Profe: Diego Leonardo $+ \; - \; \% \; \int \; \frac{dx}{dy}$

Programación en Python

¿Qué es una ecuación?

* Una igualdad

Ej: Una Inversión

$k_1 \Rightarrow k_0 + 0.013\, k_0$

$k_2 \Rightarrow k_0\,(1+0.0013)$

$k_2 \Rightarrow \ldots$

$$\boxed{k(n) = k_0\,(1+0.0013)^n}$$

Un Modelo Matemático

* Un Modelo Matemático

¿Qué es una función?

* Una relación entre variables

Dependencia

Dependencia

$$\boxed{k(n) = k_0 (1+0.0013)^n}$$

k = Capital

N = tiempo

$f(x)$, $f(x,y)$

Razón de Cambio → Proporción entre Variables

$$\frac{\partial k(t)}{dt} = r\,k(t)$$

$$d\ k(t) = \ ?$$

$$\frac{dk}{\partial t} = r k(t)$$

Tarea / Consulta

Resolver las ecuaciones Diferenciales

① $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x-s}{y^2}$ $\quad y(x)?$

② $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x;\ y(x)$

③ $(2x^2+y) + (x^2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$

Analítica.
Numérica. → 3 Formas de Resolver estos ejercicios.
Cualitativa.

Análisis

① Ecuacion diferencial de Primer Orden

② Ecuación diferencial de Segundo Orden

③ Ecuación diferencial de Primer Orden

Notación: De LEIBNIZ → $\frac{dy}{dy}$

$\frac{dy}{dx}$ → Dependiente → Independiente.

Ecuación diferencial lineal

$\underline{y} = 2\underline{x} + 3$ → Ecuación lineal ya que no está elevada a ningún exponente. Por lo tanto es

exponente. Por lo tanto es
una ecuación de primer
grado.

① $\frac{dy}{dx} \rightarrow = \frac{x-5}{y^2}$

$$\int y^2 \, dy = \int (x-5)\, dx$$

$$\cancel{3}\left(\frac{y^3}{\cancel{3}}\right) = \left(\frac{x^2}{2} - 5x\right) 3 + C$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{6} - 15x + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 15x + C} \qquad C \neq 0$$

Trabajos en grupo

Calificación = Un estudiante del grupo escogido por el profesor hace la defensa de la tarea

② $1 \quad dy \quad - 2y \quad -x\cos x$

$$x \quad \frac{d}{dx} \quad \frac{}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x) \qquad P(x) = \frac{2}{x}$$

$$\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^{\cancel{2}}}y\right) = (x\cos x)\,x$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\cos x$$

$$u(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$u(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$uy = \int u\, q(x)\,dx$$

$$uy = \int u \;\; q(x)$$

$$\frac{1}{x^2}y = \int \frac{1}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2}\cos x$$

$$= \int \cos x$$

$$\frac{1}{x^2}y = \sin x$$

$$y = x^2\sin x$$

$$(2x^2+y)+(x^2y-x)\frac{dx}{dy}=0$$

Clasificadas en: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Ecuaciones Diferenciales Parciales.

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{Ecuación parcial Orden 2}} \qquad u(t,x)$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0}_{\text{Ecuación parcial}} \qquad u=(t,x)$$

$$\underbrace{\frac{dy^2}{dt}+\frac{d^2y}{\partial t^2}=0}_{\text{Ecuación Ordinaria}} \qquad y(t)$$

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+x^2y=\cos x \, ; \qquad y(x) \qquad \text{Orden } 1$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x dy}+\frac{\partial^2 u}{\partial y dx}=0}_{\text{Parcial}} \qquad u(x,y) \qquad \text{Orden } 2$$

Orden → El orden de la derivada mas alta

$\frac{dy}{dt}$; y'

