NUM 7

Kacper Tatrocki (*kacper.tatrocki@student.uj.edu.pl*)

19 grudnia 2022

1 Teoria

Czym jest interpolacja? Interpolacja to jest metoda numeryczna pozwalająca nam budowanie funkcji interpolacyjnej. W zadaniu będziemy przeprowadzać interpolację wielomianową, czyli przybliżenie funckji przy pomocy wielomianów. Dla n węzłów:

$$(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2) \cdots (x_n; y_n), (x_n; y_n) \quad : \quad g(x_i) = y_i \tag{1}$$

polega ona na tym aby zbudować wielomian $f(x)$, co najwyżej $n-1$ stopnia takiego, że $f(x_i)$ $= g(x_i)$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a (3).

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \phi_j(x) \tag{3}$$

$$\phi_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{4}$$

Podczas obliczeń potrzebnych do znalezienia wyniku bedziemy używać dwóch sposobów na wybór węzłów interpolacyjnych:

Dytrybuacja jednorodna: $x_i = -1 + 2(i/n + 1)$ dla $i = (0, 1, ..., n)$

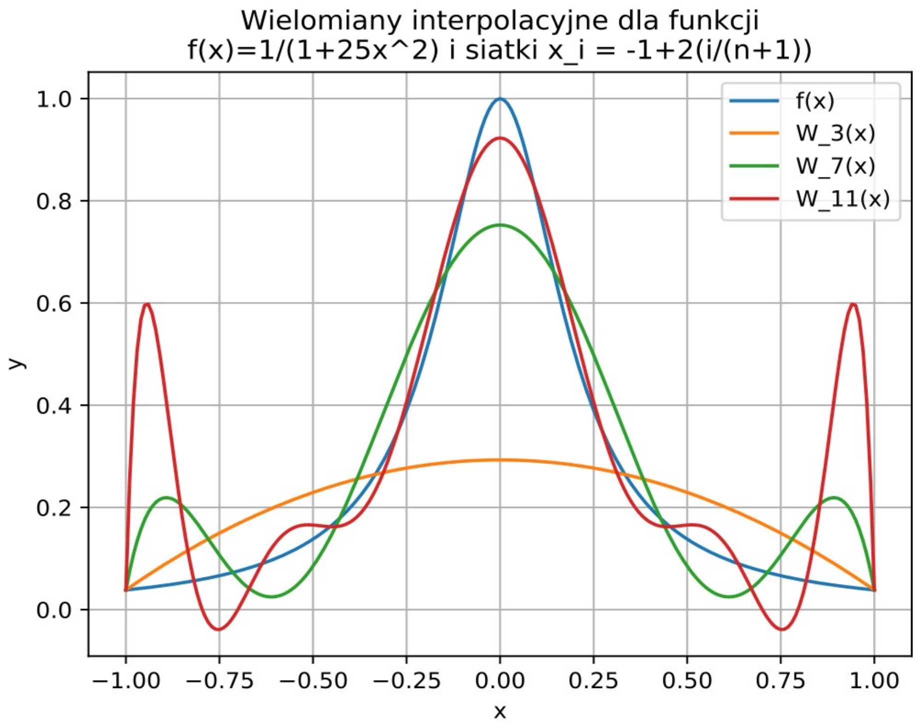
Dystrybuacja kosinusoidalna: $x_i = cos((2i + 1)/(2 * (n + 1)) * pi)$ dla $i = (0, 1, ..., n)$

