**Domácí úkol 1** **NOFY151 Matematická analýza I**

vypracoval Jiří Sýkora

# Zadání

**(1)** Z definice dokažte (k $\varepsilon$ najděte $\delta$), že

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \tag{1}$$

**(2)** Mějme zadané číslo $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Rozhodněte, pro která reálná čísla $a$ existuje limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+ax)^{\mathrm{n}} - (1+anx+3ax^2)}{4x^3+ax^4} \tag{2}$$

a čemu se v takovém případě rovná (najděte všechny možnosti).

**(3)** Najděte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+2x+1}} \tag{3}$$

# Řešení

**(1)** Snadno vidíme, že vzhledem ke spojitosti funkce $x^2$ bude tato limita rovna 4. Důkaz provedeme přímo z definice limity

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in P_\delta(2) \implies x^2 \in U_\varepsilon(4)$$

Jinak řečeno, k jakémukoliv $\varepsilon > 0$ tedy najdeme takové $\delta > 0$, že bude platit

$$0 < |x-2| < \delta \implies |x^2-4| < \varepsilon$$

Ještě před tím než začneme se samotným důkazem, spočteme jaké $\delta$ je vhodné.

$$|x^2-4| = |x-2||x+2| < \delta|x+2|$$

Zde jsme využili předpokladu, že $0 < |x-2| < \delta$. Abychom spočetli druhou absolutní hodnotu, zadefinujeme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ a položíme $\delta_1 = 1$, čímž obsáhneme možnost pro příliš velká $\varepsilon$. Nyní dopočteme $\delta_2$, po kterém budeme chtít, aby bylo menší jak jedna, a proto bude platit

$$|x-2| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 5$$

A proto

$$|x^2-4| < 5\delta$$

Stačí tedy zvolit $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$.
Nyní provedeme samotný důkaz.+ Nechť $\varepsilon > 0$, vyberme $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. Pak

$$|x^2-4| < 5\delta < \varepsilon$$

$\square$

**(2)** Začneme tím, že si tvar této limity nejprve upravíme pomocí binomického rozvoje.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+ax)^{\mathrm{n}} - (1+anx+3ax^2)}{4x^3+ax^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ax)^k - (1+anx+3ax^2)}{4x^3+ax^4}$$

Což lze dále upravit tak, že si vypíšeme první tři členy a vytknene $x^2$ ve jmenovateli.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^k + 1 + anx + \frac{n(n-1)}{2}ax^2 - (1+anx+3ax^2)}{x^2(4x+ax^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^k + \left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)ax^2}{x^2(4x+ax^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-2} + \left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2}$$

Nyní si limitu rozdělíme na dva zlomky a upravíme je, abychom si ulehčili budoucí výpočty.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-2}}{4x+ax^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax}$$

Jestliže má být limita definovaná, musí se shodovat její limita zleva a zprava. Ukážeme si postupně, že pro $a > 0$ a pro $a < 0$ tato podmínka není splněna.

1) $a > 0$

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax}$$

$$= \infty + const. = \infty$$

Kde využíváme toho, že čitatel prvního zlomku je konstantní a tedy až na znaménko nemůže ovlivnit výsledek limity, jakmile jde jmenovatel k nule.

(b) Když se ale přibližujeme zleva a uvědomíme si, že jelikož je $x = 0$ kořenem $4x + ax^2$, pak to ale znamená, že protíná osu x, a tudíž musí být z jedné strany kladná a z druhé záporná. To kde je kladná a kde záporná lze snadno zjistit podle koeficientu $a$, který je zároveň koeficientem u $x^2$, a tedy určuje tvar paraboly.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax}$$

$$= -\infty + const. = -\infty$$

Jelikož se jednostranné limity neshodují, pak musí být daná limita nedefinovaná.

2) Totéž uděláme pro $a < 0$

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} - 3\right)a}{4x+ax^2} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax}$$

$$= -\infty + const. = -\infty$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}-3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}-3\right)a}{4x+ax^2} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax}$$

$$= \infty + const. = \infty$$

A zde se taktéž limity neshodují.

3) Zbývá tedy poslední možnost - a to zkusit $a = 0$. Jelikož je tato možnost opravdu triviální, vypočteme si pouze oboustrannou limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}-3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0} 0 + 0 = 0$$

Závěr: Limita existuje pouze pro $a = 0$ a je v té chvíli rovna 0.

**(3)** Abychom tuto limitu mohli vypočítat, budeme muset provést algebraické úpravy, které nás dovedou k výhodnějšímu tvaru. Na první pohled se tak nabízí usměrnění jmenovatele, načež bychom ho pak mohli zdárně vykrátit s některým členem v čitateli a limitu snadno dopočíst. Musíme tedy vyřešit otázku, jak usměrnit rozdíl dvou třetích odmocnin? Využijeme vztahu

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

A tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-8)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+2x+1)}+\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}\right)}{x^2+1-(x^2+2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-8)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+2x+1)}+\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}\right)}{-2x}$$

A jestliže zkrátíme členem $x$, tak se úloha stává triviální.

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}(x-8)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+2x+1)}+\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}(-8)\left(\sqrt[3]{(+1)^2}+\sqrt[3]{(+1)(+1)}+\sqrt[3]{(+1)^2}\right)\right) = 12$$

Závěr: Limita (3) je podle výpočtu výše rovna 12.