1　インターバルにおいての 5 次元フェルミオン

1.1　インターバルにおいての境界条件

インターバル中での 5 次元自由フェルミオンを考える。フェルミオンについての境界条件を考えるために次の作用を考える。

$$S_F = \int d^4x \int_0^L dy \overline{\Psi}(x,y)(i\Gamma^M \partial_M + M_F)\Psi(x,y)$$

ここで、$M = 0,1,2,3,y$ としていて Γ^M は次の表現をとる。

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \tag{1}$$

$$\Gamma^y = -i\gamma^5 \tag{2}$$

作用原理 $(\delta S_F = 0)$ からディラック方程式が出るように余剰次元方向の境界条件が決められる。

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S_F \\
&= \int d^4x \int_0^L dy \left[\delta\overline{\Psi}(x,y)(i\Gamma^M \partial_M + M_F)\Psi(x,y) + \overline{\Psi}(x,y)(-i\Gamma^M \overleftarrow{\partial}_M + M_F)\delta\Psi(x,y) \right] \\
&\qquad + \int d^4x \overline{\Psi}(x,y)(i\Gamma^y)\delta\Psi(x,y)\Big|_{y=0}^{y=L}
\end{aligned} \tag{3}$$

(3) より 5 次元ディラック方程式

$$(i\Gamma^M \partial_M + M_F)\Psi(x,y) = 0, \tag{4}$$

と、表面項

$$\overline{\Psi}(x,y)(i\Gamma^y)\delta\Psi(x,y)\Big|_{y=0}^{y=L} = 0 \tag{5}$$

が得られる。今、余剰次元の形はインターバルで与えられているので境界点 $y = 0$ と $y = L$ においてはそれぞれ影響を及ぼさないと考えられる。つまり、表面項は次のように書き直せる。

$$\overline{\Psi}(x,y)(i\Gamma^y)\delta\Psi(x,y) = 0 \quad (y = 0, L) \tag{6}$$

ここでは $\delta\Psi(x,y) = \epsilon\Psi(x,y)$ と変換するとする。5 次元フェルミオンを右カイラリティ部分と左カイラリティ部分に分けると、$\Psi(x,y) = \Psi_R(x,y) + \Psi_L(x,y)$ が得られ、それを (6) に代入すると、

$$\begin{aligned}
0 = \overline{\Psi}(x,y)(i\Gamma^y)\delta\Psi(x,y) &= (\overline{\Psi_R}(x,y) + \overline{\Psi_L}(x,y))\gamma^5\epsilon(\Psi_R(x,y) + \Psi_L(x,y)) \\
&= \epsilon(\overline{\Psi_L}\Psi_R - \overline{\Psi_R}\Psi_L) \\
\Longleftrightarrow \qquad & \overline{\Psi_L}\Psi_R - \overline{\Psi_R}\Psi_L = 0 \;\; (y = 0, L)
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで (7) は

$$\begin{aligned}
& \overline{\Psi_L}\Psi_R - \overline{\Psi_R}\Psi_L = 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad & |\Psi_L - iL_0\gamma^0\Psi_R|^2 = |\Psi_L + iL_0\gamma^0\Psi_R|^2 \;\; (y = 0, L)
\end{aligned} \tag{8}$$

と書き直せる。ここで L_0 は正の実数である。実際に (8) の絶対値を展開して計算すると 7 が得られることがわかる。

$$\begin{aligned}
& |\Psi_L - iL_0\gamma^0\Psi_R|^2 = |\Psi_L + iL_0\gamma^0\Psi_R|^2 \\
\Longleftrightarrow \qquad & (\Psi_L^\dagger + iL_0 \underbrace{\Psi_R^\dagger\gamma^0}_{=\overline{\Psi_R}})(\Psi_L - iL_0\gamma^0\Psi_R) = (\Psi_L^\dagger - iL_0 \underbrace{\Psi_R^\dagger\gamma^0}_{=\overline{\Psi_R}})(\Psi_L + iL_0\gamma^0\Psi_R) \\
\Longleftrightarrow \qquad & |\Psi_L|^2 - iL_0 \underbrace{\Psi_L^\dagger\gamma^0}_{\overline{\Psi_L}}\Psi_R + iL_0\overline{\Psi_R}\Psi_L + L_0^2|\Psi_R|^2 = |\Psi_L|^2 + iL_0 \underbrace{\Psi_L^\dagger\gamma^0}_{\overline{\Psi_L}}\Psi_R - iL_0\overline{\Psi_R}\Psi_L + L_0^2|\Psi_R|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \qquad & -2iL_0\overline{\Psi_L}\Psi_R + 2iL_0\overline{\Psi_R}\Psi_L = 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad & \overline{\Psi_L}\Psi_R - \overline{\Psi_R}\Psi_L = 0 \quad (y = 0, L)
\end{aligned} \tag{9}
$$

(8) の左辺と右辺の絶対値が等しいことから、演算子 S ($S^\dagger S = \mathbf{1}$) を用いて書き直すと、

$$
\begin{aligned}
& \Psi_L - iL_0\gamma^0\Psi_R = S(\Psi_L + iL_0\gamma^0\Psi_R) \qquad (S^\dagger S = \mathbf{1}) \\
\Longleftrightarrow \qquad & (\mathbf{1} - S)\Psi_L = iL_0(\mathbf{1} + S)\gamma^0\Psi_R \quad (y = 0, L)
\end{aligned} \tag{10}
$$

(10) は右巻きカイラルフェルミオンと左巻きカイラルフェルミオンが独立でないという式になっている。しかし 4 次元理論に現れる右巻き、左巻きカイラルフェルミオンはローレンツ変換のもとでそれぞれ混ざらないので、左辺と右辺は独立に 0 にならなくてはいけない。つまり、

$$
\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{1} - S)\Psi_L(x, y = 0(L)) = 0 \\ (\mathbf{1} + S)\gamma^0\Psi_R(x, y = 0(L)) = 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_L(x, y = 0(L)) = 0 & (S = -\mathbf{1}) \\ \Psi_R(x, y = 0(L)) = 0 & (S = \mathbf{1}) \end{array} \right. \tag{11}
$$

が得られる。つまり、

$$
\Psi_L(x, y = 0(L)) = 0 \ \ \text{または} \ \ \Psi_R(x, y = 0(L)) = 0 \tag{12}
$$

という条件が得られる。以上の考察から 4 次元カイラルフェルミオンが今回の 5 次元フェルミオン理論から出るためには、以下のタイプに分けられる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{type} - (\mathbf{i}) \quad & \Psi_R(x, 0) = 0 = \Psi_R(x, L) && (13) \\
\mathbf{type} - (\mathbf{ii}) \quad & \Psi_L(x, 0) = 0 = \Psi_L(x, L) && (14) \\
\mathbf{type} - (\mathbf{iii}) \quad & \Psi_R(x, 0) = 0 = \Psi_L(x, L) && (15) \\
\mathbf{type} - (\mathbf{iv}) \quad & \Psi_L(x, 0) = 0 = \Psi_R(x, L) && (16)
\end{aligned}
$$

1.2 フェルミオンの 4 次元スペクトラム

1.2.1 $\Psi_R(x, 0) = 0 = \Psi_R(x, L)$

ここでは type(i) の境界条件を持ったインターバル中の 5 次元フェルミオンの 4 次元スペクトラムを調べる。5 次元カイラルフェルミオン $\Psi(x, y)$ を次のように展開する。

$$
\Psi(x, y) = \sum_n \{\psi_R^{(n)}(x) f_n(y) + \psi_L^{(n)}(x) g_n(y)\} \tag{17}
$$

ここで、$\{f_n(y)\}$ と $\{g_n(y)\}$ はエルミート演算子 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger (\mathcal{D} = \partial_y + M_F, \mathcal{D}^\dagger = -\partial_y + M_F)$ の固有関数となっている。

$$
\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} f_n(y) = M_n^2 f_n(y) \\ \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger g_n(y) = M_n^2 g_n(y) \end{array} \right. \tag{18}
$$

$\{f_n(y)\}$ と $\{g_n(y)\}$ は完全形を成し、次のような量子力学的超対称性関係を満たす。

$$
\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} f_n(y) = M_n g_n(y) \\ \mathcal{D}^\dagger g_n(y) = M_n f_n(y) \end{array} \right. \tag{19}
$$

モード関数の境界条件は $\Psi_R(x, 0) = 0 = \Psi_R(x, L)$ から得られる。

$$
\left\{ \begin{array}{l} f_n(0) = 0 = f_n(L) \\ \mathcal{D}^\dagger g_n(0) = 0 = \mathcal{D}^\dagger g_n(L) \end{array} \right. \tag{20}
$$

これらを基底状態と励起状態で解いたものをまとめると、

5 次元フェルミオンの 4 次元スペクトラム ($\Psi_R(0) = 0 = \Psi_R(L)$)

境界条件：$\Psi_R(x,0) = 0 = \Psi_R(x,L)$ の時のモード関数 $\{f_n(y)\}$,$\{g_n(y)\}$ と固有値 M_n^2 の関係基底状態：

$$M_0^2 = 0 \tag{21}$$

$$f_0(y) : \text{解なし} \ (= 0) \tag{22}$$

$$g_0(y) = \sqrt{\frac{2M_F}{e^{2M_F L} - 1}} e^{M_F y} \tag{23}$$

励起状態：

$$M_n^2 = M_F^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{24}$$

$$f_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \tag{25}$$

$$g_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L\left\{M_F^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}}} \left[M_F \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + \left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right] \tag{26}$$

1.2.2 $\Psi_L(x,0) = 0 = \Psi_L(x,L)$

（詳細は後日）

5 次元フェルミオンの 4 次元スペクトラム ($\Psi_L(0) = 0 = \Psi_L(L)$)