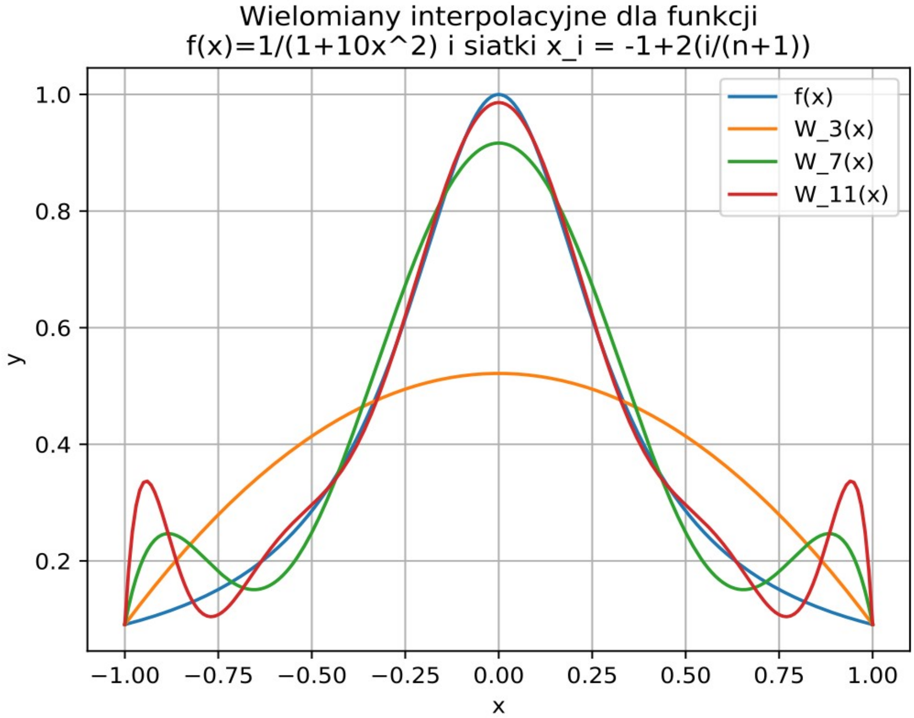
2 Ćwiczenie

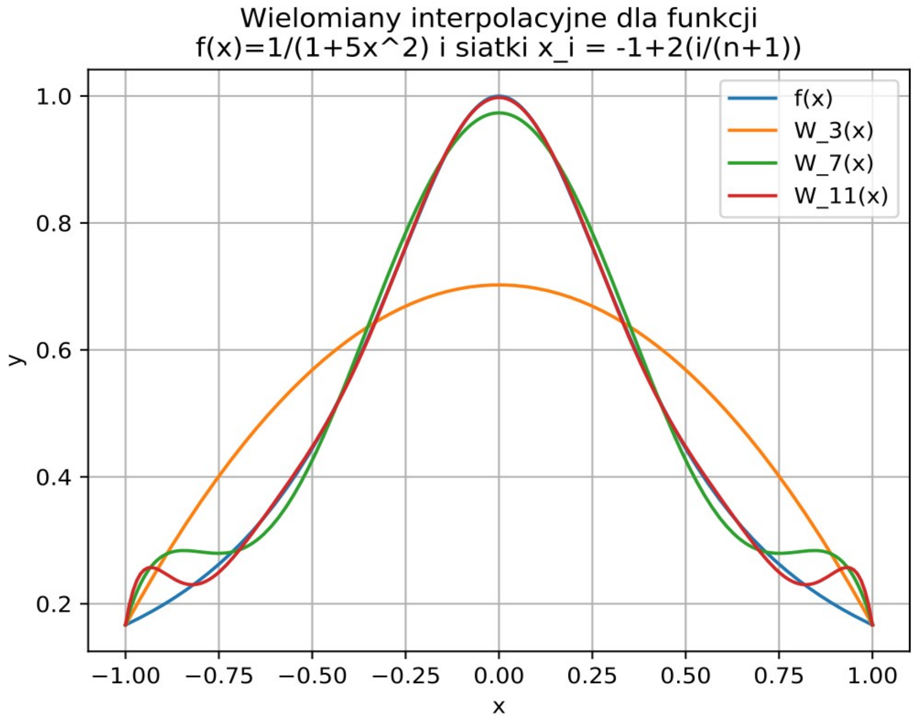
Znajdź i wykreśl wielomiany interpolacyjne stopnia n, $Wn(x)$, na przedziale x $= \langle 1,\ 1\rangle$ dla funkcji $y(x) = (1/1 + 25x^2)$ i wymienionych powyżej węzłów interpolacyjnych. Dla węzłów z pkt. (a) i (b) wybierz kilka wartości n i porównaj zachowanie się tych wielomianów dla dużego n (najlepiej w tym celu wykreślić Wn(x) dla różnych n na jednym wykresie). Zaproponuj również inne funkcje i znajdź dla nich wielomiany interpolacyjne dla węzłów zdefiniowanych w pkt. (a) i (b). Czy nasuwają się jakieś wnioski? Postanowiłem że wezmę dodatkowe dwie funckje podobne do oryginalnej, ponieważ możemy się natknąć na ciekawy wniosek, który przedstawie w podsumowaniu:

