

# NAIST(情報科) 入試過去問題集(数学) 問題編

## 注意事項

以下の3題中、2問選択して解答せよ。括弧内は「入学試験の年度」を示す。  
問題閲覧時間は10分（英語を受験する場合を含む）、発表時間は8分（英語を受験する場合は12分）。  
問題閲覧中のみ、メモ用紙の使用可。

## 1 線形代数

### 1.1 問題1 (試問例)

線形空間  $V$  の任意のベクトルを  $\mathbf{x}$ 、定数ベクトルを  $\mathbf{a}$  とする。このとき、 $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{x} + \mathbf{a}$  に写す  $V$  の写像  $f$  が線形写像でないことを示せ。

### 1.2 問題2 (2004年1月)

次の  $4 \times 4$  行列  $A$  の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### 1.3 問題3 (2007年1月)

$X^n = O$  となる正方行列  $X$  について、 $(E - X)^{-1} = E + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$  であることを示せ。

### 1.4 問題4 (2008年1月)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

とする。 $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

**1.5 問題 5 (2008 年 1 月)**

行列  $A$  について,  $A \neq O$ ,  $A^2 = O$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  とする.

- (A)  $A$  と  $\mathbf{x}$  が線形独立であることを証明せよ.  
 (B)  $B = (\mathbf{x} \ A\mathbf{x})$  のとき,  $B^{-1}AB$  を求めよ.

**1.6 問題 6 (2008 年 1 月)**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

- (A)  $AN = NA$  を示せ.  
 (B)  $N^2, N^3$  を求めよ.  
 (C)  $(A + N)^k$  を求めよ.

**1.7 問題 7 (2008 年 1 月)**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする.

- (A)  $A$  の固有ベクトルを求めよ.  
 (B)  $A$  を対角化せよ.  
 (C)  $A^n$  を求めよ.

**1.8 問題 8**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$$

を求めよ.

**1.9 問題 9**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

とする.

- (A)  $A^{-1}$  を求めよ.  
 (B)  $A^{-1} = \alpha A + \beta E$  となる  $\alpha, \beta$  を求めよ.

**1.10 問題 10 (試問例)**

3つのベクトル,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がある.

- (A)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が互いに直交していることを示せ.
- (B)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の正規直交基底を求めよ.
- (C)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の全てに直交するベクトルを1つ求めよ.

**1.11 問題 11 (出題年度不明, および 2010 年 1 月)**

$n \times n$  行列  $A$  について,  ${}^t A = A$  で,  $A^2 = A$  のとき, 固有値は 0 または 1 になることを示せ.

**1.12 問題 12 (2009 年 1 月)**

- (A)  $n$  次正方行列  $A$  について,  $A^k = E$  となる自然数  $k$  が存在するとき,  $A$  は正則であることを示せ.
- (B)  $A^2 = E$  のときの固有値を求めよ.

**1.13 問題 13 (2009 年 1 月)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

- (A)  $A^2 - (2a + b)E = O$  を満たす  $a, b$  を求めよ.
- (B)  $E + A + A^2 + \cdots + A^n$  の値を求めよ.

**1.14 問題 14 (2010 年 1 月)**

- (A)  $2 \times 2$  行列  $A$  について,  $P^{-1}AP$  を計算せよ. ( $P$  は  $A$  の固有ベクトルを束ねた行列とする)
- (B)  $A^n$  を計算せよ.

**1.15 問題 15 (2010 年 1 月)**

$$W = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad W^2 + W + E = O$$

のとき

- (A)  $a, b$  を求めよ.
- (B)  $W^3$  を求めよ. また  $W^{100} + W^{50}$  を求めよ.

### 1.16 問題 16 (2010 年 1 月)

4 点,  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(-1, 1, 1)$ ,  $D(0, 2, 1)$  からなる四面体について答えよ.

(A)  $\triangle ABC$  の面積.

(B)  $\triangle ABC$  に点  $D$  から降ろす垂線の足.

(C) 四面体  $ABCD$  の体積.

### 1.17 問題 17 (2011 年 1 月)

正方向行列  $A, B$  について,

$$\frac{d}{dt}AB = \left(\frac{d}{dt}A\right)B + A\left(\frac{d}{dt}B\right)$$

を示せ.

### 1.18 問題 18 (2011 年 1 月)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

を求めよ.

### 1.19 問題 19 (2011 年 2 月)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

について,  $T^n$  を求めよ. 但し, 行列  $A, B$  が  $AB = BA$  を満たすとき二項定理  $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot A^k \cdot B^{n-k}$  が成り立つことを用いてもよい.

### 1.20 問題 20 (2012 年 1 月 3 日目)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする.

(A)  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  のなす角を求めよ.

(B)  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  に直交するベクトルを 1 つ求めよ.

## 1.21 問題 21 (2012 年 1 月 4 日目)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(A)  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  に直交するベクトル  $\mathbf{x}_3$  を求めよ.