境界条件：$\Psi_L(x,0) = 0 = \Psi_L(x,L)$ の時のモード関数 $\{f_n(y)\}$,$\{g_n(y)\}$ と固有値 M_n^2 の関係基底状態：

$$M_0^2 = 0 \tag{27}$$

$$f_0(y) = \sqrt{\frac{2M_F}{-e^{-2M_F L} + 1}} e^{-M_F y} \tag{28}$$

$$g_0(y) : \text{解なし} \ (= 0) \tag{29}$$

励起状態：

$$M_n^2 = M_F^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{30}$$

$$f_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L\left\{M_F^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}}} \left[M_F \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) - \left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right] \tag{31}$$

$$g_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \tag{32}$$

1.3 点上相互作用を含めたフェルミオンの 4 次元スペクトラム

後日

2 フェルミオン質量階層性

2.1 cosh モデル

作用は以下のものを考える。

$$\begin{aligned} S_F = \int d^4x \int_0^L dy \{ & \bar{\Psi}(x,y)_{Q,doublet}(i\Gamma^M D_M^{Q,d} + M_Q)\Psi(x,y)_{Q,doublet} \\ & + \bar{\Psi}(x,y)_{U,singlet}(i\Gamma^M D_M^{U,s} + M_U)\Psi(x,y)_{U,singlet} \\ & + \bar{\Psi}(x,y)_{D,singlet}(i\Gamma^M D_M^{D,s} + M_D)\Psi(x,y)_{D,singlet} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\bar{\Psi}(x,y)_{L,doublet}(i\Gamma^M D_M^{L,s}+M_L)\Psi(x,y)_{L,doublet} \\
&+\bar{\Psi}(x,y)_{E,singlet}(i\Gamma^M D_M^{E,s}+M_E)\Psi(x,y)_{E,singlet} \\
&+g_U\bar{\Psi}(x,y)_{Q,doublet}\Psi(x,y)_{U,singlet}\widetilde{H}(x,y) && (33)\\
&+g_D\bar{\Psi}(x,y)_{Q,doublet}\Psi(x,y)_{D,singlet}H(x,y) && (34)\\
&+g_E\bar{\Psi}(x,y)_{L,doublet}\Psi(x,y)_{E,singlet}H(x,y)+\text{h.c.} && (35)
\end{aligned}
$$

$\Psi(x,y)_{Q(L),doublet}$ は SU(2)2 重項であり、$\Psi(x,y)_{U(D,E),singlet}$は SU(2)1 重項 である。$\Psi(x,y)_{Q(L),doublet} = \begin{pmatrix} \Psi(x,y)_{U(N)} \\ \Psi(x,y)_{D(E)} \end{pmatrix}$, $\Psi(x,y)_{U(D,E),singlet} = \Psi'(x,y)_{U(D,E)}$ とも表される。($\Psi(x,y)_U$: 5 次元のアップタイプクオーク, Ψ(x,y)$_D$:5 次 g_U, g_D, g_E は 5 次元の湯川結合定数である。また $H(x,y)$ は SU(2)2 重項のスカラー場の真空期待値であり、$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ と表される。今回は $v(y) = v\cosh M_H(y-y_0)$ $(0 \le y_0 \le L)$ とする。今考えたいのは質量項の (33),(34) であるので、

$$
\begin{aligned}
S_{F,\text{massterm}} = \int d^4x \int_0^L dy\{&g_U\bar{\Psi}(x,y)_{Q,doublet}\Psi(x,y)_{U,singlet}\widetilde{H}(x,y) \\
&+g_D\bar{\Psi}(x,y)_{Q,doublet}\Psi(x,y)_{D,singlet}H(x,y) \\
&+g_E\bar{\Psi}(x,y)_{L,doublet}\Psi(x,y)_{E,singlet}H(x,y)+\text{h.c.}\} \qquad (36)
\end{aligned}
$$

だけを考える。今回余剰次元方向 y の $0 \le y \le L$ の範囲で $y = L_1, L_2$ $(0 < L_1 < L_2 < L)$ に点上相互作用を加えたものを考える。次の境界条件から 3 世代のカイラルマスレスゼロモードが出てくる。

$$
\Psi_R(y) = 0 \quad (y = 0, L_1 \pm \epsilon, L_2 \pm \epsilon, L) \qquad (37)
$$

または

$$
\Psi_L(y) = 0 \quad (y = 0, L_1 \pm \epsilon, L_2 \pm \epsilon, L) \qquad (38)
$$

ここで ϵ は正の無限小量である。$\Psi(x,y)$ を次のように展開する。

$$
\Psi(x,y) = \Psi_R(x,y) + \Psi_L(x,y) = \sum_n \psi_R^{(n)}(x)\mathcal{F}_{\psi_R}^{(n)}(y) + \sum_n \psi_L^{(n)}(x)\mathcal{G}_{\psi_L}^{(n)}(y) \qquad (39)
$$

(39) のゼロモード $\mathcal{G}_{i,\psi_L}^{(0)}(y)$ $\left(\mathcal{F}_{i,\psi_L}^{(0)}(y)\right)$ $(i = 1,2,3,)$ は境界条件により 3 重縮退しており、3 世代のマスレスカイラルフェルミオン $\psi_{i,L}^{(0)}(x)$ $\left(\psi_{i,R}^{(0)}(x)\right)$ を得ることができる。

$$
\Psi(x,y) = \Psi_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{3}\left\{\psi_{i,R}^{(n)}\mathcal{F}_{i,\psi_R}^{(n)}(y) + \psi_{i,L}^{(n)}\mathcal{G}_{i,\psi_R}^{(n)}(y)\right\} \qquad (40)
$$

$$
\Psi_0(x,y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \psi_{i,R}^{(0)}\mathcal{F}_{i,\psi_R}^{(0)}(y) & \left(\Psi_R(y) = 0 \ (y = 0, L_1 \pm \epsilon, L_2 \pm \epsilon, L)\right) \\ \sum_{i=1}^3 \psi_{i,L}^{(0)}\mathcal{G}_{i,\psi_R}^{(0)}(y) & \left(\Psi_L(y) = 0 \ (y = 0, L_1 \pm \epsilon, L_2 \pm \epsilon, L)\right) \end{cases} \qquad (41)
$$

1 章の議論から

$$
\mathcal{G}_{i,\psi_L}^{(0)}(y) = \sqrt{\frac{2M_F}{e^{2M_F l_i}-1}}e^{M_F(y-L_{i-1})}[\theta(y-L_{i-1})\theta(L_i-y)] \qquad (42)
$$

$$
\mathcal{F}_{i,\psi_R}^{(0)}(y) = \sqrt{\frac{2M_F}{e^{2M_F l_i}-1}}e^{-M_F(y-L_{i-1})}[\theta(y-L_{i-1})\theta(L_i-y)] \qquad (43)
$$

ここで $l_i = L_i - L_{i-1}$ $(i = 1,2,3 : L_3 = L,\ L_0 = L)$ であり、$\theta(y)$ は階段関数である。$\mathcal{F}_{i,\psi_R}^{(n)}(y), \mathcal{G}_{i,\psi_R}^{(n)}(y)$ は直行関係を満たす。

$$\int_0^L dy\big(\mathcal{F}^{(n)}_{i,\psi_R}(y)\big)^*\mathcal{F}^{(m)}_{j,\psi_R}(y)=\delta_{n,m}\delta_{i,j} \tag{44}$$

$$\int_0^L dy\big(\mathcal{G}^{(n)}_{i,\psi_R}(y)\big)^*\mathcal{G}^{(m)}_{j,\psi_R}(y)=\delta_{n,m}\delta_{i,j} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{45}$$

$\mathcal{G}^{(0)}_{i,\psi_L}(y),\mathcal{F}^{(0)}_{i,\psi_L}(y)$ を図に表した。

これらの関係を用いて (36) を計算すると、

$$\begin{aligned}
S_{F,\mathrm{massterm}} &= \int d^4x\int_0^L dy\{g_U\bar{\Psi}(x,y)_U\Psi'(x,y)_U\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_D\bar{\Psi}(x,y)_D\Psi'(x,y)_D\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_E\bar{\Psi}(x,y)_E\Psi'(x,y)_E\frac{v(y)}{\sqrt{2}}+\mathrm{h.c.}\}\\
&=\int d^4x\int_0^L dy\{g_U\bar{\psi}^{(0)}_{UL}(x)_1\mathcal{G}^{(0)}_{1,Q}(y)\psi^{(0)}_{UR}(x)_1\mathcal{F}^{(0)}_{1,U}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_U\bar{\psi}^{(0)}_{UL}(x)_2\mathcal{G}^{(0)}_{2,Q}(y)\psi^{(0)}_{UR}(x)_2\mathcal{F}^{(0)}_{2,U}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_U\bar{\psi}^{(0)}_{UL}(x)_3\mathcal{G}^{(0)}_{3,Q}(y)\psi^{(0)}_{UR}(x)_3\mathcal{F}^{(0)}_{3,U}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_D\bar{\psi}^{(0)}_{DL}(x)_1\mathcal{G}^{(0)}_{1,Q}(y)\psi^{(0)}_{DR}(x)_1\mathcal{F}^{(0)}_{1,D}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_D\bar{\psi}^{(0)}_{DL}(x)_2\mathcal{G}^{(0)}_{2,Q}(y)\psi^{(0)}_{DR}(x)_2\mathcal{F}^{(0)}_{2,D}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_D\bar{\psi}^{(0)}_{DL}(x)_3\mathcal{G}^{(0)}_{3,Q}(y)\psi^{(0)}_{DR}(x)_3\mathcal{F}^{(0)}_{3,D}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_E\bar{\psi}^{(0)}_{LL}(x)_1\mathcal{G}^{(0)}_{1,L}(y)\psi^{(0)}_{ER}(x)_1\mathcal{F}^{(0)}_{1,E}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_E\bar{\psi}^{(0)}_{LL}(x)_2\mathcal{G}^{(0)}_{2,L}(y)\psi^{(0)}_{ER}(x)_2\mathcal{F}^{(0)}_{2,E}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+g_E\bar{\psi}^{(0)}_{LL}(x)_3\mathcal{G}^{(0)}_{3,L}(y)\psi^{(0)}_{ER}(x)_3\mathcal{F}^{(0)}_{3,E}(y)\frac{v(y)}{\sqrt{2}}+\mathrm{h.c.}\}\\
&\quad+\mathrm{KKmodes} \qquad (46)\\
&=\int d^4x\Big\{\bar{u}(x)u(x)g_U\sqrt{\frac{2M_Q}{e^{2M_QL_1}-1}}\sqrt{\frac{2M_U}{1-e^{-2M_UL_1}}}\int_0^{L_1}dye^{M_Qy}e^{-M_Uy}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{c}(x)c(x)g_U\sqrt{\frac{2M_Q}{e^{2M_Q(L_2-L_1)}-1}}\sqrt{\frac{2M_U}{1-e^{-2M_U(L_2-L_1)}}}\int_{L_1}^{L_2}dye^{M_Q(y-L_1)}e^{-M_U(y-L_1)}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{t}(x)t(x)g_U\sqrt{\frac{2M_Q}{e^{2M_Q(L-L_2)}-1}}\sqrt{\frac{2M_U}{1-e^{-2M_U(L-L_2)}}}\int_{L_2}^{L}dye^{M_Q(y-L_2)}e^{-M_U(y-L_2)}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{d}(x)d(x)g_D\sqrt{\frac{2M_Q}{e^{2M_QL_1}-1}}\sqrt{\frac{2M_D}{1-e^{-2M_DL_1}}}\int_0^{L_1}dye^{M_Qy}e^{-M_Dy}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{s}(x)s(x)g_D\sqrt{\frac{2M_Q}{e^{2M_Q(L_2-L_1)}-1}}\sqrt{\frac{2M_D}{1-e^{-2M_D(L_2-L_1)}}}\int_{L_1}^{L_2}dye^{M_Q(y-L_1)}e^{-M_D(y-L_1)}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{b}(x)b(x)g_D\sqrt{\frac{2M_Q}{e^{2M_Q(L-L_2)}-1}}\sqrt{\frac{2M_D}{1-e^{-2M_D(L-L_2)}}}\int_{L_2}^{L}dye^{M_Q(y-L_2)}e^{-M_D(y-L_2)}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{e}(x)e(x)g_E\sqrt{\frac{2M_L}{e^{2M_LL_1}-1}}\sqrt{\frac{2M_E}{1-e^{-2M_EL_1}}}\int_0^{L_1}dye^{M_Ly}e^{-M_Ey}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\\
&\quad+\bar{\mu}(x)\mu(x)g_E\sqrt{\frac{2M_L}{e^{2M_L(L_2-L_1)}-1}}\sqrt{\frac{2M_E}{1-e^{-2M_E(L_2-L_1)}}}\int_{L_1}^{L_2}dye^{M_L(y-L_1)}e^{-M_E(y-L_1)}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$+\bar{\tau}(x)\tau(x)g_E\sqrt{\frac{2M_L}{e^{2M_L(L-L_2)}-1}}\sqrt{\frac{2M_E}{1-e^{-2M_E(L-L_2)}}}\int_{L_2}^{L}dye^{M_L(y-L_2)}e^{-M_E(y-L_2)}\frac{v\cosh M_H(y-y_0)}{\sqrt{2}}\Big\}$$
$$+\,\mathrm{KKmodes} \tag{47}$$

