

# Cálculo de Programas

## Trabalho Prático

### MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática  
Universidade do Minho

Junho de 2021

Grupo nr.	72
a93274	David Pereira Alves
a22222	Ricardo Augusto Mota Gama
a93228	Rui Miguel Borges Braga
a93261	Tiago Lucas Alves

## 1 Preâmbulo

**Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

## 2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processador que faz “pretty printing” de código Haskell em **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

---

<sup>1</sup>O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

### 3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

#### 3.1 Stack

O **Stack** é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em **Haskell**. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulos principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao **GHCI** utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as dependências externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na directoria *app*.

## Problema 1

Os tipos de dados algébricos estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

*Symbolic differentiation* consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando o valor da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão e o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

```
data ExpAr a = X
  | N a
  | Bin BinOp (ExpAr a) (ExpAr a)
  | Un UnOp (ExpAr a)
  deriving (Eq, Show)
```

onde *BinOp* e *UnOp* representam operações binárias e unárias, respectivamente:

```
data BinOp = Sum
  | Product
  deriving (Eq, Show)
data UnOp = Negate
  | E
  deriving (Eq, Show)
```

O construtor *E* simboliza o exponencial de base *e*.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

*Bin Sum X (N 10)*

designa  $x + 10$  na notação matemática habitual.

1. A definição das funções *inExpAr* e *baseExpAr* para este tipo é a seguinte:

```
inExpAr = [X, num_ops] where
  num_ops = [N, ops]
  ops = [bin, Un]
  bin (op, (a, b)) = Bin op a b
baseExpAr f g h j k l z = f + (g + (h × (j × k) + l × z))
```

Defina as funções *outExpAr* e *recExpAr*, e teste as propriedades que se seguem.

**Propriedade [QuickCheck] 1** *inExpAr* e *outExpAr* são testemunhas de um isomorfismo, isto é, *inExpAr* · *outExpAr* = *id* e *outExpAr* · *inExpAr* = *id*:

```
prop_in_out_idExpAr :: (Eq a) => ExpAr a -> Bool
prop_in_out_idExpAr = inExpAr · outExpAr == id
prop_out_in_idExpAr :: (Eq a) => OutExpAr a -> Bool
prop_out_in_idExpAr = outExpAr · inExpAr == id
```

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o  $X$ , a função

$$eval\_exp :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 12 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

**Propriedade [QuickCheck] 2** A função *eval\_exp* respeita os elementos neutros das operações.

$$\begin{aligned} prop\_sum\_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_sum\_idr a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} sum\_idr \textbf{ where} \\ sum\_idr &= eval\_exp a (Bin Sum exp (N 0)) \\ prop\_sum\_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_sum\_idl a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} sum\_idl \textbf{ where} \\ sum\_idl &= eval\_exp a (Bin Sum (N 0) exp) \\ prop\_product\_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_product\_idr a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} prod\_idr \textbf{ where} \\ prod\_idr &= eval\_exp a (Bin Product exp (N 1)) \\ prop\_product\_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_product\_idl a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} prod\_idl \textbf{ where} \\ prod\_idl &= eval\_exp a (Bin Product (N 1) exp) \\ prop\_e\_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop\_e\_id a &= eval\_exp a (Un E (N 1)) \equiv expd 1 \\ prop\_negate\_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop\_negate\_id a &= eval\_exp a (Un Negate (N 0)) \equiv 0 \end{aligned}$$

**Propriedade [QuickCheck] 3** Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.

$$\begin{aligned} prop\_double\_negate &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_double\_negate a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} eval\_exp a (Un Negate (Un Negate exp)) \end{aligned}$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optimize\_eval :: (Floating a, Eq a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 12 expressa como um hilomorfismo<sup>2</sup> e teste as propriedades:

**Propriedade [QuickCheck] 4** A função *optimize\_eval* respeita a semântica da função *eval*.

$$\begin{aligned} prop\_optimize\_respects\_semantics &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_optimize\_respects\_semantics a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} optimize\_eval a exp \end{aligned}$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:<sup>3</sup>

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

<sup>2</sup>Qual é a vantagem de implementar a função *optimize\_eval* utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

<sup>3</sup>Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating a \Rightarrow ExpAr a \rightarrow ExpAr a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

