

**Memoire TER:**  
**Sur les Algèbres de Lie Semisimples**

**Cassandra SAIZ & Ezzahra ZLIGUI SAILLIER**  
**Encadrée par Stéphane BASEILHAC**

Université de Montpellier

29/05/2020

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et exemples . . . . .	3
1.1.1 Algèbre linéaire de Lie . . . . .	4
1.1.2 Algèbres de Lie de dérivation . . . . .	6
1.2 Idéaux et homomorphismes . . . . .	7
1.2.1 Idéaux . . . . .	7
1.2.2 Homomorphismes et représentations . . . . .	9
1.3 Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes . . . . .	11
1.3.1 Algèbres résolubles . . . . .	11
1.3.2 Nilpotence . . . . .	12
<b>2 Le théorème d'Engel</b>	<b>13</b>
2.1 Les Outils . . . . .	13
2.2 Démonstration et conséquences . . . . .	14
<b>3 Le théorème de Lie</b>	<b>16</b>
<b>4 Critère de Cartan</b>	<b>19</b>
4.1 Les outils . . . . .	19
4.1.1 La décomposition de Jordan-Chevalley . . . . .	19
4.1.2 Critère de nilpotence d'un endomorphisme . . . . .	21
4.2 Critère de Cartan et conséquences . . . . .	22
<b>5 Forme de Killing et algèbres de Lie Semisimple</b>	<b>23</b>

# Introduction

Dans se rapport nous nous interreserons aux algèbres de Lie, plus particulièrement des algèbres de Lie semisimples.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans tout le rapport  $\mathbb{K}$  sera un corps commutatif et  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### 1.1 Définitions et exemples

#### Définition 1

Une  $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $L$  muni d'une opération :

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L, \quad (x, y) \rightarrow [x, y]$$

appelée crochet de Lie et vérifiant :

(L1)  $[\cdot, \cdot]$  est bilinéaire.

(L2)  $[x, x] = 0$  pour tout  $x \in L$ .

(L3) Identité de Jacobi :  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in L$ .

#### Remarque :

(L1) et (L2) appliqué à  $[x + y, x + y]$  implique l'anticommutativité, i.e.  $[x, y] = -[y, x]$ . De plus, si  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$  on a équivalence entre (L2) et  $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in L$ .

#### Exemples :

1. Tout espace vectoriel muni du crochet nul, i.e.  $[x, y] = 0, \forall x, y \in L$ , est une algèbre de Lie. Elle est appelée algèbre **abélienne** ou **commutative**.
2. Si  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors  $(\text{End}(V), +, \circ)$  muni du crochet :

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x, \forall (x, y) \in V \times V$$

est une algèbre de Lie, on la note  $\mathfrak{gl}(V)$ .

3. Si  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  muni du même crochet que ci-dessus est une algèbre de Lie que l'on note  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

#### Définition 2

Soit  $L$  une algèbre de Lie. On dit que  $K$  est une sous-algèbre de Lie de  $L$ , si  $K$  est un sous-espace vectoriel de  $L$  et si pour tous  $x, y \in K, [x, y] \in K$ .

### 1.1.1 Algèbre linéaire de Lie

Considérons  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Nous allons approfondir l'exemple  $\mathfrak{gl}(V)$ , en étudiant certaines de ses sous-algèbres de Lie. Nous pouvons identifier  $\mathfrak{gl}(V)$  avec l'ensemble des matrices  $n \times n$  sur  $\mathbb{K}$  que nous notons  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ . Cette procédure est pratique, surtout pour les calculs explicites. Comme pour le calcul de la dimension de  $\mathfrak{gl}(V)$  :

$$\dim \mathfrak{gl}(V) = \dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$$

Nous pouvons aussi définir une base de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : \{e_{ij}\}$ , où  $e_{ij}$  est la matrice dont le seul coefficient non nul est sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

Nous avons donc  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \text{vect}\{e_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ . Regardons l'effet du crochet de Lie sur deux éléments de la base :

$$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}, \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Toute sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  est appelée **algèbre linéaire de Lie**. Nous allons voir 4 exemples importants  $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ .

$A_\ell$  : Dans un premier temps regardons l'**algèbre linéaire spéciale**. Dans ce cas  $\dim V = \ell + 1$ . L'algèbre linéaire spéciale, notée  $\mathfrak{sl}(V)$  ou  $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{K})$ , est l'ensemble des endomorphismes de  $V$  dont la trace est nulle.

Rappelons que la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux et qu'elle est indépendante du choix de la base. Comme nous pouvons identifier les matrices aux endomorphismes, la trace a du sens pour les endomorphismes de  $V$ .

Montrons que  $\mathfrak{sl}(V)$  est bien une sous-algèbre de Lie. Comme  $\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx)$  et  $\text{tr}(x + y) = \text{tr}(x) + \text{tr}(y)$ , pour tous  $x, y \in \text{End}(V)$  alors  $\text{tr}([x, y]) = \text{tr}(xy - yx) = \text{tr}(xy) - \text{tr}(yx) = 0$ , donc  $[x, y] \in \mathfrak{sl}(V)$ . D'où  $\mathfrak{sl}(V)$  est bien une sous-algèbre de Lie. Calculons la dimension de  $\mathfrak{sl}(V)$ , pour cela donnons une base de  $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{K})$  :

$$\begin{cases} e_{ij} & 1 \leq i \neq j \leq \ell \\ e_{ii} - e_{i+1, i+1} & 1 \leq i \leq \ell \end{cases}$$

Nous pouvons alors déduire  $\dim \mathfrak{sl}(V) = (\ell + 1)^2 - (\ell + 1) + \ell = \ell^2 + 2\ell$ .

Regardons le cas où  $\ell = 1$ , c'est à dire  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . Dans ce cas nous avons la base suivante :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avant de commencer l'exemple  $C_\ell$ , rappelons les définitions suivantes :

#### Définition 3

Une **forme bilinéaire**  $B$  d'un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{K}$  est une application bilinéaire de  $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que  $B$  est :

- **Symétrique** si  $B(x, y) = B(y, x)$ ,  $\forall x, y \in V$ .
- **Antisymétrique** si  $B(x, y) = -B(y, x)$ ,  $\forall x, y \in V$ .
- **Non-dégénérée** si  $\{v \in V \mid B(v, w) = 0, \forall w \in V\} = \{0\}$ .

**Remarque :**

Dans les espaces vectoriels de dimension paire, si  $B$  est une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée, alors il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $B$  est :  $[B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & I_{\ell} \\ -I_{\ell} & 0 \end{pmatrix}$ .

$C_{\ell}$  : Parlons maintenant de l'**algèbre symplétique**, dans ce cas  $\dim V = 2\ell$ . L'algèbre symplétique est définie comme l'ensemble des endomorphismes  $x \in \mathfrak{gl}(V)$  qui satisfont  $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$  pour  $f$  une forme bilinéaire *antisymétrique* non-dégénérée. On la note  $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K})$ .

Montrons que  $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K})$  est bien une sous-algèbre de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Soit  $x, y \in \mathfrak{sp}(V)$  :

$$\begin{aligned} f([x, v]w, w) &= f(xy(v), w) - f(yx(v), w) \\ &= f(v, yx(w)) - f(v, xy(w)) \\ &= -(f(v, xy - yx(w))) \\ &= -f(v, [x, y]x) \end{aligned}$$

En terme matriciel :

$$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K}) = \left\{ x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{K}) \mid sx = -x^t s, \quad s = \begin{pmatrix} 0 & I_{\ell} \\ -I_{\ell} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cherchons maintenant une base de  $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K})$ , pour cela nous allons décrire de façon plus précise les matrices symplétiques.