それぞれの粒子の質量は

$$m_u=g_U\frac{v\sqrt{2}}{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_QL_1}-1}}\sqrt{\frac{M_U}{-e^{-2M_UL_1}+1}}\Big[(M_Q-M_U)e^{(M_Q-M_U)L_1}\cosh M_H(L_1-y_0)$$
$$+(-M_Q+M_U)\cosh(M_Hy_0)-M_He^{(M_Q-M_U)L_1}\sinh M_H(L_1-y_0)-M_H\sinh M_Hy_0\Big]$$
$$m_c=g_U\frac{v\sqrt{2}}{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L_2-L_1)}-1}}\sqrt{\frac{M_U}{-e^{-2M_U(L_2-L_1)}+1}}\Big[(M_Q-M_U)e^{(M_Q-M_U)(L_2-L_1)}\cosh M_H(L_2-y_0)$$
$$+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(L_1-y_0)-M_He^{(M_Q-M_U)(L_2-L_1)}\sinh M_H(L_2-y_0)$$
$$+M_H\sinh M_H(L_1-y_0)\Big]$$
$$m_t=g_U\frac{v\sqrt{2}}{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L-L_2)}-1}}\sqrt{\frac{M_U}{-e^{-2M_U(L-L_2)}+1}}\Big[(M_Q-M_U)e^{(M_Q-M_U)(L-L_2)}\cosh M_H(L-y_0)$$
$$+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(L_2-y_0)-M_He^{(M_Q-M_U)(L-L_2)}\sinh M_H(L-y_0)$$
$$+M_H\sinh M_H(L_2-y_0)\Big]$$
$$m_d=g_D\frac{v\sqrt{2}}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_QL_1}-1}}\sqrt{\frac{M_D}{-e^{-2M_DL_1}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{(M_Q-M_D)L_1}\cosh M_H(L_1-y_0)$$
$$+(-M_Q+M_D)\cosh(M_Hy_0)-M_He^{(M_Q-M_D)L_1}\sinh M_H(L_1-y_0)-M_H\sinh M_Hy_0\Big]$$
$$m_s=g_D\frac{v\sqrt{2}}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L_2-L_1)}-1}}\sqrt{\frac{M_D}{-e^{-2M_D(L_2-L_1)}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{(M_Q-M_D)(L_2-L_1)}\cosh M_H(L_2-y_0)$$
$$+(-M_Q+M_D)\cosh M_H(L_1-y_0)-M_He^{(M_Q-M_D)(L_2-L_1)}\sinh M_H(L_2-y_0)$$
$$+M_H\sinh M_H(L_1-y_0)\Big]$$

$$m_b=g_D\frac{v\sqrt{2}}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L-L_2)}-1}}\sqrt{\frac{M_D}{-e^{-2M_D(L-L_2)}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{(M_Q-M_D)(L-L_2)}\cosh M_H(L-y_0)$$
$$+(-M_Q+M_D)\cosh M_H(L_2-y_0)-M_He^{(M_Q-M_D)(L-L_2)}\sinh M_H(L-y_0)$$
$$+M_H\sinh M_H(L_2-y_0)\Big]$$
$$m_e=g_E\frac{v\sqrt{2}}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{e^{2M_LL_1}-1}}\sqrt{\frac{M_E}{-e^{-2M_EL_1}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{(M_L-M_E)L_1}\cosh M_H(L_1-y_0)$$
$$+(-M_L+M_E)\cosh(M_Hy_0)-M_He^{(M_L-M_E)L_1}\sinh M_H(L_1-y_0)-M_H\sinh M_Hy_0\Big]$$
$$m_\mu=g_E\frac{v\sqrt{2}}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{e^{2M_L(L_2-L_1)}-1}}\sqrt{\frac{M_E}{-e^{-2M_E(L_2-L_1)}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{(M_L-M_E)(L_2-L_1)}\cosh M_H(L_2-y_0)$$
$$+(-M_L+M_E)\cosh M_H(L_1-y_0)-M_He^{(M_L-M_E)(L_2-L_1)}\sinh M_H(L_2-y_0)$$
$$+M_H\sinh M_H(L_1-y_0)\Big]$$
$$m_\tau=g_E\frac{v\sqrt{2}}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{e^{2M_L(L-L_2)}-1}}\sqrt{\frac{M_E}{-e^{-2M_E(L-L_2)}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{(M_L-M_E)(L-L_2)}\cosh M_H(L-y_0)$$
$$+(-M_L+M_E)\cosh M_H(L_2-y_0)-M_He^{(M_L-M_E)(L-L_2)}\sinh M_H(L-y_0)$$
$$+M_H\sinh M_H(L_2-y_0)\Big]$$

$L_1 = L_2 = L/3$ の時、

$$m_u = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_U)\cosh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H \sinh M_H y_0\Big]$$

$$m_c = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_U)\cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ M_H \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big]$$

$$m_t = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_U)\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$m_d = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\cosh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H \sinh M_H y_0\Big]$$

$$m_s = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ M_H \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big]$$

$$m_b = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$m_e = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{\frac{2M_L L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_L - M_E) e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_L + M_E)\cosh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H \sinh M_H y_0\Big]$$

$$m_\mu = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{\frac{2M_L L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_L - M_E) e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_L + M_E)\cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ M_H \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big]$$

$$m_\tau = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{\frac{2M_L L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_L - M_E) e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_L + M_E)\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$

$$+ M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

数値計算で使う表式を以下に示した。

$$m_t = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$

$$+ (-M_Q + M_U) \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$

$$+ M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$= g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2} \sqrt{\frac{M_Q L}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U L}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - dL)$$

$$+ (-M_Q L + M_U L) \cosh M_H(\frac{2L}{3} - dL) - M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - dL)$$

$$+ M_H L \sinh M_H(\frac{2L}{3} - dL)\Big]$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{2}}{(a-b)^2 - c^2} \sqrt{\frac{a}{e^{\frac{2a}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{b}{-e^{-\frac{2b}{3}} + 1}} \Big[(a-b) e^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(c - cd)$$

$$+ (-a+b) \cosh(\frac{2c}{3} - cd) - c e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(c - cd)$$

$$+ c \sinh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \tag{48}$$

$$\frac{m_u}{m_t} = \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) + (-M_Q + M_U) \cosh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) \tag{49}$$

$$- M_H \sinh M_H y_0\Big] \Big/ \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0) + (-M_Q + M_U) \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$

$$- M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0) + M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$= \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H \frac{L}{3} - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L) \cosh(M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H \frac{L}{3} - M_H dL) - M_H L \sinh M_H dL\Big] \Big/ \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL)$$

$$+ (-M_Q L + M_U L) \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL) - M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$= \Big[(a-b) e^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(\frac{c}{3} - cd) + (-a+b) \cosh(cd) - c e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(\frac{c}{3} - cd) - c \sinh cd\Big]$$

$$\Big/ \Big[(a-b) e^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(c - cd) + (-a+b) \cosh(\frac{2c}{3} - cd) - c e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(c - cd) + c \sinh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \tag{50}$$

$$\frac{m_c}{m_t} = \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) + (-M_Q + M_U) \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$

$$+ M_H \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big] \Big/ \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0) + (-M_Q + M_U) \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$

$$- M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0) + M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$= \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L) \cosh(M_H \frac{L}{3} - M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$\Big/ \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L) \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$= \Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(\frac{2c}{3}-cd)+(-a+b)\cosh(\frac{c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(\frac{2c}{3}-cd)+c\sinh(\frac{c}{3}-cd)\Big]$$

$$\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+(-a+b)\cosh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+c\sinh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \quad (51)$$

$$\frac{m_d}{m_t} = \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_D}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)$$

$$+(-M_Q+M_D)\cosh(M_Hy_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)-M_H\sinh M_Hy_0\Big]$$

$$\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)$$

$$+M_H\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$

$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_QL-M_DL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_DL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_QL-M_DL)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)$$

$$+(-M_QL+M_DL)\cosh(M_HdL)-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)-M_HL\sinh M_HdL\Big]$$

$$\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+(-M_QL+M_UL)\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)$$

$$-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+M_HL\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]$$

$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-f)^2-c^2}\sqrt{\frac{f}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2f}{3}}+1}}\Big[(a-f)e^{\frac{(a-f)}{3}}\cosh(\frac{c}{3}-cd)+(-a+f)\cosh(cd)-ce^{\frac{(a-f)}{3}}\sinh(\frac{c}{3}-cd)-c\sinh cd\Big]$$

$$\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+(-a+b)\cosh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+c\sinh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \quad (52)$$

$$\frac{m_s}{m_t} = \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_D}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)$$

$$+(-M_Q+M_D)\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)+M_H\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)\Big]$$

$$\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)$$

$$+M_H\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$

$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_QL-M_DL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_DL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_QL-M_DL)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)$$

$$+(-M_QL+M_DL)\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)+M_HL\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)\Big]$$

$$\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+(-M_QL+M_UL)\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)$$

$$-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+M_HL\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]$$