**Propriedade [QuickCheck] 5** A função *sd* respeita as regras de derivação.

```
prop_const_rule :: (Real a, Floating a) => a -> Bool
prop_const_rule a = sd (N a) == N 0

prop_var_rule :: Bool
prop_var_rule = sd X == N 1

prop_sum_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_sum_rule exp1 exp2 = sd (Bin Sum exp1 exp2) == sum_rule where
  sum_rule = Bin Sum (sd exp1) (sd exp2)

prop_product_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_product_rule exp1 exp2 = sd (Bin Product exp1 exp2) == prod_rule where
  prod_rule = Bin Sum (Bin Product exp1 (sd exp2)) (Bin Product (sd exp1) exp2)

prop_e_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_e_rule exp = sd (Un E exp) == Bin Product (Un E exp) (sd exp)

prop_negate_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_negate_rule exp = sd (Un Negate exp) == Un Negate (sd exp)
```

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema calculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$ad :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow a$$

que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

**Propriedade [QuickCheck] 6** Calcular o valor da derivada num ponto *r* via *ad* é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto *r*.

```
prop_congruent :: (Floating a, Real a) => a -> ExpAr a -> Bool
prop_congruent a exp = ad a exp == eval_exp a (sd exp)
```

## Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.<sup>4</sup>

Para o caso de funções sobre os números naturais ( $\mathbb{N}_0$ , com functor  $F X = 1 + X$ ) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Lei (3.94) em [?], página 98.

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n + 1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$loop\ (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$init = (1, 1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.<sup>5</sup>
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau  $ax^2 + bx + c$  em  $\mathbb{N}_0$ . Seguindo o método estudado nas aulas<sup>6</sup>, de  $f\ x = ax^2 + bx + c$  derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$

$$f\ (n + 1) = f\ n + k\ n$$

$$k\ 0 = a + b$$

$$k\ (n + 1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a)$$

$$init = (c, a + b)$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o *n*-ésimo **número de Catalan**,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

derivar uma implementação de  $C_n$  que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \dots \cdot \text{for loop init where} \dots$$

que implemente esta função.

**Propriedade [QuickCheck] 7** A função proposta coincide com a definição dada:

$$prop\_cat = (\geq 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

**Sugestão:** Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

## Problema 3

As **curvas de Bézier**, designação dada em honra ao engenheiro **Pierre Bézier**, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto  $\{P_0, \dots, P_N\}$  de pontos de controlo, onde  $N$  é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

<sup>5</sup>Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

<sup>6</sup>Secção 3.17 de [?] e tópico **Recursividade mútua** nos vídeos das aulas teóricas.



Figura 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da [Wikipedia](#).

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto  $\{P_0\}$  (ordem 0) é o próprio ponto  $P_0$ . O valor de uma curva de Bézier de ordem  $N$  é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros  $N - 1$  pontos e da curva de Bézier dos últimos  $N - 1$  pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo  $[0, 1]$ , é dada pela seguinte função:

```
linear1d :: Q → Q → OverTime Q
linear1d a b = formula a b where
  formula :: Q → Q → Float → Q
  formula x y t = ((1.0 :: Q) - (toQ t)) * x + (toQ t) * y
```

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão  $N$  é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados *NPoint* representa um ponto com  $N$  dimensões.

```
type NPoint = [Q]
```

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

```
p2d = [1.2, 3.4]
p3d = [0.2, 10.3, 2.4]
```

O tipo de dados *OverTime a* representa um termo do tipo  $a$  num dado instante (dado por um *Float*).

```
type OverTime a = Float → a
```

O anexo C tem definida a função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
```

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

```
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
```

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente *calcLine* como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

**Propriedade [QuickCheck] 8** Definição alternativa.

```
prop_calcLine_def :: NPoint → NPoint → Float → Bool
prop_calcLine_def p q d = calcLine p q d ≡ zipWithM linear1d p q d
```

2. Implemente a função *deCasteljau* como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

**Propriedade [QuickCheck] 9** *Curvas de Bézier são simétricas.*

