

Sada příkladů 5/9

Henri Lebesgue a jeho integrál

Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^2 dx$$

Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

$$5. \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$6. \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$7. \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \right)$$

Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

$$\text{a)} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a} dx, \quad a < 2$$

$$\text{b)} \int_0^2 x^2 \cos ax \, dx, -\infty < a < \infty$$

$$\text{c)} \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx, 1 < a < \infty$$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

$$9. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \, dx$$

$$10. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx$$

$$11. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$$

$$14. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

$$15. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} \, dx$$

$$17. \int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) \, dx$$

$$18. \int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$$19. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, dx$$

$$20. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx$$

$$21. \int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx, n \in \mathbb{N}_0$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \tan^2 x) dx$$

$$23. \int_{x>0, y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$$

Doplněním vhodného parametru spočtěte:

$$24. \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$$

$$25. \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$$

Integrály závislé na parametrech

Věta (o spojitosti): Nechť A ČR a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod A. Nechť $f: X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

- (i) $\forall \alpha \in A: x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná
- (ii) pro s.v. $x \in X: \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ je spojita $\forall \alpha_0$
- (iii) $\exists g \in L^1: |f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$.

Pak $x \mapsto f(x, \alpha) \in L^1$ $\forall \alpha \in A$ a funkce $\alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) dx$ je spojita $\forall \alpha_0$.

Věta (o limitě): Nechť A ČR a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod A. Nechť $f: X \times (A \setminus \{\alpha_0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

- (i) $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}: x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná
- (ii) pro s.v. $x \in X: \exists$ existují vlastní limity $F(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha)$
- (iii) $\exists g \in L^1: |f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$.

Pak $x \mapsto f(x, \alpha) \in L^1$ $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $F \in L^1$ a platí $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_X f(x, \alpha) dx = \int_X F(x) dx$

Věta (o derivaci): Nechť A ČR je otevřený interval. Nechť $f: X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

- (i) $\forall \alpha \in A: x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná
- (ii) pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A \exists$ (vlastní) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$
- (iii) $\exists g \in L^1: \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$
- (iv) $\exists \alpha_0 \in A: x \mapsto f(x, \alpha_0) \in L^1$.

Pak $x \mapsto f(x, \alpha) \in L^1$ $\forall \alpha \in A$, funkce $\varphi: \alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) dx$ má na A vlastní derivaci a $\varphi'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$.

Obvykle v příkladech: měřitelnost plyně ze spojitosti.

$$\text{8a)} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\omega (\pi - x)^\omega} dx \quad \omega < 2$$

Pozorování: $\omega \leq 0$: $f(x, \alpha)$ je omezená a spojita, majoranta např. $g(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2A}$ na intervalu $a \in (-A, 0]$. Pro $\omega \rightarrow -\infty$ je $f\left(\frac{\pi}{2}, \omega\right) \rightarrow +\infty$ (i má odtud tohoto bodu). Ale dostavíme spojitost na každém intervalu typu $(-A, 0]$.

Pro $\omega > 0$ máme problém v krajních bodech. Majorantu tak hledáme zvlášť na $I_1 = (0, \delta) \quad I_2 = (\delta, \pi - \delta) \quad I_3 = (\pi - \delta, \pi)$

(2)

Na I₂ lze říci $|f(x,a)| \leq K$, ~~$\forall \delta > 0 \exists R > 0$~~

$$\text{Např. } \left| \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a} \right| \leq \frac{1}{\delta^a(\pi-\delta)^a} \leq \frac{1}{\delta^{2a}} \leq \frac{1}{\delta^4} \text{ protože } a < 2.$$

$$\text{Na I}_1: |f(x,a)| \leq \left| \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{1}{(\pi-x)^a} \right| \leq \frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{1}{(\pi-\delta)^a} \leq \frac{1}{x^{a-1}},$$

kde jsme omezili $a \in (0, a_0]$, a_0 je lib. číslo tak, že $a_0 < 2$, tj. $a_0 - 1 < 1$ a proto $(\frac{1}{x})^{a_0-1}$ je integrovatelná majoranta

$$\text{Podobně I}_3: |f(x,a)| \leq \left| \underbrace{\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}}_{=\sin x} \cdot \frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{(\pi-x)^{a-1}} \right| \leq \frac{1}{(\pi-x)^{a_0-1}}, \text{ což je opět integrovatelné}$$

$$g := \max \left\{ \frac{1}{x^{a_0-1}}, \frac{1}{\delta^4}, \frac{1}{(\pi-x)^{a_0-1}} \right\} \text{ je majoranta na celém } (0, \pi)$$

$$\Rightarrow F(a) = \begin{cases} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a} & \text{je spojitá na } [-A, a_0] \\ & \text{pro lib. } A > 0, a_0 < 2, \text{ j.} \\ & \text{je spojitá na } (-\infty, 2) \end{cases}$$

8b) $\int_0^2 x^2 \cos(ax) dx \quad a \in \mathbb{R}$

- měřitelnost a spojitost triviální (stejně tak v \mathcal{L}^1)

- Majoranta: $|\cos ax| \leq 1 \Rightarrow |x^2 \cos ax| \leq x^2 \in L^1((0,2)) \Rightarrow$ spojitost pro $a \in \mathbb{R}$.