$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-f)^2-c^2}\sqrt{\frac{f}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2f}{3}}+1}}\Big[(a-f)e^{\frac{(a-f)}{3}}\cosh(\frac{2c}{3}-cd)+(-a+f)\cosh(c\frac{L}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-f)}{3}}\sinh(\frac{2c}{3}-cd)$$

$$+c\sinh(\frac{c}{3}-cd)\Big]\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+(-a+b)\cosh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+c\sinh(\frac{2c}{3}-cd)\Big]$$

(53)

$$\frac{m_b}{m_t} = \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_D}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)$$

$$
\begin{aligned}
&+(-M_Q+M_D)\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)+M_H\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]\\
&\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)\\
&+M_H\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]\\
=&\frac{g_D}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_QL-M_DL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_DL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_QL-M_DL)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)\\
&+(-M_QL+M_DL)\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+M_HL\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]\\
&\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+(-M_QL+M_UL)\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\\
&-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+M_HL\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]\\
=&\frac{g_D}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-f)^2-c^2}\sqrt{\frac{f}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2f}{3}}+1}}\Big[(a-f)e^{\frac{(a-f)}{3}}\cosh(c-cd)+(-a+f)\cosh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-f)}{3}}\sinh(c-cd)\\
&+c\sinh(\frac{2c}{3}-cd)\Big]\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+(-a+b)\cosh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+c\sinh(\frac{2c}{3}-cd)\Big]
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{m_e}{m_t}=&\frac{g_E}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{M_Q}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_E}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)\\
&+(-M_L+M_E)\cosh(M_Hy_0)-M_He^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)-M_H\sinh M_Hy_0\Big]\\
&\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)\\
&+M_H\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]\\
=&\frac{g_E}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_LL-M_EL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_LL}{M_QL}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_EL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}\\
&\times\Big[(M_LL-M_EL)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)+(-M_LL+M_EL)\cosh(M_HdL)\\
&-M_HLe^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)-M_HL\sinh M_HdL\Big]\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)\\
&+(-M_QL+M_UL)\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+M_HL\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]\\
=&\frac{g_E}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(g-h)^2-c^2}\sqrt{\frac{g}{a}\frac{-e^{-\frac{2a}{3}}+1}{-e^{-\frac{2g}{3}}+1}}\sqrt{\frac{h}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2h}{3}}+1}}\Big[(g-h)e^{\frac{(g-h)}{3}}\cosh(\frac{c}{3}-cd)+(-g+h)\cosh(cd)\\
&-ce^{\frac{(g-h)}{3}}\sinh(\frac{c}{3}-cd)-c\sinh cd\Big]\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+(-a+b)\cosh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)\\
&+c\sinh(\frac{2c}{3}-cd)\Big]
\end{aligned}
\tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{m_\mu}{m_t}=&\frac{g_E}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{M_Q}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_E}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\\
&+(-M_L+M_E)\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)+M_H\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)\Big]\\
&\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)
\end{aligned}
$$

$$+ M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$= \frac{g_E}{g_U} \frac{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2}{(M_L L - M_E L)^2 - M_H^2 L^2} \sqrt{\frac{M_L L}{M_Q L} \frac{-e^{-\frac{2M_Q L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_L L}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{M_E L}{M_U L} \frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}}$$

$$\Big[(M_L L - M_E L) e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL) + (-M_L L + M_E L) \cosh(M_H \frac{L}{3} - M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_L - M_E)L}{3}} \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$\Big/ \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L) \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$= \frac{g_E}{g_U} \frac{(a-b)^2 - c^2}{(g-h)^2 - c^2} \sqrt{\frac{g}{a} \frac{-e^{-\frac{2a}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2g}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{h}{b} \frac{-e^{-\frac{2b}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2h}{3}} + 1}} \Big[(g-h) e^{\frac{(g-h)}{3}} \cosh(\frac{2c}{3} - cd) + (-g+h) \cosh(c\frac{L}{3} - cd)$$

$$- c e^{\frac{(g-h)}{3}} \sinh(\frac{2c}{3} - cd) + c \sinh(\frac{c}{3} - cd)\Big] \Big/ \Big[(a-b) e^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(c - cd) + (-a+b) \cosh(\frac{2c}{3} - cd)$$

$$- c e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(c - cd) + c \sinh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \tag{56}$$

$$\frac{m_\tau}{m_t} = \frac{g_E}{g_U} \frac{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{M_Q} \frac{-e^{-\frac{2M_Q L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_L L}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{M_E}{M_U} \frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$

$$+ (-M_Q + M_D) \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0) + M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$\Big/ \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0) + (-M_Q + M_U) \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$

$$+ M_H \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

$$= \frac{g_E}{g_U} \frac{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2}{(M_L L - M_E L)^2 - M_H^2 L^2} \sqrt{\frac{M_L L}{M_Q L} \frac{-e^{-\frac{2M_Q L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_L L}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{M_E L}{M_U L} \frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}}$$

$$\times \Big[(M_Q L - M_D L) e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_D L) \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$\Big/ \Big[(M_Q L - M_U L) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L) \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)$$

$$- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + M_H L \sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$= \frac{g_E}{g_U} \frac{(a-b)^2 - c^2}{(g-h)^2 - c^2} \sqrt{\frac{g}{a} \frac{-e^{-\frac{2a}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2g}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{h}{b} \frac{-e^{-\frac{2b}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2h}{3}} + 1}} \Big[(g-h) e^{\frac{(g-h)}{3}} \cosh(c - cd) + (-g+h) \cosh(c\frac{2L}{3} - cd)$$

$$- c e^{\frac{(g-h)}{3}} \sinh(c - cd) + c \sinh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \Big/ \Big[(a-b) e^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(c - cd) + (-a+b) \cosh(\frac{2c}{3} - cd)$$

$$- c e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(c - cd) + c \sinh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \tag{57}$$

ここで単位系は自然単位系を用いている。また無次元量のパラメータを $M_Q L = a, M_U L = b, M_H L = c, \frac{y_0}{L} = d, M_D L = f, M_L L = g, M_E L = h, g_U v = \alpha$ のように定義した。g_U, g_D, g_E は全て質量次元 $-\frac{1}{2}$ であり、v は質量次元 $\frac{3}{2}$ である。g_U, g_D, g_E は大きさがほぼ等しいとして $\frac{g_D}{g_U} = \frac{g_E}{g_U} = 1$ とする。パラメータの数は $a, b, c, d, f, g, h, \alpha$ の 8 個である。

数値を代入していく前にそれぞれの質量の元となった関数を詳しく見ていく。(46) より、アップタイプクォークの質量の元となるモード関数は $\mathcal{G}^{(0)}_{i,Q}(y), \mathcal{F}^{(0)}_{i,U}(y), \frac{v(y)}{\sqrt{2}}$ であることがわかる。(42),(43),$v(y) = v \cosh M_H(y - y_0)$ より、