Leibniz

Prima

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2(x)}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + x^2 y(x) = \cos x$$

$$\frac{1}{x} y' + x^2 y = \cos x$$

$$y' = \frac{x-5}{y^2}$$

$$y^2 \cdot y' = x-5$$

forma de una ecuación diferencial de grado n

$F(t, y, y', y^{n'} \ldots) = 0$ Ordinaria

$y' y^2 - x + 5 = 0$ NO ES LINEAL

$F(x, y, y')$

1. Resolver ecuaciones de Primer y Segundo Orden
2. Resolver ecuaciones de Segundo Orden
3. Orden n

④ Sistemas de ecuaciones lineales Parciales.

$$P_n(t)y^n + P_{n-1}(t)y^{n-1} \ldots P_1(t)y' + P_0(t)y + q_0(t) = 0$$

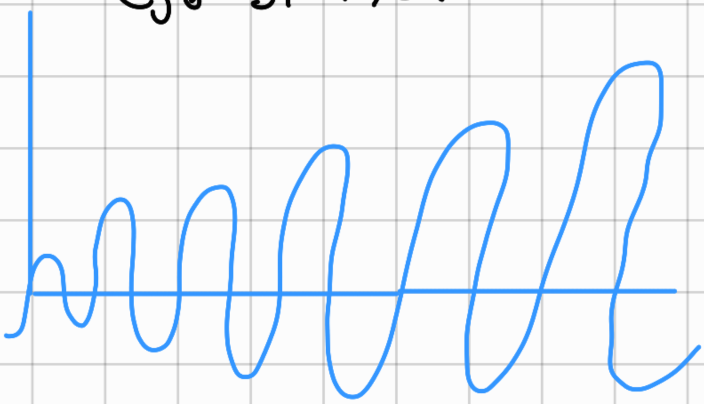
$$P_1(t)y' + P_0(t)y = q_0(t)$$

Analítica.
Numérica.
Cualitativa.

Solución Analítica $y(t) = x^2 \sin x + k$

Puede dar infinitas soluciones. Llego a este tipo de expresiones

Ej: Si $k=1$



Condiciones iniciales

Ej: $y(0)=1$ cuando fijo una condición inicial estoy hablando de una única solución.

Solución Numérica → Dar un valor aproximado

Solución Numérica → Dar un valor aproximado y buscar un metodo para reducir el margen de error.

Modelamiento Matemático → Formas de Plantear problemas.

Solución Cualitativa

TAREA CON GEOGEBRA

Campos Direccionales

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \qquad // \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$$

Realizar Campos direccionales a partir de la función $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

función Campo de Direcciones

Investigar cuando se da una condicion inicial para realizar un campo direccional

① $f(x,y) = \frac{-x}{y}$ ② $f(x,y) = \frac{-y}{x}$

③ $F(x,y) = x-5$ ④ $F(x,y) = x(x-y)$

Ecuaciones diferenciales de Variables Separables.

$f(x, y, y') = 0$ es una ecuación de variables separables si se puede escribir de la forma:

① $$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

② $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

③ $$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$$

Ej:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x^2}\cdot\underbrace{y^3}$$

$$y' = (3x^2+5)(2y^2-3y+8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y+1}$$

$$y' = \frac{e^y+3}{x^3+2x}$$

$$y' = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x + 4}{3}$$

Cuando y no está despejada

Ej: $\underbrace{xy^2\,dx} + \underbrace{3x^3y^2\,dy} = 0$

$\underbrace{\sin(x)\,e^y\,dx} + \underbrace{(x+z)\,dy} = 0$

$$y' = x^2 + x^2y^2 \rightarrow y' = x^2(1+y^2)$$

$$(2x^2+y) + (x^2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2y - x)\frac{dy}{dx} = -2x^2+y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cancel{x^2}+y}{\cancel{x^2}y - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2+y}{y-x}$$

① $\frac{dy}{dx} = f(F,y)$

Condición Inicial

$y(t_0) = y_0$ ↳ término fijo

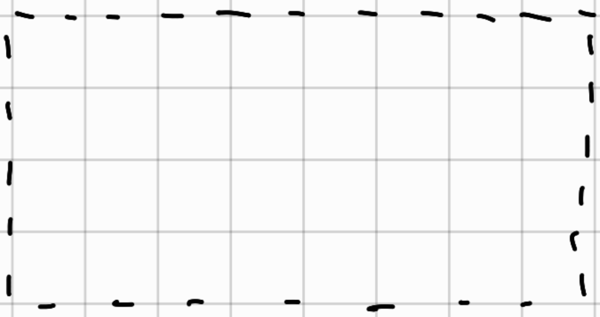
término fijo

Verificar si Tiene solución

Teorema de Unicidad.

