

# NAIST 入試 数学問題（線形代数・解析）

## 線形代数（Strang 範囲内）

### 問題 1: 正定値行列

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が正定値行列であることを示せ。

### 問題 2: 行列の余因子展開

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

の余因子展開によって行列式を計算せよ。

### 問題 3: グラム・シュミットの直交化

次のベクトル集合

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し、グラム・シュミットの手法により直交ベクトル系を求めよ。

### 問題 4: 線形写像の判定

以下の写像  $T_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) が線形写像であるかどうかを判定せよ。

### 問題 5: 固有値・固有ベクトル

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ。

## 問題 6: 対角化

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

を直交行列  $U$  により対角化せよ。

## 解析 (Lang 範囲内)

## 問題 7: 定積分

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx$$

を計算せよ。

## 問題 8: 分数関数の定積分

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

を計算せよ。

## 問題 9: 対数不等式の面積証明

自然数  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$\frac{1}{n+1} < \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$$

を、面積に注目して証明せよ。

## 問題 10: 増減表と最小値

関数  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  の増減表を描き、最小値を求めよ。

## 問題 11: 面積最大化

正方形の1辺の長さに関する制約条件のもとで、直方体の体積を最大化する問題を微分を用いて解け。