Domácí úkol 5

Termín odevzdání: 13. 11. 2025 do večera

1.)

Nechť $a > 0, A > 0$. Vypočtěte hmotnost desky s plochou

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0; \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{4}} < y\sqrt{x}\right\}$$

a plošnou hustotou

$$\sigma(x,y) = A\,x$$

Řešení: Hmotnost spočteme vyintegrováním hustoty přes "objem"(v tomto případě přes obsah).

$$m = \int_M \sigma(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Pro snadnější výpočet provedeme substituci. Výraz v závorce $x^2 + \frac{y^2}{a^2}$ nás motivuje k použití naškálovaných polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos(\varphi) \\ y(r,\varphi) &= ar\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Pro novou sadu proměnných spočteme meze a Jakobián. Díky podmínkám $x > 0$ a $y > 0$ pracujeme v prvním kvadrantu a proto můžeme brát $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Obor pro r získáme z třetí nerovnosti

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{4}} &< y\sqrt{x} \\ \left(r^2\cos^2(\varphi) + \frac{a^2r^2\sin^2(\varphi)}{a^2}\right)^{\frac{5}{4}} &< ar\sin(\varphi)\sqrt{r\cos(\varphi)} \\ r^{\frac{5}{2}} &< ar^{\frac{3}{2}}\sin(\varphi)\sqrt{\cos\varphi} \\ r &< a\sin(\varphi)\sqrt{\cos(\varphi)}, \end{aligned}$$

tedy $r \in \left(0, a\sin(\varphi)\sqrt{\cos(\varphi)}\right)$. Jakobián spočteme jako

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ a\sin(\varphi) & ar\cos(\varphi) \end{pmatrix} = ar\cos^2(\varphi) + ar\sin^2(\varphi) = ar.$$

Můžeme proto psát

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sin(\varphi)\sqrt{\cos(\varphi)}} Ar\cos(\varphi)\, ar \;\mathrm{d}r \;\mathrm{d}\varphi$$

Tyto integrály už spočteme jednoduše jeden po druhém a dostaneme

$$m = \frac{a\,A}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3(\varphi)\cos^{\frac{5}{2}}(\varphi) \;\mathrm{d}\varphi = \frac{a^4 A}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(\varphi)\big)\cos^{\frac{5}{2}}(\varphi)\sin(\varphi) \;\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{a^4 A}{3} \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{9}{2}} \;\mathrm{d}t = \frac{a^4 A}{3}\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{11}\right) = \frac{8a^4 A}{231}$$

□

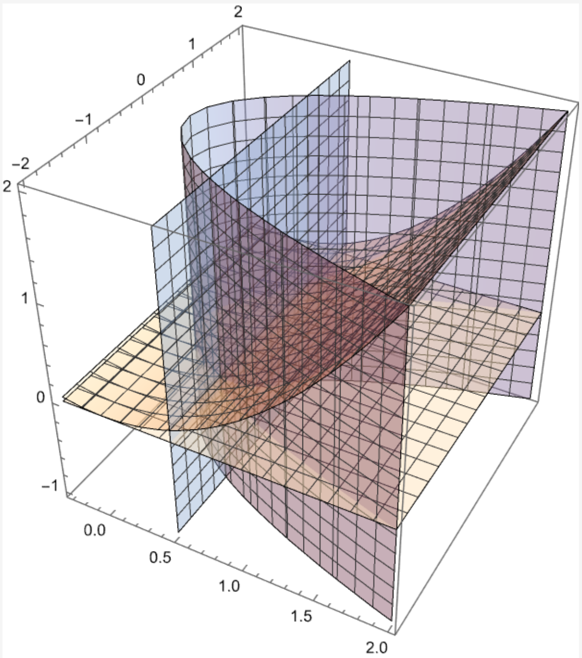
2.)

Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného danými plochami:

$$x^2 = 2pz, \qquad y^2 = 2px, \qquad x = \frac{p}{2}, \qquad z = 0,$$

v závislosti na parametru $p > 0$.

Řešení: Velká část problému je jen sestavit integrály tak, aby skutečně pokrývaly požadovanou oblast. Z rovnic je patrné, že hranici našeho tělesa tvoří dvě roviny a dvě "parabolová údolí".



Ve směru osy z integrujeme vně paraboly v mezích od 0 do $\frac{x^2}{2p}$. Teď už jen stačí tento příspěvek sečíst přes celou podstavu. Ta je ohraničena parabolou $x = \frac{y^2}{2p}$ a přímkou $x = \frac{p}{2}$. V takovém případě patří x do intervalu $(\frac{y^2}{2p}, \frac{p}{2})$, přičemž tento interval dává smysl pouze pro $y \in (-p, p)$ (v těchto krajních bodech se přímka $\frac{p}{2}$ protíná s parabolou $\frac{y^2}{2p}$). Hmotnost našeho tělesa tak dostaneme jako

$$M = \int_{-p}^{p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_{0}^{\frac{x^2}{2p}} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{6p} \int_{-p}^{p} \frac{p^3}{8} - \frac{y^6}{8p^3} \, \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{48p} \left(2p^4 - \frac{2p^4}{7} \right) = \frac{p^3}{28}$$

Abychom dostali těžiště, zopakujeme integrování ještě třikrát, vždy budeme integrovat jinou funkci, nejprve x, potom y a nakonec z.

$$M_x = \int_{-p}^{p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_{0}^{\frac{x^2}{2p}} x \; \mathrm{d}z \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \ldots = \frac{p^4}{72}$$

$$M_y = \int_{-p}^{p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_{0}^{\frac{x^2}{2p}} y \; \mathrm{d}z \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \ldots = 0$$

$$M_z = \int_{-p}^{p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \int_{0}^{\frac{x^2}{2p}} z \; \mathrm{d}z \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \ldots = \frac{p^4}{704}$$

Souřadnice těžiště jsou tedy:

$$T = \left[\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}, \frac{M_z}{M}\right] = \left[\frac{7p}{18}, 0, \frac{7p}{176}\right].$$

□