Teorema: En un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^2$

$R = [a,b] , [c,d]$



$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , a \le x \le b , c \le y \le d\}$

tal que $(t_0, y_0) \subseteq R$

Si $f(t,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe y no n continuas

en (t_0, y_0)

① ¿El algoritmo tiene solución?

Si pasa por el punto y con la ecuacion dada

② Verificar si $f(t,y)$ es continua en (t_0, y_0)

o $\frac{\partial f}{\partial f}(t,y)$ es continua a (t_0, y_0)

↳ si cumple ambas tiene una única solución.

ej: $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ $y(1) = 2$ } tiene Solucion

$f(x,y) = \frac{-x}{y}$; $(1,2)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-1}{y}$; $(1,2)$

Variables Separables

$$f(t,y) = \frac{g(t)}{n(y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)} \rightarrow h(y)\frac{dy}{dt} = g(t)$$

$$\rightarrow h(y(t))\frac{dy}{dt} = g(t)$$

$$\int h(y(t))\, dy = \int g(t)$$

$$\int h(y(t)) \frac{dy}{dt} = \int g(t)$$

$$\int h(y(t)) \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} dt = \int g(t)\, dt$$

$$u = y(t)$$
$$du = \frac{dy}{dt}$$

$$\underline{H(y)} = \underline{G(t)} + C$$

$$H(y_0) - G(t_0) = C$$

$$f(x,y) = -\frac{x}{y} \; ; \qquad g(x) = -x$$
$$h(y) = y$$

$$= \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$y \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{} = -x \qquad \int y\, dy = -\int x\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$2 = \pm\sqrt{k-(1)^2} \qquad y^2 = -\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + C$$

$$2 = \pm\sqrt{k-1}$$

$y = k - 1$

$k = 5$

$y = \pm\sqrt{c - x^2}$

La única solución que pasa por $(1, 2)$ es:

$y = \sqrt{5 - x^2}$

$F(x, y)$ es continua en $(1,2)$? SI

$\frac{df}{dy} = \frac{-x}{y^2}$ es continua en $(1,2)$? SI

Tiene una única solución

Ejemplo 2

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$ No hay solución o hay más de una

$y = 0 = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$ $y(1) = 1$ / $(1,1)$

$\frac{-y}{x}$ es continua? SI $(1,1)$

$\frac{-1}{x}$ es continua en $(1,1)$? SI

$$f(x,y) \quad \frac{g(x)}{h(y)} \quad ; \quad g(x) = \frac{-1}{x} \qquad \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{y}} = \frac{-y}{x}$$

$$h(y) = \frac{-1}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x}$$

La inversa de un Ln es Euler (e)

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{x}$$

$$\ln(y) = -\ln x + c$$

$$y = e^{-\ln x} \cdot e^{c}$$

$$y = k e^{\ln x^{-1}}$$

$$y = k \frac{1}{x}$$

Resolver

Ecuaciones diferenciales lineales de Primer Orden

$$f(t,y) = q(t) - p(t)\,y$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = q(t)$$

$$\frac{df}{dt} f(t) \cdot g(t) = \frac{df}{dt}(t) \cdot g(t) + \underbrace{\frac{dg}{dt}}\, t \cdot f(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\, y$$

$$dy = p(t)$$

$$g(t) = \int_0^t p(s)\, ds$$

① $\frac{dy}{dx} = f(t, y)$

$$\frac{dy}{dt} + p(t) y = q(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) \cdot \underbrace{u(t)} \right)$$