```
prop_bezier_sym :: [[Q]] → Gen Bool
prop_bezier_sym l = all (<Δ) · calc_difs · bezs ($) elements ps where
  calc_difs = (λ(x, y) → zipWith (λw v → if w ≥ v then w - v else v - w) x y)
  bezs t = (deCasteljau l t, deCasteljau (reverse l) (fromQ (1 - (toQ t))))
  Δ = 1e-2
```

3. Corra a função `runBezier` e aprecie o seu trabalho<sup>7</sup> clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicial) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla `Delete` apaga o ponto mais recente.

## Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia  $x$ ,

$$\text{avg } x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (2)$$

onde  $k = \text{length } x$ . Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é fácil de ver que

$$\begin{aligned} \text{avg } [a] &= a \\ \text{avg } (a : x) &= \frac{1}{k+1} (a + \sum_{i=1}^k x_i) = \frac{a + k(\text{avg } x)}{k+1} \text{ para } k = \text{length } x \end{aligned}$$

Logo `avg` está em recursividade mútua com `length` e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função `avg_aux = ([b, q])` tal que `avg_aux = (avg, length)` em listas não vazias.
2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma `LTree` recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

**Propriedade [QuickCheck] 10** *A média de uma lista não vazia e de uma `LTree` com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

```
prop_avg :: [Double] → Property
prop_avg = nonempty ⇒ diff ≤ 0.000001 where
  diff l = avg l - (avgLTree · genLTree) l
  genLTree = ([lsplit])
  nonempty = (>[])
```

## Problema 5

(NB: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do `Haskell`, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o `F#` da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos `Cp`, `Nat` e `LTree` codificados em `F#`. O que se pede é a biblioteca `BTree` escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo `D`. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

<sup>7</sup>A representação em Gloss é uma adaptação de um `projeto` de Harold Cooper.



# Anexos

## A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina<sup>9</sup>, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até  $i = n$  da função exponencial  $\exp x = e^x$ , via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3)$$

Seja  $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$  a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que  $e\ x\ 0 = 1$  e que  $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ . Se definirmos  $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  teremos  $e\ x$  e  $h\ x$  em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para  $h\ x\ n$  etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Exemplos tirados de [?].

<sup>9</sup>Cf. [?], página 102.

## C Código fornecido

### Problema 1

```
expd :: Floating a => a -> a
expd = Prelude.exp
type OutExpAr a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
```

### Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (4):

$$catdef\ n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan<sup>10</sup>:

```
oracle = [
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452
]
```

### Problema 3

Algoritmo:

```
deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau [] = nil
deCasteljau [p] = p
deCasteljau l = λpt -> (calcLine (p pt) (q pt)) pt where
  p = deCasteljau (init l)
  q = deCasteljau (tail l)
```

Função auxiliar:

```
calcLine :: NPoint -> (NPoint -> OverTime NPoint)
calcLine [] = nil
calcLine (p : x) = g p (calcLine x) where
  g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
  g (d, f) l = case l of
    [] -> nil
    (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z
```

2D:

```
bezier2d :: [NPoint] -> OverTime (Float, Float)
bezier2d [] = (0, 0)
bezier2d l = λz -> (fromQ × fromQ) · (λ[x, y] -> (x, y)) $ ((deCasteljau l) z)
```

Modelo:

```
data World = World { points :: [NPoint]
  , time :: Float
  }
initW :: World
initW = World [] 0
```

---

<sup>10</sup>Fonte: [Wikipedia](#).

```

tick :: Float → World → World
tick dt world = world { time = (time world) + dt }

actions :: Event → World → World
actions (EventKey (MouseButton LeftButton) Down _ p) world =
  world { points = (points world) ++ [(λ(x,y) → map toQ [x,y]) p] }
actions (EventKey (SpecialKey KeyDelete) Down _ _) world =
  world { points = cond (≡ []) id init (points world) }
actions _ world = world

scaleTime :: World → Float
scaleTime w = (1 + cos (time w)) / 2

bezier2dAtTime :: World → (Float, Float)
bezier2dAtTime w = (bezier2dAt w) (scaleTime w)

bezier2dAt :: World → OverTime (Float, Float)
bezier2dAt w = bezier2d (points w)

thicCirc :: Picture
thicCirc = ThickCircle 4 10

ps :: [Float]
ps = map fromQ ps' where
  ps' :: [Q]
  ps' = [0, 0.01 .. 1] -- interval

```

Gloss:

```

picture :: World → Picture
picture world = Pictures
  [ animateBezier (scaleTime world) (points world)
  , Color white · Line · map (bezier2dAt world) $ ps
  , Color blue · Pictures $ [ Translate (fromQ x) (fromQ y) thicCirc | [x,y] ← points world ]
  , Color green $ Translate cx cy thicCirc
  ] where
  (cx, cy) = bezier2dAtTime world

```

Animação:

```

animateBezier :: Float → [NPoint] → Picture
animateBezier _ [] = Blank
animateBezier _ [_] = Blank
animateBezier t l = Pictures
  [ animateBezier t (init l)
  , animateBezier t (tail l)
  , Color red · Line $ [a, b]
  , Color orange $ Translate ax ay thicCirc
  , Color orange $ Translate bx by thicCirc
  ] where
  a@(ax, ay) = bezier2d (init l) t
  b@(bx, by) = bezier2d (tail l) t

```

Propriedades e main:

```

runBezier :: IO ()
runBezier = play (InWindow "Bézier" (600,600) (0,0))
  black 50 initW picture actions tick

runBezierSym :: IO ()
runBezierSym = quickCheckWith (stdArgs { maxSize = 20, maxSuccess = 200 }) prop_bezier_sym

```

Compilação e execução dentro do interpretador:<sup>11</sup>

```

main = runBezier
run = do { system "ghc cp2021t"; system "./cp2021t" }

```

---

<sup>11</sup>Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

## QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary UnOp where
  arbitrary = elements [Negate, E]
instance Arbitrary BinOp where
  arbitrary = elements [Sum, Product]
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (ExpAr a) where
  arbitrary = do
    binop <- arbitrary
    unop <- arbitrary
    exp1 <- arbitrary
    exp2 <- arbitrary
    a <- arbitrary
    frequency · map (id × pure) $ [(20, X), (15, N a), (35, Bin binop exp1 exp2), (30, Un unop exp1)]
infixr 5  $\stackrel{?}{=}$ 
( $\stackrel{?}{=}$ ) :: Real a => a -> a -> Bool
( $\stackrel{?}{=}$ ) x y = (to $_{\mathbb{Q}}$  x) == (to $_{\mathbb{Q}}$  y)
```

## Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 =>
(=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
p => f =  $\lambda$ a -> p a => f a
infixr 0 <=>
(<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
p <=> f =  $\lambda$ a -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4  $\equiv$ 
( $\equiv$ ) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\equiv$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\equiv$  g a
infixr 4  $\leq$ 
( $\leq$ ) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\leq$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\leq$  g a
infixr 4  $\wedge$ 
( $\wedge$ ) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
f  $\wedge$  g =  $\lambda$ a -> (f a)  $\wedge$  (g a)
```

## D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

### Problema 1

São dadas:

```
cataExpAr g = g · recExpAr (cataExpAr g) · outExpAr
anaExpAr g = inExpAr · recExpAr (anaExpAr g) · g
hyloExpAr h g = cataExpAr h · anaExpAr g
```

```

eval_exp :: Floating a => a -> (ExpAr a) -> a
eval_exp a = cataExpAr (g_eval_exp a)
optimize_eval :: (Floating a, Eq a) => a -> (ExpAr a) -> a
optimize_eval a = hyloExpAr (gopt a) clean
sd :: Floating a => ExpAr a -> ExpAr a
sd = π2 · cataExpAr sd_gen
ad :: Floating a => a -> ExpAr a -> a
ad v = π2 · cataExpAr (ad_gen v)

```

Definir:

Função out do tipo ExpAr

```

outExpAr :: ExpAr a -> () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
outExpAr X = i1 ()
outExpAr (N a) = i2 (i1 a)
outExpAr (Bin op (exp1) (exp2)) = i2 (i2 (i1 (op, (exp1, exp2))))
outExpAr (Un op (exp)) = i2 (i2 i2 op exp)
--

```

Função que define o functor do tipo ExpAr

```

recExpAr f = baseExpAr id id id f f id f
--

```

Função que descreve o gene de um catamorfismo que calcula o valor de uma expressão.

$$\begin{array}{ccc}
\text{ExpAr } a & \xrightarrow{\text{outExpAr}} & 1 + a + X \times (\text{ExpAr } a \times \text{ExpAr } a) + Y \times \text{ExpAr } a \\
\text{cataExpAr } g\_eval\_exp \downarrow & & \downarrow \text{recExpAr } (g\_eval\_exp) \\
a & \xleftarrow{g\_eval\_exp} & 1 + a + (X \times (a \times a)) + (Y \times a)
\end{array}$$