Soit  $x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$  avec  $m, n, p, q \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{K})$ . Après calcul nous trouvons le système suivant :

$$\begin{cases} n^t = n \\ p^t = p \\ m^t = -q \end{cases}$$

Il est alors facile de déduire des bases pour les espaces de  $n, p$  et  $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$  qui sont respectivement :

$$\left\{ \begin{matrix} e_{i,i+\ell} & 1 \leq i \leq \ell \\ e_{i,j+\ell} + e_{j,i+\ell} & 1 \leq i < j \leq \ell \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} e_{i+\ell,i} & 1 \leq i \leq \ell \\ e_{i+\ell,j} + e_{j+\ell,i} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ e_{i,j} - e_{j+\ell,i+\ell} & 1 \leq i, j \leq \ell \end{matrix} \right\} \text{ et}$$

$$\text{Donc } \dim \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{K}) = 2\ell(\ell + 1)/2 + \ell^2 = 2\ell^2 + \ell.$$

$B_{\ell}$  : On nomme **algèbre orthogonale** impair, notée  $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$ , l'ensemble des  $x \in \mathfrak{gl}(V)$  tels que  $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$  pour  $f$  une forme bilinéaire *symétrique* non-dégénérée, dans ce cas  $\dim V = 2\ell + 1$  et  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ .

On reprend la même idée que pour  $C_{\ell}$  :

$$\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K}) = \left\{ x \in \mathfrak{gl}(2\ell + 1, \mathbb{K}) \mid sx = -x^T s, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\ell} \\ 0 & I_{\ell} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit  $x \in \mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$ , il sera alors de la forme :  $x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}$ , avec  $a \in \mathbb{K}$ ,

$b_i^t, c_i \in \mathbb{K}^{\ell}$  et  $m, n, p, q \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{K})$ .

En appliquant la condition à  $x$ , on déduit le système suivant :

$$\begin{cases} a = -a \\ c_1 = -b_2^t \\ c_2 = -b_1^t \\ q = -m^t \\ p = -p^t \\ n = -n^t \end{cases}$$

On peut donc déduire qu'une base de  $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K})$  est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_{i,j} - e_{i+\ell,j+\ell} & 2 \leq i, j \leq \ell + 1 \\ e_{1,i+\ell} - e_{i,1} & 2 \leq i \leq \ell + 1 \\ e_{1,i} - e_{i+\ell,1} & 2 \leq i \leq \ell + 1 \\ e_{i,j+\ell} - e_{j,i+\ell} & 2 \leq i < j \leq \ell + 1 \\ e_{i+\ell,j} - e_{j+\ell,i} & 2 \leq i < j \leq \ell + 1 \end{array} \right\}$$

Alors  $\dim \mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{K}) = 2\ell^2 + \ell$ .

$D_l$  : On nomme l'**algèbre orthogonale** pair, notée  $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K})$ , l'ensemble  $\left\{ x \in \mathfrak{gl}(2\ell + 1, \mathbb{K}) \mid sx = -x^T \right\}$  dans ce cas  $\dim V = 2\ell$  et  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ .

Les calculs de base et de dimension se font de manière similaire à  $B_\ell$ . Nous donnerons donc la dimension de  $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K})$  sans plus de précision,  $\dim \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K}) = 2\ell^2 - \ell$ .

Nous pouvons aussi citer comme sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  :

- Les matrices triangulaires supérieures  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) : (a_{ij}) = 0 \quad \text{si } i > j$ .
- Les matrices strictement triangulaires  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) : (a_{ij}) = 0 \quad \text{si } i \geq j$ .
- Les matrices diagonales  $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) : (a_{ij}) = 0 \quad \text{si } i \neq j$ .

et on a  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ .

### 1.1.2 Algèbres de Lie de dérivation

#### Définition 4

Une  $\mathbb{K}$ -algèbre est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, muni d'une opération bilinéaire  $A \times A \rightarrow A$

#### Remarque :

Une  $\mathbb{K}$ -algèbre n'est pas nécessairement associative.

#### Exemples :

1.  $A = \text{End}(V) \quad x.y = x \circ y$ .
2.  $A = L$  une algèbre de Lie avec  $x.y = [x, y]$ . C'est l'exemple principal d'algèbre non-associative.
3.  $A = \mathfrak{gl}(V)$ , dans ce cas  $A$  peut être une  $\mathbb{K}$ -Algèbre avec deux manières différentes : avec  $x.y = [x, y]$  ou  $x.y = x \circ y$ .

**Définition 5**

Une **dérivation**  $\delta$  d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$  est une application linéaire qui satisfait la formule de Leibniz :

$$\delta(a.b) = a.\delta(b) + \delta(a).b.$$

**Notation :**

On note  $Der(A) = \{\text{toutes les dérivations de } A\}$

**Proposition 1.1**

$Der(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $End(A)$ . De plus si  $A$  est une algèbre de Lie, alors  $Der(A)$  est une sous-algèbre de Lie.

**Preuve :**

a faire  $\square$

**Exemple :**

Soit  $L$  une algèbre de Lie. On appelle **adjoint** de  $x \in L$  l'application :

$$\begin{aligned} ad \ x : L &\longrightarrow L \\ y &\longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

Montrons que l'adjoint est une dérivation. Soient  $x, y, z \in L$  par l'identité de Jacobi on obtient :

$$[x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] = [y, [x, z]] + [[x, y], z].$$

Pour simplifier l'écriture posons  $a.b = [a, b]$ , on a donc :

$$ad \ x(y.z) = y.ad \ x(z) + ad \ x(y).z.$$

Ainsi  $ad \ x$  est bien une dérivation.

Cette section nous est nécessaire pour introduire la notion d'adjoint, notion qui nous sera utile dans la suite de ce rapport. C'est aussi le seul exemple de dérivation que nous verrons ici.

## 1.2 Idéaux et homomorphismes

### 1.2.1 Ideaux

**Définition 6**

Soit  $L$  une algèbre de Lie. Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux sous-algèbres de  $L$ . Le crochet  $[K_1, K_2]$  est le sous-espace engendré par tous les commutateurs  $[k_1, k_2]$ , avec  $k_1 \in K_1$  et  $k_2 \in K_2$ .

**Définition 7**

Soit  $L$  une algèbre de Lie. On appelle l'**algèbre dérivée** de  $L$  le sous espace  $[L, L]$ .

**Définition 8**

Un sous-ensemble  $I$  de  $L$  est un **idéal** de  $L$  si  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $L$  et si pour tous  $x \in I$ ,  $y \in L$ , on a  $[x, y] \in I$ .



**Exemples :**

1.  $\{0\}$ ,  $L$  et  $[L, L]$  sont des idéaux de  $L$ .
2.  $Z(L) = \{z \in L \mid [x, z] = 0 \quad \forall x \in L\}$  est appelé le **centre** de  $L$ . C'est un idéal de  $L$ .
3. Si  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $L$ , alors  $I + J := \{i + j, \quad i \in I, \quad j \in J\}$  et  $[I, J]$  sont des idéaux de  $L$ .

En effet :

- $[x, i + j] = [x, i] + [x, j] \in I + J$
  - $[x, [i, j]] = -[i, [j, x]] - [j, [x, i]] = -[i, j'] - [j, i'] \in [I, J]$  ( Jacobi)
- (On a noté par  $[i, j]$  les éléments de  $[I, J]$  pour simplifier le calcul.)

**Définition 9**

Toute algèbre de Lie  $L$  non abélienne est dite **simple** si ses seuls idéaux sont  $\{0\}$  et  $L$ .

**Exemple :**

Soit  $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  avec  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ . On prend la base canonique de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  :

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par un simple calcul on trouve que :  $[x, y] = h$ ,  $[h, x] = 2x$ ,  $[h, y] = -2y$ .

