NUM6

Kacper Tatrocki (*kacper.tatrocki@student.uj.edu.pl*)

7 grudnia 2022

1 Teoria

Każdą macierz Hassenberga nazywamy macierz zapisaną w postaci sumy dwóch macierzy, tzn. macierzy trójdiagonalnej T i macierzy trójkątnej górnej U, zdefiniowanej według $H = T + U$. Wiadomo jednak $h_{ij} = 0$ dla $j < i - 1$. Jeśli jednak potrafimy wyznaczyć wartości własne macierzy H, to również potrafimy wyznaczyć wartości własne dowolnej macierzy. Według prostego algorytmy QR każdą macierz A możemy rozłożyć na iloczyn macierzy ortogonalnej Q i macierzy trójkątnej R, którą zapisujemy według schematu $A = QR$.

2 Ćwiczenie

W ćwiczeniu zadana jest macierz M oraz B. Podpunkt $a)$ tego zadania mówi aby stosując algorytm QR znaleźć wszystkie wartości własne macierzy M. Podpunkt $b)$ mówy aby stosując metodę potęgową znaleźć największą co do modułu wartość własną macierzy B oraz odpowiadający jej wektor własny.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0.2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0.1 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

3 Wyniki

a) Macierz po przyblizonym rozkładzie QR oraz Wartości własne Macierzy Hessenberga

$$QR = \begin{bmatrix} 7.23099229e+00 & 4.65843628e+00 & 1.23917527e+01 & 1.23917527e+01 \\ 4.44956079e-09 & 5.90015728e+00 & -2.84824740e+00 & 5.45978554e+00 \\ 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 4.81580659e+00 & -8.02266193e+00 \\ 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.05304383e+00 \end{bmatrix} \tag{2}$$

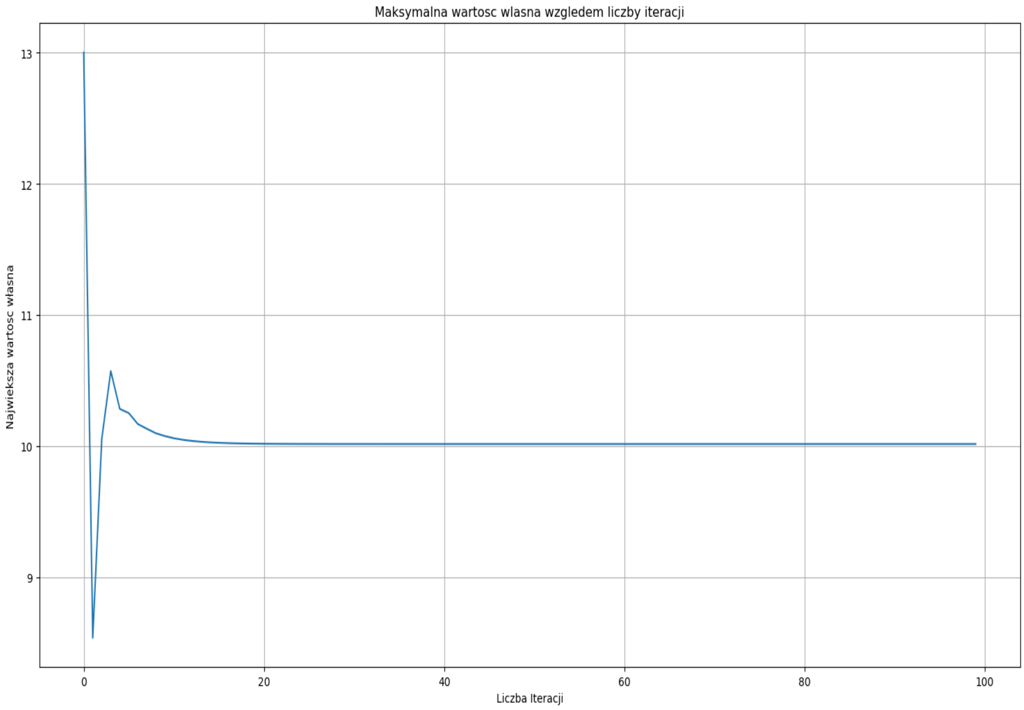
Wartości własne: 7.2309922938441025, 5.900157283079914, 4.815806591510443, 1.053043831565537

b) Największa wartość własna oraz Wektor własny

$$x = \begin{bmatrix} 0.71926164 \\ 1. \\ 0.36947271 \\ 0.07684547 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Największa wartość własna: 10.015982848255266

Maksymalna wartość własna względem liczby iteracji



Wykres przedstawia jak największa wartość własna zmienia się po danej liczbie iteracji. Możemy zauważyć, że na wykresie po około dwudziestu iteracji wartość własna "stoi w miejscu"i jej wynik jest bliski 10.

4 Podsumowanie

Złożoność obliczeniowa faktoryzacji QR macierzy w postaci Hessenberga wynosi $O(N^2)$. Ta faktoryzacja pomaga nam w bardziej efektywny sposób znaleźć wektory i wartości własne dla niesymetrycznych macierzy niż inne algorytmy.