それぞれの世代に寄与する関数のグラフを表すと、

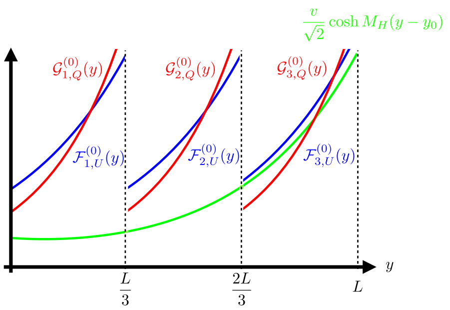

図 1　アップタイプクォークの質量に寄与する関数のグラフ（$M_Q > 0, M_U < 0, |M_Q| > |M_U|$）

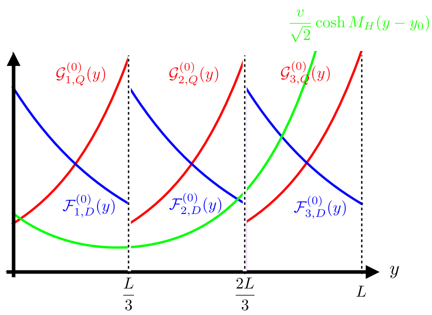

図 2　ダウンタイプクォークの質量に寄与する関数のグラフ（図 1 の時よりも M_H と y_0 を大きくした。$M_Q > M_D > 0$）

次にトップクオークとアップ、チャームクオークの比の変数 (M_Q, M_U, M_H, y_0) を 1 つずつ動かした時のグラフを下に表した。

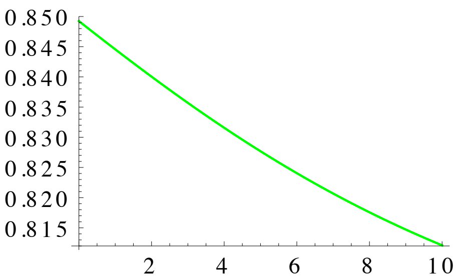

図 3　M_Q を変化させた時の $\frac{m_u}{m_t}$

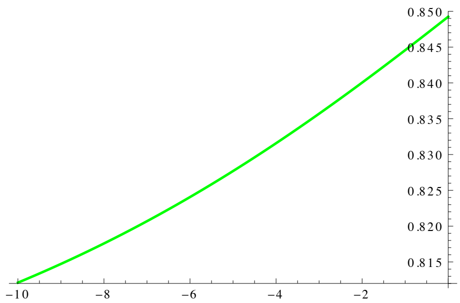

図 4　M_U を変化させた時の $\frac{m_u}{m_t}$

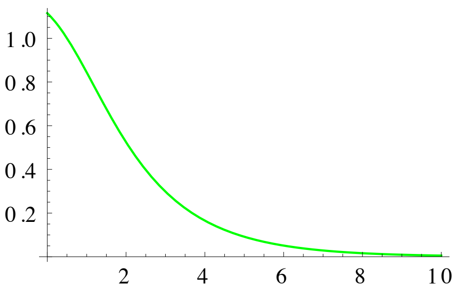

図 5　M_H を変化させた時の $\frac{m_u}{m_t}$

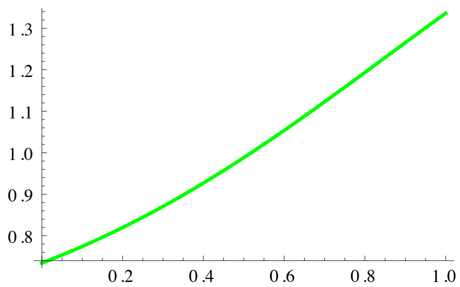

図 6　y_0 を変化させた時の $\frac{m_u}{m_t}$

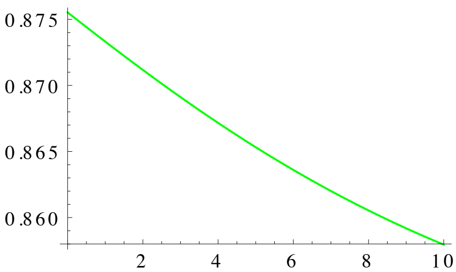

図 7　M_Q を変化させた時の $\frac{m_c}{m_t}$

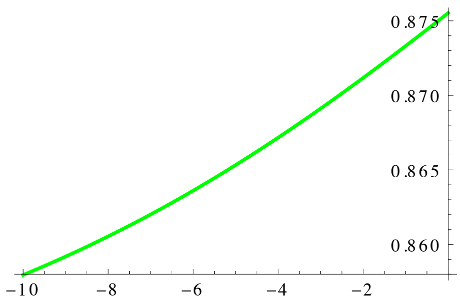

図 8　M_U を変化させた時の $\frac{m_c}{m_t}$

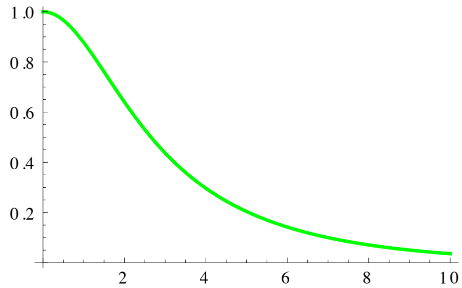

図 9　M_H を変化させた時の $\frac{m_c}{m_t}$

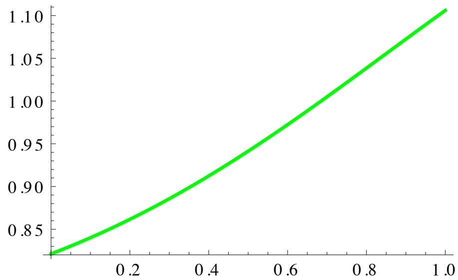

図 10　y_0 を変化させた時の $\frac{m_c}{m_t}$

トップクオークとダウン、ストレンジ、ボトムクオークの比を変数 $(M_Q, M_U, M_H, y_0, M_D)$ を一つずつ動かした時のグラフを下に表した。

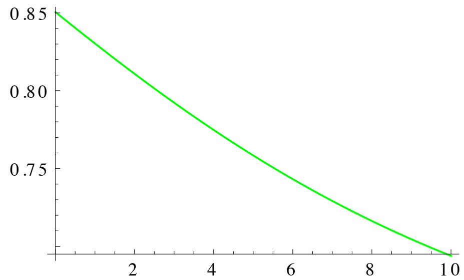

図 11　M_Q を変化させた時の $\frac{m_d}{m_t}$

図 12　M_U を変化させた時の $\frac{m_d}{m_t}$

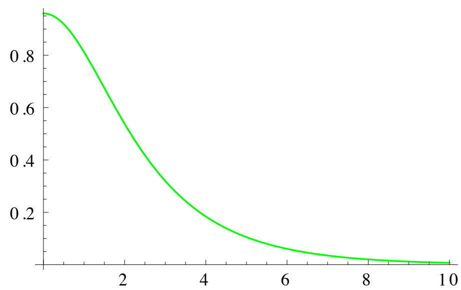

図 13　M_H を変化させた時の $\frac{m_d}{m_t}$

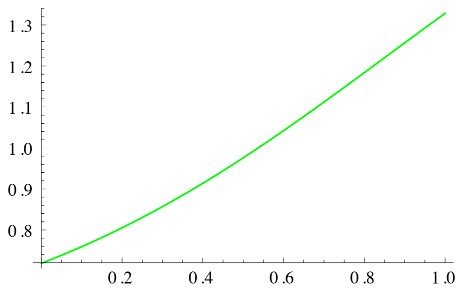

図 14　y_0 を変化させた時の $\frac{m_d}{m_t}$

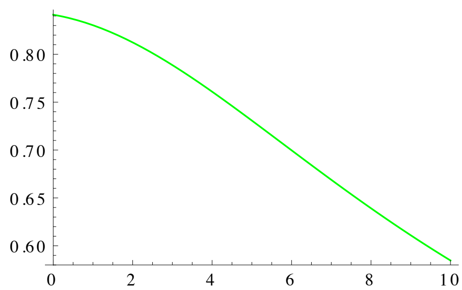

図 15　M_D を変化させた時の $\frac{m_d}{m_t}$

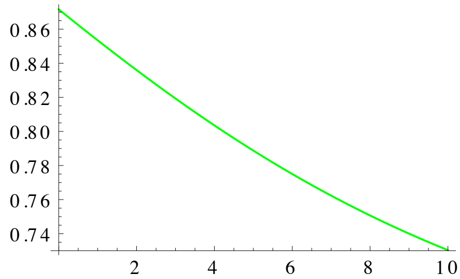

図 16　M_Q を変化させた時の $\frac{m_s}{m_t}$

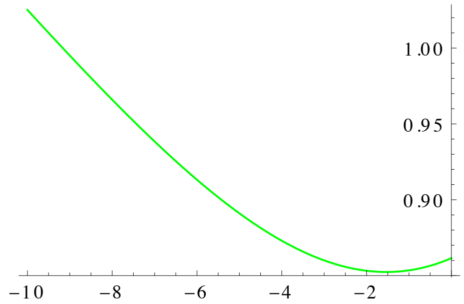

図 17　M_U を変化させた時の $\frac{m_s}{m_t}$

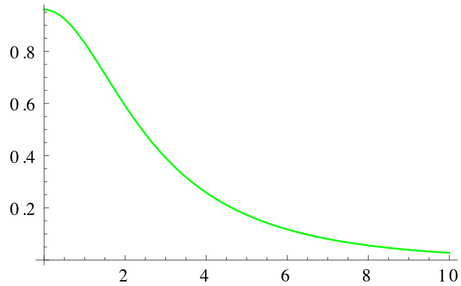

図 18　M_H を変化させた時の $\frac{m_s}{m_t}$

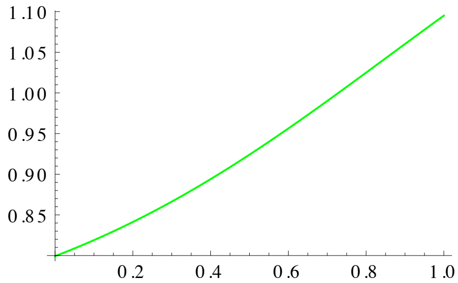

図 19　y_0 を変化させた時の $\frac{m_s}{m_t}$

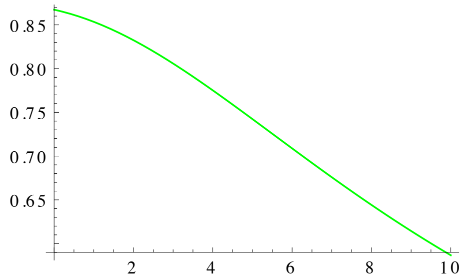

図 20　M_D を変化させた時の $\frac{m_s}{m_t}$

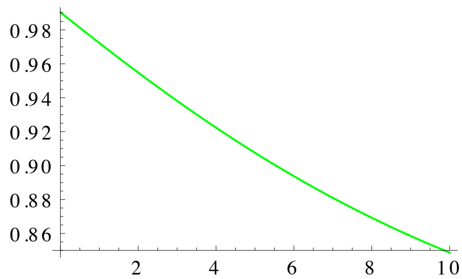

図 21　M_Q を変化させた時の $\frac{m_b}{m_t}$

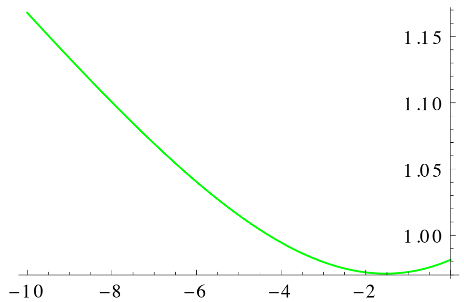

図 22　M_U を変化させた時の $\frac{m_b}{m_t}$

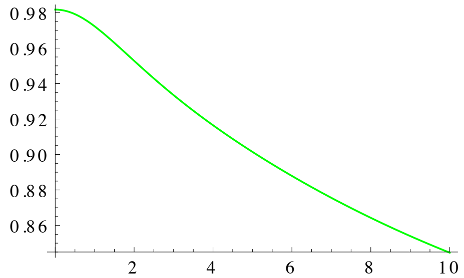

図 23　M_H を変化させた時の $\frac{m_b}{m_t}$

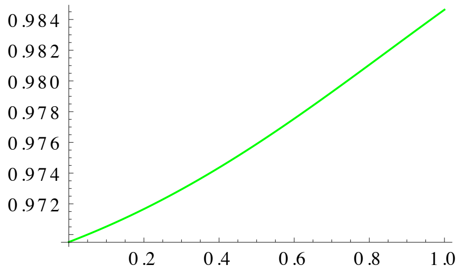

図 24　y_0 を変化させた時の $\frac{m_b}{m_t}$

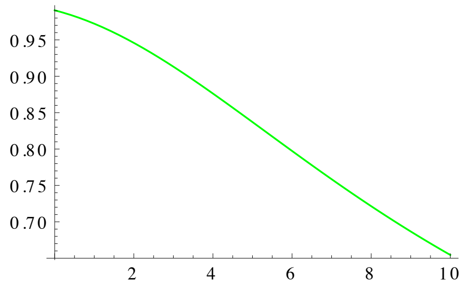

図 25　M_D を変化させた時の $\frac{m_b}{m_t}$

トップクォークの質量 m_t の変数 (M_Q, M_U, M_H, y_0) を 1 つずつ動かした時のグラフを表した。（各パラメータが定数の時それぞれ取る値は $a = 10, b = 10(-10), c = 10, d = 1$）とした。