```

g_eval_exp a = [a, [id, [binOp, unOp]]]
where binOp (Sum, (e, d)) = e + d
        binOp (Product, (e, d)) = e * d
        unOp (Negate, n) = n * (-1)
        unOp (E, n) = Prelude.exp n
--

```

Função que simplifica uma ExpAr tirando proveito dos elementos absorventes e neutros das operações.

$$\begin{array}{ccc}
\text{ExpAr } a & \xrightarrow{\text{clean}} & 1 + a + X \times (\text{ExpAr } a \times \text{ExpAr } a) + Y \times \text{ExpAr } a \\
\text{anaExpAr } clean \downarrow & & \downarrow \text{recExpAr } (clean) \\
\text{ExpAr } a & \xleftarrow{\text{inExpAr}} & 1 + a + X \times (\text{ExpAr } a \times \text{ExpAr } a) + Y \times \text{ExpAr } a
\end{array}$$

```

clean (Bin Sum (exp1) (exp2))
  | exp1 == (N 0) = clean exp2
  | exp2 == (N 0) = clean exp1
clean (Bin Product (exp1) (exp2))
  | exp1 == (N 0) ∨ exp2 == (N 0) = i2 (i1 0)
  | exp1 == (N 1) = clean exp2
  | exp2 == (N 1) = clean exp1
clean (Un E exp)
  | exp == (N 0) = i2 (i1 1)
clean exp = outExpAr exp
--

```

Função igual ao gene do catamorfismo que calcula o valor de uma expressão definido em cima.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ExpAr } a & \xrightarrow{\text{outExpAr}} & 1 + a + X \times (\text{ExpAr } a \times \text{ExpAr } a) + Y \times \text{ExpAr } a \\
 \downarrow \text{cataExpAr } \text{gopt} & & \downarrow \text{recExpAr } (\text{gopt}) \\
 a & \xleftarrow{\text{gopt}} & 1 + a + (X \times (a \times a)) + (Y \times a)
 \end{array}$$

$$\text{gopt } a = \text{g\_eval\_exp } a$$

Assim, se combinarmos o catamorfismo e o anamorfismo num hyloformismo, teremos uma versão otimizada do catamorfismo inicialmente definido.

--

Função gene de um catamorfismo que vai calcular a expressão derivada da expressão fornecida.

```

sd_gen :: Floating a => () + (a + ((BinOp, ((ExpAr a, ExpAr a), (ExpAr a, ExpAr a))) + (UnOp, (ExpAr a, ExpAr a))))
sd_gen = [handleX, [handleN, [handleBin, handleUn]]]
where handleX () = (X, N 1)
      handleN n = (N n, N 0)
      handleBin (Sum, ((e1, d1), (e2, d2))) = (Bin Sum e1 e2, Bin Sum d1 d2)
      handleBin (Product, ((e1, d1), (e2, d2))) = (Bin Product e1 e2, Bin Sum (Bin Product e1 d2) (Bin Product e2 d1))
      handleUn (Negate, (e1, d1)) = (Un Negate e1, Un Negate d1)
      handleUn (E, (e1, d1)) = (Un E e1, Bin Product (Un E e1) d1)

```

--

Função gene de um catamorfismo que vai calcular o valor da derivada da expressão num certo ponto.

```

ad_gen a = [handleX, [handleN, [handleBin a, handleUn a]]]
where handleX () = (X, 1)
      handleN = (N, 0)
      handleBin a (Sum, ((e1, d1), (e2, d2))) = (Bin Sum e1 e2, d1 + d2)
      handleBin a (Product, ((e1, d1), (e2, d2))) = (Bin Product e1 e2, ((eval_exp a e1) * d2) + ((eval_exp a e2) * d1))
      handleUn a (Negate, (e1, d1)) = (Un Negate e1, negate d1)
      handleUn a (E, (e1, d1)) = (Un E e1, d1 * (eval_exp a (Un E e1)))

```

## Problema 2

Definir