$$\frac{dy}{dt} \cdot u(t) + u(t)\, p(t)\, y = u(t)\, q(t)$$

Para que pase se tiene que cumplir que

$$g(t) = u(t)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = u(t) \cdot p(t)$$

$$\frac{du}{dt} = u(t) \cdot p(t)$$ → Necesitamos que pase

— //   — //   — //   — //   — //

$$u(t)\frac{dy}{dt} + u(t)\,p(t)\,y = u(t)\,q(t)$$

$$\frac{d}{dt}\big(y(t)\cdot u(t)\big) = u(t)\,q(t)$$

$$\int \frac{d}{dt}\big(y(t)\cdot u(t)\big)\,dt = \int u(t)\,q(t)\,dt$$

① Input $= \frac{dy}{dt} = f(t,y)$

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

$$\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x$$

$$u = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$u = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$u = e^{\ln|x|}$$

$$x\frac{dy}{} + \cancel{x}\frac{y}{} = x * x$$

$$\frac{\quad}{\partial x} + \frac{\quad}{\cancel{x}} = \ldots \qquad U = X$$

$$x\frac{\partial y}{\partial x} + y = x^2$$

$$\cancel{\int}\cancel{\partial}(xy) = \int x^2\,\partial x$$

$$xy = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x}$$

$$y = \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{x}} + \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

$$y' + 3y = t + e^{-2t} \qquad U(t) = e^{3t}$$

$$y' + P(t)y = q(t)$$

$$P(t) = 3$$

$$y' = f(x,y)$$

$$y' = f(t,y)$$

$$y' \quad \ldots \quad e^{-2t}$$

$y = t\,te \quad -3y$

$y' + y = 5\sin(2t)$

Un metodo numerico que aproxime un punto de una EDO

Algoritmo.

$M(x,y) + N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\partial M \qquad \partial n$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\hat{M}(x,y) + \hat{N}(x,y)\frac{dx}{dy} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial y} \neq \frac{\partial \hat{N}}{\partial x}$$

$$u(x,y)\,\hat{M}(x,y) \qquad \hat{u}(x,y)\,\hat{N}(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\hat{M} + \frac{\partial M}{\partial y}u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{N} + \frac{\partial N}{\partial x}u$$

$$u(x)\,\hat{M}(x,y) + u(x)\,\hat{N}(x,y) = 0$$

$$u(x)\frac{\partial \hat{m}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{N}(x,y) + u(x)\frac{d\hat{N}}{\partial x}$$

$$ux\left(\frac{\partial \hat{M}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{N}}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{N}(x,y)$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \hat{M}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{N}}{\partial x}\right)}{\hat{N}(x,y)} = \frac{du}{dx} = \frac{1}{u(x)}$$

$$u(x) = e\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{n}$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esto pasa si

$$\underbrace{u(x)M(x,y)}_{\bar M(x,y)} + \underbrace{u(x)N(x,y)}_{\bar N(x,y)}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \bar M}{\partial y} = \frac{\partial \bar N}{\partial x}$$

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right)}{N(x,y)}}_{\text{depende de } x} = \frac{du(x)}{dy}\frac{1}{u(x)}$$

$$\boxed{u(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + y - 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} - y = e^{2x-1}$$

$$P(t) = -1$$

$$Q(t) = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = q(t) \qquad \boxed{M(x) = e^{\int p(s)\,ds}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\cdot y\right) = e^{x}\cdot e^{-x}$$

$$e^{-x}\cdot y = e^{x} + e^{-x}$$

$$y(x) = e^{2x} + 1 + ke^{x}$$

— // — // — // — // — //

$$\underbrace{1}_{M} + \underbrace{\left(\frac{x}{y} - \sin(y)\right)\frac{dy}{dx}}_{N} = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0$$

$$0 \neq \frac{1}{y}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

No exactas
por Factor Integrante.

$$\frac{0 - \frac{1}{y}}{\frac{x}{y} - \sin(y)} = \frac{-\frac{1}{y}}{\frac{x}{y} - \sin(y)}$$