Soit  $I \neq \{0\}$  un idéal de  $L$  et  $ax + by + ch$  un élément non nul de  $I$ . En appliquant  $\text{ad } x$  deux fois, on obtient  $-2bx \in I$ , de même en applique  $\text{ad } y$  deux fois, on obtient  $-2ay \in I$ . Donc si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , alors  $x \in I$  ou  $y \in I$ . Ainsi  $I = L$ .

Sinon, si  $a = b = 0$  alors  $ch \in I$ , donc  $h \in I$ . On conclut  $I = L$ , donc  $L$  est simple.

Dans la section  $\star$  nous verrons des algèbres de Lie qui ne sont pas simples, notamment  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$  et  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ .

La construction de l'algèbre  $L/I$  est formellement le même que le quotient d'anneaux :

**Définition 10**

Soient  $L$  une algèbre de Lie et  $I$  un idéal propre et non nul de  $L$ . L'**algèbre quotient**  $L/I$  est l'espace quotient muni de la multiplication de Lie définie par :

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I, \quad \forall (x, y) \in L \times L$$

**Remarque :**

Dans le cas où  $L$  n'est pas une algèbre de Lie simple et  $\dim > 1$ , il est possible de factoriser par un idéal propre non nul. On obtient ainsi une algèbre de Lie de dimension plus petite.

Pour un usage ultérieur, nous allons introduire quelques notions connexes, analogues à celles de la théorie des groupes.

**Définition 11**

- Le **normalisateur** d'un sous-espace  $K$  de  $L$  est l'ensemble :

$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}$$

Si  $K = N_L(K)$  on dit que  $K$  est un **auto-normalisateur**.

- Le **centralisateur** d'un sous-ensemble  $S$  de  $L$  est :

$$C_L(S) = \{x \in L \mid [x, S] = 0\}.$$

**Remarque :**

Par l'identité de Jacobi,  $N_L(K)$  et  $C_L(S)$  sont des sous-algèbres de  $L$ .

Dans le cas où  $K$  est une sous-algèbre,  $N_L(K)$  est la plus grande sous-algèbre de  $L$  tel que  $K$  soit un idéal.

**Exemple :**

sur les normalisateur et centralisateur

## 1.2.2 Homomorphismes et représentations

**Définition 12**

Soient  $L_1, L_2$  deux algèbres de Lie et  $\phi : L_1 \rightarrow L_2$  une application linéaire, on dit que  $\phi$  est un **morphisme d'algèbres de Lie** (ou **homomorphisme**) si :

$$\forall (x, y) \in L_1 \times L_1, \quad \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)].$$

De plus  $\phi$  est :

- un **monomorphisme** si  $\text{Ker } \phi = \{0\}$ .
- un **épimorphisme** si  $\text{Im } \phi = L_2$ .
- un **isomorphisme** si  $\phi$  est un épimorphisme et un monomorphisme.

$L_1$  et  $L_2$  sont dites **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $\phi : L_1 \rightarrow L_2$ .

**Exemples :**

1. Le morphisme nul :

$$\begin{aligned} \theta : L &\longmapsto \mathbb{K} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Montrons que  $\theta$  est un morphisme d'algèbre de Lie.

$\theta([x, y]) = 0 = [0, 0] = [\theta(x), \theta(y)]$ , donc  $\theta$  est bien un morphisme.

2. La trace d'un endomorphisme est définie par :

$$\text{tr} : \mathfrak{gl}(n, F) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Montrons que  $\text{tr}$  est un morphisme d'algèbre de Lie.

Soient  $x, y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ . On a  $\text{tr}([x, y]) = \text{tr}(xy - yx) = \text{tr}(xy) - \text{tr}(yx) = 0$  et  $[\text{tr}(x), \text{tr}(y)] = \text{tr}(x)\text{tr}(y) - \text{tr}(y)\text{tr}(x) = 0$ .

Donc la trace est bien un morphisme d'algèbre de Lie avec  $\text{ker } \text{tr} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ .

3. Le **morphisme canonique** est défini par :

$$\begin{aligned} \pi : L &\longmapsto L/I \\ x &\longmapsto x + I \end{aligned}$$

Montrons que  $\pi$  est un épimorphisme d'algèbre de Lie.

On a  $\pi([x, y]) = [x, y] + I$  et  $[\pi(x), \pi(y)] = [x + I, y + I] = [x, y] + I$ . Donc  $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ . De plus, on a par définition de  $\pi : \text{Im } \pi = L/I$  et  $\text{Ker } \pi = I$ .

Donc  $\pi$  est bien un épimorphisme.

**Remarque :**

Soit  $L_1$  et  $L_2$  des algèbre de Lie, si  $\phi$  est un morphisme de  $L_1$  dans  $L_2$ , alors :

- $\text{Ker } \phi$  est un idéal de  $L_1$ .
- $\text{Im } \phi$  est une sous-algèbre de  $L_2$ .

Nous allons maintenant énoncé le théorème standard d'isomorphisme.

**Théorème 1.1**

Soit  $\phi : L_1 \rightarrow L_2$  un homomorphisme d'algèbre de Lie. Et soient  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $L_1$ . Alors :

- (a)  $L/\text{Ker } \phi \cong \text{Im } \phi$ .
- (b) Si  $I \subset \text{Ker } \phi$ , alors il existe un unique homomorphisme  $\psi : L_1/I \rightarrow L_2$  tel que  $\psi \circ \pi = \phi$ .
- (c) Si  $I \subset J$  alors  $J/I$  est un idéal de  $L/I$  et  $(L_1/I)/(J/I) \cong L_1/J$ .
- (d)  $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$ .

**Définition 13**

Une **représentation** d'algèbre de Lie  $L$  est un homomorphisme  $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , où  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Si  $\phi$  est injectif, on dit que c'est une représentation **fidèle**.

Bien que nous ayons besoin que  $L$  soit de dimension finie, il est utile de permettre à  $V$  d'être de dimension quelconque,  $\mathfrak{gl}(V)$  à du sens en toute dimension.

**Exemples :**

1. La **représentation triviale** de  $L$  dans  $V$  est l'application  $\phi$  définie par  $\forall x \in L, \phi(x) = 0$ .
2. La **représentation adjointe** est l'application :

$$\begin{aligned} \text{ad} : L &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\longmapsto \text{ad } x : y \longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

Il est clair qu'elle est linéaire, montrons qu'elle préserve le crochet :

$$\begin{aligned} [\text{ad } x, \text{ad } y](z) &= \text{ad } x \text{ad } y(z) - \text{ad } y \text{ad } x(z) \\ &= \text{ad } x([y, z]) - \text{ad } y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \\ &= [[x, y], z] \\ &= \text{ad } [x, y](z) \end{aligned}$$

Soit  $x \in L$  tel que  $\text{ad } x = 0$ , donc  $\text{Ker } \text{ad} = Z(L)$ .

Cette constatation nous permet de déduire :

Si  $L$  est simple alors  $\text{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$  est un monomorphisme, ainsi toute algèbre de Lie simple est isomorphe à une algèbre de Lie linéaire.

## 1.3 Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes

### 1.3.1 Algèbres résolubles

Il est naturel pour étudier les algèbres de Lie d'étudier ses idéaux. En premier on définit une suite d'idéaux de  $L$ , que l'on appelle série dérivée, par :

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] \dots L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}].$$

#### Définition 14

Une algèbre de Lie  $L$  est dite **résoluble** si :  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $L^{(n)} = 0$ .

