NAIST 入試 数学問題 解答編（線形代数・解析）

1　線形代数（Strang 範囲内）解答

1.1　問題 1 解答: 正定値行列

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が正定値行列であることを示す。

方法 1：固有値による判定
特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 \tag{1}$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 \tag{2}$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \tag{3}$$

固有値：$\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 3 > 0$
すべての固有値が正なので、A は正定値行列である。
方法 2：シルベスターの判定法
主小行列式を計算：

$$M_1 = 2 > 0 \tag{4}$$
$$M_2 = \det(A) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 4 - 1 = 3 > 0 \tag{5}$$

すべての主小行列式が正なので、A は正定値行列である。
方法 3：二次形式による判定
任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して：

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$
$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \tag{7}$$
$$= 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \tag{8}$$
$$= 2\left[\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}\right] > 0 \tag{9}$$

よって A は正定値行列である。

1.2　問題 2 解答: 行列の余因子展開

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子展開による行列式計算。
第 1 行による展開：

$$\det(A) = 2 \cdot \det(1) - 0 \cdot \det(3) \tag{10}$$
$$= 2 \cdot 1 - 0 = 2 \tag{11}$$

第 2 列による展開：

$$\det(A) = -0 \cdot \det(3) + 1 \cdot \det(2) \tag{12}$$
$$= 0 + 1 \cdot 2 = 2 \tag{13}$$

検算（直接計算）：

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 2 \tag{14}$$

答え：$\det(A) = 2$

1.3 問題 3 解答: グラム・シュミットの直交化

ベクトル集合 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をグラム・シュミット法で直交化する。

Step 1：第 1 ベクトルの設定

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Step 2：第 2 ベクトルの直交化

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$$

内積計算：

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \tag{15}$$
$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 \tag{16}$$

したがって：

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

正規化（必要に応じて）：

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2} \tag{20}$$
$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{21}$$

正規直交基底：

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.4　問題 4 解答: 線形写像の判定

線形写像の判定基準：

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$（加法性）
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$（斉次性）

各写像について判定：
1. $T_1(x,y) = (2x+3y, x-y)$
加法性：

$$\begin{aligned} T_1((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= T_1(x_1+x_2, y_1+y_2) &(22)\\ &= (2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2)) &(23)\\ &= (2x_1+3y_1, x_1-y_1) + (2x_2+3y_2, x_2-y_2) &(24)\\ &= T_1(x_1,y_1) + T_1(x_2,y_2) &(25)\end{aligned}$$

斉次性：

$$\begin{aligned} T_1(c(x,y)) = T_1(cx,cy) &= (2cx+3cy, cx-cy) &(26)\\ &= c(2x+3y, x-y) = cT_1(x,y) &(27)\end{aligned}$$

T_1 は**線形写像**である。
2. $T_2(x,y) = (x^2, y)$
斉次性をチェック：

$$\begin{aligned} T_2(c(x,y)) &= T_2(cx,cy) = ((cx)^2, cy) = (c^2x^2, cy) &(28)\\ cT_2(x,y) &= c(x^2,y) = (cx^2, cy) &(29)\end{aligned}$$

$c^2x^2 \neq cx^2$（一般に）なので、T_2 は**非線形写像**である。
3. $T_3(x,y) = (x+1, y)$
加法性をチェック：

$$\begin{aligned} T_3((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= T_3(x_1+x_2, y_1+y_2) &(30)\\ &= ((x_1+x_2)+1, y_1+y_2) &(31)\\ T_3(x_1,y_1)+T_3(x_2,y_2) &= (x_1+1, y_1) + (x_2+1, y_2) &(32)\\ &= (x_1+x_2+2, y_1+y_2) &(33)\end{aligned}$$

$(x_1+x_2)+1 \neq x_1+x_2+2$ なので、T_3 は**非線形写像**である。
4. $T_4(x,y) = (xy, x+y)$
斉次性をチェック：

$$\begin{aligned} T_4(c(x,y)) &= T_4(cx,cy) = (cx\cdot cy, cx+cy) = (c^2xy, c(x+y)) &(34)\\ cT_4(x,y) &= c(xy, x+y) = (cxy, c(x+y)) &(35)\end{aligned}$$

$c^2xy \neq cxy$（一般に）なので、T_4 は**非線形写像**である。
5. $T_5(x,y) = (-y, x)$
これは 90 度回転変換である。行列表現：

$$T_5(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列による変換なので、T_5 は**線形写像**である。
6. $T_6(x,y) = (0,0)$

これは零写像である。任意の線形結合について：

$$T_6(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = (0,0) \tag{36}$$
$$c_1T_6(\mathbf{v}_1) + c_2T_6(\mathbf{v}_2) = c_1(0,0) + c_2(0,0) = (0,0) \tag{37}$$

T_6 は**線形写像**である。
結論：

- 線形写像：T_1, T_5, T_6
- 非線形写像：T_2, T_3, T_4

1.5　問題 5 解答: 固有値・固有ベクトル

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求める。
固有値の計算：
特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0 \tag{38}$$