-1

$$x - y\sin(y)$$

$$U(x) = e^{\int \frac{-1}{x - y\sin(y)}}$$

$$U(x) = x - y\sin(y)$$

Metodos Numericos $\rightarrow$ Siguiente Clase

① Consider the initial problem

$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^{t} \qquad y(0) = y_0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^{t}$$

$$P(t) = -\frac{3}{2}y \qquad q(t) = 3t + 2e^{t}$$

$$u(t) = e^{\int -\frac{3}{2}t}$$

$$= e^{-3/2\, t}$$

$$y = 3t + 2e^{t} + ke^{3/2\, t}$$

$$y_0 = 2 + k \qquad k = y_0 - 2$$

$$y(t) = 3t + 2e^{t} + (y_0 - 2)\, e^{\frac{3}{2}t}$$

$$y(t) = 3t + 2e \quad + (y_0 - 2)\, e$$

$+\infty \quad y_0 > 2$

$-\infty \quad y_0 < 2$

$$y' + a y = b e^{-\lambda t} \qquad t \to \infty \quad y(t) \to 0$$

$$\frac{dy}{dx} + a y = b e^{-\lambda t} \qquad a, \lambda = 0 \quad y \quad B \in \mathbb{R}$$

$$P(t) = a \qquad Q(t) = b e^{-\lambda t}$$

$$\mu(x) = e^{at}$$

$$(\mu(x) \cdot y)' = \mu(x) \cdot q(x)$$

$$(e^{at} \cdot y)' = b e^{(a-\lambda)t}$$

$$y(t) = \frac{b}{(a-x)} \; e^{(a-\lambda)t} + k$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at} \cdot y(t) = b$$

$$e^{at} \; y(t) = b(t) + k$$

$$y(t) = (bt + k)\, e^{-at}$$

$$y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y} \qquad y(0)=1$$

$\nearrow$ Variables Separables

$$\int (3y^2-6y)\cdot\frac{dy}{dx} = \int (1+3x^2)\,dx$$

$y(0)=1$

$$\cancel{3}\,\frac{y^3}{\cancel{3}} + \cancel{6}\,\frac{y^2}{\cancel{2}} = x + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}$$

$$y^3 - 3y^2 = x + x^3 + c$$

$$1^3 - 3(1)^2 = c$$

$$c = -2$$

$$y^3 - 3y^2 = x + x^3 - 2$$

$$y^3 - 6y = 0$$

$$y(3y-6) = 0$$

$$y = 0$$
$$y = +2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$$

→ Variables Separables

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta} \qquad r(1) = 2$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{\theta'}{\theta} \qquad r' = \frac{r^2}{\theta}$$

$$\frac{r'}{r^2} = \frac{\frac{\cancel{r^2}}{\theta}}{\cancel{r^2}} \to \frac{r'}{r^2} = \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{1}{r^2}\, dr = \frac{1}{\theta}$$

$$\int \frac{1}{r^2}\, dr = \int \frac{1}{\theta}\, d\theta$$

$$-\frac{1}{r} + c = \ln\theta + c$$

$$-\frac{1}{2} = \ln(1) + k$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\ldots \ln(\theta)}$$

$$-\frac{1}{\ldots} = \ln(\theta) - \ldots$$

$$-\frac{1}{r} = \ln(\theta) - \frac{1}{2} \qquad \frac{-1}{-1/2} = \ln(\theta)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \ln(\theta) \qquad r(\theta) = \frac{1}{0.5 - \ln(\theta)}$$

