

NAIST(情報科) 入試過去問題集(数学)

修正版 問題編

注意事項

以下の3題中, 2問選択して解答せよ. 括弧内は「入学試験の年度」を示す.
問題閲覧時間は10分(英語を受験する場合を含む), 発表時間は8分(英語を受験する場合は12分).
問題閲覧中のみ, メモ用紙の使用可.

1 線形代数

1.1 問題1 (試問例)

線形空間 V の任意のベクトルを \mathbf{x} , 定数ベクトルを \mathbf{a} とする. このとき, \mathbf{x} を $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ に写す V の写像 f が線形写像でないことを示せ.

1.2 問題2 (2004年1月)

次の 4×4 行列 A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3 問題3 (2007年1月)

$X^n = O$ となる正方行列 X について, $(E - X)^{-1} = E + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ であることを示せ.

1.4 問題4 (2008年1月)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

とする. A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

1.5 問題 5 (2008 年 1 月)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.

(A) $AN = NA$ を示せ.

(B) N^2, N^3 を求めよ.

(C) $(A + N)^k$ を求めよ.

1.6 問題 6 (2008 年 1 月)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする.

(A) A の固有ベクトルを求めよ.

(B) A を対角化せよ.

(C) A^n を求めよ.

1.7 問題 7

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$$

を求めよ.

1.8 問題 8

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

とする.

(A) A^{-1} を求めよ.

(B) $A^{-1} = \alpha A + \beta E$ となる α, β を求めよ.

1.9 問題 9 (試問例)

3つのベクトル,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がある.

- (A) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が互いに直交していることを示せ.
- (B) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の正規直交基底を求めよ.
- (C) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の全てに直交するベクトルを 1 つ求めよ.

1.10 問題 10 (出題年度不明, および 2010 年 1 月)

$n \times n$ 行列 A について, ${}^tA = A$ で, $A^2 = A$ のとき, 固有値は 0 または 1 になることを示せ.

1.11 問題 11 (2009 年 1 月)

- (A) n 次正方行列 A について, $A^k = E$ となる自然数 k が存在するとき, A は正則であることを示せ.
- (B) $A^2 = E$ のときの固有値を求めよ.

1.12 問題 12 (2010 年 1 月)

次の行列について計算せよ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (A) $P^{-1}AP$ を計算せよ. (P は A の固有ベクトルを束ねた行列とする)
- (B) A^n を計算せよ.

1.13 問題 13 (2010 年 1 月)

$$W = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad W^2 + W + E = O$$

のとき

- (A) a, b を求めよ.
- (B) W^3 を求めよ. また $W^{100} + W^{50}$ を求めよ.

1.14 問題 14 (2010 年 1 月)

4 点, $A(2, 1, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-1, 1, 1)$, $D(0, 2, 1)$ からなる四面体について答えよ.

- (A) $\triangle ABC$ の面積.
- (B) $\triangle ABC$ に点 D から降ろす垂線の足.
- (C) 四面体 $ABCD$ の体積.

1.15 問題 15 (2011 年 1 月)

正方行列 A, B について,

$$\frac{d}{dt}AB = \left(\frac{d}{dt}A\right)B + A\left(\frac{d}{dt}B\right)$$

を示せ.

1.16 問題 16 (2011 年 1 月)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

を求めよ.

1.17 問題 17 (2011 年 2 月)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

について, T^n を求めよ. 但し, 行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとき二項定理 $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \cdot A^k \cdot B^{n-k}$ が成り立つことを用いてもよい.

1.18 問題 18 (2012 年 1 月 3 日目)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする.

(A) \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 のなす角を求めよ.

(B) \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 に直交するベクトルを 1 つ求めよ.

1.19 問題 19 (2012 年 1 月 4 日目)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(A) \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 に直交するベクトル \mathbf{x}_3 を求めよ.

(B) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ の線形結合によって $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を表現せよ.

1.20 問題 20 (2012 年 1 月 4 日目)

正方行列 A, B があるとき, $AB - BA = E$ が成り立たないことを, トレース (対角成分の和) に注目して証明せよ.

