Domácí úkol 2

Termín odevzdání: 22. 10. 2025 do večera

1.)

Mějte zadán funkcionál akce

$$S(\mathbf{q}) = \int_0^t L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ \mathrm{d}t = \int_0^t (\dot{q}_1)^2 - \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 + q_2^2\dot{q}_1\ \mathrm{d}t.$$

Najděte první Gâteauxovu derivaci ve směru $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$. Dále zaveďte zobecněné hybnosti a sestavte Hamiltonovy rovnice pro nalezení extrémály.

2.)

Definujme posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx).$$

Nalezněte bodovou limitu (pokud existuje) na intervalu $(0, \infty)$. Rozhodněte, zda tato posloupnost konverguje ke své limitě na tomto intervalu stejnoměrně či alespoň lokálně stejnoměrně.

3.)

U každého z následujících tvrzení rozhodněte, zda platí a uveďte příklad posloupnosti funkcí, které ho splňují.

Existuje posloupnost funkcí $\{a_n\}$ taková, že

a) $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $\mathbb{R}$, ale neplatí $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

b) $\{a_n\} \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ ale

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} a_n\ \mathrm{d}x > 0.$$

c) $\{a_n\}$ je nerostoucí, platí $a_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale neplatí $a_n \rightrightarrows 0$.

d) $\{a_n\}$ je klesající a platí $a_n \rightrightarrows \operatorname{sgn}(x)$.

e) a_n jsou spojité, neplatí, že $a_n \to 0$ na $(0, 1)$, ale

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N}) \int_0^1 a_n\ \mathrm{d}x = 0$$