NAIST 入試 数学問題（線形代数・解析）解答編

線形代数（Strang 範囲内）解答

問題 1 解答: 正定値行列

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が正定値行列であることを示す。

方法 1：固有値による判定

特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

固有値：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

すべての固有値が正なので、A は正定値行列である。

方法 2：シルベスターの判定法

主小行列式を計算：

$$M_1 = 2 > 0 \tag{1}$$
$$M_2 = \det(A) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 4 - 1 = 3 > 0 \tag{2}$$

すべての主小行列式が正なので、A は正定値行列である。

方法 3：二次形式による判定

任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して：

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$
$$= 2\left[\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}\right] > 0$$

よって A は正定値行列である。

問題 2 解答: 行列の余因子展開

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

の余因子展開による行列式計算。

第 1 行による展開：

$$\det(A) = 2 \cdot \det(1) - 0 \cdot \det(3) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$$

第 2 列による展開：

$$\det(A) = -0 \cdot \det(3) + 1 \cdot \det(2) = 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

検算（直接計算）：

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 2$$

答え：$\det(A) = 2$

問題 3 解答: グラム・シュミットの直交化

ベクトル集合

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をグラム・シュミット法で直交化する。

Step 1：第 1 ベクトルの正規化

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Step 2：第 2 ベクトルの直交化

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$$

内積計算：

$$v_2 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \tag{3}$$

$$u_1 \cdot u_1 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 \tag{4}$$

したがって：

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正規化（必要に応じて）：

$$\|u_1\| = \sqrt{2}, \quad \|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

正規直交基底：

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問題 4 解答: 線形写像の判定

線形写像の判定基準：1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$（加法性）2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$（斉次性）

注意：問題文で具体的な写像 $T_1, T_2, \ldots, T_6$ が示されていないため、一般的な判定方法を示す。

線形写像の例：- $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$（行列による変換）- $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$

非線形写像の例：- $T(x, y) = (x^2, y)$（平方による変換）- $T(x, y) = (x + 1, y)$（平行移動）- $T(x, y) = (xy, x)$（積による変換）

各写像について上記 2 条件を確認することで判定する。

問題 5 解答: 固有値・固有ベクトル

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求める。

固有値の計算：特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

固有値：$\lambda = 3$（重複度 2）

固有ベクトルの計算：$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $y = 0$、x は任意。

固有ベクトル：$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$（幾何的重複度 1）

結果：- 固有値：$\lambda = 3$（代数的重複度 2）- 固有ベクトル：$\mathbf{v} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

この行列は対角化不可能（ジョルダン標準形が必要）。

問題 6 解答: 対角化

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

を直交行列 U により対角化する。

Step 1：固有値の計算特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$

展開計算（第 1 行による）：

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} - 0 + 2\det\begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[\lambda(\lambda+1) - 4] + 2[0 - 2(\lambda+1)]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 4) - 4(\lambda+1)$$

計算を続けると：$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$
Step 2：固有ベクトルの計算
$\lambda_1 = 3$ の場合：

$$(A - 3I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

解くと：$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
同様に他の固有値についても計算する。
Step 3：正規化と直交行列の構成各固有ベクトルを正規化し、直交行列 U を構成する。

解析（Lang 範囲内）解答

問題 7 解答: 定積分

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x}\, dx$$

置換積分：$u = \log x$ とおく- $du = \frac{1}{x}dx$ - $x = e$ のとき $u = 1$ - $x = e^2$ のとき $u = 2$

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^2 u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

答え：$\frac{3}{2}$

問題 8 解答: 分数関数の定積分

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx$$

部分分数による変形：

$$\frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

積分計算：

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= [x - \log(x+1)]_0^1 = (1 - \log 2) - (0 - \log 1) = 1 - \log 2$$

答え：$1 - \log 2$

問題 9 解答: 対数不等式の面積証明

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

を面積により証明する。
証明：関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考える。区間 $[n, n+1]$ において：

右側の不等式：$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$
$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$
$f(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $[n, n+1]$ で単調減少なので：

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$$

左側の不等式：$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$
同様に：

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx = \frac{1}{n+1} \cdot 1 = \frac{1}{n+1}$$

したがって：

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$$

すなわち：

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

問題 10 解答: 増減表と最小値

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の増減表と最小値。
1 次導関数：

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

臨界点：$f'(x) = 0$ より $x = -1, 1$
2 次導関数：

$$f''(x) = 6x$$

極値の判定：- $x = -1$：$f''(-1) = -6 < 0$ なので極大- $x = 1$：$f''(1) = 6 > 0$ なので極小
関数値：- $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$ - $f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$
増減表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

最小値：$f(1) = -1$

問題 11 解答: 面積最大化

問題設定の補完：「正方形の底面を持つ直方体で、表面積が一定のとき体積を最大化する」と解釈する。
底面の 1 辺を x、高さを h とし、表面積を S（定数）とする。
制約条件：表面積：$S = x^2 + 4xh$（底面+側面）
これより：$h = \frac{S-x^2}{4x}$
目的関数：体積：$V(x) = x^2 h = x^2 \cdot \frac{S-x^2}{4x} = \frac{x(S-x^2)}{4} = \frac{Sx-x^3}{4}$

最適化：

$$V'(x) = \frac{S - 3x^2}{4}$$

$V'(x) = 0$ より：$S - 3x^2 = 0$、つまり $x = \sqrt{\frac{S}{3}}$
2 次導関数による確認：

$$V''(x) = \frac{-6x}{4} = -\frac{3x}{2} < 0 \quad (x > 0)$$

よって $x = \sqrt{\frac{S}{3}}$ で最大値をとる。

このとき：$h = \frac{S - S/3}{4\sqrt{S/3}} = \frac{2S/3}{4\sqrt{S/3}} = \frac{\sqrt{S/3}}{2}$

結果：$x : h = \sqrt{\frac{S}{3}} : \frac{\sqrt{S/3}}{2} = 2 : 1$
最適な直方体は底面の 1 辺の長さが高さの 2 倍のとき体積が最大となる。