固有値：$\lambda = 3$（重複度 2）
固有ベクトルの計算：
$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

これより $y = 0$、x は任意。
固有ベクトル：$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$（幾何的重複度 1）
結果：

- 固有値：$\lambda = 3$（代数的重複度 2）
- 固有ベクトル：$\mathbf{v} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

この行列は対角化不可能（ジョルダン標準形が必要）。

1.6　問題 6 解答: 対角化

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列 U により対角化する。
Step 1：固有値の計算
特性方程式：$\det(A - \lambda I) = 0$
第 1 行による展開：

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} - 0 + 2\det\begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{40}$$
$$= (1-\lambda)[\lambda(\lambda+1) - 4] + 2[0 - 2(\lambda+1)] \tag{41}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 4) - 4(\lambda+1) \tag{42}$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \tag{43}$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda+1)^2 \tag{44}$$

固有値：$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$
Step 2：固有ベクトルの計算
$\lambda_1 = 2$ の場合：

$$(A - 2I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \tag{45}$$

解くと：$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ の場合：

$$(A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{46}$$

解くと：$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Step 3：正規化と直交行列の構成
各固有ベクトルを正規化：

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

直交行列：

$$U = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -2/3 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角行列：

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$U^T AU = D$

2　解析（Lang 範囲内）解答

2.1　問題 7 解答: 定積分

$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx$ を計算する。
置換積分：
$u = \log x$ とおく

- $du = \frac{1}{x} dx$

- $x = e$ のとき $u = 1$
- $x = e^2$ のとき $u = 2$

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx = \int_1^2 u\,du \tag{50}$$
$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 \tag{51}$$
$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \tag{52}$$
$$= \frac{3}{2} \tag{53}$$

答え：$\frac{3}{2}$

2.2 問題 8 解答: 分数関数の定積分

$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$ を計算する。

部分分数による変形：

$$\frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \tag{54}$$

積分計算：

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \tag{55}$$
$$= [x - \log(x+1)]_0^1 \tag{56}$$
$$= (1 - \log 2) - (0 - \log 1) \tag{57}$$
$$= 1 - \log 2 \tag{58}$$

答え：$1 - \log 2$

2.3 問題 9 解答: 対数不等式の面積証明

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ を面積により証明する。

証明：

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考える。区間 $[n, n+1]$ において：

右側の不等式： $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \tag{59}$$
$$= \log(n+1) - \log n \tag{60}$$
$$= \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \tag{61}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $[n, n+1]$ で単調減少なので：

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \tag{62}$$

左側の不等式： $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

同様に：

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx = \frac{1}{n+1} \cdot 1 = \frac{1}{n+1} \tag{63}$$

したがって：

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$$

すなわち：

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

2.4 問題 10 解答: 増減表と最小値

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の増減表と最小値。

1 次導関数：

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) \tag{64}$$

臨界点： $f'(x) = 0$ より $x = -1, 1$

2 次導関数：

$$f''(x) = 6x \tag{65}$$

極値の判定：

- $x = -1$：$f''(-1) = -6 < 0$ なので極大
- $x = 1$：$f''(1) = 6 > 0$ なので極小

関数値：

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3 \tag{66}$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 \tag{67}$$

増減表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

最小値： $f(1) = -1$

2.5 問題 11 解答: 最適化問題

底面が正方形で表面積が S（定数）の直方体について、体積を最大化する底面の 1 辺の長さと高さの比を求める。

問題設定：
底面の 1 辺を x、高さを h とする。
制約条件：
表面積：$S = x^2 + 4xh$（底面+側面）
これより：$h = \frac{S-x^2}{4x}$
目的関数：
体積：$V(x) = x^2 h = x^2 \cdot \frac{S-x^2}{4x} = \frac{x(S-x^2)}{4} = \frac{Sx-x^3}{4}$

最適化：

$$V'(x) = \frac{S - 3x^2}{4} \tag{68}$$

$V'(x) = 0$ より：$S - 3x^2 = 0$、つまり $x = \sqrt{\frac{S}{3}}$
2 次導関数による確認：

$$V''(x) = \frac{-6x}{4} = -\frac{3x}{2} < 0 \quad (x > 0) \tag{69}$$

よって $x = \sqrt{\frac{S}{3}}$ で最大値をとる。
このときの高さ：

$$h = \frac{S - S/3}{4\sqrt{S/3}} = \frac{2S/3}{4\sqrt{S/3}} = \frac{S}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{S}} = \frac{\sqrt{3S}}{6} = \frac{\sqrt{S/3}}{2} \tag{70}$$

比の計算：

$$\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{S/3}}{\sqrt{S/3}/2} = 2 \tag{71}$$

結果：
最適な直方体は底面の 1 辺の長さが高さの 2 倍のとき体積が最大となる。
すなわち、$x : h = 2 : 1$