8c) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx, \quad 1 < a < \infty$

- měřitelnost v ∞ , spojitek v a triviální

- majoranta: pro $a \geq a_0$ ~~$a_0 \in (1, \infty)$~~ t.č.

$$\left| \frac{\cos x}{x^a} \right| \leq \frac{1}{x^{a_0}}, \text{ což je integrovatelné na } (1, \infty) \Rightarrow F(a) = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx \in C([a_0, \infty))$$

$\forall a_0 > 1 \Rightarrow F(a) \in C((1, \infty))$

9) $\int_0^\infty \frac{\arctg ax}{x(1+x^2)} dx =: I(a)$. Myslím: derivace arctg dala racionalní fci, tu můžeme zintegrovat.

$$I'(a) = (\text{po ověření předpokladů, viz níže}) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\arctg ax}{x(1+x^2)} \right) dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2)(1+(ax)^2)} dx$$

$$a=1: \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{x}{1+x^2} \right]_0^\infty}_{=0} = \frac{1}{2} [\arctg x]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$a \neq 1 : \text{Rozložit na PZ: } \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+a^2x^2} = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2} \right) \cdot \frac{1}{1-a^2}$$

(problem i pro $a=-1$, tak řešíme necht' $a>0$)

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{1-a^2} \cdot \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} - a \int_0^\infty \frac{a^2}{1+a^2x^2} dx \right) = \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{\pi}{2} - a \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$$

Věšimene si, že $I'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ pro $a=1$ také, tedy $I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ platí pro $a>0$.

$$I(a) = I(0) + \int_0^a I'(\tilde{a}) d\tilde{a}, \text{ tj. } I(a) = \int_0^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\tilde{a}} d\tilde{a} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(1+a), a \geq 0$$

"0 triv."

Pro $a<0$ si věšimene $I(a) = -I(-a)$ z lichosti funkce $\arctg(ax)$, proto pro $a<0$ je $\underline{I(a) = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln(1-a)}, a<0$

Předpoklady věty: • měřitelnost a existence derivace triv.

- $\exists a_0 + \varepsilon, x \mapsto f(x, a_0) \in L^1$ a.m., např. $a_0=0, f(x, 0) = 0 \in L^1$
- majoranta: $|\frac{\partial f}{\partial a}| = \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1((0, \infty))$ ✓

Alternativní postup: Protože $f(x, 0) = 0$, platí $f(x, a) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\arctg ax}{x(1+x^2)} \right) dx$

$$\text{a proto } I(a) = \int_0^\infty \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} dx dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+c^2x^2)} dx = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) \quad (a > 0)$$

Fund. int.

$$(10) I(a, b) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$$

$$\text{Podle Fund. int.: } e^{-ax^2} - e^{-bx^2} = \left[\frac{-e^{cx^2}}{c} \right]_{c=b}^{c=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{-e^{cx^2}}{c} \right) dc = \int_b^a -x^2 e^{-cx^2} dc$$

$$\Rightarrow I(a, b) = \int_0^\infty \int_b^a -x^2 e^{-cx^2} dc dx = \int_0^\infty \int_a^b x^2 e^{-cx^2} dc dx = \int_a^b \int_0^\infty x^2 e^{-cx^2} dx dc = dy = 2cx dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2c} \int_0^\infty e^{-y} dy dc = \int_a^b \frac{1}{2c} dc = \frac{1}{2} (\ln|b| - \ln|a|) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}$$

!POZOR?

Přepočet mezi původní substitucí $y=cx^2$ platí jen pro $c>0$!! Pro $c<0$ bychom dostali $\int_{-\infty}^0 e^{-y} dy$, to není konečný integrál. $c=0$ je také problem: $\int_0^\infty x \cdot e^0 dx = \infty$!!

Vše projde pouze pokud je $c>0$, tj. $a>0, b>0$. Pak $\underline{I(a, b) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}}.$

To vidíme ostatně už na začátku: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x} dx$ konverguje k ∞ jen pro $a>0$

Konvergence v nuly: $e^{-ax^2} \sim 1$, což je zdalek problém, ale $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} \sim x^2$, což ně je OK.

Pomocí věty o derivaci:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = (\text{po ověření předpokladů}) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{-e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \right) dx = \int_0^\infty -x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (-1) = \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\infty -\frac{1}{2a} da + f(b) = -\frac{1}{2} \ln a + f(b) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} I = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} + C = \ln \sqrt{\frac{b}{a}} + C$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = f'(b) = \frac{1}{2b} \Rightarrow f(b) = \frac{1}{2} \ln b + C$$

$$\text{ale očividně } I(a, a) = 0 = \ln \sqrt{\frac{a}{a}} + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I(a, b) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv. ($\frac{\partial f}{\partial a}$ a $\frac{\partial f}{\partial b}$)

• $\exists a_0, b_0$ t.ž. $x \mapsto f(x, a_0, b_0) \in L^1$: $a_0 = b_0 = 1$ např.

• majoranta: $|\frac{\partial f}{\partial a}| \leq x \cdot e^{-a_0 x^2}$ pro $a \geq a_0$, $a_0 > 0$ lib.

a podobně $|\frac{\partial f}{\partial b}| \leq x \cdot e^{-b_0 x^2}$ pro $b \geq b_0$, $b_0 > 0$ lib.

\Rightarrow Větu lze použít na $(a_0, \infty) \times (b_0, \infty)$ pro lib. $a_0, b_0 > 0$, tj. na $(0, \infty) \times (0, \infty)$

11) D5

12) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ Potřebuje se $a, b > -1$ ke konvergenci integrálu.

