp pásky a mať tak zapísaných najviac  $\log n$  políčok na páske.

<sup>9</sup>Musí byť previazaná s nasledujúcou konfiguráciou, aby spĺňala  $\delta$ -funkciu. Spraví sa to pomocou lookaheadu, podobne ako v  $\gamma_1$ .

Adresy budú zaznamenávať všetky ostatné informácie v konfigurácii – aktuálnu pracovnú pozíciu na vstupe (ukazovateľ v slove), pomocný ukazovateľ na spätné referencie, začiatok a koniec podslova zodpovedajúceho  $k$ -tým zátvorkám pre  $\forall k$  (počet  $z$ ), začiatok každého lookaheadu ( $l_a$ ) a lookbehindu ( $l_b$ ). K tomu bude potrebná 1 pomocná adresa – aktuálna pozícia hlavy na vstupe. Z definície  $\alpha$  je konečnej dĺžky a pre počty daných operácií platí  $2z + l_a + l_b \leq |\alpha|$ . Takže dokopy potrebujeme  $2 + 2z + l_a + l_b + 1 \leq |\alpha| + 3$  adres, čo je konštanta.

Preto  $T$  akceptuje  $L(\alpha)$  a splní pamäťové požiadavky.  $\square$

**Veta 11.**  $\mathcal{L}_{LRE} \subseteq DSPACE(\log^2 n)$ , kde  $n$  je veľkosť vstupu.

Dôkaz tejto vety uvedieme neskôr.

**Veta 13.**  $L(regex\#word) \in NSPACE(r \log w)$ , kde  $r = |regex|$ ,  $w = |word|$  a  $regex \in LRegex$ .

*Dôkaz.* Myšlienka dôkazu je podobná ako v dôkaze 10. Rozdiel je v tom, že regex nepoznáme dopredu. Z čoho vyplýva, že si ho nemôžeme uchovať v stave. Preto pribudnú ďalšie 2 adresy – pracovná pozícia

v regexe (ukazovateľ) a aktuálna pozícia v regexe. Ďalším dôsledkom je, že síce počet adries ohraničíme zhora číslom  $r + 3$ , ale už to viac nie je konštanta. Preto adresy nemôžeme ukladať na viacerých stopách pod sebou, ale musia byť vedľa seba oddelené oddelovačmi. Pre rovnako pohodlné porovnávanie a zapisovanie si môžeme dovoliť pridať 1 pracovnú pásku, na ktorú si 1 z porovnávaných adries zapíšeme – tá bude mať vždy najviac  $\log w$  zapísaných políčok.

Turingov stroj bude fungovať ako v dôkaze 10, ale odhad zapisanej pamäte bude  $(r + 3) \cdot \log w + 2 \log r$ . Všetky pozície v slove vieme adresovať od oddelovača #, preto zaberú  $\log w$  pamäte. Na záver pribudla pracovná a aktuálna pozícia v regexe, z nich každá potrebuje  $\log r$  políčok. Dokopy Turingov stroj zapíše  $O(r \log w)$  pamäte.  $\square$

Zo Savitchovej vety vyplýva  $DSPACE(r^2 \log^2 w)$ . My vieme dokázať lepšiu zložitost':

**Veta 14.**  $L(regex \# word) \in DSPACE(n \log^2 n)$ , kde  $regex \in Eregex$  a  $n$  je dĺžka vstupu.

*Dôkaz.* Nech  $r = |regex|$ ,  $w = |word|$ .

Myšlienka je podobná dôkazu Savitchovej vety [Ďuriš, 2003]. Turingov stroj  $T$  bude testovať, či sa dá dostať z konfigurácie  $C_1$  do konfigurácie  $C_2$  na  $i$  krokov:

```

1 bool TESTUJ( $C_1, C_2, i$ )
2   if ( $C_1 == C_2$ ) then return true
3   if ( $i > 0 \wedge C_1 \vdash C_2$ ) then return true
4   if ( $i \leq 1$ ) return false
5   iteruj cez všetky konfigurácie  $C_3$ 
6     if ( $TESTUJ(C_1, C_3, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$ 
         $\wedge TESTUJ(C_3, C_2, \lceil \frac{i}{2} \rceil)$ ) then
        return true
7   return false

```

Konfigurácie budú zodpovedať formálnemu modelu a ako v predošlom dôkaze budú na páske zaznamenané v podobe niekoľkých adries za sebou – ukazovateľ v regexe, ukazovateľ v slove, začiatok a koniec podslova pre  $k$ -te indexovateľné zátvorky pre  $\forall k (z)$ , začiatok každého lookaheadu ( $l_a$ ) a lookbehindu ( $l_b$ ). Globálne si budeme pamätať ešte aktuálnu pozíciu v regexe a v slove, kvôli orientácii a prípadnému kopírovaniu adries. Spolu to zaberie  $\log r + (1 + 2z + l_a + l_b) \cdot \log w + \log r + \log w \leq O(r \log w)$  pamäte.

