NAIST 情報科学研究科 数学入試予想問題集（2025 年度版）

出題範囲

線形代数: Gilbert Strang "Introduction to Linear Algebra" 4th Edition, Chapter 1–7
解析学: Serge Lang "A First Course in Calculus" 5th Edition, Chapter 1–15

範囲別重要事項

Gilbert Strang "Linear Algebra" Chapter 1–7

- **Chapter 1–2**: ベクトル、線形結合、線形独立性
- **Chapter 3**: 行列と連立方程式、消去法
- **Chapter 4**: 直交性、射影、最小二乗法
- **Chapter 5**: 固有値、固有ベクトル、対角化
- **Chapter 6**: 正定値行列、特異値分解
- **Chapter 7**: 線形変換、部分空間

Serge Lang "First Course in Calculus" Chapter 1–15

- **Chapter 1–4**: 極限、連続性、微分の基本
- **Chapter 5–8**: 微分の応用、平均値定理、極値問題
- **Chapter 9–12**: 積分、基本定理、計算技法
- **Chapter 13–15**: 級数、テイラー展開、収束判定

問題 1 (線形代数（線形写像と部分空間）). ***(A)* 線形写像の核と像の性質**
線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で表されるとき、以下を求めよ。

1. $\ker(T)$（核）の基底と次元
2. $Im(T)$（像）の基底と次元

3. 階数定理 $\dim(domain) = \dim(\ker(T)) + \dim(Im(T))$ を確認せよ

(B) 線形独立性の判定
以下のベクトルが線形独立かどうか判定し、理由を述べよ。

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

線形独立でない場合、線形従属関係を明示せよ。

問題 2 (解析学（積分と級数）). ***(A)* 置換積分**
次の定積分を計算せよ。

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$$

(B) 部分積分の応用
次の定積分を計算せよ。

$$\int_1^e x \log x \, dx$$

(C) 級数の収束性
以下の級数の収束性を調べよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

収束する場合、その和も求めよ。

問題 3 (線形代数（固有値と対角化）). ***(A)* 固有値・固有ベクトルの計算**
行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について、以下を求めよ。

1. 固有値

2. 各固有値に対応する固有ベクトル

3. A は対角化可能か？理由とともに答えよ

(B) 行列の冪乗
上記の結果を用いて A^{10} を計算せよ。
(C) 対称行列の性質
3×3 の実対称行列が必ず対角化可能である理由を、固有値・固有ベクトルの性質を用いて説明せよ。

追加予想問題（最新傾向に基づく）

問題 4 (解析学（極限と連続性）). 以下の極限を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{x^3}$$

問題 5 (線形代数（正定値行列）). 以下の行列が正定値かどうか判定せよ。

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

判定には以下のいずれかの方法を用いよ：

1. 固有値による判定
2. 主小行列式による判定

問題 6 (解析学（微分の応用）). 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ について、以下を求めよ。

1. 極値とその位置
2. 変曲点
3. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

問題 7 (線形代数（線形変換の幾何的意味）). $\mathbb{R}^2$ の線形変換 T が行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表されるとき、

1. この変換の幾何学的意味を説明せよ
2. $T^4 = I$（単位行列）であることを確かめよ
3. この性質を固有値を用いて説明せよ

問題 8 (解析学（テイラー展開）). $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の $x = 0$ まわりのテイラー展開を求め、収束半径を求めよ。

解答戦略とポイント

線形代数の重要概念

- **線形独立性**: $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ が $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ のときのみ成立
- **階数定理**: $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$
- **対角化の条件**: $n \times n$ 行列が n 個の線形独立な固有ベクトルを持つ
- **正定値判定**: すべての固有値が正 $\Leftrightarrow$ すべての主小行列式が正

解析学の重要技法

- **置換積分**: $u = g(x)$ とおいて $dx = \frac{du}{g'(x)}$
- **部分積分**: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
- **級数の収束判定**: 比較判定法、比判定法、根判定法
- **ロピタルの定理**: $\frac{0}{0}$ または $\frac{\infty}{\infty}$ 型の極限に適用

頻出の証明パターン

1. **線形写像の証明**: 加法性と斉次性を別々に確認
2. **対角化可能性**: 固有値の重複度と幾何的重複度の比較
3. **収束性**: 適切な判定法の選択と適用
4. **極限計算**: テイラー展開やロピタルの定理の使い分け

近年の傾向

- **概念理解重視**: 単純計算より性質の理解を問う
- **応用問題**: 幾何学的意味や物理的解釈を含む
- **証明問題**: 定理の証明や反例の構成
- **複合問題**: 複数分野の知識を統合する問題

学習のポイント

1. **基本概念の確実な理解**: 定義を正確に覚え、例で確認
2. **計算技術の習得**: 基本的な計算を迅速かつ正確に
3. **証明能力の向上**: 論理的思考と記述力の向上
4. **応用力の養成**: 概念を具体的問題に適用する力

特に**性質の理解**が重要なので、「なぜそうなるのか」を常に意識して学習することが成功の鍵です。