

Introducción a los modelos de Optimización

Lectura para la materia de [Operativa](#) sobre el libro que lleva el mismo nombre del título de este documento y que se puede leer a través de este [Link](#).

Introducción

Un modelo es una representación de un problema real a la que se añaden consideraciones matemáticas para obtener resultados óptimos. Los modelos son utilizados dentro de las empresas al momento de tomar decisiones que puedan implicar la búsqueda de una solución a un problema o la optimización de ganancias para generar más valor dentro del corporativo.

Antes de generar pensar en generar un modelo de optimización se debe pensar en un esquema en el que analizar la situación del problema y plantear el modelo se vuelven factores fundamentales a la hora de optimizar cualquier variable. Una vez se ha ideado el modelo y se han planteado todas sus bases se puede pasar al proceso de experimentación mediante el análisis de resultados o su implementación misma. Es importante resaltar que ningún modelo logra captar la realidad de forma completa, pues lo que realmente sale a relucir dentro de estas fórmulas matemáticas es una aproximación que considera unas variables representativas de la misma.

Importancia de los modelos para la toma de decisiones

Los modelos que se plantean en la investigación de operaciones son muy importantes para una empresa debido a que pueden ayudar a maximizar una ganancia o resolver un problema dentro del panorama. Sin embargo, es importante mencionar que los resultados que se derivan del modelo pueden funcionar como también pueden fracasar gracias a variables que no tienen que ver con el modelo en sí.

Normalmente se solicita a los directivos de las empresas revisar encarecidamente las decisiones que se toman y que se van a aplicar dentro del modelo. Así mismo, si al aplicar el modelo no se obtienen los resultados con el enfoque deseado, es conveniente revisar el modelo en busca de fallas.

A la hora de implementar un modelo es importante tener en cuenta que:

1. Es una representación abstracta de la realidad de un problema.
2. Al elaborarse debe tenerse en cuenta suficientes argumentos que le permitan:
 - a. Obtener resultados satisfactorios de acuerdo con el problema planteado.
 - b. Los resultados obtenidos deben ser consistentes con la información del problema a resolver.
 - c. La optimización y su interpretación; se debe obtener en el menor tiempo posible

Uno de los problemas más grandes a la hora de crear un modelo es ver qué variable representa un valor más significativo para la empresa y cuál es la que más puede aportar a favor de los intereses colectivos.

Consideraciones de la investigación de operaciones

Una de las personas que más ha aportado a la investigación de operaciones por medio de sus observaciones es el Dr. Juan Prawda Witenberg, quien ha divulgado una serie de metodologías importantes:

La investigación de operaciones es un método científico. Situación completamente errónea, porque hace suponer muchos métodos científicos, cuando la realidad sólo existe uno. La toma de decisiones está incluida dentro de la investigación de operaciones. Situación también falsa, ya que la investigación de operaciones es una de las tantas herramientas para la toma de decisiones (Prawda, 1979, p. 19)

El Dr. Ackoff Sasiani argumenta que la segunda guerra mundial tuvo bastante relevancia e influencia en la evolución de la investigación de operaciones.

Dicho esto, podemos considerar que la investigación de operaciones es:

- La aplicación del método científico
- Por Equipos Interdisciplinarios
- A problemas que comprenden el control de sistemas organizados hombre – máquina, para dar soluciones que sirvan mejor a los propósitos de la organización como un todo (Ackoff, 1979, p. 17).

Modelación en la investigación de Operaciones

La investigación de operaciones cuenta con una serie de modelos que hacen que este campo sea el más óptimo dentro de la optimización de recursos para una empresa o una organización.

El Dr Juan Prawda contribuye a la importancia operacional con su consideración:

Estos modelos matemáticos de decisión permiten calcular los valores exactos o aproximados de los componentes controlables del sistema para que pueda comportarse mejor, de acuerdo a ciertos criterios establecidos. Estos cálculos se realizan bajo el supuesto que se conoce la información asociada al estado de aquellas componentes del sistema que no se pueden controlar. El acto de calcular el valor apropiado de estas componentes controlables, se conoce como derivar una solución al problema en cuestión utilizando un modelo (Prawda, 1979, p. 22).

