NAIST 情報科学研究科 数学入試予想問題 解答集

解答 1 (問題 1：線形代数（線形写像と部分空間）). ***(A)* 線形写像の核と像の性質**

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

***1.* $\ker(T)$ の基底と次元**

$\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式：

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \tag{1}$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

行簡約階段形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって：$x_1 = -x_3,\ x_2 = x_3$

$\ker(T) = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(\ker(T)) = 1$

***2.* $\boldsymbol{Im}(T)$ の基底と次元**

A の列ベクトルから線形独立なものを選ぶ。

$$rank(A) = 2$$

（上記の行簡約から）

第 *1* 列と第 *2* 列が線形独立なので：

$$Im(T) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(Im(T)) = 2$

***3.* 階数定理の確認**

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3,\ \dim(\ker(T)) = 1,\ \dim(Im(T)) = 2$

$3 = 1 + 2\ O$

***(B)* 線形独立性の判定**

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式を計算：

$$\det = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4 \neq 0$$

よって、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は**線形独立**である。

解答 2 (問題 2：解析学（積分と級数）). ***(A)* 置換積分**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$$

$u = \sin x$ とおくと、$du = \cos x \, dx$
$x = 0$ のとき $u = 0$、$x = \pi/2$ のとき $u = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^3 \, du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

***(B)* 部分積分の応用**

$$\int_1^e x \log x \, dx$$

$u = \log x,\ dv = x \, dx$ とおくと、$du = \frac{1}{x}dx,\ v = \frac{x^2}{2}$

$$\int_1^e x \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

***(C)* 級数の収束性**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

部分分数分解：

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

部分和：

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

よって級数は収束し、その和は 1 である。

解答 3 (問題 3：線形代数（固有値と対角化）). ***(A)* 固有値・固有ベクトルの計算**

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

***1.* 固有値**

特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(4)$$

$$= -5 - 5\lambda + \lambda + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

固有値：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

***2.* 固有ベクトル**

$\lambda_1 = 1$ のとき：

$$(A - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1$

固有ベクトル：$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$ のとき：

$$(A - 3I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

固有ベクトル：$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

***3.* 対角化可能性**

A は 2×2 行列で異なる *2*つの固有値を持つため、対角化可能である。

***(B)* 行列の冪乗**

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^{10} \\ 2 & 3^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot 3^{10} & 1 - 3^{10} \\ -2 + 2 \cdot 3^{10} & 2 - 3^{10} \end{pmatrix}$$

***(C)* 対称行列の性質**

実対称行列が必ず対角化可能である理由：

1. 実対称行列のすべての固有値は実数 *2.* 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する *3.* 重複度を持つ固有値についても、対応する固有空間で正規直交基底を構成可能 *4.* これらより、実対称行列は常に正規直交な固有ベクトルの完全系を持つ

解答 4 (問題 4：解析学（極限と連続性）).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{x^3}$$

テイラー展開を用いる：

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} - \cdots$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + O(x^5) = 3x - \frac{27x^3}{6} + O(x^5) = 3x - \frac{9x^3}{2} + O(x^5)$$

$$3\sin(x) = 3\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) = 3x - \frac{x^3}{2} + O(x^5)$$

$$\sin(3x) - 3\sin(x) = \left(3x - \frac{9x^3}{2}\right) - \left(3x - \frac{x^3}{2}\right) + O(x^5) = -4x^3 + O(x^5)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x^3 + O(x^5)}{x^3} = -4$$

解答 5 (問題 5：線形代数（正定値行列）)**.**

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

方法 *1*：主小行列式による判定

1 次主小行列式：$M_1 = 4 > 0 \ O$

2 次主小行列式：$M_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 12 - 1 = 11 > 0 \ O$

3 次主小行列式：

$$M_3 = \det M = 4 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot 15 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) = 60 - 5 - 12 = 43 > 0$$

O

すべての主小行列式が正なので、M は正定値行列である。

解答 6 (問題 6：解析学（微分の応用）)**.** $f(x) = xe^{-x^2}$

***1*. 極値とその位置**

$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = -2xe^{-x^2}(1 - 2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}(-2x + 4x^3 - 4x) = e^{-x^2}(-6x + 4x^3)$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$：$f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2}(-6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}) < 0 \rightarrow$ 極大

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$：$f''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2}(6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}) > 0 \rightarrow$ 極小

***2*. 変曲点**

$f''(x) = 0 \Rightarrow x(-6 + 4x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ または $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

***3*. 極限**

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0$ （指数関数の減衰の方が速い）

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$

解答 7 (問題 7：線形代数（線形変換の幾何的意味）)**.** T が行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表される線形変換

***1*. 幾何学的意味**

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

これは原点中心の *90* 度反時計回りの回転変換である。

2. **$T^4 = I$ の確認**

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^4 = (T^2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3. **固有値による説明**

特性方程式：$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$

固有値：$\lambda = \pm i$

$\lambda^4 = (\pm i)^4 = 1$ なので、$T^4 = I$ が成り立つ。

解答 8 (問題 8：解析学（テイラー展開）). $f(x) = \frac{1}{1-x}$

幾何級数の公式より：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

収束半径は $|x| < 1$ より $R = 1$

確認：比判定法で $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = 1$

よって収束半径 $R = \frac{1}{1} = 1$