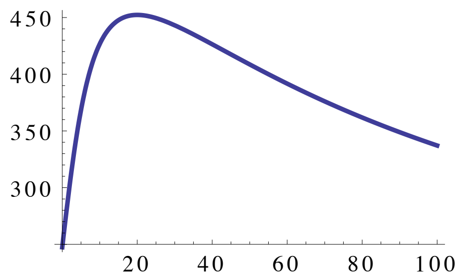

図 26　M_Q を変化させた時の $m_t(M_U < 0)$

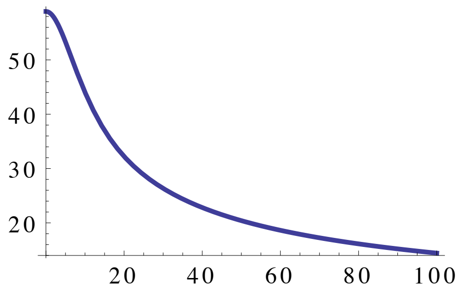

図 27　M_Q を変化させた時の $m_t(M_U > 0)$

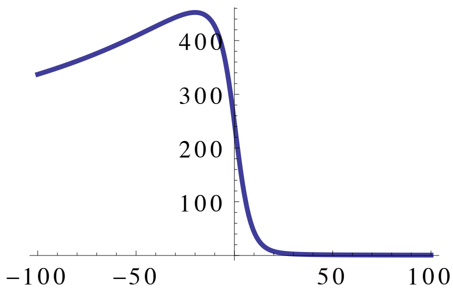

図 28　M_U を変化させた時の m_t

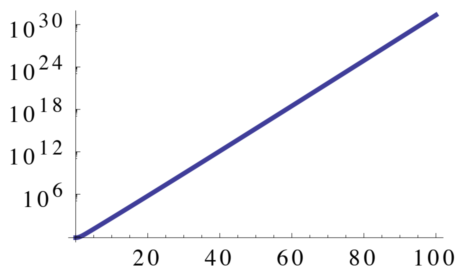

図 29　M_H を変化させた時の m_t

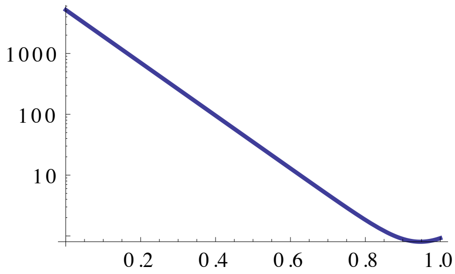

図 30　y_0 を変化させた時の m_t

2.2　$v(y) = \cosh M_H(y - y_0)$ ではうまく質量階層性問題を解決できないことの議論

トップクオークとその他のクオークの比 ((50)~(57)) のグラフを用いて議論する。$a > 0, c > 0, d > 0$ であり、(i)$b > 0, f > 0$(ii)$b < 0, f > 0$(iii)$b > 0, f < 0$(iv)$b < 0, f < 0$ の場合に分けて考える。まず $0.5 < (m_u/m_t)/(2.2/173000) < 1.5$ からパラメータ c の範囲を求める。まず、パラメータ c の寄与が一番大きいことがわかっているのでパラメータを変化させた時のグラフから $(m_u/m_t)/(2.2/173000) = 1$ となるのはだいたいどのくらいか a, b, d に具体的に数値を代入して c の値がどのくらいかを考えれば良いか求める。

$[a = 10, b = -10, d = 0]$ として c を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

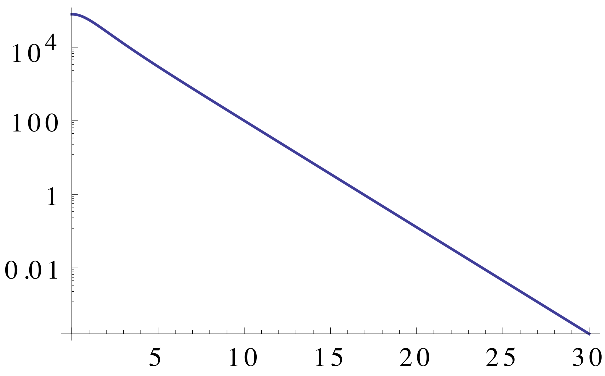

図 31　c を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

このグラフより $(m_u/m_t)/(2.2/173000) = 1$ となるのは c が 17 付近である。次に、b を変化させた時のグラフを用いる。

$[a = 10, c = 17, d = 0]$ として b を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

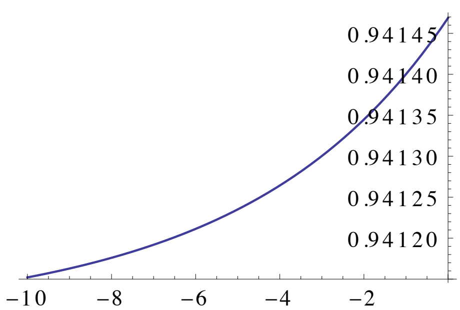

図 32　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

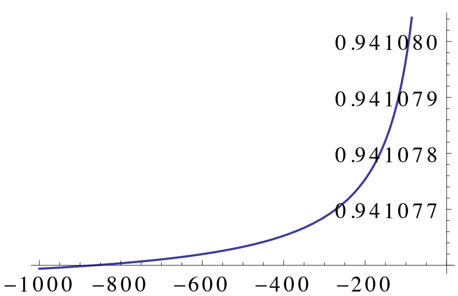

図 33　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

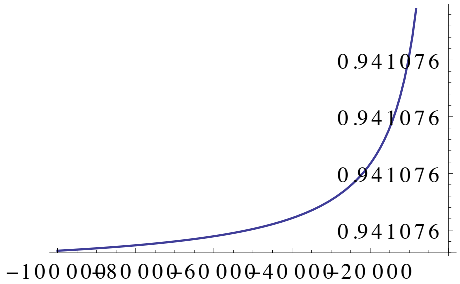

図 34　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

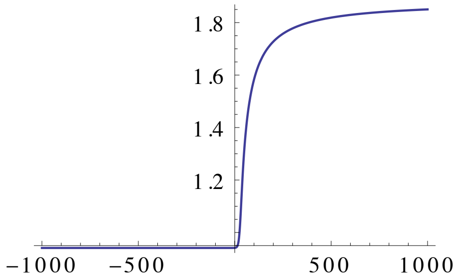

図 35　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

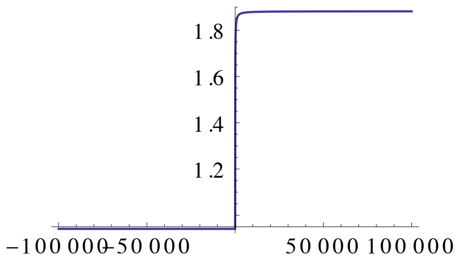

図 36　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

これを見ると、b を変化させた時 $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ には最小値と最大値が現れることがわかる。この値が $0.5 \sim 1.5$ の間にあるようにするために c の範囲が限定される。まず最小値を考えることによって c の範囲の限定のされた方を確認する。最小値が 1.5 よりも小さくなっていればその時の c は他のパラメータを決める際にも考えて良い範囲だと言える。

$[a = 1000, c = 16.5, d = 0]$ として b を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

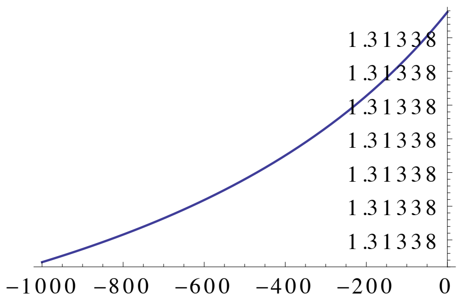

図 37　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

$[a = 1000, c = 16.4, d = 0]$ として b を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

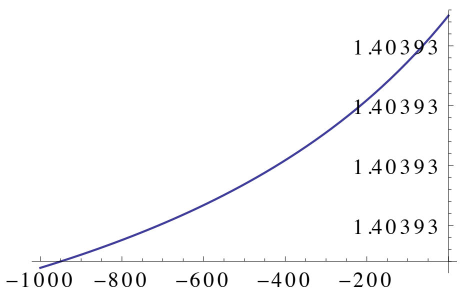

図 38　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

$[a = 1000, c = 16.3, d = 0]$ として b を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

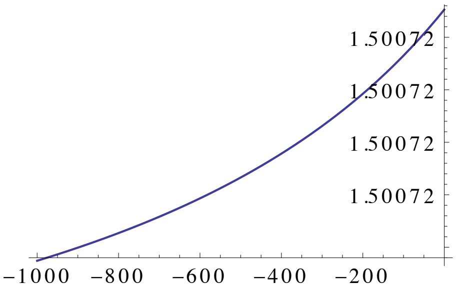

図 39　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

$[a = 1000, c = 16.31, d = 0]$ として b を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

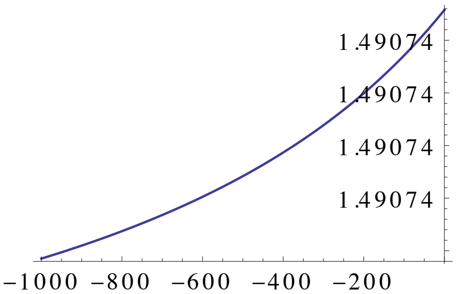

図 40　b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

このことから $16.3 < c$ であるなら $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ は 1.5 より小さい値を取りうる。逆に言えば 1.5 より小さい値を出そうと思えば、少なくとも $16.3 < c$ でなくてなならない。ここで、最小値を考えるために $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ が最小になるのは a で言えばより a が大きくなればなるほど小さくなり、d では $d = 0$ の時が一番最小になる。なので最小値を考える際には $a = 1000, d = 0$ とした。$a = 1000$ は十分大きい値として選んだ。下に、a と b を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ を表した。

$[b = -10, c = 16, d = 0]$ のとして a を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

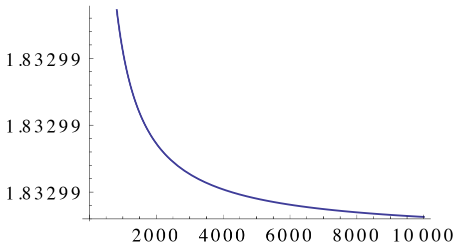

図 41　a を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

$[a = 10, b = -10, c = 16]$ のとして d を動かした時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ のグラフ