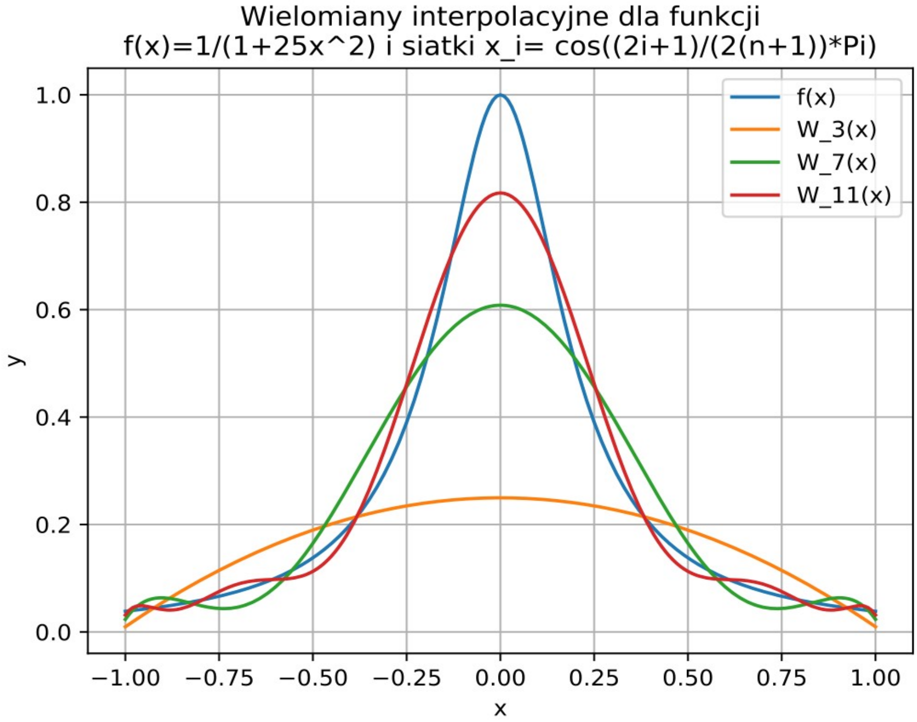
$y_1(x) = 1/(1 + 10x^2)$ oraz $y_2(x) = 1/(1 + 5x^2)$