La investigación de operaciones cuenta con dos tipos de modelos para realizar una optimización. Uno de ellos es el modelo determinístico y otro es el modelo estocástico; Un modelo determinístico es aquel en el que ya se cuenta con un modelo matemático previamente diseñado, por lo tanto tenemos una función y unas restricciones que se deben optimizar; mientras tanto, en los modelos estocásticos no se cuenta con un modelo previamente definido y hay que crearlo con la poca información con la que se pueda contar.

Antecedentes de la investigación de operaciones

La investigación de operaciones aplica el método científico para resolver problemas en empresas y organizaciones, optimizando recursos escasos. Sus inicios se remontan a 1759 con modelos de programación matemática. A lo largo del siglo XIX, se desarrollaron modelos operacionales clave, como los estocásticos de inventarios y tiempos. Durante la Segunda Guerra Mundial, la investigación de operaciones se consolidó, ayudando a los militares a optimizar recursos en logística y combate. Tras la guerra, su uso se extendió a diversas áreas organizacionales, volviéndose esencial para maximizar beneficios a menor costo.

Aplicación de los modelos de investigación de operaciones

Hoy en día los modelos de investigación de operaciones se pueden aplicar a cualquier inversión que implique una optimización de recursos. Es por ello que actualmente existen diversas organizaciones dedicadas a la fundamentación teórica y práctica de los modelos de la investigación de operaciones.

Existen varias asociaciones que agrupan a miembros que se dedican a la aplicación de la investigación de operaciones en todo el mundo. En los Estados Unidos, existen dos asociaciones la Operations Research Society of Management Science, con aproximadamente 12000 miembros y el Institute of Management Science, con aproximadamente 8000 miembros, además hay asociaciones Canadienses, Europeas, Latinoamericanas y Asiáticas.

Cuando se realiza el análisis de un proyecto de investigación se deben tener en cuenta las siguientes directrices:

1. Se deben realizar decisiones más eficientes
2. Se deben interrelacionar las diferentes áreas de las empresas
3. Se debe establecer un seguimiento eficiente de los procedimientos
4. Se deben realizar procedimientos óptimos

Fases de un estudio de investigación de operaciones

De acuerdo con Prawda, se pueden considerar las siguientes fases dentro de un estudio de investigación.

1. Estudio de la organización
2. Interpretación de la organización como un sistema
3. Formular el problema de la organización
4. Construcción del modelo
5. Derivación de soluciones del modelo
6. Prueba del modelo y sus soluciones
7. Diseño de controles asociados a las soluciones
8. Implementación de las soluciones al sistema

Detallando cada una de las fases:

Estudio de la organización

Al elaborar un trabajo de investigación de operaciones se debe tener en cuenta en primer lugar, cómo está funcionando la empresa u organización, y cómo está relacionada con el medio externo. Al tener ese conocimiento se puede tomar una apreciación sobre el tipo de empresa a analizar y los posibles problemas que la rodean. Esto permite que se definan variables que estén más directamente relacionadas con el problema como en los modelos a implementar y poder obtener óptimas soluciones.

Interpretación de la organización como un sistema

Esto quiere decir que se debe considerar la empresa como un sistema organizado donde el comportamiento de cualquier parte de esta puede ser afectado por otra. En la investigación de operaciones implica ampliar el problema al presentado originalmente, de tal manera que se incluyan interacciones que no se tienen en la formulación hecha por la administración.

Formular el problema de la organización

Realizando un estudio operacional se deben plantear varias alternativas de solución antes de formular el problema que se busca solucionar.

Ackoff hace unas consideraciones a tener en cuenta para plantear un problema de manera sencilla:

1. Debe existir por lo menos un individuo al que se le pueda atribuir el problema, el individuo ocupa un medio ambiente.
2. El individuo debe tener, por lo menos, dos posibles cursos de acción C1 y C2 que pueda seguir; es decir, debe poder hacer una selección de comportamiento.
3. Debe existir, cuando menos, dos resultados posibles de su selección, de los cuales él prefiere uno en vez del otro; es decir debe haber, cuando menos, un resultado que él quiera, un objetivo.
4. Los cursos de acción disponibles deben ofrecer cierta oportunidad de lograr su objetivo, pero no puede dar la oportunidad a ambos.
5. Las personas que toman las decisiones desconocen las soluciones y/o eficiencias y/o efectividades relacionadas con las soluciones del problema” (Ackoff, 1979, p. 35-36).