#### Remarque :

- $L$  abélien  $\Rightarrow L$  solvable car  $[L, L] = 0$ .
- $L$  simple  $\Rightarrow L$  n'est pas solvable, car  $L = [L, L]$ . détaillé car important dans la suite

#### Exemples :

Regardons l'algèbre des matrices triangulaires supérieures  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ . Une base de  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$  est  $e_{ij} \quad 1 \leq i \leq j \leq n$ .

Pour montrer que  $L = \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$  est solvable on commute explicitement ses séries dérivées en utilisant la formule  $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$ . A FAIRE

#### Proposition 1.2

Soit  $L$  une algèbre de Lie :

- Si  $L$  une algèbre résoluble, alors toutes ses sous-algèbres et les images de ses homomorphismes sont résoluble.
- Si  $I$  est un idéal résoluble de  $L$  tel que  $L/I$  est résoluble alors  $L$  aussi est résoluble.
- Si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux résolubles de  $L$ , alors  $I + J$  est résoluble.

#### Preuve :

- Par définition, si  $K$  est une sous algèbre de  $L$ , alors  $K^{(i)} \subset L^{(i)}$ , de même si  $\phi : L \rightarrow M$  est épimorphisme une récurrence sur  $i$  montre que  $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$ .
- Posons  $(L/I)^{(n)} = 0$ , on applique le résultat (a) sur le morphisme canonique :  $\pi : L \rightarrow L/I$ , on a  $\pi(L^{(n)}) = 0$ , ou  $L^{(n)} \subset I = \ker \pi$ . Maintenant si  $I^{(m)} = 0$  le fait évident que  $(L^{(i)})^{(j)} = L^{(i+j)}$  implique que  $L^{(n+m)} = 0$ .
- Le (d) du théorème (1.1) donne un isomorphisme entre  $(I+J)/J$  et  $I/(I \cap J)$ . Comme image d'homomorphisme de  $I$ ,  $(I+J)/J$  est résoluble donc d'après (b)  $(I+J)$  est résoluble.

#### Définition 15

On dit que  $I$  est un idéal **résoluble maximal** si il n'est inclut dans aucun idéal résoluble. Cet idéal est unique et appelée **radical** de  $L$ , noté  $\text{Rad}(L)$ .

#### Définition 16

Si  $\text{Rad}L = 0$  on dit que  $L$  est **semisimple**.

#### Exemples :

- Une algèbre de Lie simple est semisimple. En effet :  $L$  est simple donc il n'a que deux idéaux 0 et  $L$ . Or  $L$  n'est pas résoluble donc  $\text{Rad}L = 0$ .

2.  $L = \{0\}$  est semisimple.

Notons que pour une algèbre de Lie arbitraire  $L$  on a  $L/(RadL)$  est semisimple ( d'après la proposition (1.2) (b))

### 1.3.2 Nilpotence

On définit la suite **centrale descendante** de  $L$  par récurrence :

$$L^1 = L, \quad L^2 = [L, L] = [L, L^1], \quad L^3 = [L, L^2], \dots, L^i = [L, L^{i-1}].$$

Ainsi,  $L$  est abélienne si et seulement si  $L^2 = 0$ .

#### Définition 17

*L'algèbre de Lie  $L$  est dite **nilpotente** si  $L^n = 0$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

#### Exemple :

Toute algèbre abélienne est nilpotente.

On clairement  $L^{(i)} \subset L^i \forall i$ , donc les algèbres nilpotentes sont solvables. Le contraire est faux ( exemple a mettre après).

#### Proposition 1.3

*Soit  $L$  une algèbre de Lie. Alors :*

- (a) *Si  $L$  est nilpotente, alors ses sous-algèbres et les images de ses homomorphismes sont aussi nilpotentes.*
- (b) *Si  $L/Z(L)$  est nilpotente, alors  $L$  est nilpotente.*
- (c) *Si  $L$  est nilpotente et non nulle alors  $Z(L) \neq 0$ .*

#### Preuve :

- (a) Pareil que la preuve de la solvabilité.
- (b) Supposons que  $L^n \subset Z(L)$ , alors  $L^{n+1} = [LL^n] \subset [L, Z(L)] = 0$ .
- (c) Le dernier terme non nul dans la série centrale descendante est le centre.

#### Remarque :

La condition de nilpotence de  $L$ , peut être reformuler comme suit :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  (qui ne dépend pas de  $L$ ) ad  $x_1$  ad  $x_2 \dots$  ad  $x_n(y) = 0 \forall x_i, y \in L$ .  
En particulier :  $(x_1)^n = 0, \forall x \in L$ .

# Chapitre 2

## Le théorème d'Engel

Nous avons vu dans le chapitre précédent la notion d'algèbre nilpotente, que nous pouvons compléter avec la définition suivante :

### Définition 18

Soit  $L$  une algèbre de Lie et  $x \in L$ . On dit que  $x$  est **ad-nilpotent** si  $\text{ad } x$  est un endomorphisme nilpotent.

### Proposition 2.1

Soit  $L$  une algèbre de Lie nilpotente, alors  $\forall x \in L$ ,  $x$  est ad-nilpotent.

La réciproque de cette proposition est le Théorème d'Engel :

### Théorème 2.1 (Théorème d'Engel)

Soit  $L$  une algèbre de Lie. Si tous les éléments de  $L$  sont ad-nilpotent, alors  $L$  est nilpotente.

## 2.1 Les Outils

Avant de démontrer ce théorème nous avons besoin d'introduire quelques résultats supplémentaires.

### Lemme 2.1

Soit  $x \in \mathfrak{gl}(V)$  un endomorphisme nilpotent. Alors  $\text{ad } x$  est aussi nilpotent.

#### Preuve :

Nous pouvons associer à l'endomorphisme  $x$ , les endomorphismes de  $\text{End } V$  suivant  $\lambda_x(y) = xy$  et  $\rho_x(y) = yx$ , qui sont respectivement les translations à droite et à gauche de  $x$ . Ces deux endomorphismes sont nilpotents car  $x$  l'est par hypothèse.

De plus,  $\lambda_x$  et  $\rho_x$  commutent. Dans tout anneau, la somme ou la différence de deux éléments nilpotents qui commutent sont nilpotentes. Comme on peut écrire :  $\text{ad } x(y) = [xy] = xy - yx = \lambda_x - \rho_x$ .

On peut conclure que  $\text{ad } x$  est nilpotent.  $\square$

#### Remarque :

Une matrice peut être ad-nilpotente sans être nilpotente. C'est le cas de la matrice identité.

Nous allons déduire le Théorème d'Engel du résultat qui va suivre. Mais avant rappelons qu'une application linéaire nilpotente a toujours au moins un vecteur propre, associé à son unique valeur propre 0. C'est le cas  $\dim L = 1$  du théorème qui suit :

**Théorème 2.2**

*Soit  $L$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ , avec  $\dim V < +\infty$ . Si tous les éléments de  $L$  sont nilpotents et  $V \neq \{0\}$ , alors il existe un vecteur  $v \in V$  non nul tel que  $L.v = 0$ .*

**Démonstration :**

On procède par récurrence sur la dimension de  $L$ .

Les cas  $\dim L = 0$  ou 1 sont évident.

Supposons que  $K \neq \{0\}$  est une sous-algèbre de Lie de  $L$ . Par le Lemme (2.1)  $K$  agit (via  $ad$ ) comme une algèbre de Lie, d'applications linéaires nilpotentes, dans l'espace vectoriel  $L$ , d'où sur l'espace vectoriel  $L/K$ . Comme  $\dim K < \dim L$ , l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un vecteur  $x + K \neq K$  dans  $L/K$ , qui est annulé par l'image de  $K$  dans  $\mathfrak{gl}(L/K)$ , c.à.d  $[y, x] \in K, \forall y \in K$ , tandis que  $x \notin K$ . En d'autre mot,  $K$  est strictement incluse dans  $N_L(K)$ .

