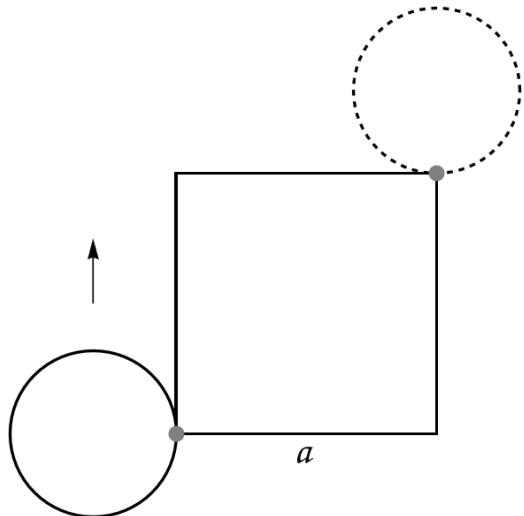


Domácí úkol 7

Termín odevzdání: 4. 12. 2025 do večera

1.)

Uvažujte kružnici valící se (bez prokluzování) po čtverci se stranou délky a ,



Obrázek 1: Kružnice a čtverec

Spočtěte délku křivky, podél které se pohybuje šedý bod na kružnici, který se čtverce dotkne pouze na začátku a přesně na konci pohybu.

Řešení:

Rozdělíme si pohyb kružnice na tři části; kutálení po hraně, překlenutí přes roh a opět kutálení po hraně do cíle (tak jak je znázorněno na obrázku). Jelikož se šedý bod dotkne čtverce právě dvakrát a to na začátku a na konci, je poloměr kružnice už jednoznačně daný a to tím, že šedý bod musí být při překlenování přes roh přímo na druhé straně kružnice (než je pivot). Proto se musí strana a rovnat odvalení poloviny kružnice, neboli πr , tudíž

$$r = \frac{a}{\pi}.$$

Parametrizujme nejprve kutálení po levé straně čtverce. Střed kružnice se bude pohybovat rovnoměrnou rychlostí, snadno popsatelné jako

$$S_k = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\pi} \\ t \end{bmatrix}$$

Nyní se musíme zamyslet jak se pohybuje šedý bod, vůči středu S_k . Popišme jeho pohyb pomocí úhlu γ , který svírá jeho spojnice s x -ovou osou. Víme, že musí platit rovnost mezi uraženou vzdáleností kružnice t a odvalenou částí kružnicového oblouku $\frac{a}{\pi}\gamma$. Proto

$$\gamma = -\frac{\pi}{a}t,$$

$$S - S_k = \begin{bmatrix} \frac{a}{\pi} \cos\left(-\frac{\pi}{a}t\right) \\ \frac{a}{\pi} \sin\left(-\frac{\pi}{a}t\right) \end{bmatrix},$$

a tedy

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\pi} + \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) \\ t - \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) \end{bmatrix}.$$

Můžeme tedy směle derivovat křivku popsanou $\vec{\varphi}(t) = S$

$$\vec{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) \\ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) \end{pmatrix},$$

a z toho dále spočítat velikost tečného vektoru

$$\begin{aligned} \|\vec{\varphi}'(t)\| &= \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{a}t\right) + 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{a}t\right)} = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{a}t\right)} = \\ &= 2\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2a}t\right)} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2a}t\right). \end{aligned}$$

Délka cykloidy, po které se šedý bod pohybuje v první části, je tedy

$$\int_0^a 2\sin\left(\frac{\pi}{2a}t\right) dt = -2\frac{2a}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2a}t\right) \right]_0^a = \frac{4a}{\pi}.$$

Druhá část není nic složitějšího nežli pohyb po kružnicovém oblouku. Pivot - bod na kružnici, který se dotýká rohu čtverce - je naproti šedému a kolem něj se otáčí celá kružnice o 90. Šedý bod tak během druhé části opíše čtvrt kružnice s poloměrem $\frac{2a}{\pi}$.

$$\frac{\pi}{2} \frac{2a}{\pi} = a$$

Nakonec se kružnice dovalí do konce, tento pohyb je identicky stejný jako v první části a proto je délka trajektorie stejná. Celkovou dráhu uraženou šedým bodem dostaváme jako

$$2 \cdot \frac{4a}{\pi} + a = \left(\frac{8}{\pi} + 1 \right) a$$

□

2.)

Spočtěte integrál

$$\int_{\langle \varphi \rangle} (x+y) \, dx + (x-y) \, dy$$

přes elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientovanou v kladném směru.