

Domácí úkol 5

Termín odevzdání: 13. 11. 2025 do večera

1.)

Nechť $a > 0, A > 0$. Vypočtěte hmotnost desky s plochou

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0; \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2} \right)^{\frac{5}{4}} < y\sqrt{x} \right\}$$

a plošnou hustotou

$$\sigma(x, y) = Ax$$

Řešení: Hmotnost spočteme vyintegrováním hustoty přes "objem" (v tomto případě přes obsah).

$$m = \int_M \sigma(x, y) \, dx \, dy$$

Pro snadnější výpočet provedeme substituci. Výraz v závorce $x^2 + \frac{y^2}{a^2}$ nás motivuje k použití naškálovaných polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x(r, \varphi) &= r \cos(\varphi) \\ y(r, \varphi) &= ar \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Pro novou sadu proměnných spočteme meze a Jakobián. Díky podmínkám $x > 0$ a $y > 0$ pracujeme v prvním kvadrantu a proto můžeme brát $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Obor pro r získáme z třetí nerovnosti

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2} \right)^{\frac{5}{4}} &< y\sqrt{x} \\ \left(r^2 \cos^2(\varphi) + \frac{a^2 r^2 \sin^2(\varphi)}{a^2} \right)^{\frac{5}{4}} &< ar \sin(\varphi) \sqrt{r \cos(\varphi)} \\ r^{\frac{5}{2}} &< ar^{\frac{3}{2}} \sin(\varphi) \sqrt{\cos \varphi} \\ r &< a \sin(\varphi) \sqrt{\cos(\varphi)}, \end{aligned}$$

tedy $r \in (0, a \sin(\varphi) \sqrt{\cos(\varphi)})$. Jakobián spočteme jako

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ a \sin(\varphi) & ar \cos(\varphi) \end{pmatrix} = ar \cos^2(\varphi) + ar \sin^2(\varphi) = ar.$$

Můžeme proto psát

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \sin(\varphi) \sqrt{\cos(\varphi)}} A r \cos(\varphi) a r \, dr \, d\varphi$$

Tyto integrály už spočteme jednoduše jeden po druhém a dostaneme

$$\begin{aligned} m &= \frac{a A}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3(\varphi) \cos^{\frac{5}{2}}(\varphi) \, d\varphi = \frac{a^4 A}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(\varphi)) \cos^{\frac{5}{2}}(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{a^4 A}{3} \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{9}{2}} \, dt = \frac{a^4 A}{3} \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{11} \right) = \frac{8a^4 A}{231} \end{aligned}$$

□

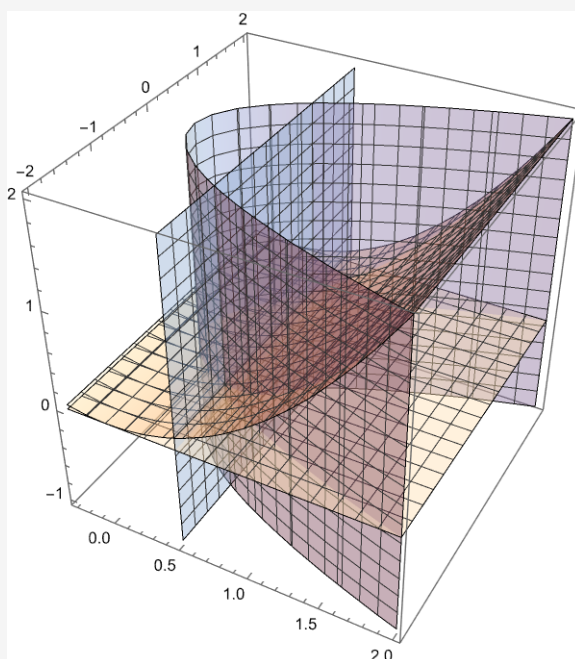
2.)

Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného danými plochami:

$$x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2px, \quad x = \frac{p}{2}, \quad z = 0,$$

v závislosti na parametru $p > 0$.

Řešení: Velká část problému je jen sestavit integrály tak, aby skutečně pokrývaly požadovanou oblast. Z rovnic je patrné, že hranici našeho tělesa tvoří dvě roviny a dvě "parabolová údolí".



Ve směru osy z integrujeme vně paraboly v mezích od 0 do $\frac{x^2}{2p}$. Teď už jen stačí tento příspěvek sečíst přes celou podstavu. Ta je ohraničena parabolou $x = \frac{y^2}{2p}$ a přímkou $x = \frac{p}{2}$. V takovém případě patří x do intervalu $(\frac{y^2}{2p}, \frac{p}{2})$, přičemž tento interval dává smysl pouze pro $y \in (-p, p)$ (v těchto krajních bodech se přímka $\frac{p}{2}$ protíná s parabolou $\frac{y^2}{2p}$). Hmotnost našeho tělesa tak dostaneme jako

$$\begin{aligned} M &= \int_{-p}^p \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz \, dx \, dy = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{6p} \int_{-p}^p \frac{p^3}{8} - \frac{y^6}{8p^3} \, dy = \\ &= \frac{1}{48p} \left(2p^4 - \frac{2p^4}{7} \right) = \frac{p^3}{28} \end{aligned}$$

Abychom dostali těžiště, zopakujeme integrování ještě třikrát, vždy budeme integrovat jinou

funkci, nejprve x , potom y a nakonec z .

$$M_x = \int_{-p}^p \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2p}} x \, dz \, dx \, dy = \dots = \frac{p^4}{144}$$

$$M_y = \int_{-p}^p \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2p}} y \, dz \, dx \, dy = \dots = 0$$

$$M_z = \int_{-p}^p \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z \, dz \, dx \, dy = \dots = \frac{p^4}{704}$$

Souřadnice těžiště jsou tedy:

$$T = \left[\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}, \frac{M_z}{M} \right] = \left[\frac{7p}{18}, 0, \frac{7p}{176} \right].$$

□