Posliž $x=1$ $a=b$ je OK, $a \neq b$: (BÚNO $b>a$): $\frac{x^a \cdot (x^{b-a}-1)}{\ln x}$, $\ln x \sim x-1$

$\frac{x^{b-a}-1}{x-1}$ je integrovatelné u $x=1$

!! Používám $c > -1$

$$\text{Tedy pro } a, b > -1: I(a, b) = \int_a^1 \int_a^b \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{x^c}{\ln x} \right) dc dx = \int_a^1 \int_a^b x^c dc dx \stackrel{\text{FUB}}{=} \int_a^1 \int_0^c x^c dx dc = \int_a^b \frac{1}{c+1} dc = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Lze i větu o derivaci jeho v ⑨ a ⑩. Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivací $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$ triv

• ~~f(1, 1)~~ $f(x, 1, 1) = 0 \in L^1(0, 1)$ OK

• $|\frac{\partial f}{\partial a}| = x^a \leq x^{a_0}$ pro $a \geq a_0 > -1$

je integrovatelná

• $|\frac{\partial f}{\partial b}| = x^b \leq x^{b_0}$ pro $b \geq b_0 > -1$

\Rightarrow Větu lze použít na $(a_0, \infty) \times (b_0, \infty)$, tj. na $(-1, \infty) \times (-1, \infty)$

$$(13) \quad I(a,b) := \int_0^\infty \frac{\arctg ax \cdot \arctg bx}{x^2} dx$$

Konvergence integrálu: $\text{u} \in \infty: f(a,b,x) \sim \frac{1}{x^2}$ OK
 $\text{u} = 0: \frac{\arctg ax}{x} \sim 1, \frac{\arctg bx}{x} \sim 1 \quad \text{OK} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Symetrie: $I(a,b) = -I(a,-b) = -I(-a,b) = I(-a,-b)$ } dálé jen pro $a, b > 0$.
 $I(a,0) = I(0,b) = 0$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = (\text{předpoklady}) = \int_0^\infty \frac{\arctg bx}{x(1+a^2x^2)} dx \quad \dots \text{vidíme, že } \frac{\partial I}{\partial a}(a,0) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a \partial b} = (-\dots) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} dx = (\text{podobně jako v příkladu } 9) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

platí pro $a \neq b$: pro $a=b$ - je potřeba ale počítat zvlášť!

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b) = \int_0^b \frac{\partial^2 I}{\partial a \partial \beta}(a,\beta) d\beta + \underbrace{\frac{\partial I}{\partial a}(a,0)}_{=0} = \int_0^b \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+\beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \underbrace{I(0,b)}_{=0} + \int_0^a \frac{\partial I}{\partial a}(a,b) da = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(1+\frac{b}{a}\right) da = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^a \ln\left(a+\frac{b}{a}\right) - \ln a da \\ &= \cancel{\frac{\pi}{2} \cdot \left[\left((a+b) \ln(a+b) - a(b+1) \right) \right]_0^a} - [a(b-a-1)]_0^a = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot ((a+b) \ln(a+b) - (a+b) - b \ln b + b - a \ln a + a) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \cdot ((a+b) \ln(a+b) - a \ln a - b \ln b)}} \end{aligned}$$

To je pro $a, b > 0$. Do zbylých kvadrantů prodloužíme symetriemi a na osách dodefinujeme nulou.

Předpoklady: • měřitelnost a existence derivací OK

$$\bullet f(0,0,x) = 0 \in L^1((0,\infty)), \quad \frac{\partial f}{\partial a}(0,0,x) = 0 \in L^1$$

$$\bullet \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \left| \frac{1}{1+a^2x^2} \right| \cdot \left| \underbrace{\frac{\arctg bx}{x}}_{\leq b} \right| \leq |b| \frac{1}{1+\varepsilon^2x^2} \leq \frac{B}{1+\varepsilon^2x^2} \quad \text{pro } b \in (-B, B), a \in (-\alpha, \alpha) \cup (\varepsilon, \infty)$$

$$\bullet \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = \text{podobně} \leq \frac{A}{1+\varepsilon^2x^2} \quad \text{pro } a \in (-A, A), b \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$$

$$\bullet \left| \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \right| = \left| \frac{1}{1+a^2x^2} \right| \left| \frac{1}{1+b^2x^2} \right| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^2x^2)^2} \quad \text{pro } (a, b) \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$$

Větu lze používat na $((-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)) \times ((-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty))$ pro lib. A, ε, B, f :

na $((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) \times ((-\infty, 0) \cup (0, \infty))$

$$(14) \quad I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad \text{Pro konvergenci potřebujeme } a > 0, b \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \int_0^\infty -x e^{-ax^2} \sin bx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x e^{-ax^2} \\ u' = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \\ v = \sin bx \\ v' = \cos bx \cdot b \end{array} \right| = -\underbrace{\left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{b}{2a} I(a,b)$$

$$\text{Tj. } \frac{\partial I}{\partial b} = -\frac{b}{2a} I \quad \dots \text{Dif. rovnice!}$$

$$\ln |I| = -\frac{b^2}{4a} + C(a)$$

$$\Rightarrow I = \tilde{C}(a) \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$I(a,0) = \tilde{C}(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{a}x \\ dy = \sqrt{a}dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

$$\bullet f(a,0,x) = e^{-x^2} \in L^1 \quad (\text{otevřené } f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L^1 \quad \forall a > 0)$$

$$\bullet \text{majoranta: } \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = x e^{-ax^2} |\sin bx| \leq x e^{-ax^2} \leq x e^{-a_0 x^2} \quad \text{pro } a \geq a_0 > 0. \\ \cap L^1((0,\infty))$$

\Rightarrow Větu lze použít na $[a_0, \infty) \times \mathbb{R}$, tedy na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

$$(15) \quad I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx \quad \text{Připomíme: } \cosh bx = \frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx})$$

člen ax^2 je silnější než $\pm bx \Rightarrow$ pro konvergenci $a > 0$
 $b \in \mathbb{R}$.