```

catNumber 0 = 1
catNumber (n + 1) = ((4 * (mysucc (n) - 1)) + 2) * catNumber n ÷ mysucc (n) + 1
mysucc 0 = 1
mysucc (n + 1) = 1 + mysucc n
cat = prj · for loop inic
where
  inic = (1, 1)
  loop (f, mysucc) = (((4 * (mysucc - 1)) + 2) * f ÷ mysucc + 1, 1 + mysucc)
  prj (f, n) = f

```

seja a função pretendida. **NB:** usar divisão inteira. Apresentar de seguida a justificação da solução encontrada.

Definição de uma função catNumber que vai calcular o resultado do numero de catalan.

Como

$$C_{(n+1)} = \frac{(4 * n + 2) * C_n}{n + 2} \quad (4)$$

, não vamos precisar de recorrer a factoriais. Assim recorreremos a recursividade mutua a partir da função mysucc para sabermos o valor de n. Na função cat, faremos um for loop onde mantemos o numero de Catalan na primeira componente. Assim a função proj só tem de ir buscar a primeira componente do par.

### Problema 3

Função `calcLine` definida como um catamorfismo.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \text{calcLine } [] = \underline{\text{nil}} \\ \text{calcLine } (p : x) = \widehat{g} \ p \ (\text{calcLine } x) \end{cases} \\
 \equiv & \quad \{ \text{def-nil, def-cons, remover variaveis} \} \\
 & \begin{cases} \text{calcLine} \cdot \text{nil} = \underline{\text{nil}} \\ \text{calcLine} \cdot \text{cons} = g \cdot (id \times \text{calcLine}) \end{cases} \\
 \equiv & \quad \{ \text{Eq+}, \text{Fusao+}, \text{def-in} \} \\
 & \text{calcLine} \cdot \mathbf{in} = [\underline{\text{nil}}, g \cdot (id \times \text{calcLine})] \\
 \equiv & \quad \{ \text{Absorção+} \} \\
 & \text{calcLine} \cdot \mathbf{in} = [\underline{\text{nil}}, g] \cdot (id + id \times \text{calcLine}) \\
 \equiv & \quad \{ \text{Universal-cata} \} \\
 & \text{calcLine} = \text{cataList } ([\underline{\text{nil}}, g]) \\
 & \square
 \end{aligned}$$

```

calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
calcLine = cataList h where
  h (i1 a) = nil
  h (i2 (a, x)) = g (a, x)
  g (d, f) l = case l of
    [] → nil
    (x : xs) → λz → concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z

```

Função que define o algoritmo de deCasteljau através de um hilomorfismo.

Como o algoritmo afirma, o valor da curva num ponto é calculado pela interpolação linear entre os primeiros N-1 pontos e os últimos N-1 pontos.

Assim, pensando numa estratégia do tipo divide and conquer, a parte do divide (anamorformismo) vai criar uma árvore binária onde o valor do nó é o ponto, a árvore da esquerda os primeiros N-1 pontos e a árvore da direita os últimos N-1 pontos.

$$\begin{array}{ccc}
 NPoint* & \xrightarrow{\text{divide} \cdot \text{outList}} & 1 + NPoint \times (NPoint* \times NPoint*) \\
 \downarrow \text{anaBTree } (\text{divide} \cdot \text{outList}) & & \downarrow \text{recBTree } (\text{divide} \cdot \text{outList}) \\
 BTree \ NPoint & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + NPoint \times (BTree \ NPoint \times BTree \ NPoint)
 \end{array}$$

Na parte da conquista (catamorfismo), aplicamos um catamorfismo de árvore binária onde ia calcular o valor dos pontos nas sub-árvores e, no fim, utilizamos a função `calcLine` para calcular o valor da curva no ponto.

$$\begin{array}{ccc}
 BTree \ NPoint & \xrightarrow{\text{outBTree}} & 1 + NPoint \times (BTree \ NPoint \times BTree \ NPoint) \\
 \downarrow \text{cataBTree } \text{calc} & & \downarrow \text{recBTree } (\text{cataBTree } \text{calc}) \\
 NPoint \rightarrow OverTime \ NPoint & \xleftarrow{\text{calc}} & 1 + NPoint \times (OverTime \ NPoint \times OverTime \ NPoint)
 \end{array}$$