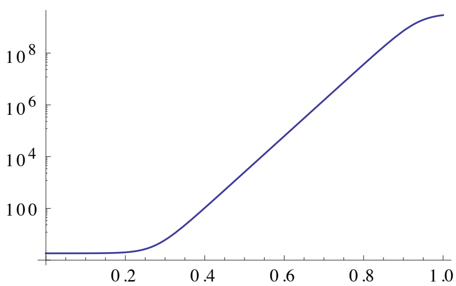

図 42　a を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

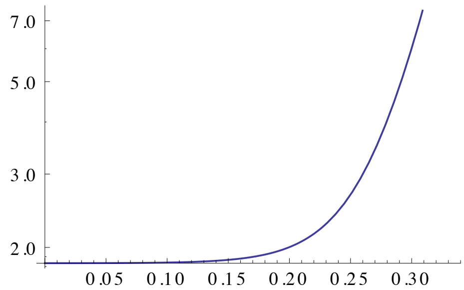

図 43　a を変化させた時の $(m_u/m_t)/(2.2/173000)$

次に $(m_s/m_t)/(m_b/m_t)/(96/4200) = (m_s/m_b)/(96/4200)$ を考える。なぜこれを考えるかというと、後でわかる通り、この関数の値が $0.5 \sim 1.5$ をとるためには c の最大値が 0.5 よりも大きい値を取る領域が $16.3 < c$ となる領域には現れないことがこれからわかるためだ。(*$(m_s/m_t) = 0.1, (m_b/m_t) = 0.1$ でも $(m_s/m_t)/(m_b/m_t) = 1$ であるので注意が必要。)(1)$0 \le d \le 1/3$, (2)$1/3 \le d \le 1$ と場合分けして考える。

(1) の時

まず、パラメータ c の寄与が一番大きいことがわかっているのでパラメータを変化させた時のグラフから $(m_s/m_b)/(96/4200) = 1$ となるのはだいたいどのくらいか a, d, f に具体的に数値を代入して考えれば、c の値がどのくらいの時を考えれば良いかわかる。

$[a = 20, f = 20, d = 0]$ として c を動かした時の $(m_s/m_b)/(96/4200)$ のグラフ

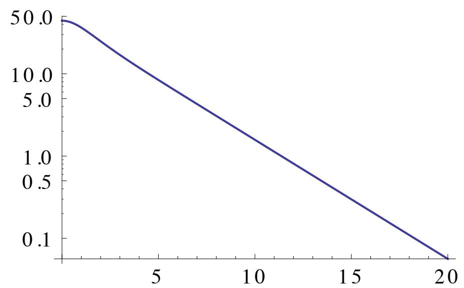

図 44　c を変化させた時の $(m_s/m_b)/(96/4200)$

このグラフから $(m_s/m_b)/(96/4200) = 1$ となるのは $c = 10$ 付近であることがわかる。しかし、$(m_u/m_t)/(2.2/173000)$ から $16.3 < c$ でなくてはならないのでこれからは $(m_s/m_b)/(96/4200)$ が $\frac{1}{3} \sim 3$ の範囲に近い $c = 16.3$ を考える。他の変数をいれた時のグラフを書かせると、

2.3　sinh モデル

ヒッグスの真空期待値を $v(y) = v \sinh M_H(y - y_0)$ として 2.1 節と同じようにフェルミオンの質量を求める。ただ $\cosh \leftrightarrow \sinh$ に逆転させれば良いことが計算した結果わかる。sinh, cosh の引数が $M_H y_0$ になっているところは符号が逆転するので注意。

$$
\begin{aligned}
m_u = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q L_1} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-2M_U L_1} + 1}} \Big[&(M_Q - M_U) e^{(M_Q - M_U)L_1} \sinh M_H(L_1 - y_0) \\
&+ (M_Q - M_U) \sinh(M_H y_0) - M_H e^{(M_Q - M_U)L_1} \cosh M_H(L_1 - y_0) + M_H \cosh M_H y_0 \Big] \\
m_c = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L_2 - L_1)} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-2M_U(L_2 - L_1)} + 1}} \Big[&(M_Q - M_U) e^{(M_Q - M_U)(L_2 - L_1)} \sinh M(L_2 - y_0) \\
&+ (-M_Q + M_U) \sinh M_H(L_1 - y_0) - M_H e^{(M_Q - M_U)(L_2 - L_1)} \cosh M_H(L_2 - y_0) \\
&+ M_H \cosh M_H(L_1 - y_0) \Big]
\end{aligned}
$$

$$m_t = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L-L_2)} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-2M_U(L-L_2)} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{(M_Q - M_U)(L-L_2)} \sinh M_H (L - y_0) + (-M_Q + M_U) \sinh M_H (L_2 - y_0) - M_H e^{(M_Q-M_U)(L-L_2)} \cosh M_H (L - y_0) + M_H \cosh M_H (L_2 - y_0) \Big]$$

$$m_d = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q L_1} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-2M_D L_1} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{(M_Q - M_D)L_1} \sinh M_H (L_1 - y_0) + (M_Q - M_D) \sinh(M_H y_0) - M_H e^{(M_Q - M_D)L_1} \cosh M_H (L_1 - y_0) + M_H \cosh M_H y_0 \Big]$$

$$m_s = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L_2-L_1)} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-2M_D(L_2-L_1)} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{(M_Q - M_D)(L_2-L_1)} \sinh M_H (L_2 - y_0) + (-M_Q + M_D) \sinh M_H (L_1 - y_0) - M_H e^{(M_Q-M_D)(L_2-L_1)} \cosh M_H (L_2 - y_0) + M_H \cosh M_H (L_1 - y_0) \Big]$$

$$m_b = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{2M_Q(L-L_2)} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-2M_D(L-L_2)} + 1}} \Big[(M_Q - M_D) e^{(M_Q - M_D)(L-L_2)} \sinh M_H (L - y_0) + (-M_Q + M_D) \sinh M_H (L_2 - y_0) - M_H e^{(M_Q-M_D)(L-L_2)} \cosh M_H (L - y_0) + M_H \cosh M_H (L_2 - y_0) \Big]$$

$$m_e = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{2M_L L_1} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-2M_E L_1} + 1}} \Big[(M_L - M_E) e^{(M_L - M_E)L_1} \sinh M_H (L_1 - y_0) + (M_L - M_E) \sinh(M_H y_0) - M_H e^{(M_L - M_E)L_1} \cosh M_H (L_1 - y_0) + M_H \cosh M_H y_0 \Big]$$

$$m_\mu = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{2M_L(L_2-L_1)} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-2M_E(L_2-L_1)} + 1}} \Big[(M_L - M_E) e^{(M_L - M_E)(L_2-L_1)} \sinh M_H (L_2 - y_0) + (-M_L + M_E) \sinh M_H (L_1 - y_0) - M_H e^{(M_L-M_E)(L_2-L_1)} \cosh M_H (L_2 - y_0) + M_H \cosh M_H (L_1 - y_0) \Big]$$

$$m_\tau = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{2M_L(L-L_2)} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-2M_E(L-L_2)} + 1}} \Big[(M_L - M_E) e^{(M_L - M_E)(L-L_2)} \sinh M_H (L - y_0) + (-M_L + M_E) \sinh M_H (L_2 - y_0) - M_H e^{(M_L-M_E)(L-L_2)} \cosh M_H (L - y_0) + M_H \cosh M_H (L_2 - y_0) \Big]$$

$L_1 = L_2 = L/3$ の時、

$$m_u = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H (\frac{L}{3} - y_0) + (M_Q - M_U) \sinh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H (\frac{L}{3} - y_0) + M_H \cosh M_H y_0 \Big]$$

$$m_c = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H (\frac{2L}{3} - y_0) + (-M_Q + M_U) \sinh M_H (\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H (\frac{2L}{3} - y_0) + M_H \cosh M_H (\frac{L}{3} - y_0) \Big]$$

$$m_t = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U) e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H (L - y_0)$$

$$+ (-M_Q + M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$
$$m_d = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}} \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0)$$
$$+ (M_Q - M_D)\sinh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}} \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) + M_H \cosh M_H y_0\Big]$$
$$m_s = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}} \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}} \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ M_H \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big]$$
$$m_b = g_D \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_D}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$
$$m_e = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{\frac{2M_L L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_L - M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}} \sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0)$$
$$+ (M_L - M_E)\sinh(M_H y_0) - M_H e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}} \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0) + M_H \cosh M_H y_0\Big]$$
$$m_\mu = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{\frac{2M_L L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_L - M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}} \sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_L + M_E)\sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}} \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ M_H \cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big]$$
$$m_\tau = g_E \frac{v\sqrt{2}}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{e^{\frac{2M_L L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_E}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_L - M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_L + M_E)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$

数値計算で使う表式を以下に示した。

$$m_t = g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_Q}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$
$$= g_U \frac{v\sqrt{2}}{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2} \sqrt{\frac{M_Q L}{e^{\frac{2M_Q L}{3}} - 1}} \sqrt{\frac{M_U L}{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q L - M_U L)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - dL)$$
$$+ (-M_Q L + M_U L)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - dL) - M_H L e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - dL)$$
$$+ M_H L \cosh M_H(\frac{2L}{3} - dL)\Big]$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{2}}{(a-b)^2-c^2}\sqrt{\frac{a}{e^{\frac{2a}{3}}-1}}\sqrt{\frac{b}{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}}\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)$$

$$+(-a+b)\sinh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)$$

$$+c\cosh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \tag{58}$$

$$\frac{m_u}{m_t} = \Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)+(M_Q-M_U)\sinh(M_Hy_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0) \tag{59}$$

$$+M_H\cosh M_Hy_0\Big]\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)$$

$$-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$

$$= \Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)+(M_QL-M_UL)\sinh(M_HdL)$$

$$-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)+M_HL\cosh M_HdL\Big]\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)$$

$$+(-M_QL+M_UL)\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+M_HL\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]$$

$$= \Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(\frac{c}{3}-cd)+(a-b)\sinh(cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(\frac{c}{3}-cd)+c\cosh cd\Big]$$

$$\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+(-a+b)\sinh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+c\cosh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \tag{60}$$

$$\frac{m_c}{m_t} = \Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)+(-M_Q+M_U)\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)$$

$$+\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)\Big]\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)$$

$$-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)+M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$

$$= \Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)+(-M_QL+M_UL)\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)$$

$$-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)+M_HL\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)\Big]$$

$$\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+(-M_QL+M_UL)\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)$$

$$-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+M_HL\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]$$

$$= \Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(\frac{2c}{3}-cd)+(-a+b)\sinh(\frac{c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(\frac{2c}{3}-cd)+c\cosh(\frac{c}{3}-cd)\Big]$$

$$\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+(-a+b)\sinh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+c\cosh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \tag{61}$$

$$\frac{m_d}{m_t} = \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_Q-M_D)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_D}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_Q-M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)$$

$$+(M_Q-M_D)\sinh(M_Hy_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)+M_H\cosh M_Hy_0\Big]$$

$$\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)$$

$$+M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$

$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_QL-M_DL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_DL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_DL}{3}}+1}}\Big[(M_QL-M_DL)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)$$