Maintenant prenons  $K$  une sous algèbre maximal strictement incluse dans  $L$ . L'argument précédent force  $N_L(K) = L$ , i.e  $K$  est un idéal de  $L$ . Si  $\dim L/K$  est supérieur à 1 alors il existe  $\overline{H} \subset L/K$  de dimension 1, tel que par passage à l'image inverse, on a  $K \subset H \subset L$  et  $H$  est une sous algèbre strictement incluse dans  $L$ . Mais par maximalité de  $K$ , on a  $H \subset K$ . Contradiction !

On déduit alors que  $K$  est de codimension 1. On peut donc écrire  $L = K + \mathbb{K}z$  pour  $z \in L - K$ . Par récurrence,  $W = \{v \in V \mid K.v = 0\}$  est non nul. Puisque  $K$  est un idéal,  $W$  est stable sous  $L$  :

$$x \in L, y \in K, w \in W, \quad yx.w = xy.w - [x, y]w = 0.$$

On choisit  $z \in L - K$  comme ci-dessus, donc l'endomorphisme nilpotent  $z$  (dans le sous-espace  $W$ ) a un vecteur propre, i.e. il existe un vecteur  $v \in V$  non nul pour lequel  $z.v = 0$ .

On a finalement,  $L.v = 0$  comme désiré.  $\square$

## 2.2 Démonstration et conséquences

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour démontrer le Théorème d'Engel.

**Démonstration : (Théorème d'Engel)**

Soit  $L$  une algèbre de Lie dont tous les éléments sont ad-nilpotent. Par conséquent  $ad L \subset \mathfrak{gl}(V)$  satisfait les hypothèses du théorème (2.2) (on peut supposer que  $L \neq 0$ ).

Conclusion, il existe  $x \neq 0$  dans  $L$  pour lequel  $[L, x] = \{0\}$ , i.e.  $Z(L) \neq \{0\}$ . Maintenant les éléments de  $L/Z(L)$  sont ad-nilpotent et  $\dim L/Z(L) < \dim L$ .

Par récurrence sur la dimension de  $L$ , on trouve que  $L/Z(L)$  est nilpotent. Par le (b) de la proposition (1.3), on a que  $L$  est aussi nilpotent.  $\square$

Nous pouvons maintenant déduire un Corollaire très utile, cet énoncé est même équivalent à celui du théorème d'Engel. Mais avant nous avons besoin d'introduire la définition suivante :

**Définition 19**

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension fini, un **drapeau de  $V$**  est une chaîne de sous-espace vectoriel :  $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ , avec  $\dim V_i = i$ . Si  $x \in \text{End } V$ , on dit que  $x$  est **stable** si on obtient, avec le drapeau précédent,  $x.V_i \subset V_i$ ,  $\forall i$ .

**Corollaire 2.1**

Soit  $L$  une algèbre de Lie dont tous les éléments sont nilpotents. Il existe un drapeau  $(V_i)_i$  de  $V$  stable dans  $L$ , avec  $x.V_i \subset V_i$ . En d'autres mots il existe une base de  $V$  dans laquelle les matrices de  $L$  appartiennent à  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ .

**Preuve :**

On commence avec un vecteur  $v \in V$  non nul annulé par  $L$ , son existence est assurée par le théorème (2.2). Posons  $V_1 = \mathbb{K}v$ . Soit  $W = V/V_1$  et on observe l'action induite de  $L$  dans  $W$  est un endomorphisme nilpotent.

Par récurrence sur la dimension de  $V$ ,  $W$  a un drapeau stabilisé par  $L$ , par passage à l'image inverse on obtient le résultat voulu.  $\square$

Pour finir ce chapitre, évoquons une application typique du Théorème (2.2), dont nous aurons besoin plus tard :

**Lemme 2.2**

Soit  $L$  une algèbre de Lie nilpotente,  $K$  un idéal de  $L$ . Alors si  $K \neq \{0\}$ ,  $K \cap Z(L) \neq \{0\}$ . En particulier,  $Z(L) \neq \{0\}$ .

**Preuve :**

$L$  agit sur  $L$ , via la représentation adjointe, donc le Théorème (2.2) donne  $x \in K$  non nul annulé par  $L$ , i.e.  $[L, x] = 0$ . Ainsi  $x \in K \cap Z(L)$ .  $\square$



# Chapitre 3

## Le théorème de Lie

Dans les chapitres précédent nous avons regardé les algèbres de Lie sur un corps  $\mathbb{K}$  quelconque. Dans la suite nous avons besoin que  $\mathbb{K}$  soit de caractéristique 0. En outre pour avoir à disposition les valeurs propres de  $ad\ x$  pour un  $x$  quelconque, et non seulement pour  $ad\ x$  nilpotent. Nous supposons aussi que  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, si tel n'ai pas le cas nous le préciserons.

L'essence du Théorème d'Engel est l'existence d'un vecteur propre commun pour les endomorphismes nilpotents, pour les algèbres de Lie cela consiste en un endomorphisme nilpotent.

Le théorème qui va suivre est de nature similaire. Cependant il nécessite une clôture algébrique afin d'assuré que  $\mathbb{K}$  contient toutes les valeurs propres. De même il est nécessaire d'avoir  $car\ \mathbb{K} = 0$ .

### Théorème 3.1

*Soit  $L$  une sous algèbre de Lie solvable de  $\mathfrak{gl}(V)$ , avec  $\dim V < +\infty$ . Si  $V \neq 0$ , alors  $V$  contient un vecteur propre commun pour tous les endomorphismes de  $L$ .*

### Démonstration :

On utilise une récurrence sur la dimension de  $L$ . Le cas  $\dim L = 0$  est trivial. On tentera d'imiter la preuve du théorème (2.1). La démonstration suivra la schéma suivant :

- (1) Montrer qu'il existe un idéal  $K$  de codimension 1.
- (2) Montrer par récurrence qu'un vecteur propre commun existe pour  $K$ .
- (3) Vérifier que  $L$  stabilise un espace composé de tels vecteurs propres.
- (4) Trouver dans cet espace un vecteur propre qui pour  $z \in L$  satisfait  $L = K + \mathbb{K}z$ .

Commençons maintenant la démonstration :

- (1) Puisque  $L$  est solvable, de dimension positive ( $\neq 0$ ),  $L$  contient strictement  $[L, L]$ . Ainsi  $L/[L, L]$  est abélien, d'où tout sous-espace est automatiquement un idéal. On prend un sous-espace de codimension 1, alors son image inverse  $K$  est un idéal de codimension 1 de  $L$  (qui contient  $[L, L]$ ).
- (2) On utilise une récurrence pour trouver un vecteur propre commun  $v \in V$  pour  $K$ .  $K$  est résoluble par la proposition (1.2), si  $K = \{0\}$ , alors  $L$  est abélien de dimension 1 et un vecteur propre pour une base de  $L$  finit la preuve. Dans le cas où  $K \neq \{0\}$ , l'hypothèse de récurrence fourni, pour

$x \in K$ ,  $x.v = \lambda(x)v$ , avec  $\lambda : K \rightarrow \mathbb{K}$  une application linéaire. On fixe  $\lambda$ , et on note  $W$  le sous-espace :

$$W = \{w \in V \mid x.w = \lambda(x)w, \forall x \in K\}$$

On a bien que  $W \neq \{0\}$ .