2 解析学**2.1 問題 1 (試問例)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

を求めよ.

2.2 問題 2 (2003 年 2 月)

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx$$

を求めよ.

2.3 問題 3 (2004 年 1 月)

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

において $\Gamma(0)$, $\Gamma(1)$ を求め, それを元に $\Gamma(n) = (n-1)!$ を証明せよ.

2.4 問題 4 (2007 年 1 月)

$P(x, y)$ と原点の距離を F , $x = 3$ との距離を H とする. $\frac{H}{F} = 2$ のとき, P の軌跡を求めよ.

2.5 問題 5 (2008 年 1 月)

$$f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

とする. $f(x)$ が周期 π の周期関数であることを示し, グラフを描け.

2.6 問題 6 (2008 年 1 月)

初速度 60km/h で等速直線運動している車が $-50[\text{m/s}^2]$ で減速した場合に停止するまでの移動距離を求めよ.

2.7 問題 7 (2008 年 1 月)

$$\int x^n \log x dx$$

を求めよ.

2.8 問題 8

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx$$

を $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ とおいて, 求めよ.

2.9 問題 9

$$\int \sin(\log x) dx$$

を求めよ. $t = \log x$ とする.

2.10 問題 10

$0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ のとき,

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y$$

の軌跡を求めよ.

2.11 問題 11 (試問例)

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2 \frac{df(x)}{dx} - 3f(x) = 0$$

の解で, $f(0) = 0, f'(0) = 4$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

2.12 問題 12 (2009 年 1 月)

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ (3 次式), $g(x) = x^2 - x + 1$ (2 次式) とする.

(A) 2 曲線の交点を全て求めよ.

(B) 2 曲線が囲んで出来る領域の面積を求めよ.

2.13 問題 13 (2010 年 1 月)

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2 \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$$

の解で, $f(0) = 0, f'(0) = 2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

2.14 問題 14 (2010 年 1 月)

(A) $y = x^2$ と $x = y^2$ の交点を求めよ.

(B) 二曲線 $y = x^2$ と $x = y^2$ で囲まれる面積を求めよ.

2.15 問題 15 (2010 年 1 月)

$$\int e^x \sin(x) dx$$

を求めよ.

2.16 問題 16 (2010 年 1 月)

$y = x^3$ 上の点 $A(a, a^3)$ における接線と x 軸との交点を求めよ.

2.17 問題 17 (2010 年 2 月)

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx$$

を求めよ.

2.18 問題 18 (2010 年 3 月)

$$\int (\log x)^2 dx$$

を求めよ.

2.19 問題 19 (2011 年 1 月)

$$(\log_3(3x))^2 - 6\log_3(x) + 2$$

の最小値とそのときの x を求めよ.

2.20 問題 20 (2011 年 1 月)

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^2 \cos \theta d\theta$$

を求めよ.

2.21 問題 21 (2011 年 1 月)

$$y = xe^{-x}$$

を図示せよ.

2.22 問題 22 (2011 年 2 月)

$$xy \frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

のとき, y を x を用いて表せ.

2.23 問題 23 (2012 年 1 月 3 日目)

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ について,

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を証明せよ.

(B) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することを示せ.

2.24 問題 24 (2012 年 1 月 4 日目)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{1/x}$$

を求めよ.

2.25 問題 25 (2011 年 1 月 1 日目)

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^k} dx$$

を求めよ.

2.26 問題 26 (2011 年 1 月 4 日目)

次の微分方程式を解け.

$$xy' \log x = xy$$

2.27 問題 27 (2011 年 1 月 3 日目)

$$f(x) = \int (2x + 1)^{n+1} dx$$

のとき

(A) $t = 2x + 1$ とおいて, $\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

(B) 不定積分を求めよ.

2.28 問題 28 (2011 年 1 月 4 日目)

次の微分方程式を解け.

$$xy' \log x = y \log y$$

2.29 問題 29 (2011 年)

(A) $\sin x$ をマクローリン展開せよ.

(B) $\sin(2011\pi + x)$ を求めよ.

2.30 問題 30 (2011 年)

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx$$

を求めよ.