$$+ (M_Q L - M_D L)\sinh(M_H dL) - M_H L e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh(M_H\frac{L}{3} - M_H dL) - M_H L\cosh M_H dL\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q L - M_U L)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L)\sinh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)$$
$$- M_H L e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_H L - M_H dL) + M_H L\cosh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$
$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(a-b)^2 - c^2}{(a-f)^2 - c^2}\sqrt{\frac{f}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2f}{3}}+1}}\Big[(a-f)e^{\frac{(a-f)}{3}}\sinh(\frac{c}{3} - cd) + (a-f)\sinh(cd) - ce^{\frac{(a-f)}{3}}\cosh(\frac{c}{3} - cd) + c\cosh cd\Big]$$
$$\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c - cd) + (-a+b)\sinh(\frac{2c}{3} - cd) - ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c - cd) + c\cosh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \qquad (62)$$

$$\frac{m_s}{m_t} = \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2}\sqrt{\frac{M_D}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}}+1}}\Big[(M_Q - M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\sinh M_H(\frac{L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) + M_H\cosh M_H(\frac{L}{3} - y_0)\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q - M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L - y_0) + (-M_Q + M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$
$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2}{(M_Q L - M_D L)^2 - M_H^2 L^2}\sqrt{\frac{M_D L}{M_U L}\frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}}+1}}\Big[(M_Q L - M_D L)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)$$
$$+ (-M_Q L + M_D L)\sinh(M_H\frac{L}{3} - M_H dL) - M_H L e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL) + M_H L\cosh(M_H\frac{L}{3} - M_H dL)\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q L - M_U L)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L)\sinh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)$$
$$- M_H L e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_H L - M_H dL) + M_H L\cosh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$
$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(a-b)^2 - c^2}{(a-f)^2 - c^2}\sqrt{\frac{f}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2f}{3}}+1}}\Big[(a-f)e^{\frac{(a-f)}{3}}\sinh(\frac{2c}{3} - cd) + (-a+f)\sinh(\frac{c}{3} - cd) - ce^{\frac{(a-f)}{3}}\cosh(\frac{2c}{3} - cd)$$
$$+ c\cosh(\frac{c}{3} - cd)\Big]\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c - cd) + (-a+b)\sinh(\frac{2c}{3} - cd) - ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c - cd) + c\cosh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \qquad (63)$$

$$\frac{m_b}{m_t} = \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2}{(M_Q - M_D)^2 - M_H^2}\sqrt{\frac{M_D}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}}+1}}\Big[(M_Q - M_D)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh M_H(L - y_0)$$
$$+ (-M_Q + M_D)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh M_H(L - y_0) + M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q - M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L - y_0) + (-M_Q + M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L - y_0)$$
$$+ M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]$$
$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2}{(M_Q L - M_D L)^2 - M_H^2 L^2}\sqrt{\frac{M_D L}{M_U L}\frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_D L}{3}}+1}}\Big[(M_Q L - M_D L)e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\sinh(M_H L - M_H dL)$$
$$+ (-M_Q L + M_D L)\sinh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL) - M_H L e^{\frac{(M_Q-M_D)L}{3}}\cosh(M_H L - M_H dL) + M_H L\cosh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q L - M_U L)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L)\sinh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)$$
$$- M_H L e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_H L - M_H dL) + M_H L\cosh(M_H\frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]$$

$$= \frac{g_D}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-f)^2-c^2}\sqrt{\frac{f}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2f}{3}}+1}}\Big[(a-f)e^{\frac{(a-f)}{3}}\sinh(c-cd)+(-a+f)\sinh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-f)}{3}}\cosh(c-cd)$$
$$+c\cosh(\frac{2c}{3}-cd)\Big]\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+(-a+b)\sinh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)+c\cosh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \tag{64}$$

$$\frac{m_e}{m_t} = \frac{g_E}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{M_Q}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_E}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)$$
$$+(M_L-M_E)\sinh(M_Hy_0)-M_He^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)+M_H\cosh M_Hy_0\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)$$
$$+M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$
$$= \frac{g_E}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_LL-M_EL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_LL}{M_QL}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_EL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}$$
$$\times\Big[(M_LL-M_EL)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)+(M_LL-M_EL)\sinh(M_HdL)$$
$$-M_HLe^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)+M_HL\cosh M_HdL\Big]\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)$$
$$+(-M_QL+M_UL)\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+M_HL\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]$$
$$= \frac{g_E}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(g-h)^2-c^2}\sqrt{\frac{g}{a}\frac{-e^{-\frac{2a}{3}}+1}{-e^{-\frac{2g}{3}}+1}}\sqrt{\frac{h}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2h}{3}}+1}}\Big[(g-h)e^{\frac{(g-h)}{3}}\sinh(\frac{c}{3}-cd)+(g-h)\sinh(cd)$$
$$-ce^{\frac{(g-h)}{3}}\cosh(\frac{c}{3}-cd)+c\cosh cd\Big]\Big/\Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}}\sinh(c-cd)+(-a+b)\sinh(\frac{2c}{3}-cd)-ce^{\frac{(a-b)}{3}}\cosh(c-cd)$$
$$+c\cosh(\frac{2c}{3}-cd)\Big] \tag{65}$$

$$\frac{m_\mu}{m_t} = \frac{g_E}{g_U}\frac{(M_Q-M_U)^2-M_H^2}{(M_L-M_E)^2-M_H^2}\sqrt{\frac{M_L}{M_Q}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_E}{M_U}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}\Big[(M_L-M_E)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)$$
$$+(-M_L+M_E)\sinh M_H(\frac{L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)+M_H\cosh M_H(\frac{L}{3}-y_0)\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_Q-M_U)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh M_H(L-y_0)+(-M_Q+M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)-M_He^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh M_H(L-y_0)$$
$$+M_H\cosh M_H(\frac{2L}{3}-y_0)\Big]$$
$$= \frac{g_E}{g_U}\frac{(M_QL-M_UL)^2-M_H^2L^2}{(M_LL-M_EL)^2-M_H^2L^2}\sqrt{\frac{M_LL}{M_QL}\frac{-e^{-\frac{2M_QL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_LL}{3}}+1}}\sqrt{\frac{M_EL}{M_UL}\frac{-e^{-\frac{2M_UL}{3}}+1}{-e^{-\frac{2M_EL}{3}}+1}}$$
$$\Big[(M_LL-M_EL)e^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)+(-M_LL+M_EL)\sinh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)$$
$$-M_HLe^{\frac{(M_L-M_E)L}{3}}\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)+M_HL\cosh(M_H\frac{L}{3}-M_HdL)\Big]$$
$$\Big/\Big[(M_QL-M_UL)e^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\sinh(M_HL-M_HdL)+(-M_QL+M_UL)\sinh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)$$
$$-M_HLe^{\frac{(M_Q-M_U)L}{3}}\cosh(M_HL-M_HdL)+M_HL\cosh(M_H\frac{2L}{3}-M_HdL)\Big]$$
$$= \frac{g_E}{g_U}\frac{(a-b)^2-c^2}{(g-h)^2-c^2}\sqrt{\frac{g}{a}\frac{-e^{-\frac{2a}{3}}+1}{-e^{-\frac{2g}{3}}+1}}\sqrt{\frac{h}{b}\frac{-e^{-\frac{2b}{3}}+1}{-e^{-\frac{2h}{3}}+1}}\Big[(g-h)e^{\frac{(g-h)}{3}}\sinh(\frac{2c}{3}-cd)+(-g+h)\sinh(c\frac{L}{3}-cd)$$

$$
- ce^{\frac{(g-h)}{3}} \cosh(\frac{2c}{3} - cd) + c\cosh(\frac{c}{3} - cd)\Big] \Big/ \Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(c - cd) + (-a+b)\sinh(\frac{2c}{3} - cd)
$$

$$
- ce^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(c - cd) + c\cosh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \tag{66}
$$

$$
\frac{m_\tau}{m_t} = \frac{g_E}{g_U} \frac{(M_Q - M_U)^2 - M_H^2}{(M_L - M_E)^2 - M_H^2} \sqrt{\frac{M_L}{M_Q} \frac{-e^{-\frac{2M_Q L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_L L}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{M_E}{M_U} \frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}} \Big[(M_Q - M_D)e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0)
$$

$$
+ (-M_Q + M_D)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0) + M_H \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]
$$

$$
\Big/ \Big[(M_Q - M_U)e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh M_H(L - y_0) + (-M_Q + M_U)\sinh M_H(\frac{2L}{3} - y_0) - M_H e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh M_H(L - y_0)
$$

$$
+ M_H \cosh M_H(\frac{2L}{3} - y_0)\Big]
$$

$$
= \frac{g_E}{g_U} \frac{(M_Q L - M_U L)^2 - M_H^2 L^2}{(M_L L - M_E L)^2 - M_H^2 L^2} \sqrt{\frac{M_L L}{M_Q L} \frac{-e^{-\frac{2M_Q L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_L L}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{M_E L}{M_U L} \frac{-e^{-\frac{2M_U L}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2M_E L}{3}} + 1}}
$$

$$
\times \Big[(M_Q L - M_D L)e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_D L)\sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)
$$

$$
- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_D)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL) + M_H L \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]
$$

$$
\Big/ \Big[(M_Q L - M_U L)e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \sinh(M_H L - M_H dL) + (-M_Q L + M_U L)\sinh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)
$$

$$
- M_H L e^{\frac{(M_Q - M_U)L}{3}} \cosh(M_H L - M_H dL) + M_H L \cosh(M_H \frac{2L}{3} - M_H dL)\Big]
$$

$$
= \frac{g_E}{g_U} \frac{(a-b)^2 - c^2}{(g-h)^2 - c^2} \sqrt{\frac{g}{a} \frac{-e^{-\frac{2a}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2g}{3}} + 1}} \sqrt{\frac{h}{b} \frac{-e^{-\frac{2b}{3}} + 1}{-e^{-\frac{2h}{3}} + 1}} \Big[(g-h)e^{\frac{(g-h)}{3}} \sinh(c - cd) + (-g+h)\sinh(c\frac{2L}{3} - cd)
$$

$$
- ce^{\frac{(g-h)}{3}} \cosh(c - cd) + c\cosh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \Big/ \Big[(a-b)e^{\frac{(a-b)}{3}} \sinh(c - cd) + (-a+b)\sinh(\frac{2c}{3} - cd)
$$

$$
- ce^{\frac{(a-b)}{3}} \cosh(c - cd) + c\cosh(\frac{2c}{3} - cd)\Big] \tag{67}
$$