Para determinar si existe o no un problema, se deben tener en cuenta los siguientes puntos:

- Que la problemática, sea para varios y no en una forma individual.
- Que la posición donde se encuentra la problemática sufra cambios permanentemente.
- Poseer la disponibilidad de seleccionar varias estrategias, en una forma finita.
- Que el conjunto de la problemática pueda identificar varios objetivos. Aunque no sean prioritarios.
- Que la estrategia seleccionada pueda ser realizada por otro grupo.
- Que las decisiones tomadas repercutan tanto en el conjunto de la problemática como en los ajenos a esta, ejemplo: productores y no productores.

Clase de problemas

Se consideran dos tipos de problemas los determinísticos y los estocásticos, estos últimos identificados según niveles de incertidumbre y riesgo que se tengan.

Problema Determinístico

En el problema determinístico, cada alternativa planteada tiene una solución, cuando existe más de una alternativa existirá más de una solución. Cada una tiene una función

que medirá la eficiencia y/o efectividad de esta y estará asociada a los objetivos del sistema.

Problema Estocástico

Son aquellos que poseen cierto nivel de incertidumbre, con la presencia de variables inciertas, para su medición es necesario contar con una cierta probabilidad. La función de distribución de estas probabilidades es identificable y por consiguiente calculable.

Problema de Incertidumbre

En este tipo de problemas los niveles de incertidumbre son altos y se requiere de información estadística; para ello es necesario estimar las probabilidades a plantear en el modelo.

Construcción del Modelo

Al estudiar las técnicas de investigación organizacional se tienen en cuenta tres clases de modelos: Los icónicos, los analógicos y los simbólicos.

Modelos Icónicos

Los modelos icónicos se representan mediante una imagen y su medición puede hacerse en escala de acuerdo con el tipo de situación que se desee analizar. Por ejemplo imágenes, maquetas, mapas y representaciones de situaciones reales con ciertas dimensiones para su formación como barcos, automóviles, aviones, canales.

Modelos Analógicos

Se logran mediante esquemas cuyas propiedades son las de un modelo que se obtiene a partir del problema que se desea resolver; referenciando otro modelo cuyas propiedades son equivalentes. Por ejemplo, las propiedades de un modelo de red, de interconexión aérea entre varios países son equivalentes a la red de un sistema interconexión satelital.

Modelos Simbólicos

Se logran mediante esquemas cuyas propiedades son las de un modelo que se obtiene a partir del problema que se desea resolver; referenciando otro modelo cuyas propiedades

son equivalentes. Por ejemplo, las propiedades de un modelo de red, de interconexión aérea entre varios países son equivalentes a la red de un sistema interconexión satelital.

Derivación de soluciones del modelo

Encontrar una solución es hallar los valores a las variables que hacen que su solución sea óptima, sin embargo, como se ha expresado, esta solución no necesariamente determina una mejoría en la eficiencia o eficacia al sistema. El análisis matemático que se hace a un modelo de solución por investigación de operaciones se realiza en forma deductiva, es decir, parte de lo más general a lo particular. Así mismo, otra manera de llegar a soluciones posibles, es el método iterativo, donde se van obteniendo soluciones factibles hasta en encontrar la solución óptima, realizando un recorrido en el llamado polígono de soluciones hasta encontrar la óptima.

Prueba del modelo y soluciones

Todo modelo se debe comprobar independientemente de la persona que lo realice, debido a que se debe comprobar si los resultados obtenidos son predicciones verdaderas o tan si quiera están cerca a ser confiables. Se recomienda que la persona que desee comprobar una solución siga los siguientes pasos:

1. Se debe comprobar que el diseño elaborado, no presente fallas; de tal manera que al realizar las diferentes iteraciones se vuelva infactible.
2. Una vez se compruebe la veracidad del modelo, se revisan las expresiones matemáticas; si están acorde a los objetivos que se pretenden lograr con este.
3. Una vez revisado tanto el modelo como su representación matemática; se selecciona la técnica para obtener la solución; los resultados obtenidos se analizan e interpretan según el problema planteado.
4. El análisis de los resultados deben hacerse de tal manera que sean entendibles por los interesados en los resultados.
5. Una vez analizados se deben hacer los ajustes necesarios al modelo y luego se hace la implementación al problema real de la empresa.