(22) $\quad y' = \dfrac{t\,y\,(4-y)}{(1+t)} \qquad y(0) = y_0 > 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t\,y\,(4-y)}{(1+t)}$$

$$\frac{y'}{(4-y)} = \frac{t\,y}{(1+t)} \qquad \begin{array}{l} u = 1+t \\ du = dt \end{array}$$

$$\frac{y'}{y(4-y^2)} = \frac{t}{(1+t)}\,dt \qquad 1 - \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{y} + \frac{1}{4(4-y)} = (1+t) + \ln(1+t) + k$$

$$\frac{1}{4}\ln(y) + \frac{1}{4}\ln(4-y) \qquad \frac{A}{y} + \frac{B}{4-y} = \frac{1}{y(4-y)}$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(y\,(4-y)\right) = (1+t) + \ln(1+t) + k \qquad A4 - Ay + By = 1 + 0y$$

$$A4 + (B-A)y = 1 + 0y$$

$$\frac{1}{\ } \ln(y(4-y)) = (1+t) + \ln(1+t) + k$$

4

$\ln(y(4-y)) = 4(1+t) + \ln(1+4)^4 + k$

$B - A = 0$

$A \cdot 4 = 1$

$A = \frac{1}{4}$; $B = \frac{1}{4}$

Ecuaciones diferenciales de segundo Orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(t, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Lineales $= P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = g(t)$

$\swarrow$ Analíticos

$\searrow$ Numéricos

No Lineales $\rightarrow$ Siguen en investigación.

$$* \; P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + r(t) = 0$$

① $P(t)$; $Q(t)$; $R(t)$ son constantes
$= a$ $\quad = b \quad = c$

$$a \frac{d^2y}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$$

$y(t_0) = y_0$

$y'(t_0) = y_0^*$

Ejemplo

$$\frac{dy^2}{dt} - y = 0 \qquad a = 1 ; b = 0 ; c = -1$$

$y = e^t \qquad y = e^{-t}$

$\frac{dy}{dt} = e^t \qquad \frac{dy}{dt} = -e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = e^{-t}$

$y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$

$y'' = C_2 e^t + C_2 e^{-t}$

$$ay'' + by' + c = 0$$

$$y = k e^{rt}$$ $\rightarrow$ Solución de esta forma

$$y' = r k e^{rt} \qquad k \neq 0$$

$$y'' = r^2 k e^{rt} \qquad r \neq 0$$

$$a(r^2 k e^{rt}) + b(r k e^{rt}) + c(k e^{rt}) = 0$$

$$k e^{rt}(ar + br + c) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$y = k$$

$$y' = 0 \qquad y_1(t) = k_1 e^{r_1 t}$$

$$y'' = 0 \qquad y_2(t) = k_2 e^{r_2 t}$$

Estudiar Numeros complejos.

$$4y'' - 8y' + 3y = 0$$

$$y(0) = 2 \qquad k_1 = -7$$

$$y'(0) = \frac{1}{2} \qquad k_2 = 9$$

$$y \quad 7 \; {}^{\cdot 3t} + 9 \; {}^{-2t}$$

$y = -te \quad + 4e$

$y_1(t) = k_1 e^{r_1 t}$

$y_2(t) = k_2 e^{r_2 t}$

$ke^{rt}(4r^2 - 8r + 3) = 0$

$(4r^2 - 4r) - (4r + 3) = 0$

$(4r^2 - 5r) - (r + 3) = 0$

$r(4r - 5) - 3$

Ej 16 de la página 112

$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = a$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y'(0) = 2$

$t \to \infty$

$y(t) = ke^{rt}$

$ke^{rt}(r^2 - r - 2) = 0$

$(r - 2)(r + 1) = 0$

$r_1 = 2.$ $\quad S$
$r_2 = -1.$

$$y_{6}(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-t}$$

$$k_1 + k_2 = \alpha$$
$$2k_1 - k_2 = 2$$
$$3k_1 = \alpha + 2$$
$$k_1 = \frac{\alpha + 2}{3}$$

Variación de Parámetros

$y'' + P(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \Rightarrow$ Homogéneas

$y'' + P(t)\, y' + q(t)\, y = g(t)$ No Homogeneas

$$y_H(t) = k_2 y_2(t) + k_2 y_2(t)$$

$q(t)$ $\quad y_p(t) = U(t)\, y_2(t) + V(t)\, y_2(t)$

$+P(t)$ $\quad y_p'(t) = P(t)\, U(t)\, y_2'(t) + P_t V(t)\, y_2'(t)$

$$y''_p(t) = U'(t)\, y_2(t) + U(t)$$

$g(t)$

Algebra lineal → Repaso

Espacio Vectorial $\mathbb{R}$ | Ejemplo ①

$\langle V, +$ $\cdot$ → Producto por Escalar

$\langle \mathbb{R}^n + \cdot \rangle$ → Suma de Vectores.

