Domácí úkol 9

Termín odevzdání: 21. 12. 2025 do večera

1.)

Mějme zadáno vektorové pole $\overrightarrow{F} = (xz, yz, 2z)$ a plochu S, plášť rotačního hyperboloidu

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad z \in (-h, h)$$

Spočtete tok veličiny $\overrightarrow{F}$ přes plochu S orientovanou směrem ven z hyperboloidu ("chladící věže"), neboli spočtěte integrál

$$\int_S \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}.$$

Řešení: Začněme s parametrizací rotačního hyperboloidu. Rozdělme si ho rovinou xy na dvě poloviny, nejprve popišme tu vrchní. Využijeme válcové souřadnice s tím, že ze zadané rovnice vyplývá

$$z = \sqrt{r^2 - 1}.$$

Naše dva parametry budou $\psi \in (0, 2\pi)$ a $r \in \left(1, \sqrt{1 + h^2}\right)$, (meze intervalu opět spočítáme ze vztahu r a z). Máme tedy

$$\overrightarrow{\varphi}(r, \psi) = \begin{pmatrix} r\cos(\psi) \\ r\sin(\psi) \\ \sqrt{r^2 - 1} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \\ -\frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\psi) \\ r\cos(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro zisk vnější normály je třeba spočítat

$$\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial r} = \left(\frac{r^2\cos(\psi)}{\sqrt{r^2 - 1}}, \ \frac{r^2\sin(\psi)}{\sqrt{r^2 - 1}}, \ -r \right)^T$$

Tok spočítáme tedy následovně jako plošný integrál II. druhu.

$$\int_{S\uparrow} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+h^2}} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial r} \right) \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+h^2}} \begin{pmatrix} r\cos(\psi)\sqrt{r^2 - 1} \\ r\sin(\psi)\sqrt{r^2 - 1} \\ 2\sqrt{r^2 - 1} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{r^2\cos(\psi)}{\sqrt{r^2 - 1}}, \ \frac{r^2\sin(\psi)}{\sqrt{r^2 - 1}}, \ -r \right)^T \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+h^2}} r^3 - 2r\sqrt{r^2 - 1} \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\psi \tag{1}$$

Konec výpočtu prozatím odložíme.

Podíváme se na spodní půlku hyperboloidu. Zde platí

$$z = -\sqrt{r^2 - 1}.$$

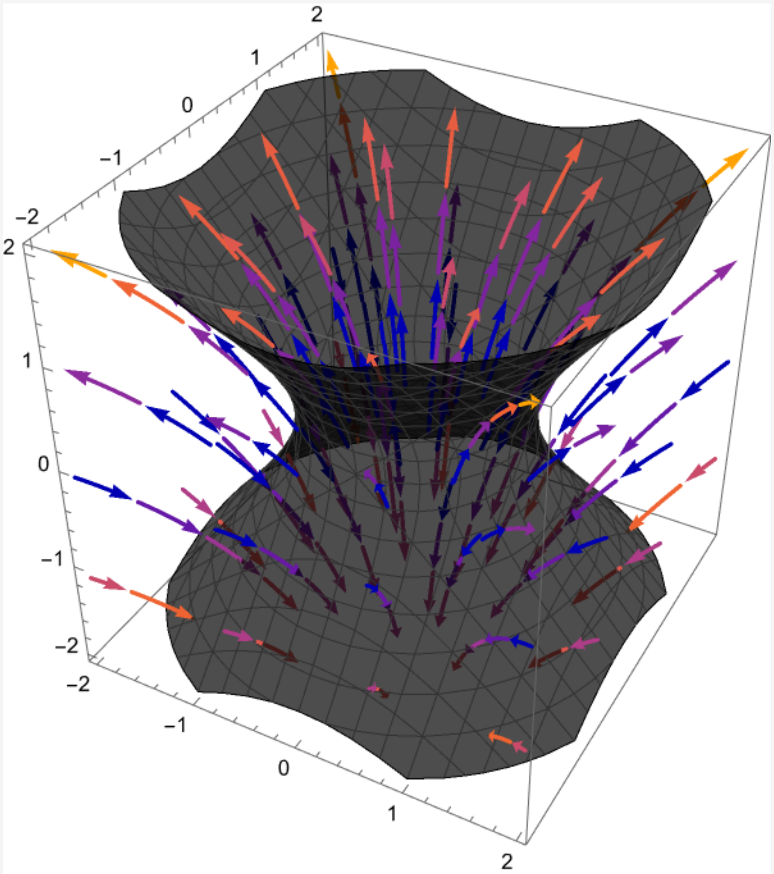
S využitím symetrie také můžeme učinit závěr, že vnější normála na spodní části věže bude mít akorát opačnou z-ovou složku, než ta na horní části. Můžeme proto rovnou psát integrál

$$\int_{S\downarrow} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+h^2}} \begin{pmatrix} -r\cos(\psi)\sqrt{r^2-1} \\ -r\sin(\psi)\sqrt{r^2-1} \\ -2\sqrt{r^2-1} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{r^2\cos(\psi)}{\sqrt{r^2-1}}, \ \frac{r^2\sin(\psi)}{\sqrt{r^2-1}}, \ r \right)^T \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+h^2}} -r^3 - 2r\sqrt{r^2-1} \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\psi \tag{2}$$

Dáme-li oba výsledky dohromady, jeden člen se zkrátí a my dostaneme

$$-2\int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{1+h^2}} 2r\sqrt{r^2-1} \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\psi = \left| \begin{array}{rl} t = r^2 - 1 & \\ \mathrm{d}t = 2r \ \mathrm{d}r & \\ 1 & \to 0 \\ \sqrt{1+h^2} & \to h^2 \end{array} \right| = -4\pi \int_0^{h^2} \sqrt{t} \ \mathrm{d}t = -\frac{8}{3}\pi h^3$$



□