- (3) Montrons que  $L$  laisse  $W$  invariant. Soit  $w \in W$  et  $x \in L$ . Pour déterminer si  $x.w$  vie dans  $W$ , prenons  $y \in W$  et examinons :

$$yx.w = xy.w - [x, y].w = \lambda(y)x.y - \lambda([x, y])w$$

Ainsi il faut montrer que  $\lambda([x, y]) = 0$ . Pour cela fixons  $w \in W$  et  $x \in L$ . Soit  $n > 0$  le plus petit entier pour lequel  $w, x.w, \dots, x^n.w$  sont linéairement indépendant. Notons  $W_i$  le sous espace engendré par  $w, \dots, x^{i-1}.w$ , donc  $\dim W_n = n$  et  $W_n = W_{n+i}$  ( $i \geq 0$ ) et  $x$  est une application de  $W_n$  dans  $W_n$ . Il est facile de vérifier que chaque  $y \in K$  laisse chacun des  $W_i$  invariant. Relativement à la base  $w, x.w, \dots, x^n.w$ , on affirme que  $y \in K$  est représenté par une matrice triangulaire supérieur dont les éléments diagonaux sont égaux à  $\lambda(y)$ . Il vient de la congruence :

$$(\star) \quad yx^i.w = \lambda(y)x^i.w \pmod{W_i}$$

Qu'on prouve par récurrence sur  $i$ . Le cas  $i = 0$  est évident. Écrivons :

$$yx^i.w = yxx^{i-1}.w = xyx^{i-1}.w - [x, y]x^{i-1}.w$$

Par récurrence,  $yx^{i-1}.w = \lambda(y)x^{i-1}.w + w'$  ( $w' \in W_{i-1}$ ). Puisque  $x$  est une application de  $W_{i-1}$  dans  $W_i$ , par construction,  $(\star)$  est donc vrais pour tous  $i$ .

De notre description de l'action de  $y \in K$  sur  $W_n$  on a  $\text{tr}_{W_n}(y) = n\lambda(y)$ . En particulier, ceci est vrais pour les éléments de  $K$  de la forme  $[x, y]$ . Comme  $x, y$  stabilise  $W_n$ , on a que  $[x, y]$  agit sur  $W_n$  comme le commutateur de deux endomorphismes de  $W_n$ . Leurs trace est par conséquence nulle. On conclut que  $n\lambda([x, y]) = 0$ . Du fait que  $\text{car } \mathbb{K} = 0$ , on a  $\lambda([x, y]) = 0$ , comme demandé.

- (4) On écrit  $L = K + \mathbb{K}z$  et on utilise le fait que  $\mathbb{K}$  est une clôture algébrique pour trouver un vecteur propre  $v_0 \in W$  de  $z$  (pour une des valeurs propres de  $z$ ). Alors  $v_0$  est évidemment un vecteur propre pour  $L$  et  $\lambda$  peut être étendu en une application linéaire de  $L$  telle que  $x.v_0 = \lambda(x)v_0$ ,  $x \in L$ .  $\square$

### Corollaire 3.1 (Théorème de Lie)

Soit  $L$  une sous-algèbre de Lie solvable de  $\mathfrak{gl}(V)$ , avec  $\dim V = n \in \mathbb{N}$ . Alors  $L$  stabilise un drapeau de  $V$ . En d'autre mot, les matrices de  $L$ , dans une base de  $V$  bien choisi, sont triangulaire supérieur.

#### Preuve :

On utilise le théorème (3.1), ainsi qu'une récurrence sur la dimension de  $V$ .  $\square$

Plus généralement, si on considère  $L$  une algèbre de Lie résoluble, et  $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  une représentation de dimension finie de  $L$ . Alors  $\phi(L)$  est résoluble, par la proposition (1.2)(a), donc stabilise un drapeau de  $V$  par le corollaire (3.1).

De plus, si  $\phi$  est la représentation adjointe, un drapeau de sous-espaces stables par  $L$ , est juste une chaîne d'idéaux de  $L$ , chacun de codimension 1.

On en déduit le corollaire suivant :

### Corollaire 3.2

Soit  $L$  résoluble. Alors il existe une chaîne d'idéaux de  $L$ ,  $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = L$ , telle que  $\dim L_i = i$ .

**Corollaire 3.3**

*Soit  $L$  une algèbre de Lie résoluble. Alors  $x \in [LL]$  implique que  $ad_L x$  est nilpotent. En particulier,  $[LL]$  est nilpotente.*

**Preuve : (Corollaire 3.3)**

On trouve un drapeau d'idéal comme dans le corollaire (3.2). On considère la base  $x_1, \dots, x_n$  de  $L$ , telle que  $x_1, \dots, x_i$  engendrent  $L_i$ . Dans cette base la matrice de  $ad L$  vit dans  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ . Par conséquent les matrices de  $[ad L, ad L]$  sont dans  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ , l'algèbre dérivée de  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ . Il en suit que  $ad_L x$  est nilpotent pour  $x \in [LL]$ , a fortiori  $ad_{[LL]} x$  est nilpotent, alors  $[LL]$  est nilpotent par le théorème d'Engel (2.1).  $\square$

# Chapitre 4

## Critère de Cartan

Il serait utile d'avoir un critère pour étudier si une algèbre de Lie est résoluble. C'est exactement ce qui va nous intéresser dans cette partie.

### 4.1 Les outils

#### 4.1.1 La décomposition de Jordan-Chevalley

Dans cette sous-section uniquement, on considère *car*  $\mathbb{K}$  quelconque. Nous sortons un peu du cadre des algèbre de Lie pour introduire un outil très utile dans l'étude des applications linéaires. Rappelons la forme de Jordan pour un endomorphisme  $x$  sur un corps algébriquement clos. Sous forme matricielle c'est une matrice diagonals par blocs avec des bloc de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \text{ avec } a \text{ valeur propre de } x.$$

Puisque  $\text{diag}(a, \dots, a)$  commute avec une matrice nilpotente qui a des 1 sur la surdiagonale et des 0 partout ailleurs,  $x$  est la "somme" de matrices diagonales et de matrices nilpotentes. Nous pouvons rendre cette décomposition plus précise, comme suit.

#### Définition 20

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On appelle  $x \in \text{End}(V)$  **semisimple** si les racines de son polynôme minimal sur  $\mathbb{K}$  sont toutes distinctes.

#### Proposition 4.1

$x \in \text{End}(V)$  semisimple  $\iff x$  est diagonalisable.

#### Remarque :

La somme ou la différence de deux endomorphismes semisimple est encore semisimple. De même que la restriction à un sous-espace sera encore semisimple.

**Proposition 4.2**

Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $x \in \text{End}(V)$  :

- (a) Il existe un unique couple  $x_s, x_n \in \text{End}(V)$  qui satisfait :  
 $x = x_s + x_n$  avec  $x_s$  semisimple,  $x_n$  nilpotent et  $x_s, x_n$  commute.
- (b) Il existe deux polynômes  $p(T), q(T)$  de  $\mathbb{K}[T]$ , sans terme constant, tels que  $x_s = p(x)$ ,  $x_n = q(x)$ .  
 En particulier,  $x_s$  et  $x_n$  commute avec tout endomorphisme qui commute avec  $x$ .
- (c) Si  $A \subset B \subset V$  des sous-espaces, et  $x$  une application de  $B$  dans  $A$ , alors  $x_s$  et  $x_n$  sont également des applications de  $B$  dans  $A$ .

**Définition 21**

La décomposition  $x = x_s + x_n$  est appelé **décomposition de Jordan-Chevalley** de  $x$ , ou juste **décomposition de Jordan**.  $x_s$  et  $x_n$  sont respectivement appelé **partie semisimple** et **partie nilpotente** de  $x$ .