Analogicky jako (14): $\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \frac{b}{2a} I$

$$\ln I = \frac{b^2}{4a} + C(a)$$

$$I = \tilde{C}(a) e^{\frac{b^2}{4a}}$$

$$I(a,0) = \tilde{C}(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

$$\bullet f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L^1 \quad \forall a > 0$$

$$\bullet \text{majoranta: } \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = x e^{-ax^2} |\sinh bx| \leq x e^{-ax^2} + |bx| \leq x e^{-a_0 x^2 + Bx} \in L^1((0,\infty))$$

$$\text{pro } a \geq a_0 > 0 \quad a, b \in [-B, B]$$

\Rightarrow Větu lze použít na $[a_0, \infty) \times [-B, B]$ $\forall a_0 > 0, \forall B > 0 \Rightarrow$ na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

$$(16) \quad I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a \sin^2 x)}{\sin^2 x} \, dx$$

Konvergencia u nuly: OK, $\ln(1+a \sin^2 x) \sim a \sin^2 x$
 $\ln^{\pi/2}$: zádny problem.

Ale pro dobré definování funkce potřebujeme $1+a \sin^2 x > 0$ na $(0, \pi/2)$, tj. $1+a > 0 \Rightarrow a > -1$!

(7)

$$I(a) = (!) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2 x} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{at^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(a+1)t^2} dt = \left| \begin{array}{l} s = \sqrt{a+1} t \\ ds = \sqrt{a+1} dt \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I(0) = 0 \text{ očividně } \Rightarrow I(a) = \int_0^a I(\alpha) d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot [\sqrt{\alpha+1}]^a$$

$I(a) = \pi(\sqrt{a+1} - 1)$

Plati i pro $a = -1$. Konvergence integrálu $\int_{-1}^{\pi/2} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$ u $\pi/2$ lehce.

Dále argument Léviho větou: $I(-1) = \lim_{a \rightarrow -1^+} I(a) = -\pi$. Monotonie: $f(a, x)$ je klesající v proměnné a , ale záporná; Lévi lze použít na $-f(a, x)$, to je rostoucí a kladná, takže OK.

Předpoklady:

- měřitelnost a ex. derivace triv
- $f(0, x) = 0 \in L^1(0, \pi/2)$
- majoranta $|\frac{\partial f}{\partial a}| = \frac{1}{1+a\sin^2 x} \leq \begin{cases} 1 & \text{pro } a \geq 0 \\ \frac{1}{1+a_0} & \text{pro } a \in [a_0, 0] \quad a_0 > -1 \end{cases}$

\Rightarrow Větu lze použít na $[a_0, \infty)$ pro $a_0 > -1$, tj. na $(-1, \infty)$.

(17) $I(a, b) = \int_0^{\pi} \ln(a+b\cos x) dx$

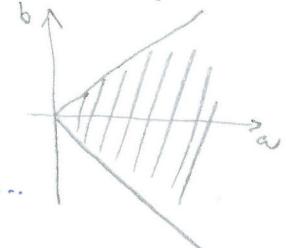
(Pozorování: $\int_0^{\pi} \ln(a-b\cos x) dx > I(a, -b)$)

$\frac{\partial I}{\partial a} = (!) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x} dx \quad \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx \end{array} \right| = \dots = \frac{2}{a+b} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}t^2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}} \arctan \frac{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t}{2} \right]_0^{\infty} = \dots$

$\Rightarrow I(a, b) = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[\arctan \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \right] dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Předpokládáme $a+b\cos x > 0$ na $(0, \pi)$, tj.
 $a+b > 0 \quad a-b > 0$

Tedy např. $a > 0$, $b \in (-a, a)$



$$\Rightarrow I(a, b) = \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} da}_{= \pi \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} \cdot |b| da} + f(b) \quad \text{Bývá } b > 0, \text{ očividně je hodnota integrálu nezávislá na znaménku } b$$

$$= \pi \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} \cdot |b| da \stackrel{t=\frac{a}{b}}{=} \left| \begin{array}{l} t = \frac{a}{b} \\ dt = \frac{1}{b} da \end{array} \right| = \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt = \pi \cdot \operatorname{arccosh} t$$

$$\Rightarrow I(a, b) = \pi \cdot \operatorname{arccosh} \frac{a}{b} + f(b) = \pi \cdot \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} \right) + f(b)$$

$$a=b: \operatorname{arccosh} \frac{a}{a} = \operatorname{arccosh} 1 = 0 \Rightarrow f(b) = I(b, b) = \int_0^{\pi} \ln(b+b\cos x) dx = \pi \cdot \ln b + \int_0^{\pi} \ln(1+\cos x) dx$$

TRIKEM:

- 1) $\int_0^{\pi} \ln(1+\cos x) dx = \int_0^{\pi} \ln(2\cos^2 \frac{x}{2}) dx = \int_0^{\pi} (\ln 2 + 2\ln \cos \frac{x}{2}) dx = \pi \ln 2 + 4 \int_0^{\pi/2} \ln \cos t dt$
- 2) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\pi/2-t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln \sin w dw \quad (w = \pi/2 - t)$. Označme $J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt$

$$\text{Pak 3, } 2J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t + \ln \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{\sin 2t}{2} \right) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin s ds = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + J$$

