

## Domácí úkol 10

Termín odevzdání: 10. 1. 2025 do večera

1.)

Vypočtete pomocí Taylorova rozvoje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin(x)} + \cos(2x) - 2x - 2}{1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x}}$$

2.)

Spočtete přibližně hodnotu  $\sqrt[3]{65}$  pomocí Taylorova rozvoje. Dosáhněte výsledku přesného na 5 desetinných cifer. Zkontrolujte, jestli se přibližný výsledek pohybuje v intervalu chyby (Ten určete např. z Lagrangeova tvaru zbytku).

*Lagrangeův tvar zbytku:*  $\exists \xi \in (a, x) :$

$$f(x) - p_a^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

1.)

Vypočtete pomocí Taylorova rozvoje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin(x)} + \cos(2x) - 2x - 2}{1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x}}$$

*Řešení:* Limitu budeme hledat pomocí Taylorova rozvoje, vypíšme si zde základní rozvoje kolem 0 pro použité funkce.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Taylorovy rozvoje složených funkcí vypočteme jako složení Taylorových rozvojų.

$$\begin{aligned} e^{2\sin(x)} &= 1 + \left(2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + 2x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} &= 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + \frac{1}{16}(2x)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Nyní jsme již připraveni dát všechny tyto rozvoje do zadané limity, dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 2x^2 + x^3 + 1 - 2x^2 - 2x - 2 + o(x^3)}{1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -6$$

□

2.)

Spočtěte přibližně hodnotu  $\sqrt[3]{65}$  pomocí Taylorova rozvoje. Dosáhněte výsledku přesného na 5 desetinných cifer. Zkontrolujte, jestli se přibližný výsledek pohybuje v intervalu chyby (Ten určete např. z Lagrangeova tvaru zbytku).

Lagrangeův tvar zbytku:  $\exists \xi \in (a, x) :$

$$f(x) - p_a^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

*Řešení:* Vytvoříme Taylorův polynom funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  kolem bodu  $a = 64$ , který je touto funkcí snadno vyčíslitelný:  $f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$ . Nyní celíme otázce, do jakého stupně musíme funkci rozvést, aby nám přesnost stačila na 5 desetinných míst. Chybu můžeme odhadnout pomocí Lagrangeova tvaru zbytku, který tudíž musí mít řádově velikost asi  $10^{-6}$ . Určíme Lagrangeho zbytek pro polynom stupně 1.

$$\frac{f''(\xi)}{2} (65 - 64)^2 = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^5}} \frac{1}{2} \geq -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{64^5}} \frac{1}{2} = -\frac{1}{9 \cdot 4^5} \approx -0.000\,108\,5 \approx -10^{-4}$$

To není dostačující přesnost, zkusme tedy najít Lagrangeův zbytek polynomu stupně 2.

$$\frac{f'''(\xi)}{6} (65 - 64)^3 = \frac{10}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^8}} \frac{1}{6} \leq \frac{10}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{64^8}} \frac{1}{6} = \frac{5}{81 \cdot 4^8} \approx 0.000\,000\,942 \approx 10^{-6}$$

Tím pádem bychom se měli dostat na dostatečnou přesnost pomocí Taylorova polynomu druhého stupně. Spočítejme ho tedy podle definice:

$$\begin{aligned} p_{64}^2(x) &= 4 + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} (x-64) - \frac{1}{2} \frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{64^5}} (x-64)^2 = \\ &= 4 + \frac{1}{48} (x-64) - \frac{1}{9 \cdot 4^5} (x-64)^2 \\ p_{64}^2(65) &= 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9216} \approx 4.020\,724\,826 \end{aligned}$$

Díky našemu odhadu na Lagrangeův tvar zbytku máme rigorózně nalezený interval, kde se nachází skutečná hodnota.

$$\sqrt[3]{65} \in (4.020\,724\,826; 4.020\,724\,826 + 0.000\,000\,942) = (4.020\,724\,826; 4.020\,725\,768)$$

Každopádně si můžeme být jistí, že 5 desetinných cifer máme správně. Pro zajímavost, přesná hodnota  $\sqrt[3]{65}$  je asi:

$$\sqrt[3]{65} = 4.020\,725\,758 \dots$$

□