Diseño de controles asociados a la solución

Al realizar el diseño del sistema al modelo en estudio se debe comprobar que no haya omitido ningún componente controlable importante y que no se haya rechazado ninguna interacción que sea relevante para la solución. Se debe corroborar la opinión de todo el

equipo responsable en la toma de decisiones y cuyas conclusiones se tengan en el análisis que fundamenta el diseño.

Implementación de la solución al sistema

Una vez se tenga la solución con el modelo en estudio, representación matemática y restricciones, función objetivo, hay que corroborar que la técnica que resuelve este sea aplicada correctamente al sistema en estudio.

Investigación de Operaciones

Determinística

Es aquella que cuenta con una base fundamental como un modelo matemático previamente definido para buscar una solución óptima.

Modelo Lineal

Consiste en una función lineal que está sujeta a restricciones lineales, y que está estructurada mediante un algoritmo matemático que brinda una amplia gama de soluciones factibles hasta que se obtiene una óptima.

En la investigación de operaciones determinística se tiene una serie de métodos lineales que contienen una estructura matemática bastante útil, para obtener una solución óptima según el tipo de problema que se tenga que resolver. Algunos de estos métodos que están agrupados en la rama de la programación lineal son: el método gráfico, simplex, la gran M, el análisis postóptimo, dual, dual simplex, transporte y asignaciones.

Definición del Modelo determinístico

Tenemos un conjunto de m ecuaciones lineales restringidas con n variables donde se quiere hallar los valores no negativos de las variables que satisfacen una restricción y maximizan o minimizan una función lineal a la que se le conoce como función objetivo que conforman las variables.

El método determinístico nos ayuda a entender posibles soluciones que son factibles para un problema planteado y formulado entre muchos, hasta obtener una solución

óptima. Estos modelos son una herramienta que sirve en el mundo empresarial y financiero debido a que dan alternativas de solución que son aplicadas con el fin de optimizar la utilización de los recursos disponibles en las empresas u organizaciones en general.

Planteamiento del problema

Los problemas que se plantean solucionar por medio de los modelos ya mencionados deben ser planteados de la siguiente manera:

- Identificar las variables de decisión necesarias para la solución del problema.
- Formular la función objetivo que va a optimizar maximizando o minimizando.
- Formular las restricciones con el fin de demarcar la disponibilidad de los recursos limitados.
- Cumplir una proporción en el ámbito de contribución de cada variable teniendo en cuenta la disponibilidad de los recursos.
- Cumplir una propiedad de divisibilidad. Es decir, debe ser posible asignarles valores fraccionarios a las variables. Esta es una consideración importante en los casos en los que se trabaja con sistemas de producción o asignación de artículos discretos.
- La función objetivo debe ser la suma de las contribuciones de las variables, lo cual significa que el total sea igual a la suma de las partes y que no haya un efecto de interacción entre los niveles de cada variable.
- Todas las variables que se vayan a utilizar dentro del problema a resolver deben ser de la condición fundamental y necesaria mayores e iguales a cero, debido a que no es posible obtener valores negativos de las variables como resultado.

Al identificar las variables de entrada; las definimos como variables exógenas, las cuales a su vez están divididas en variables controlables que son las que maneja los directivos (gerente), y variables no controlables que están bajo control de otras personas o del entorno.

Por su parte, las variables endógenas se pueden considerar como variables transformadas, y permiten establecer qué tanto se ha cumplido con los objetivos y metas; llamadas también variables de complemento, son variables que indican otras posibles alternativas que se pueden considerar en la solución del modelo. Las variables transformadas tienen gran relevancia porque conllevan aquellas consideraciones utilizadas que indican qué tanto se ha logrado respecto a lo planeado. Por esta razón, a las variables transformadas se les llama variables optimizadas.

En cuanto a la función a transformar; esta también se divide en dos; función objetivo y algoritmo matemático, aquí es donde mediante el modelo matemático encontrado, se

transforman las variables y salen transformadas según condiciones planteadas en el problema principal.