Použili jsme symetrii fce $\sin x$, tj. $\int_0^\pi \ln \sin x = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x$!

$$\Rightarrow J = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \Rightarrow \int_0^\pi \ln(1+\cos x) dx = \pi \ln 2 + 4 \cdot J = \pi \ln 2 - 2\pi \ln 2 = -\pi \ln 2$$

$$I(a,b) = \pi \ln\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-1}}\right) + \pi \ln b - \pi \ln 2 = \pi \cdot \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)$$

Výsledek nezávisí na znaménku $b \Rightarrow$ platí pro $b \in [-a,a]$. Původně na otevřeném intervalu, ale $b=a$ jsem právě spočítali takto.

Předpoklady věty: • měřitelnost a existence derivace triv.

- $f(1,1,x) = \ln(1+\cos x) \in L^1$ (spočítali jsem)

- $|\frac{\partial f}{\partial a}| = \frac{1}{|a+b\cos x|} \leq \frac{1}{a-|b|} \leq \frac{1}{a_0}$ pro $a \geq a_0 > 0$
 $a, b \in (-a+a_0, a-a_0)$

$$L^1(0, \pi)$$

Věta platí na ~~(a,b)~~

$$\text{možné } \{(a,b) : a \geq a_0, b \in (-a+a_0, a-a_0)\} \quad \forall a_0 > 0$$

$$\text{tedy na } \{(a,b) : a > 0, b \in (-a,a)\}.$$

(18) $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx dx =: I(a,b)$ Pro konvergenci integrálu $a > 0, b \in \mathbb{R}$

Pozorování: $x e^{-ax} = -\frac{\partial}{\partial a}(e^{-ax})$ Proto $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}(e^{-ax} \cos bx) dx = (!)$

$$= -\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = -\frac{\partial}{\partial a} J(a,b). \text{ Spočítáme } J(a,b) \text{ (2x per partes)}$$

$$J(a,b) = \underbrace{\left[e^{-ax} \frac{\sin bx}{b} \right]_0^\infty}_= + \frac{a}{b} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{a}{b} \cdot \left[-e^{-ax} \frac{\cos bx}{b} \right]_0^\infty - \frac{a^2}{b^2} J(a,b) = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} J(a,b)$$

$$\Rightarrow J(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow I(a,b) = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a}{a^2+b^2} \right) = -\frac{a^2+b^2-2a^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} \text{ pro } a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Předpoklady: pro $f(a,b,x) = e^{-ax} \cos bx$!! • měřitelnost a ex. derivace triv

- $f(1,b,x) \in L^1$ triviale

- $|\frac{\partial f}{\partial a}| \leq x e^{-ax} \leq x e^{-a_0 x}$ pro $a \geq a_0 > 0$.

Věta platí na $[a_0, \infty) \times \mathbb{R}$ $\forall a_0 > 0$, tedy na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

(19) $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{1-\cos x}{x} dx =: I(a)$ Opět potřebujeme $a > 0$ pro konvergenci integrálu

$$I'(a) = (!) = - \int_0^\infty e^{-ax} \cdot (1-\cos x) dx = \left[\frac{-e^{-ax}}{a} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx = -\frac{1}{a} + J(a,1), \text{ kde } J(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\text{j je příkladu } (18) \Rightarrow I'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2+1} \Rightarrow I(a) = -\ln a + \frac{1}{2} \ln(a^2+1) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right) + C$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex-derivace triv.

$$\bullet f(x) = e^{-x} \cdot \frac{1-\cos x}{x} \in L^1((0, \infty))$$

$$\bullet |\frac{\partial f}{\partial a}| = e^{-ax} \cdot |1-\cos x| \leq 2e^{-ax} \quad \text{pro } a \geq a_0 > 0$$

\Rightarrow Věta plati na $[a_0, \infty)$ $\forall a_0 > 0 \Rightarrow$ na $(0, \infty)$.

Co konstanta?? Nenáme lehce $I(A) = B$ pro nějaké A , musíme jinak.

Lehce užijeme spojitost $I(a)$ na $(0, \infty)$ a použijeme

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = C = \int_0^\infty \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax} \frac{1-\cos x}{x} dx = \int_0^\infty 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I = \ln \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$

$$(20) \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx =: I(a) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \dots e^{-ax} \cdot e^x \Rightarrow a > 1 \text{ pro konvergenci integrálu!}$$

$$I'(a) = (!) = - \int_0^\infty e^{-ax} \sinh x dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(1-a)x} dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(1-a)x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a+1} *$$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{2} \ln(a+1) - \frac{1}{2} \ln(a-1) + C = \ln \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + C$$

$$\text{Opatrnost spojitosti } I(a): \lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = C = \int_0^\infty \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx = \int_0^\infty 0 dx = 0$$

$$\Rightarrow I(a) = \ln \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex-derivace triviální

$$\bullet f(x) = e^{-2x} \frac{\sinh x}{x} \in L^1((0, \infty))$$

$$\bullet |\frac{\partial f}{\partial a}| \leq e^{-ax} \cdot e^x \leq e^{\frac{(a_0+1)x}{x}} \quad \forall a \geq a_0 > 1$$

Obě věty na $[a_0, \infty)$ $\forall a_0 > 1$
 \Rightarrow na $(1, \infty)$.