$k \in \mathbb{R}, \vec{x}$

$k\vec{x}$

Combinación lineal e Independencia Lineal

$\{ V_1, V_2, \dots V_x \} \subseteq V$

$\underbrace{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \dots \alpha_n V_n} \in V$

$\langle \mathbb{R}^2 +, \cdot \rangle$

$(5,3) = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$

$\mathbb{R}^2$

$\vec{V_2} = (1,-1) \wedge \vec{V_2} = (-1,2)$

Como determinar si son linealmente independientes?

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow V_2, V_1$ son linealmente independientes

$\rightarrow$ Wroskiano

$$\boxed{e^{-t} = k e^{-t}}$$

Transformación Lineal

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad T \quad V \longrightarrow W$

V_1, V_2

$$\alpha V_2 + \beta V_2 \xmapsto{T} T(\alpha V_2 + \beta V_2)$$

$$= \alpha T(V_2) + \beta T(V_2)$$

$$T \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow T(x,y,z) = (x+z, y+z)$$

$$(0,0,1) \longmapsto T(0,0,1) = (1,1)$$

$$\vec{x} + \vec{y} \longmapsto T(\vec{x} + \vec{y}) = (x_1 + y_1, x_3 + y_3,$$

$x_2 + y_2, \; y_3 + y_3)$

Considere el problema de valor Inicial

$$mu'' + yu' + ku = 0 \qquad u(0) = u_0 \;,\; u' = V_0$$

$$y^2 < 4km$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(ac)}}{2a}$$

$$\frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(mk)}}{2m} = i$$

$$y'' + w^2 y = \cos(2t) \;;\; w^2 \neq 4 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$y'' + w^2 y = \cos(2t) \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[y''] + w^2 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}(\cos(2t))$$

*Formula de la transformada

$\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0)$ — Una derivada

$\mathcal{L}[y] = L$

$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$ → Formula de la transformada de la segunda derivada

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$s^2 L - 1 + w^2 (L) = \frac{s}{s^2 + (2t)}$$

$$s^2 L + w^2 (L) = \frac{s}{s^2 + (2t)} + 1$$

$$L(s^2 + w^2) = \frac{s}{s^2 + (2t)} + 1$$

$$L(y) = \frac{s}{(s^2 + 2t)(s^2 + w^2)} + \frac{1}{s^2 + w^2}$$

$$L(y) \quad L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + 2t)(s^2 + w^2)}\right] + L^{-1}\frac{1}{\left[s^2 + w^2\right.}$$

$+ \sin(w^2)$

N = Personas para Votar

m = # Curules
p = # Partidos
V.E = # Votos Válidos

$$Q = \frac{V.B}{M} = \sum^{p}$$

$$\varphi(s)\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto \varphi(t)\,(\varphi_1(t), \varphi_2(t) \dots \varphi(t)) = \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt}\ F(\varphi, t)}$$

Sistema de n ecuaciones con n incógnitas

Ejemplo

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \to \mathbb{R}^2$$

$$\alpha(t)' = (x'(t), y'(t))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \alpha(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + y$$

¿ $x(t), y(t)$?

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \left(x(t) + y(t) \,;\, 4x(t) + y(t) \right)$$

$$F(\alpha(t), t)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} e^{rt}}_{= \begin{pmatrix} V_2 e^{rt} \\ V_2 e^{rt} \end{pmatrix}}$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r V_2 e^{rt} \\ r V_2 e^{rt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} r e^{rt}$$