Turingov stroj  $T$  začne volaním inštancie  $TESTUJ(C_0, C_a, c)$ , kde  $C_0$  je počiatočná konfigurácia,  $C_a$  je akceptačná konfigurácia a  $c$  je číslo

z lemy 2. Ak akceptačný výpočet existuje, potom existuje aj taký, ktorý má nanajvýš  $c$  konfigurácií.

Procedúra *TESTUJ* je rekurzívna. Preto bude na pracovnej páske stroja  $T$  zásobník. Pre každú inštanciu procedúry bude mať uložené konfigurácie  $C_1, C_2, C_3, c$  a informáciu, či sa vrátil z prvého alebo druhého volania (potrebný 1 bit informácie). Hodnotu  $c$  vieme zapísať do priestoru  $\log c = O(\log r + \log w)$ , teda záznam pre 1 inštanciu procedúry zaberie  $3r \log w + \log c = O(r \log w)$  pamäte.

Keďže parameter  $i$  je vždy o polovicu menší, hĺbka rekurzie bude  $\log c$ . Z toho vyplýva, že zásobník bude potrebovať  $O((\log r + \log w) \cdot r \cdot \log w) = O(n \log^2 n)$  pamäte. Ešte treba overiť, že úkony na riadkoch 2–4 zvládne  $T$  vykonať tiež v rámci pamäťového limitu.

Riadok 2 je porovnanie rovnosti adries – ktoré symboly už porovnal si môže značiť poschodovými symbolmi. Riadok 4 je triviálny. Riadok 3 je zložitý kvôli overeniu  $C_1 \vdash C_2$ . K tomu potrebuje nasledovné kontroly:

**ukazovateľ** – či je správne posunutý ukazovateľ (týka sa aj špeciálneho, ak je nastavený). To znamená, že buď má byť posunutý o konkrétny počet políčok alebo má byť v jeho okolí konkrétny symbol.

**adresy** – všetky adresy (mimo ukazovateľov) musia byť rovnaké. Okrem tých, ktorým je v tomto kroku nastavovaná nová hodnota. Tá musí byť korektne nastavená (t.j. rovnaká ako ukazovateľ v slove).

**zátvorky** – pre korektné skoky v regexe v krokoch II.(2) a VII.(2) musí byť medzi starou a novou pozíciou ukazovateľ a korektne uzátvorkovaný výraz.

**alternovateľnosť** – pokiaľ sa jedná o skok v alternácii (IV., V.), treba skontrolovať prvý alebo posledný alternovateľný regex.

**indexovateľnosť** – ak zátvorka nie je indexovateľná, tak sme narazili na lookaround.

Indexovateľnosť a ukazovateľ sa skontrolujú bez použitia pomocnej pamäte. Adresy využívajú porovnávanie, ale to sme už popísali, že si vieme vypomôcť poschodovými symbolmi. Alternovateľnosť využíva algoritmus na kontrolu zátvoriek – zisťuje, či je alternácia uzavretá zátvorkami (ak hej, ktorými) alebo nie. Počet zátvoriek je najviac  $\frac{r}{2}$ . Používame algoritmus, kde zátvorke ( priradíme 1 a ) hodnotu -1. Pri

každom výskyte sa hodnoty sčítavajú, 0 je dobre uzatvorený výraz.<sup>10</sup> Kontrola sa vykoná a súčet po nej už nepotrebujeme, preto ho môžeme dočasne zapísať na koniec zásobníka a vzápätí vymazať. Zapísaná pamäť tak bude  $r + O(n \log^2 n) = O(n \log^2 n)$ .  $\square$