Spojitost: f spojita $\forall a$
 $|f| \leq \frac{e^{-(a_0+1)x}}{x} \in L^1 \quad \forall a \geq a_0 > 1$

$$(21) I_m(a) = \int_0^1 x^{-a} \ln^m x dx \quad \text{Pro konvergenci potřebují } a < 1 \text{ nezávisle na } m.$$

$$\text{Zavedeme } J(a) = \int_0^1 x^{-a} dx = \int_0^1 e^{-aln x} dx. \quad \text{Pak (!) } J'(a) = \int_0^1 -x^{-a} \ln x dx.$$

$$J''(a) = \int_0^1 x^{-a} \ln^2 x dx \quad \text{atd.}$$

$$\text{Tedy } I_m(a) = (-1)^m J^{(m)}(a)$$

$$\text{Zároveň } J(a) = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_0^1 = \frac{1}{1-a} \Rightarrow J'(a) = -\frac{1}{(1-a)^2}, J''(a) = \frac{2}{(1-a)^3}, \dots$$

$$\Rightarrow J^{(m)}(a) = \cancel{\frac{m!}{(1-a)^{m+1}}} \Rightarrow I_m(a) = (-1)^m \frac{m!}{(1-a)^{m+1}}$$

- Předpoklady: $f_m(x) = x^{-a} \ln^m x$: • měřitelnost a ex. derivace triv.
• $f_m(-1, x) = x \ln^m x \in L^1((0, 1))$
• $|\frac{\partial f_m}{\partial a}| \leq C \cdot x^{-a+\varepsilon} \leq C \cdot x^{-a_0-\varepsilon} \in L^1$ pro $a \leq a_0 < 1 - \varepsilon$
a lib. $\varepsilon > 0$

\Rightarrow Věta platí pro $(-\infty, a_0)$ $\forall a_0 < 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Tedy pro $(-\infty, a_0)$ $\forall a_0 < 1$, tedy pro $(-\infty, 1)$.

(22) $I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \tan^2 x) dx$ Konvergence: u 0 není problém nízky
u $\pi/2$: $\cos x \sim x - \frac{\pi^2}{2}$, tj. $f \sim \ln(\frac{1}{(x - \frac{\pi^2}{2})^2})$
a to je integrovatelné.

Potřebujeme pouze $(a, b) \neq (0, 0)$ pro dobrou definici logaritmu.

Symetrie: Stáčí uvažovat $a > 0, b > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial b} &= (1) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b \tan^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx = \left| t = \tan x \right| = \int_0^\infty \frac{2b t^2}{a^2 + b^2 t^2} \cdot \frac{dt}{t^2 + 1} = 2b \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{a^2}{b^2 t^2 + a^2} \right) \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} dt \\ &= \frac{2b}{b^2 - a^2} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\frac{a}{b} t)^2} dt \right) = \frac{2b}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{b + a} \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{\pi}{b+a} db = \pi \cdot \ln(b+a) + C(a)$$

$$\begin{aligned} b=a: I(a, a) &= \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cdot (1 + \tan^2 x)) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln a^2 + \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{\cos^2 x} dx = \pi \ln a + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx \\ &\quad " \\ &= \pi \ln(2a) + C(a) \end{aligned}$$

VIZ PRÍKLAD (17)

$$\Rightarrow \pi \ln 2 + \pi \ln a + C(a) = \pi \ln a + \pi \ln 2 \\ \Rightarrow C(a) = 0 !!$$

$$\Rightarrow I = \pi \cdot \ln(b+a) \text{ pro } b > 0, a > 0, \text{ ze symetrie proto } \underline{I = \pi \cdot \ln(|a|+|b|)}$$

Narosád: $b=0$: $I(a, 0) = \int_0^{\pi/2} \ln a^2 dx = \pi \cdot \ln |a|$, tj. vzdorec \uparrow pláh.

$$a=0: I(0, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(b^2 \tan^2 x) dx = \pi \cdot \ln |b| + \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \ln \tan x dx = \left| t = \tan x \right| = -\pi \ln |b| + 2 \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$$

$$\begin{aligned} \text{TRÍK: } \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt}_{S=\frac{1}{t}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt}_{\text{Vzdorec pláh}} \\ &= \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{s}}{(\frac{1}{s})^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{s^2} \right) ds = - \int_1^\infty \frac{\ln s}{s^2 + 1} ds \end{aligned} \quad \left. \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt = 0 !! \right.$$

\Rightarrow vzdorec pláh i pro $a=0, b \neq 0$.

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv

• $f(1, 1, x) \in L^1$... spočítali jsme

• majoranta: $|\frac{\partial I}{\partial b}| \leq \frac{2}{b} \leq \frac{2}{b_0}$ pro $b \geq b_0 > 0, a > 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{Věta lze použít pro } a > 0, \\ b \in [b_0, \infty) \neq b_0 > 0 \end{array} \right\}$

Tj. pro $b \in (0, \infty)$

(23) $I(a) = \int_{\substack{x>0 \\ y>0}} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$ Aby exp nevybouchla na osách, potřebujeme $a \geq 0$!!