Pasos para formular el modelo

Al formular el modelo, se requiere de una estructura matemática, conformada por una serie de parámetros, los cuales se deben plantear de la siguiente manera:

1. Definir las variables de decisión (x_i); estas son las que se han identificado como la solución del problema, las cuales pueden variar desde un x_1, x_2, \dots, x_n . El número de variables a considerar depende del problema a resolver. Estas variables deben argumentarse cuando se esté elaborando el modelo, en su dimensión y unidad de medida.
2. Definir la función objetivo: (F, O). Es la función elaborada para lograr la optimización de las variables del problema, las cuales deben estar interrelacionadas para poder generar un “resultado total”, es decir, puede dejarse de fabricar un producto (variable) para fabricar o utilizar una mayor cantidad de otro producto (variables).
3. Definir las restricciones: (C, S, R) que significa “con las siguientes restricciones”; las cuales deben estar relacionadas con la disponibilidad y uso de los recursos, esto quiere decir que existen limitaciones en la disponibilidad de recursos para el cubrimiento de la demanda; los cuales deben ser de forma lineal.
4. Definir la condición de no negatividad, ello significa que los valores de las variables deben ser mayores o iguales a cero. e. Definir el modelo matemático. Una vez se han definido los anteriores pasos, se procede a elaborar el modelo matemático.

Formulación del Modelo

Cuando se elaboraron los pasos anteriores, se procede a formular el modelo de acuerdo con el algoritmo matemático que requiera el problema de esta forma:

1. **Variable de decisión:** existen dos tipos de variables de decisión; una sin referencia y otra con referencia; entendiéndose con referencia, por ejemplo una empresa que posee varios centros de distribución, la referencia sería los centros de distribución.
2. **Variable de decisión sin referencia;** como por ejemplo una empresa que produce varios productos.
3. **Variable decisión con referencia;** aquella que tiene un centro de origen y varios lugares a donde llegar.
4. **La función objetivo (F, O);** corresponde a la función que vamos a optimizar; esta función puede tomar dos formas para su optimización, una buscando maximización y

otra buscando minimización.

Las restricciones serán las limitaciones de los recursos disponibles con que se cuenta para la solución del problema.

Conceptualización y equivalencias

Solución factible: Es aquella solución que satisface las condiciones limitantes de los recursos.

Solución factible básica. Es la que se posee con no más de m componentes positivos.

Solución básica factible degenerada. Es el caso cuando hay menos de m componentes positivos de las variables X ; ello quiere decir que en el área de solución existe un valor cero.

Región de factibilidad. Es el conjunto de todas las posibles soluciones factibles.

Convexidad. Cuando existe una solución factible, hay una región convexa. Una región es convexa, si un plano es convexo; un subconjunto del plano es convexo; si para cada par de puntos A, B los puntos contienen todo el segmento rectilíneo que los conecta.

Importancia de la formulación

La formulación es quizás la actividad más importante en la solución de un problema de lineal, ya que al no contarse con un modelo bien definido en su formulación no hay solución factible ni óptima del problema. Es necesario realizar un análisis riguroso del problema a resolver para identificar las variables que se requieren optimizar, y no correr el riesgo de resolver un modelo infactible.

Características del Modelo Lineal

En la formulación de un modelo lineal, se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. La condición de linealidad; es decir no se deben considerar las siguientes expresiones; $X_1 X_2$; $a_2 X_1$; $X_1^2 a_1$; $\log X_2$.
2. No se aceptan expresiones en restricciones $x_j < 0$; es decir, tener valores de variables negativas.
3. No contar con limitaciones de recursos negativos ($-b_i$)
4. La función objetivo (F.O) que tenga la expresión $\text{Max } z = -X_1 - 2X_2$ se puede multiplicar por (-1) , dando como resultado $\text{Min } z = X_1 + 2X_2$
5. El modelo asume algunas propiedades de aditivas y multiplicativas:

1. Si el producto A necesita 1 hora de la actividad 1 y el producto B 1.5 horas de la actividad 1, ambas necesitan 2.5 unidades.
2. Si una unidad del producto 1 necesita 3 horas; 6 necesitan 18 horas
6. Cuando se hable de m restricciones no se incluye la condición de no negatividad.
7. La variable X_j puede ser no entera, por ejemplo 5.3 unidades
8. Un conjunto de variables X_j que cumpla las m restricciones es una posible solución al problema.
9. Si todas las variables sin $X_j \geq 0$ es una solución factible. 10. Si todas las variables de la solución factible optimizan la F.O es una solución factible óptima.