```

deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
deCasteljau = hyloAlgForm alg coalg
where
  coalg = anaBTree (divide · outList)

```

$divide\ (i_1\ a) = i_1\ ()$   
 $divide\ (i_2\ (a, l)) = i_2\ (a, (init\ (cons\ (a, l)), tail\ (cons\ (a, l))))$   
 $alg = cataBTree\ (calc)$   
 $calc\ (i_1\ a) = nil$   
 $calc\ (i_2\ (a, (o1, o2))) = \lambda pt \rightarrow (calcLine\ (o1\ pt)\ (o2\ pt))\ pt$   
 $hyloAlgForm\ f\ g = f \cdot g$

#### Problema 4

Aqui está a abstração do diagrama que seria usado para calcular a média de uma lista:

$$\begin{array}{ccc}
 A* & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + (A \times A*) \\
 \text{avg} \downarrow & & \downarrow id + (id \times \text{avg}) \\
 Double & \xleftarrow{[zero, g2]} & 1 + (A \times Double)
 \end{array}$$

$g2$  corresponde ao algoritmo para o cálculo da média quando se adiciona um novo elemento. Então, se  $g2$  recebesse o elemento a inserir e uma lista (não vazia), exprimia-se assim:

$$g2\ x\ l = \frac{x + k * avg\ l}{k + 1} \text{ para } k = length\ l$$

Portanto,  $avg$  depende do tamanho da lista. Para calculá-lo, vamos usar o catamorfismo de  $length$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A* & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + (A \times A*) \\
 \text{length} \downarrow & & \downarrow id + (id \times \text{length}) \\
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{[zero, succ.p2]} & 1 + (A \times \mathbb{N}_0)
 \end{array}$$

Assim, para calcular a média, temos um split de catamorfismos ( $avg\_aux = \langle avg, length \rangle$ ) e no final basta retirar o valor que queremos

$$\begin{array}{ccc}
 A* & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + (A \times A*) \\
 \text{avg\_aux} \downarrow & & \downarrow id + (id + \text{avg\_aux}) \\
 (Double \times \mathbb{N}_0) & \xleftarrow{[init, work]} & 1 + (A \times (Double \times \mathbb{N}_0))
 \end{array}$$

A função  $init$  acontece no caso de lista vazia. Nesse caso, a média e o comprimento da lista é 0. Logo:

$$init = \langle zero, zero \rangle$$

□

A função  $work$  é um split dos genes de  $avg$  e  $length$ , ligeiramente modificados pois recebem e retornam tipos diferentes. Logo:

$$\begin{aligned}
 &length\ (a, (avg, l)) = l + 1 \\
 \equiv &\quad \{ \text{def. succ, def. p2} \} \\
 &length\ (a, (avg, l)) = succ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2\ (a, (avg, l)) \\
 \equiv &\quad \{ \text{igualdade extensional} \} \\
 &length = succ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2
 \end{aligned}$$

□



$$\begin{aligned}
& new\_avg(a, (avg, l)) = (a + l * avg) / (l + 1) \\
\equiv & \{ \text{def. succ, def. uncurry} \} \\
& new\_avg(a, (avg, l)) = \widehat{(\text{f})} (a + l * avg, \text{succ } l) \\
\equiv & \{ \text{def. uncurry, def } \times \} \\
& new\_avg(a, (avg, l)) = \widehat{(\text{f})} \cdot (\widehat{(+)} \times \text{succ}) ((a, l * avg), l) \\
\equiv & \{ \text{def split, def. id, def. uncurry, def. p2} \} \\
& new\_avg(a, (avg, l)) = \widehat{(\text{f})} \cdot (\widehat{(+)} \times \text{succ}) \cdot \langle id \times \widehat{(*)}, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle (a, (avg, l)) \\
\equiv & \{ \text{igualdade extensional} \} \\
& new\_avg = \widehat{(\text{f})} \cdot (\widehat{(+)} \times \text{succ}) \cdot \langle id \times \widehat{(*)}, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle
\end{aligned}$$

□

Solução para listas não vazias:

$$avg = \pi_1 \cdot avg\_aux$$

$$\begin{aligned}
avg\_aux &= cataList\ gene \\
\textbf{where } gene &= [init, work] \\
init &= \langle 0, 0 \rangle \\
work &= \langle new\_avg, length \rangle \\
new\_avg &= \widehat{(\text{f})} \cdot (\widehat{(+)} \times \text{succ}) \cdot \langle id \times \widehat{(*)}, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \\