$$I'(a) = (!) = \int_{\substack{x>0 \\ y>0}} -\frac{3a^2}{xy} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy = -3a^2 \int_{\substack{x>0 \\ y>0}} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-4/3} y^{-5/3} dx dy =$$

$$\begin{aligned} & \text{Fub} \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-y} \cdot e^{-\frac{a^3}{xy}} \cdot y^{-5/3} dy \right) dx . \text{ Vnitřní integrál: subst. } t = \frac{a^3}{xy} \Rightarrow y = \frac{a^3}{xt} \\ & dt = -\frac{a^3}{x^2 t^2} dy \\ & dy = -\frac{a^2}{a^3} dt = -\frac{x}{a^3} \cdot \frac{a^6}{x^2 t^2} dt \\ & = -\frac{a^3}{x^2 t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-t} \cdot e^{-\frac{a^3}{xt}} \cdot \frac{a^2}{a^3} \cdot x^{2/3} t^{-1/3} dt \right) dx \\ & = -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-t} e^{-\frac{a^3}{xt}} x^{-2/3} t^{-1/3} dt dx \stackrel{\text{FUB}}{=} -3 \int_{\substack{x>0 \\ t>0}} e^{-(x+t+\frac{a^3}{xt})} x^{-2/3} t^{-1/3} dx dt = -3I \end{aligned}$$

(stáčí přejmenovat proměnné, int. obor je symetrický v $x = y$)

$$\Rightarrow I' = -3I \Rightarrow I = C \cdot e^{-3a}. C > 0 \text{ protože } I \text{ je očividně kladné.}$$

$$I \text{ spojitá (!)} \quad I(0) = \left(\int_{x>0} e^{-x} x^{-1/3} dx \right) \cdot \left(\int_{y>0} e^{-y} y^{-2/3} dy \right) = \Gamma(\frac{2}{3}) \cdot \Gamma(\frac{1}{3}), \text{ kde}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} dt \text{ pro } z > 0 \text{ je záležitostí faktoriálu } (\Gamma(n) = (n-1)!)$$

$$\text{Plati } \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \Rightarrow \Gamma(\frac{2}{3}) \Gamma(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3a}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv

$$\bullet f(x,y) \leq e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \in L^1 \Rightarrow f(x,y) \in L^1$$

$$\bullet |\frac{\partial f}{\partial a}| \dots \text{dostanejte!} \text{ Plati: } 3\lambda e^{-\lambda} \leq C \text{ pro } \lambda \in (0, \infty)$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2 e^{-\frac{a^3}{xy}}}{xy} \leq C \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq \underbrace{\frac{C}{a} \cdot e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3}}_{\in L^1} \leq \underbrace{\frac{C}{a_0} e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3}}_{\in L^1}$$

pro $a \geq a_0 > 0$.

Spojitost: Majoranta pro $|f| \leq e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \in L^1$

\Rightarrow Dle věty lze použít (derivaci pro $a \in (a_0, \infty)$ + $a_0 \Rightarrow a \in (0, \infty)$)
(spojitost pro $a \in [0, \infty)$)

$$(24) \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx \quad \dots \text{ocividně konverguje, u 0 je finitní, a u } \pi/2 \text{ jede finitní mula.}$$

$$I := I(1), \text{ kde } I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx \quad \dots \text{konverguje na } \mathbb{R} \quad \text{pro } a \neq 1$$

$$I'(a) = (1) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} dx \quad \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} dx \end{array} \right. = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+a^2 t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{1+a^2 t^2} \right) \cdot \frac{1}{1-a^2} dt$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1-a^2} \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} \quad \text{pro } a > 0, a \neq 1. \quad \text{Zkontrola záporné a nezáporné,}$$

stačí nám užití $a=1$. Pro $a=1$ je $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4}$ (viz příklad 9) \Rightarrow vzhled plati'

$$\left. \begin{array}{l} I(a) = \int I'(a) da = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C \\ I(0) = 0 = C \end{array} \right\} I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) \quad \text{a tedy } I = I_1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace OK (pro $f(a, x) = \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$)

- $f(0, x) = 0 \in L^1$ OK
- $|\frac{\partial f}{\partial a}| \leq 1 \in L^1$ OK

$$(25) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx \quad \dots \text{ocividně konverguje, u } \infty \sim \frac{1}{x^2}, \text{ u } 0 \text{ oneznačné.}$$

$$I(a) := \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx \Rightarrow I'(a) = (1) = - \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \sin^4 x dx = -\frac{3}{8} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 4x dx$$

Použijeme (14): $I'(a) = -\underbrace{\frac{3}{16} \sqrt{\frac{\pi}{a}}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{a}}}_{B}}_{C} - \underbrace{\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \underbrace{e^{-\frac{1}{a}}}_{B}}_{C}$

$$I(a) = SA + SB + SC$$

$$SA = -\frac{3}{16} \sqrt{\pi} \int \tilde{a}^{1/2} da = -\frac{3}{8} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{a}$$

$$SB = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int \tilde{a}^{-1/2} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} d\tilde{a} \dots \text{to není elementární integral. Par partes: } u = \tilde{a}^{1/2}, v = 2\tilde{a}^{-1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(2\sqrt{a} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} - 2 \int \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} \frac{\tilde{a}^{1/2}}{\tilde{a}^{3/2}} d\tilde{a} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(2\sqrt{a} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} + \frac{1}{4} \int \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} \tilde{b}^2 d\tilde{b} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(2\sqrt{a} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} + 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right)$$

$b = \tilde{a}^{1/2}$
 $db = -\frac{1}{2} \tilde{a}^{-3/2} d\tilde{a}$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} b$

$$SC = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \int \tilde{a}^{-1/2} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} d\tilde{a} = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \int 4 \tilde{a}^{-1/2} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} \cdot 4 d\tilde{a} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \int \tilde{a}^{-1/2} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} d\tilde{a} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(2\sqrt{a} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} + 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) \right)$$