**Dôsledok 2.** *Nech  $\mathcal{U}$  je trieda regexov, pre ktoré platí, že počet konfigurácií v akceptačnom výpočte pre regex  $\alpha$  a slovo  $w$  je najviac  $f(n)$ , kde  $n = |\alpha| + |w| + 1$ . Potom  $L(\text{regex}\#word) \in DSPACE(n \cdot \log n \cdot \log(f(n)))$ , kde  $\text{regex} \in \mathcal{U}$ .*

*Dôkaz.* Vyplýva z dôkazu vety 14 – hĺbka vnorenia funkcie *TESTUJ* je logaritmus z horného ohraničenia dĺžky akceptačného výpočtu.  $\square$

**Dôsledok 3.** *Trieda regexov s hĺbkou vnorenia look-aroundov zhora ohraničenou konštantou  $h$  patrí do  $DSPACE(n \log^2 n)$ .*

*Dôkaz.* Podľa lemy ?? je počet konfigurácií v akceptačnom výpočte najviac  $O((rw)^h)$ . Potom hĺbka rekurzie funkcie *TESTUJ* je

$$\log((rw)^h) = h \log r + h \log w = O(\log r + \log w)$$

A to je ten istý odhad ako v dôkaze vety 14.  $\square$

**TODO!!!**

Tu už nasleduje sľubovaný dôkaz vety 12. Budeme čerpať z dôkazu predošlej vety 14.

*Dôkaz.* Nech  $\alpha \in nL\text{Eregex}$  a  $r = |\alpha|$ . Zostrojíme Turingov stroj  $T$ , ktorý bude akceptovať  $L(\alpha)$  a na pracovných páskach zapíše najviac  $O(\log^2 n)$  políčok.

Pokiaľ  $\alpha$  neobsahuje negatívny lookaround, tvrdenie triviálne vyplýva z vety 11. Nech teda obsahuje aspoň jeden negatívny lookaround a nech  $k$  je najvyšší počet negatívnych lookaroundov vnorených do seba (nezáleží na tom, či sú to lookaheady alebo look-behinds).

$T$  bude skonštruovaný ako Turingov stroj vo vete 14, pričom musíme dodefinovať správanie v prípade negatívneho lookaroundu. V definícii 1 v bodoch XV. a XIV. je napísané, že ak splníme istú podmienku, negatívny lookaround možno preskočiť a pokračovať ďalej vo výpočte. Podmienka začína „neexistuje výpočet“, čo naznačuje, že musíme vyskúšať všetky

možnosti postupnosti konfigurácií – teda mať deterministický algoritmus, ktorý akceptuje práve vtedy, keď akceptačný výpočet existuje.

Vhodným algoritmom je procedúra *TESTUJ*. Za každým, keď  $T$  bude overovať podmienku  $C_1 \vdash^? C_2$  a jedná sa o prechod XV. alebo XIV. z definície 1, stane sa nasledovné.  $T$  spustí na novej páske novú procedúru *TESTUJ*( $C'_0, C'_a, c'$ ), kde  $C'_0$  je počiatková a  $C'_a$  akceptačná konfigurácia z definície daného kroku a  $c' \leq c$  je hodnota z lemy 2 pre regex vo vnútri tohto negatívneho lookaroundu. Túto procedúru treba spustiť niekoľkokrát po sebe – pre každé  $p$ , čo prichádza do úvahy. Pokiaľ niektorý z behov procedúry *TESTUJ* skončí úspešne, znamená to, že existuje akceptačný výpočet tam, kde nechceme, aby existoval – podmienka negatívneho lookaroundu neplatí a výsledok je  $C_1 \not\vdash C_2$ . Ak všetky behy skončia s výsledkom *false*, výsledok je  $C_1 \vdash C_2$ .

Vynechali sme detail „spustenie pre každé  $p$ , čo prichádza do úvahy“. Tu je treba zadať hranice pod-slova, na ktorom procedúra pracuje, a neprekročiť ich. Jednoducho zakomponujeme do procedúry kontrolu, či sú všetky adresy a ukazovateľ pre toto spustenie v povolenom intervale. Tieto hodnoty budú globálne a zapíšu sa pri prvom volaní na začiatok zásobníka. Pre hlavný beh procedúry to budú hodnoty 0 a  $n + 2$  (t.j. interval  $(0, n + 2)$ ).