(B)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  の線形結合によって  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  を表現せよ.

## 1.22 問題 22 (2012 年 1 月 4 日目)

正方行列  $A, B$  があるとき,  $AB - BA = E$  が成り立たないことを, トレース (対角成分の和) に注目して証明せよ.

# 2 解析学

## 2.1 問題 1 (試問例)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

を求めよ.

## 2.2 問題 2 (2003 年 2 月)

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx$$

を求めよ.

## 2.3 問題 3 (2004 年 1 月)

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

において  $\Gamma(0), \Gamma(1)$  を求め, それを元に  $\Gamma(n) = (n-1)!$  を証明せよ.

## 2.4 問題 4 (2007 年 1 月)

$P(x, y)$  と原点の距離を  $F$ ,  $x = 3$  との距離を  $H$  とする.  $\frac{H}{F} = 2$  のとき,  $P$  の軌跡を求めよ.

## 2.5 問題 5 (2008 年 1 月)

$$f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

とする.  $f(x)$  が周期  $\pi$  の周期関数であることを示し, グラフを描け.

## 2.6 問題 6 (2008 年 1 月)

等速直線運動している車が  $-50[\text{m/s}^2]$  で減速した場合に停止するまでの移動距離を求めよ.

## 2.7 問題 7 (2008 年 1 月)

$$\int x^n \log x \, dx$$

を求めよ.

## 2.8 問題 8

$$\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$$

を  $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$  とおいて, 求めよ.

## 2.9 問題 9

$$\int \sin(\log x) \, dx$$

を求めよ.  $t = \log x$  とする.

## 2.10 問題 10

$0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$  のとき,

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y$$

の軌跡を求めよ.

## 2.11 問題 11 (試問例)

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2 \frac{df(x)}{dx} - 3f(x) = 0$$

の解で,  $f(0) = 0, f'(0) = 4$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ.

## 2.12 問題 12 (2009 年 1 月)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  (定数  $a$  を含んだ 3 次式),  $g(x) = px^2 + qx + r$  (定数  $a$  を含んだ 2 次式) とする.

(A) 2 曲線の交点を全て求めよ.

(B) 2 曲線が囲んで出来る 2 つの領域の面積が等しいとき,  $a$  の値を求めよ.

## 2.13 問題 13 (2010 年 1 月)

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2 \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$$

の解で,  $f(0) = 0, f'(0) = 2$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ.

### 2.14 問題 14 (2010 年 1 月)

(A)  $y$  を  $x$  に関する二次関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  と,  $x$  を  $y$  に関する二次関数  $g(y) = py^2 + qy + r$  の交点を求めよ.

(B) 二曲線  $f(x)$  と  $g(y)$  で囲まれる面積を求めよ.

### 2.15 問題 15 (2010 年 1 月)

$$\int e^x \sin(x) dx$$

を求めよ.

### 2.16 問題 16 (2010 年 1 月)

$y = x^3$  上の点  $A(a, a^3)$  における接線と  $x$  軸との交点を求めよ.

### 2.17 問題 17 (2010 年 2 月)

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx$$

を求めよ.

### 2.18 問題 18 (2010 年 3 月)

$$\int (\log x)^2 dx$$

を求めよ.

### 2.19 問題 19 (2011 年 1 月)

$$(\log_3(3x))^2 - 6\log_3(x) + 2$$

の最小値とそのときの  $x$  を求めよ.

### 2.20 問題 20 (2011 年 1 月)

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^2 \cos \theta d\theta$$

を求めよ.

### 2.21 問題 21 (2011 年 1 月)

$$y = xe^{-x}$$

を図示せよ.

**2.22 問題 22 (2011 年 2 月)**

$$xy \frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

のとき,  $y$  を  $x$  を用いて表せ.

**2.23 問題 23 (2012 年 1 月 3 日目)**

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  について,

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  を証明せよ.

(B)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が発散することを示せ.

**2.24 問題 24 (2012 年 1 月 4 日目)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{1/x}$$

を求めよ.

**2.25 問題 25 (2011 年 1 月 1 日目)**

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^k} dx$$

を求めよ.

**2.26 問題 26 (2011 年 1 月 4 日目)**

次の微分方程式を解け.

$$xy' \log x = xy$$

**2.27 問題 27 (2011 年 1 月 3 日目)**

$$f(x) = \int (2x + 1)^{n+1} dx$$

のとき

(A)  $t = 2x + 1$  において,  $\frac{dx}{dt}$  を求めよ.

(B) 不定積分を求めよ.

**2.28 問題 28 (2011 年 1 月 4 日目)**

次の微分方程式を解け.

$$xy' \log x = y \log y$$

**2.29 問題 29 (2011 年)**

(A)  $\sin x$  をマクローリン展開せよ.

(B)  $\sin(2011\pi + x)$  を求めよ.



**2.30 問題 30 (2011 年)**

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx$$

を求めよ.