$a = 4\tilde{a}$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(-3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} - \sqrt{a} \tilde{e}^{-1/\tilde{a}} + 4\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) - 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) \right) + C$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \left[\sqrt{a} \cdot \left(-3 + 4e^{-\frac{1}{a}} - e^{-\frac{4}{a}} \right) + \underbrace{4\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)}_{\rightarrow 0} \right] \right) + C \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} \cdot \left(-3 + 4 \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{a}\right) + \left(-\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{a}\right) \right) - \left(1 + \left(-\frac{1}{a}\right) + \left(-\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{a}\right) \right) \right) + C \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} \cdot \left(\frac{2}{a^2} - \frac{8}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right) \right) + C = C
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} C=0$

ale $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = (!) = \int_0^\infty \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-ax^2} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^\infty 0 dx = 0$

Konečně $I(0) = \lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot (4\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi}) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

Předpoklady: $f(ax) = e^{-ax^2} \frac{\sin x}{x^2}$: • měřitelnost a ex. derivace OK
• $f(1, x) = e^{-x^2} \frac{\sin x}{x^2} \in L^1$ očividné
• $|\frac{\partial f}{\partial a}| \leq e^{-ax^2} \leq e^{-a_0 x^2} \quad \forall a \geq a_0 > 0$
• $|f| \leq e^{-ax^2} \leq e^{-a_0 x^2} \quad \forall a \geq a_0 > 0$.

Spojitost: derivaci mám na (a_0, ∞) $\forall a_0 > 0 \Rightarrow$ na $(0, \infty)$ (Spojitost i na $[0, \infty)$)

(26) $F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ $F(0) = 0$ F soudí očividně
Konvergence integrálu: $x \rightarrow 0$: $\frac{\ln(1-a^2 x^2)}{x^2} \sim -a^2$, $\sqrt{1-x^2}$ nevadí.
 $\Rightarrow x \rightarrow 0$ konverguje $\forall a \in \mathbb{R}$
 $x \rightarrow 1$: $\sqrt{1-x^2} \sim \sqrt{1-x}$, to je integrovatelné, \ln nevadí.

Pro dobrou definici potřebujeme $1-a^2 x^2 > 0$ na $(0, 1)$, tj. $1-a^2 > 0$, $|a| < 1$.

Krajní bod $a=1$ vysložíme později. Nyní ze sudosti tedy $a \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
 F'(a) = (!) &= \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2 x^2) \sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{Očividně } F'(0) = 0 \text{ a } F'(a) < 0 \text{ pro } a > 0 \\
 &= -2a \int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2 x^2) \sqrt{1-x^2}} \quad F'(a) > 0 \text{ pro } a < 0
 \end{aligned}$$

(integrujeme kladnou funkci) $\Rightarrow a=0$ je bod lok. maxima

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_0^1 + \frac{2ax^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx \\
 F''(a) &= \int_0^1 \frac{-2(1-a^2 x^2) - 4a^2 x^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{-2 + 2a^2 x^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{1+a^2 x^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow F''(a) < 0 \quad \forall a \in (-1, 1) \Rightarrow F$ je konkávní na $(-1, 1)$, rostoucí na $(-1, 0)$

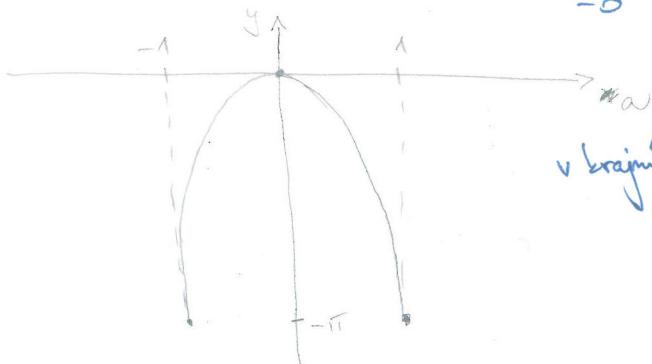
Elesající na $(0, 1)$, soudí, v $a=0$ má maximum, nemá infl. body

Pro $a \rightarrow 1^-$ je $F'(a) \rightarrow -\infty$, protože $\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}} dx$ diverguje.

Jestě dle výpočtu $F(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \text{per. partes.} \\ u = \ln(1-x^2) \\ u' = -\frac{2x}{1-x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} v' = \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ v = ? \end{cases}$

$$v = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot g t = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Zpět & per partes: $F(1) = \left[\ln(1-x^2) \cdot (-1) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2[\arcsin x]_0^1 = -\pi$



v krajních bodech někonečné jednostranné derivece

- Předpoklady:
- meřitelnost, spojitost, ex. derivece pro $f(a, x) = \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$ triv.
 - $f(a, x) = 0 \in L^1$
 - $|f| \leq 2a^2 \cdot 2$ na oček muly $\leq 4 \quad \forall a \in (-1, 1) \quad \left(\left| \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2} \right| \leq 2a^2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq 2 \right)$
 - $|f| \leq 2 \cdot \underbrace{(1-x)^{1/2} \cdot |\ln(1-x^2)|}_{\in L^1} \quad$ na oček jednotky $\forall a \in (-1, 1)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq \frac{1}{1-a_0^2 x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1 \quad \forall a \in (-a_0, a_0), a_0 < 1$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \right| \leq \frac{4}{(1-a_0^2 x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1$$

\Rightarrow Spojitost na $[-1, 1]$, derivece na $(-1, 1)$.