Popísali sme správanie  $T$  pre prípady, keď operácie negatívneho lookaroundu nie sú vnorené. Zoberme si prípad, keď ich  $\alpha$  obsahuje niekoľko vnorených.  $T$  má na 1. páske rozpracovanú hlavnú vetvu *TESTUJ*, teraz pracuje na 2. páske na negatívnom lookarounde a narazí na ďalší. Uvedomme si, že pre  $T$  je to rovnaká situácia, ako keby pracoval stále na 1. páske. Zopakuje postup popísaný vyššie – niekoľkokrát spustí *TESTUJ* na 3. páske pre vhodné hranice slov a ak výsledkom každého behu bude *false*, vráti sa na 2. pásku. Nech regex  $\alpha$  má  $k$  vnorených negatívnych lookaroundov, potom  $T$  bude potrebovať  $k + 1$  pracovných pásek.

Pre spočítanie zapísaných políčok na páskach si najprv popíšeme konfigurácie. Regex poznáme dopredu. To znamená, že pre každú polohu ukazovateľa v regexe vieme pridať 1 znak do pracovnej abecedy, ktorý toto nastavenie predstavuje (t.j.  $r + 1$  špeciálnych symbolov). Zároveň pre výpočty na negatívnych lookaroundoch nám stačí ich vnútorný regex s ukazovateľom. Takýchto podslov je konečne veľa, preto aj pre tie vieme mať nové symboly v abecede.

Adresy, ktoré v konfiguráciách potrebujeme sú:

<sup>10</sup>Ak počítame sprava doľava, hodnoty zátvoriek prenášobíme  $(-1)$ , aby sme pri prvej zátvorke nemali súčet rovný  $-1$ .

pracovná pozícia v slove, začiatok a koniec podslova pre  $k$ -te zátvorky pre  $\forall k (z)$ , začiatok každého look-aheadu ( $l_a$ ) a lookbehindu ( $l_b$ ). Spolu  $1 + 2z + l_a + l_b \leq 2r + 1$  adries a to je konštanta. Konštantný počet adries vieme umiestniť nad seba do konštantného počtu stôp na páske (ako v dôkaze 10) a takto nimi zaberieme  $\log n$  políček (symbol pre stav regexu bude v samostatnej najvrchnejšej stope).

Jedna inštancia procedúry *TESTUJ* potrebuje 3 konfigurácie a konštantný počet políček. Hĺbka vnozenia rekurzie je na každej páske najviac  $\log c = O(\log r + \log w) = O(\log n)$ . Každé prvé volanie potrebuje navyše aktuálnu pozíciu hlavy na vstupe a hranice podslova, na ktorom pracuje. Dokopy bude na každej páske zapísaných najviac  $\log n \cdot O(\log n) + 3 \log n = O(\log^2 n)$  políček.  $\square$

[http://www.dcs.fmph.uniba.sk/zlozitost/data/zlozitost\\_duris.pdf](http://www.dcs.fmph.uniba.sk/zlozitost/data/zlozitost_duris.pdf).

## Pod'akovanie

Ďakujem školiteľovi za cenné rady a pripomienky.

## Literatúra

- [Carle and Nadendran, 2009] Carle, B. and Nadendran, P. (2009). On extended regular expressions. In *Language and Automata Theory and Applications*, volume 3, pages 279–289. Springer.
- [Câmpeanu et al., 2003] Câmpeanu, C., Salomaa, K., and Yu, S. (2003). A formal study of practical regular expressions. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 14(06):1007–1018.
- [Ehrenfeucht and Zeiger, 1975] Ehrenfeucht, A. and Zeiger, P. (1975). Complexity measures for regular expressions. *Computer Science Technical Reports*, 64.
- [Ellul et al., 2013] Ellul, K., Krawetz, B., Shallit, J., and Wei Wang, M. (2013). Regular expressions: New results and open problems. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*  $u(v)w, x-y$ .
- [Python documentation, 2012] Python documentation (2012). *Regular expression operations*. Python Software Foundation. <http://docs.python.org/2/library/re.html>.
- [Savitch, 1970] Savitch, W. J. (1970). Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(2):177–192.
- [Tóthová, 2013] Tóthová, T. (2013). Moderné regulárne výrazy. Bachelor's thesis, FMFI UK Bratislava. <https://github.com/Tatianka/bak>.
- [Ďuriš, 2003] Ďuriš, P. (2003). Výpočtová zložitost' (materiály k prednáške).