

NAIST 入試 数学問題（線形代数・解析）

出題範囲

線形代数: Gilbert Strang “Introduction to Linear Algebra” 4th Edition, Chapter 1–7

解析学: Serge Lang “A First Course in Calculus” 5th Edition, Chapter 1–15

範囲別重要事項

Gilbert Strang “Linear Algebra” Chapter 1–7

- Chapter 1–2: ベクトル、線形結合、線形独立性
- Chapter 3: 行列と連立方程式、消去法
- Chapter 4: 直交性、射影、最小二乗法
- Chapter 5: 固有値、固有ベクトル、対角化
- Chapter 6: 正定値行列、特異値分解
- Chapter 7: 線形変換、部分空間

Serge Lang “First Course in Calculus” Chapter 1–15

- Chapter 1–4: 極限、連続性、微分の基本
- Chapter 5–8: 微分の応用、平均値定理、極値問題
- Chapter 9–12: 積分、基本定理、計算技法
- Chapter 13–15: 級数、テイラー展開、収束判定

1 線形代数（Strang 範囲内）

1.1 問題 1: 正定値行列

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が正定値行列であることを示せ。

1.2 問題 2: 行列の余因子展開

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

の余因子展開によって行列式を計算せよ。

1.3 問題 3: グラム・シュミットの直交化

次のベクトル集合

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し、グラム・シュミットの手法により直交ベクトル系を求めよ。

1.4 問題 4: 線形写像の判定

以下の写像 $T_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) が線形写像であるかどうかを判定せよ。

1. $T_1(x, y) = (2x + 3y, x - y)$

2. $T_2(x, y) = (x^2, y)$

3. $T_3(x, y) = (x + 1, y)$

4. $T_4(x, y) = (xy, x + y)$

5. $T_5(x, y) = (-y, x)$

6. $T_6(x, y) = (0, 0)$

1.5 問題 5: 固有値・固有ベクトル

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ。

1.6 問題 6: 対角化

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

を直交行列 U により対角化せよ。

2 解析 (Lang 範囲内)

2.1 問題 7: 定積分

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx$$

を計算せよ。

2.2 問題 8: 分数関数の定積分

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

を計算せよ。

2.3 問題 9: 対数不等式の面積証明

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\frac{1}{n+1} < \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$$

を、面積に注目して証明せよ。

2.4 問題 10: 増減表と最小値

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の増減表を描き、最小値を求めよ。

2.5 問題 11: 最適化問題

底面が正方形で表面積が S (定数) の直方体について、体積を最大化する底面の 1 辺の長さとお高さの比を求めよ。微分を用いて解け。