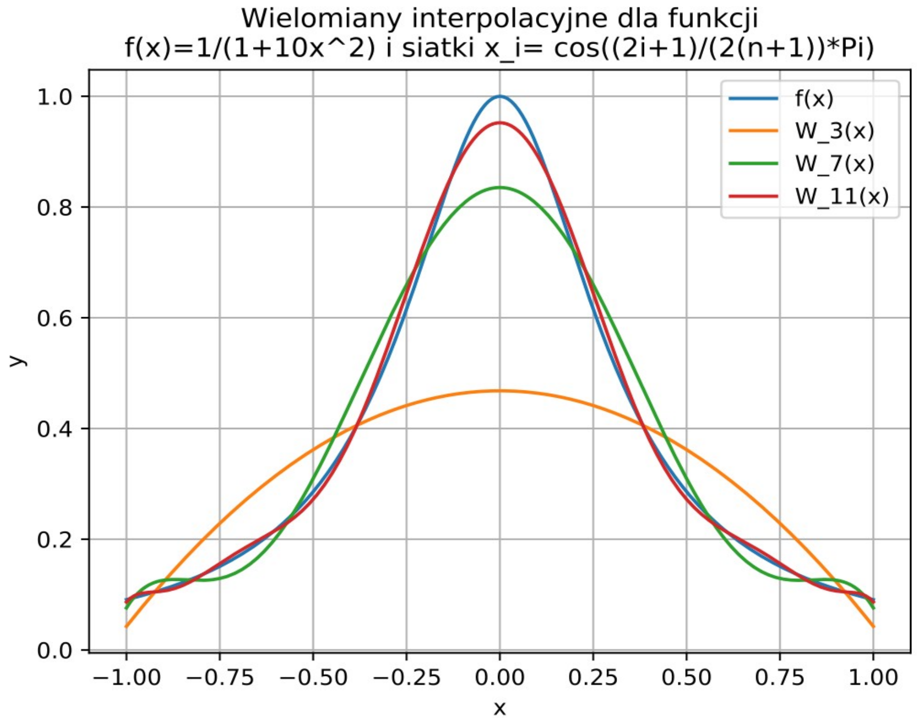
3 Wyniki

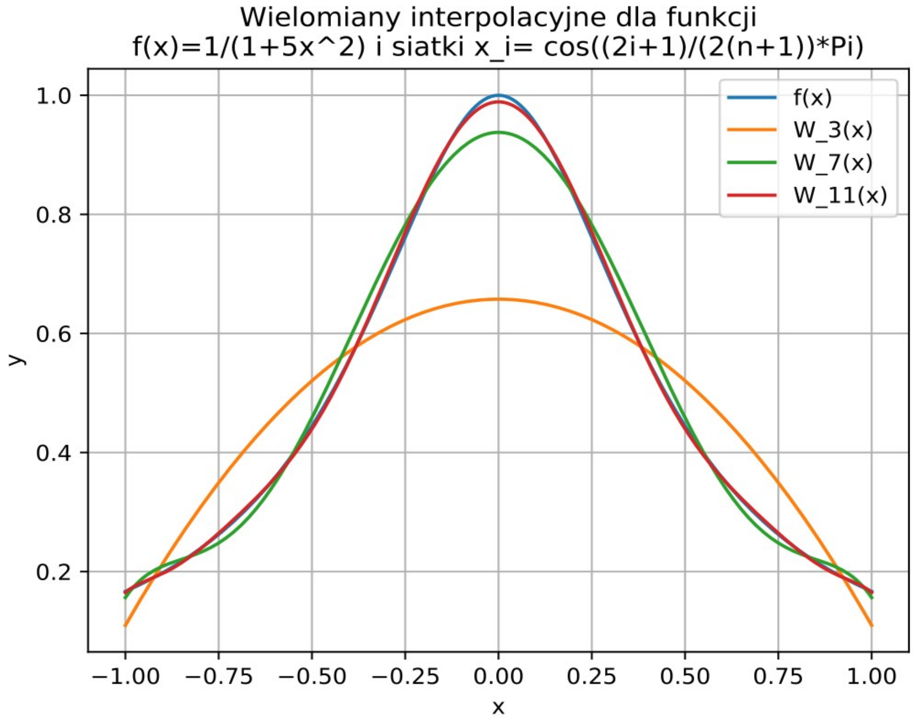



Wielomiany interpolacyjne dla funkcji
f(x)=1/(1+10x^2) i siatki x_i = -1+2(i/(n+1))
f(x)
W_3(x)
W_7(x)
W_11(x)
y
x


Wielomiany interpolacyjne dla funkcji
f(x)=1/(1+5x^2) i siatki x_i = -1+2(i/(n+1))
f(x)
W_3(x)
W_7(x)
W_11(x)
y
x


Wielomiany interpolacyjne dla funkcji
f(x)=1/(1+25x^2) i siatki x_i= cos((2i+1)/(2(n+1))*Pi)
f(x)
W_3(x)
W_7(x)
W_11(x)
y
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


Wielomiany interpolacyjne dla funkcji
f(x)=1/(1+10x^2) i siatki x_i= cos((2i+1)/(2(n+1))*Pi)
f(x)
W_3(x)
W_7(x)
W_11(x)
y
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00



Na rys. od 1 do 6 przedstawione są wyniki interpolacji funkcji y, y_1 oraz y_2 w zależności od doboru węzłów interpolacji, tj. ich ilości n i rodzaju dystrybucji.

4 Podsumowanie

Dla funckji y i jednorodnego rozkładu możemy zaobserowwać, że wraz ze zwiększeniem stopnia n polepsza się przybliżenie, ale na krańcach przedziału amplituda oscylacji wielomianu interpolacyjnego powiększa się. Jesteśmy świadkiem efektu Rungego i aby go uniknąć musimy używać nierównomiernie rozłożonych węzłów interpolacji. Wspominałem, że wybiore inne funckje podobne do podstawowej (y_1 i y_2) i możemy zobaczyć na wykresach, że dla niższych wartości mianownika w wielomianie pogarszanie wyników na krańcu przedziału zmniejsza się.