**Preuve :**

Soient  $a_1, \dots, a_k$  (avec multiplicité  $m_1, \dots, m_k$ ) les valeurs propres distinctes de  $x$ , donc le polynôme caractéristique est  $\prod_{i=1}^k (T - a_i)^{m_i}$ . Si  $V_i = \ker (x - a_i \cdot \text{Id})^{m_i}$ , alors  $V$  est la somme directe des sous-espaces  $V_1, \dots, V_k$ , qui sont tous stables par  $x$ . Dans  $V_i$ ,  $x$  a clairement  $(T - a_i)^{m_i}$  comme polynôme caractéristique. Maintenant on applique le théorème des restes Chinois (pour l'anneau  $\mathbb{K}[t]$ ) pour trouver le polynôme  $p(T)$  qui satisfait les congruences suivantes : 
$$\begin{cases} p(T) \equiv a_i \pmod{(T - a_i)^{m_i}} \\ p(T) \equiv 0 \pmod{T} \end{cases} \quad (*)$$
 Notons que la dernière condition est superflue si 0 est valeur propre de  $x$ , alors qu'autrement  $T$  est premier avec les autres modules.

Fixons  $q(T) = T - p(T)$ . Il est évident que  $p(T)$  et  $q(T)$  n'ont pas de termes constants, puisque  $p(T) \equiv 0 \pmod{T}$ .

Nomons  $x_s = p(x)$  et  $x_n = q(x)$ . Puisque les polynômes en  $x$ ,  $x_s$  et  $x_n$  commutent avec les autres polynômes, ils commutent aussi avec les endomorphismes qui commutent avec  $x$ . Ils stabilisent aussi tous les sous-espaces de  $V$  stables par  $x$ , en particulier les  $V_i$ . Les congruences  $(*)$  montrent que la restriction de  $x_s - a_i \cdot \text{Id}$  à  $V_i$  est 0  $\forall i$ , par conséquent  $x_s$  est diagonal sur  $V_i$  avec pour valeurs propres  $a_i$ .

Par définition,  $x_n = x - x_s$ , il est donc clair que  $x_n$  est nilpotent. Du fait que  $p(T)$  et  $q(T)$  n'ont pas de termes constants (c) est évident à ce stade.

Il reste à prouver l'unicité de l'assertion (a). Soit  $x = s + n$  une autre décomposition, on a  $x_s - s = n - x_n$ . Par (b), tous les endomorphismes en jeu commutent. Comme une somme d'endomorphismes semisimples (resp. nilpotents) qui commutent est encore semisimple (resp. nilpotent). On déduit que  $x_s - s = n - x_n = 0$ , car il n'y a que l'endomorphisme nul qui soit à la fois semisimple et nilpotent. Ainsi  $x_s = s$  et  $n = x_n$ .  $\square$

Pour préciser pourquoi la décomposition de Jordan est un outil précieux, regardons un cas particulier :

**Exemples :**

Considérons la représentation adjointe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$ ,  $\dim V < +\infty$ . Si  $x \in \mathfrak{gl}(V)$  est nilpotent alors  $\text{ad } x$  aussi (lemme (2.2)).

Similairement, si  $x$  est semisimple, alors  $\text{ad } x$  l'est aussi. Vérifions cela dans la suite :

Choisissons une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$  telle que la matrice de  $x$  soit  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ . Soit  $\{e_{ij}\}$  la base canonique de  $\mathfrak{gl}(V)$  par à notre base de  $V$ , i.e.  $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i$ . Alors un calcul rapide (voir formule  $(\star)$  dans ref a mettre ou calcul à faire) montre que  $\text{ad } x(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$ , donc  $\text{ad } x$  est une matrice diagonale, dans une base bien choisi de  $\mathfrak{gl}(V)$ .

#### Lemme 4.1

*Soit  $x \in \text{End } V$  ( $\dim V < +\infty$ ),  $x = x_s + x_n$  la décomposition de Jordan. Alors  $\text{ad } x = \text{ad } x_s + \text{ad } x_n$  est la décomposition de Jordan de  $\text{ad } x$  dans  $\text{End}(\text{End } V)$ .*

#### Preuve :

Nous avons vu que  $\text{ad } x_s$  et  $\text{ad } x_n$  sont respectivement semisimple et nilpotent. Ils commutent, puisque  $[\text{ad } x_s, \text{ad } x_n] = \text{ad } [x_s, x_n] = 0$ . Alors le (a) de la proposition (4.2) s'applique.

### 4.1.2 Critère de nilpotence d'un endomorphisme

Nous pouvons obtenir un critère puissant en ce basant sur la trace de certains endomorphismes de  $L$ . Il est évident que  $L$  va être résoluble si  $[LL]$  est nilpotente, c'est une conséquence du corollaire (3.3).

Le théorème d'Engel (2.1) nous dit que  $[LL]$  est nilpotente si (et seulement si) tout  $\text{ad}_{[LL]} x$ ,  $x \in [LL]$ , est nilpotent. Nous commencerons avec un critère sur la "trace" pour la nilpotence d'un endomorphisme.

#### Lemme 4.2

*Soit  $A \subset B$  deux sous espace de  $\mathfrak{gl}(V)$  ( $\dim V < +\infty$ ). Soit  $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, B] \subset A\}$ . Supposons que  $x \in M$  satisfait  $\text{tr}(xy) = 0$ ,  $\forall y \in M$ . Alors  $x$  est nilpotent.*

#### Preuve :

Soit  $x = s + n$  la décomposition de Jordan pour  $x$ . On fixe une base  $(v_1, \dots, v_m)$  de  $V$  telle que la matrice de  $s$  soit  $\text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ . Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}$  (par rapport à son sous corps premier  $\mathbb{Q}$ ) engendré par les valeurs propres  $a_1, \dots, a_m$  de  $s$ . On a à montrer que  $s = 0$ , ou par équivalence, que  $E = 0$ . Puisque  $E$  est de dimension finie sur  $\mathbb{Q}$  (par construction), il est suffisant de montrer que l'espace dual  $E^* = 0$ , i.e. que toutes applications linéaires  $f : E \rightarrow \mathbb{Q}$  sont nulles.

On se donne  $f \in E^*$ , soit  $y \in \mathfrak{gl}(V)$  dont la matrice dans la base précédente est  $\text{diag}((f(a_1), \dots, f(a_m)))$ . Si  $\{e_{ij}\}$  est la base correspondante de  $\mathfrak{gl}(V)$ , on a vu dans l'exemple précédent que :

$$\text{ad } s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij} \text{ et } y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}.$$

Maintenant soit  $r(T) \in \mathbb{K}[T]$  un polynôme sans terme constant qui satisfait  $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j) \forall (i, j)$ . L'existence d'un tel polynôme est donnée par l'interpolation de Lagrange, il n'y a pas d'ambiguïté sur les variables d'assignations puisque  $a_i - a_j = a_k - a_l$  implique (par la linéarité de  $f$ ) que  $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$ . On a donc  $\text{ad } y = r(\text{ad } s)$ .

Maintenant,  $ad\ s$  est la partie semisimple de  $ad\ x$ , par le lemme (4.1), donc on peut l'écrire comme un polynôme en  $ad\ x$  sans terme constant par la propriété (4.2). Ainsi  $ad\ y$  est aussi un polynôme en  $ad\ x$  sans terme constant. Par hypothèse,  $ad\ x$  est une application de  $B$  dans  $A$ , donc on a aussi  $ad\ y(B) \subset A$ , i.e.  $y \in M$ .

On utilise l'hypothèse  $tr(xy) = 0$ , on a  $\sum a_i f(a_i) = 0$ . Le côté gauche est une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire d'éléments de  $E$ , en appliquant  $f$  on obtient :  $\sum f(a_i)^2 = 0$ . Comme les  $f(a_i) \in \mathbb{Q}$ , on a  $f(a_i) = 0, \forall i$ . Finalement  $f$  doit être identiquement nulle, parce que les  $a_i$  engendrent  $E$ . Ce qui conclut cette preuve.  $\square$

## 4.2 Critère de Cartan et conséquences

Avant d'énoncer le Critère de Cartan, un critère de solvabilité, rappelons une identité qui nous sera utile dans la suite :

Si  $x, y, z$  des endomorphismes d'espace vectoriel de dimension finie, alors

$$tr([x, y]z) = tr(x[y, z]) \quad (\star)$$

### **Théorème 4.1 (Critère de Cartan)**

*Soit  $L$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{gl}(V)$ , avec  $\dim V < +\infty$ . On suppose que  $tr(xy) = 0, \forall x \in [LL], \forall y \in L$ .*

*Alors  $L$  est soluble.*

### **Démonstration :**

Comme remarquer au début du (4.1.2), il est suffisant de montrer que  $[LL]$  est nilpotent, ou juste que tout  $x \in [LL]$  est un endomorphisme nilpotent (lemme (2.1) et théorème d'Engel). Pour cela nous appliquons le lemme (4.2) à la situation :  $V$  comme donné,  $A = [LL]$ ,  $B = L$ .

Soit  $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L] \subset [LL]\}$ . Il est évident que  $L \subset M$ . Notre hypothèse est que  $Tr(xy) = 0 \forall x \in [LL], \forall y \in L$ , alors que pour conclure avec le lemme (4.2) on a besoin d'un argument plus fort :  $tr(xy) = 0$  pour  $x \in [LL], y \in M$ .

Maintenant si  $[x, y]$  est le générateur de  $[LL]$  et si  $z \in M$ , alors l'identité  $(\star)$  montre que :

$$tr([x, y]z) = tr(x[y, z]) = tr([yz]x)$$

Par définition de  $M$ ,  $[y, z] \in [LL]$ , d'où  $tr([y, z]x) = 0$  par hypothèse.  $\square$

### **Corollaire 4.1**

*Soit  $L$  une algèbre de Lie telle que  $tr(ad\ x\ ad\ y) = 0, \forall x \in [LL], \forall y \in L$ .*

*Alors  $L$  est soluble.*

### **Preuve :**

on applique le théorème à la représentation adjointe de  $L$ , et on obtient que  $ad\ L$  est soluble. Puisque  $\text{Ker } ad = Z(L)$  est soluble,  $L$  est lui-même soluble (proposition (1.2)).  $\square$

# Chapitre 5

## Forme de Killing et algèbres de Lie Semisimple

### Définition 22

Soit  $L$  une algèbre de Lie quelconque. On n'appelle **forme de Killing** la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\begin{aligned}\kappa : L \times L &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y)\end{aligned}$$

### Proposition 5.1

$\kappa$  est associative, au sens où  $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$ .

#### Preuve :

En utilisant l'identité  $\text{tr}([x, y]z) = \text{tr}(x[y, z])$  le résultat est évident.  $\square$

Le lemme qui va suivre aurait pu être utile si nous avions poussé plus loin ce travail de recherche.

### Lemme 5.1

Soit  $I$  un idéal de  $L$ . Si  $\kappa$  la forme de Killing de  $L$  et  $\kappa_I$  la forme de Killing de  $I$  (vu comme une algèbre de Lie), alors  $\kappa_I = \kappa|_{I \times I}$ .

#### Preuve :

Rappelons un fait d'algèbre linéaire : Si  $W$  un sous-espace de  $V$  de dimension fini, et  $\phi$  un endomorphisme de  $V$ , tel que  $\text{Im } \phi \subset W$ , alors  $\text{tr}(\phi) = \text{tr}(\phi|_W)$ . Pour prouver cela, il faut étendre une base de  $W$  en une base de  $V$  et regarder la matrice de  $\phi$  dans cette base. Maintenant si  $x, y \in I$ , alors  $(\text{ad } x)(\text{ad } y)$  est un endomorphisme de  $L$ , application de  $L$  dans  $I$ , donc la trace de  $\kappa(x, y)$  coïncide avec la trace de  $\kappa_I(x, y)$ , soit  $(\text{ad } x)(\text{ad } y)|_I = (\text{ad}_I x)(\text{ad}_I y)$ .  $\square$

En général, une forme bilinéaire symétrique  $\beta(x, y)$  est appelée non-dégénérée si son noyau ou radical  $S$  est  $\{0\}$ , où  $S = \{x \in L \mid \beta(x, y) = 0 \forall y \in L\}$ . Du fait que la forme de Killing est associative, son noyau est plus qu'un simple sous-espace :  $S$  est un idéal de  $L$ . Pour les algèbres linéaires, un moyen pratique de tester le non-dégénérescence suit : On fixe une base  $x_1, \dots, x_n$  de  $L$ . Alors  $\kappa$  est non-dégénéré si et seulement si la matrice de taille  $n \times n$  telle que son entrée  $i, j$  est égal à  $\kappa(x_i, x_j)$  soit de déterminant non nul.



**Exemple :**

Calculons la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ , pour cela utilisons la base canonique donner dans le paragraphe (??), nous changerons seulement l'ordre  $(x, h, y)$ . On a :

$$\text{ad } x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ad } h = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ad } y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par consequence la matrice de  $\kappa$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , son déterminant est  $-128$ , ainsi  $\kappa$  est non dégénéré. (Ceci est vrai temps que *car*  $\mathbb{K} \neq 2$ .)

Rappelons qu'une algèbre de Lie est semisimple si  $\text{Rad } L = \{0\}$ .

**Proposition 5.2**

*$L$  est semisimple si et seulement si le seul idéal abélien de  $L$  est  $\{0\}$ .*

**Preuve :**

En effet, un idéal abélien sera automatiquement résoluble, donc incluse dans  $\text{Rad } L$ . Et réciproquement, si  $\text{Rad } L \neq \{0\}$  il  $\text{Rad } L$ .

**Théorème 5.1**

*Soit  $L$  une algèbre de Lie. Alors  $L$  est semisimple si et seulement si sa forme de Killing est non dégénéré.*

**Démonstration :**

Suposons d'abord que  $\text{Rad } L = \{0\}$ . Soit  $S$  le noyaux de  $\kappa$ . Par définition,  $\text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = 0, \forall x \in S, y \in L$  (en particulier pour  $y \in [L, L]$ ). Selon le critère de Cartan (??),  $\text{ad}_L S$  est résoluble, par consequent  $S$  est résoluble. Comme remarquer plus haut  $S$  est un idéal de  $L$ , donc  $S \subset \text{Rad } L = \{0\}$ . Ainsi  $\kappa$  est non dégénéré.

Réciproquement, supposons que  $S = \{0\}$ . Pour montrer que  $L$  est semisimple, il suffit de prouver que tout idéal abélien  $I$  de  $L$  est incluse dans  $S$ . Soient  $x \in I, y \in L$ . Alors  $\text{ad } x \text{ ad } y$  application de  $L \rightarrow I$ , et  $(\text{ad } x \text{ ad } y)^2$  une application de  $L$  dans  $[I, I] = \{0\}$ . Ceci nous dit que  $\text{ad } x \text{ ad } y$  est nilpotent, donc que  $0 = \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = \kappa(x, y)$ . Ainsi  $I \subset S = \{0\}$ .  $\square$

**Remarque :**

La deuxième partie de la preuve reste valide si la caractéristique de  $\mathbb{K}$  est première.

Pour finir ce memoire, nous soulignerons que cette démonstration montrer que nous avons toujours  $S \subset \text{Rad } L$ .