length &= \text{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2
\end{aligned}$$

Solução para árvores de tipo **LTree**:

O exercício anterior feito com **LTree**, geraria um diagrama tal como este:

$$\begin{array}{ccc}
LTree\ A & \xleftarrow{\text{in}} & A + (LTree\ A \times LTree\ A) \\
\downarrow avg\_aux & & \downarrow id + (avg\_aux + avg\_aux) \\
(Double \times \mathbb{N}_0) & \xleftarrow{[init, work]} & A + ((Double \times \mathbb{N}_0) \times (Double \times \mathbb{N}_0))
\end{array}$$

$$avg\_aux = \llbracket [init, work] \rrbracket$$

A função *init* neste caso tem um comportamento diferente, pois não recebe um elemento nulo.

Ao calcular a média, devolve o valor do próprio elemento, porque a média de um só elemento, é ele próprio.

Ao calcular o nº de nodos (equivalente de *length* para **LTree**) devolve 1 em vez de 0, porque de facto, tem um elemento. Logo:

$$init = \langle id, \underline{1} \rangle$$

□

Agora falta apenas deduzir como calcular a média e como calcular o equivalente de *length* para **LTree**.

$$\begin{aligned}
& contaNodos((a1, l1), (a2, l2)) = l1 + l2 \\
\equiv & \{ \text{def. uncurry} \} \\
& contaNodos((a1, l1), (a2, l2)) = \widehat{(+)} (l1, l2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{def. split, def. p1, def. p2} \} \\
&\quad \text{contaNodos}((a1, l1), (a2, l2)) = \widehat{(+)} \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle ((a1, l1), (a2, l2)) \\
&\equiv \{ \text{igualdade extensional} \} \\
&\quad \text{contaNodos} = \widehat{(+)} \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
&\quad \text{new\_avg}(((a1, l1), (a2, l2))) = ((a1 * l1) + (a2 * l2)) / (l1 + l2) \\
&\equiv \{ \text{def. uncurry} \} \\
&\quad \text{new\_avg}(((a1, l1), (a2, l2))) = \widehat{(/)} ((a1 * l1) + (a2 * l2), l1 + l2) \\
&\equiv \{ \text{def. uncurry, def. } \iota_i \} \\
&\quad \text{new\_avg}(((a1, l1), (a2, l2))) = \widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) ((a1 * l1, a2 * l2), (l1, l2)) \\
&\equiv \{ \text{def. } \iota_i, \text{def. uncurry, def. id} \} \\
&\quad \text{new\_avg}(((a1, l1), (a2, l2))) = \widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) \cdot ((\widehat{(*)}) \times \widehat{(*)}) \times (id \times id) (((a1, l2), (a1, l2)), (l1, l2)) \\
&\equiv \{ \text{def. split, def. id, def. uncurry, def. p2} \} \\
&\quad \text{new\_avg}(((a1, l1), (a2, l2))) = \widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) \cdot ((\widehat{(*)}) \times \widehat{(*)}) \times (id \times id) \cdot \langle id, \pi_2 \times \pi_2 \rangle (((a1, l1), (a2, l2))) \\
&\equiv \{ \text{igualdade extensional} \} \\
&\quad \text{new\_avg} = \widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) \cdot ((\widehat{(*)}) \times \widehat{(*)}) \times (id \times id) \cdot \langle id, \pi_2 \times \pi_2 \rangle \\
&\equiv \{ \text{absorção } \times, \text{natural id} \} \\
&\quad \text{new\_avg} = \widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) \cdot \langle \widehat{(*)} \times \widehat{(*)}, (id \times id) \cdot (\pi_2 \times \pi_2) \rangle \\
&\equiv \{ \text{functor } \times, \text{natural id} \} \\
&\quad \text{new\_avg} = \widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) \cdot \langle \widehat{(*)} \times \widehat{(*)}, \pi_2 \times \pi_2 \rangle
\end{aligned}$$

□

```

avgLTree =  $\pi_1 \cdot \langle gene \rangle$ 
where gene = [init, work]
    init =  $\langle id, \underline{1} \rangle$ 
    work =  $\langle new\_avg, contaNodos \rangle$ 
    new_avg =  $\widehat{(/)} \cdot (\widehat{(+)} \times \widehat{(+)}) \cdot \langle \widehat{(*)} \times \widehat{(*)}, \pi_2 \times \pi_2 \rangle$ 
    contaNodos =  $\widehat{(+)} \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$ 

```

## Problema 5

Inserir em baixo o código **F#** desenvolvido, entre `\begin{verbatim}` e `\end{verbatim}`: