

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převeďte $\int_{\Omega} f(x+y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x,y); |x| + |y| \leq 1\}$.
2. Převeďte $\int_{\Omega} f(x \cdot y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ a $x, y > 0$.
3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x) dx) dy$ pomocí jednoho integrálu.
4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
 - a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
 - b) $(x^3 + y^3)^2 = xy$
 - c) $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$
5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
 - a) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a \geq R\sqrt{2} > 0$
 - b) $z = xy$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
 - c) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$
 - d) $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$
 - e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $a, b, c > 0$
 - f) $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a, b, c > 0$
 - g) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
6. Spočtěte následující integrály:
 - a) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
 - b) $\int_{\Omega} x^{-p} y^{-q} dx dy$, $\Omega = \{(x,y); xy \geq 1, x \geq 1\}$
 - c) $\int_{\Omega} (x+y)^{-p} dx dy$, $\Omega = \{(x,y); x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$
7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x, y, a > 0$.
8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\varrho = 1$ ohraničené $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x=0$, $y=0$, $0 \leq x \leq a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c, a, b, c > 0.$
10. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} gz\right),$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tříhové zrychlení. Výška válce je h , poloměr R . Určete hmotnost vzduchu ve válci.

Sada příkladů 5/9

Henri Lebesgue a jeho integrál

Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^2 dx$$

Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

$$5. \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$6. \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$7. \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \right)$$

Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

$$\text{a)} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a} dx, \quad a < 2$$

$$\text{b)} \int_0^2 x^2 \cos ax \, dx, -\infty < a < \infty$$

$$\text{c)} \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx, 1 < a < \infty$$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

$$9. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \, dx$$

$$10. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx$$

$$11. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$$

$$14. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

$$15. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} \, dx$$

$$17. \int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) \, dx$$

$$18. \int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$$19. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, dx$$

$$20. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx$$

$$21. \int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx, n \in \mathbb{N}_0$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \tan^2 x) dx$$

$$23. \int_{x>0, y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$$

Doplněním vhodného parametru spočtěte:

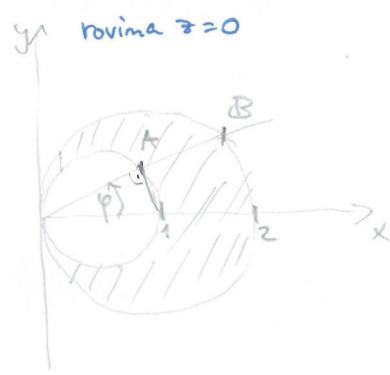
$$24. \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$$

$$25. \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$$

5c) $z = x^2 + y^2$... rotační paraboloid
 $x^2 + y^2 = x$... $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$... válec
 $x^2 + y^2 = 2x$... $(x - 1)^2 + y^2 = 1$... válec
 $z = 0$... rovina



Válcové souřadnice: $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
 $z = z$

$\exists \varphi = r$

z během očividné mezi 0 a $x^2 + y^2 = r^2$

kde běhá r ? Nайденé body na kružnicích (A, B)

$\Delta: (0,0), (1,0), A$ je pravoúhlý \Rightarrow přípona mal dílen 1, \Rightarrow délka odvesny je $\cos \varphi$!
 Polobné vzdálenost mezi počátkem a B je $2\cos \varphi \rightarrow r \in (\cos \varphi, 2\cos \varphi)$,
 a nákonco $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ [že symetrie by stačilo $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ a vynásobit 2.

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos \varphi}^{2\cos \varphi} \int_0^{r^2} r dz dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos \varphi}^{2\cos \varphi} r \cdot r^2 dr d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos \varphi)^4 - (\cos \varphi)^4 d\varphi$$
 $= \frac{15}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{15}{16} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{15}{16}\pi + \frac{15}{32} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{45}{32}\pi$

5d) $z = \bar{e}^{-(x^2+y^2)}$... horní plocha
 $z = 0$... rovina
 $x^2 + y^2 = R^2$... válec

Jasné válcové souřadnice

$z \in (0, \bar{e}^{-R^2})$

$r \in (0, R)$

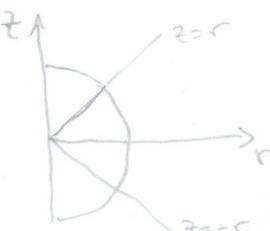
$\varphi \in (0, 2\pi)$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\bar{e}^{-r^2}} r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \bar{e}^{-r^2} dr d\varphi = 2\pi \int_0^R r \bar{e}^{-r^2} dr = \pi \int_0^{R^2} \bar{e}^{-t} dt$$
 $= -\pi \left[\bar{e}^{-t} \right]_0^{R^2} = \pi(\bar{e}^0 - \bar{e}^{-R^2})$

5e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Pro představu $a, b, c = 1$: ... koule (sféra)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



... $z^2 = r^2$, tj. $z = \pm r$... kružnové plochy

Školované sférické souřadnice: $x = ar \sin \varphi \cos \psi$

$$y = ar \sin \varphi \sin \psi$$

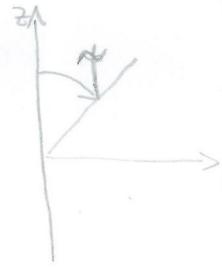
$$z = cr \cos \varphi$$

$$r \in (0, \infty)$$

$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

$$\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Tento výběr je ψ užel měřený tablo:



$$\psi = 0 \Rightarrow z \text{ je maximální}$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0$$

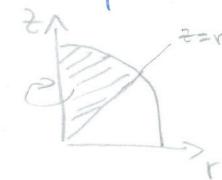
$$\psi = \pi \Rightarrow z \text{ je minimální}$$

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} a \sin \varphi \cos \psi & -a \sin \varphi \sin \psi & a \cos \varphi \cos \psi \\ b \sin \varphi \sin \psi & b \sin \varphi \cos \psi & b \cos \varphi \sin \psi \\ c \cos \varphi & 0 & -c \sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$= abc \cdot r^2 \left[-\sin^3 \varphi \cos^2 \psi - \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \psi - \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - \sin^3 \varphi \sin^2 \psi \right]$$

$$a |J_\varphi| = abc r^2 \cdot \sin \varphi . \quad (\text{Při měšákování vyjde prosté } r^2 \sin \varphi)$$

Zadání umožňuje různý výklad, my spočítáme objem tohoto



$$r \in (0, 1)$$

$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

$$\psi \in (0, \frac{\pi}{2}) \dots \text{tak odpovídá } z=r !!$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^r r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi = 2\pi \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \right) \cdot abc = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot abc$$

$$5f) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad x=0, y=0, z=0 \dots \text{tedy 1. kvadrant}$$

Leží spočítat bez převodu souřadnic, jen si zjednodušíme práci:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{a} & x &= a\tilde{x} \\ \tilde{y} &= \frac{y}{b} & y &= b\tilde{y} \\ \tilde{z} &= \frac{z}{c} & z &= c\tilde{z} \end{aligned}$$

$J_\varphi = abc$ triviálně a stále nám výpočet

$$\tilde{u}\tilde{v}\tilde{w} (\tilde{x} + \tilde{y})^2 + \tilde{z}^2 = 1, \quad \tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0, \tilde{z} = 0. \quad \text{Výsledek pak přenásobíme } abc \text{ a je to.}$$

Pro jednoduchost zápisu dále bez vložek.

Zvolíme x jako nejsí pro měření, očividně největší možné x je $x=1$. Tj. $x \in (0, 1)$.

Pro první $x \in (0, 1)$ je maximální možné y $y=1-x$. Tedy $y \in (0, 1-x)$

Následně pro dané (x, y) je $z \in (0, \sqrt{1-(x+y)^2})$

$$\text{Tedy } V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{1-(x+y)^2}} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{1-(x+y)^2} \, dy \, dx.$$

$$\text{Vnitřní integrál: } \int_0^{1-x} \sqrt{1-(x+y)^2} \, dy = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = \int_{\arcsin x}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{\pi}{2} \, d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$\cos^2 \frac{\pi}{2} \text{ poslouží pouze}$
 $\text{a } \sin(2\arcsin x) \text{ poslouží}$
 $\text{součtu vložek v úrovni}$

Zdává se, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arcsinx}{2} \right) dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^0 \frac{\sqrt{t} dt}{4} - \frac{1}{2} \left(\left[x \arcsinx \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)$$

$t=1-x^2$
 $dt=-2x dx$

počítá se
per partes

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \int_1^0 t^{1/2} dt$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Původní příklad tedy $\underline{\underline{V = \frac{abc}{3}}}$

5g) DÚ

6a) $\int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r^2} r dr dy = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi$

Dále: $\int_{R^2} e^{-x^2} dx = \sqrt{\left(\int_R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_R e^{-y^2} dy \right)} = \sqrt{\left(\int_R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_R e^{-y^2} dy \right)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{\pi}$

Přitom $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ nemáme spojitou, nedaří elementální
primitivní funkci!!

$$6b) \int\limits_{\Omega} x^p y^{-q} dx dy$$

$$\Omega = \{x=1, y=\frac{1}{x}\}$$

$$\int\limits_1^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty} x^p y^{-q} dy dx = \int\limits_1^{\infty} x^p \cdot \left[\frac{y^{1-q}}{1-q} \right]_{\frac{1}{x}}^{\infty} dx$$

(pro $q=1$ výde lny a stejný průběh)

potřebují $q \geq 1$, aby $1-q < 0$,
jinak je integrál nekončící !!

$$\text{Pro } q > 1: \int\limits_1^{\infty} x^p \cdot x^{q-1} \cdot \frac{1}{q-1} dx$$

$$= \frac{1}{q-1} \int\limits_1^{\infty} x^{q-p-1} dx = \frac{1}{q-1} \cdot \left[\frac{x^{q-p}}{q-p} \right]_1^{\infty} \dots \text{potřebují } p > q !$$

$$\text{Pro } q > 1, p > q: = \frac{1}{q-1} \cdot \frac{1}{p-q}$$

$$6c) \int\limits_{\Omega} (x+y)^p dx dy$$

$$\Omega = \{x+y \geq 1, x \in [0, \infty)\}$$

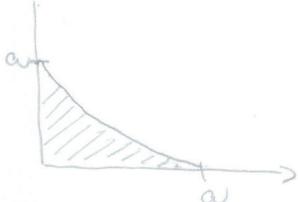
$$\int\limits_0^1 \int\limits_{1-x}^{\infty} (x+y)^p dy dx = \int\limits_0^1 \int\limits_1^{\infty} t^p dt dx = \int\limits_1^{\infty} t^p dt = \frac{1}{p-1} \quad \text{pro } p > 1$$

Pro $p \leq 1$ nemá končící integrál.

$t = x+y$
 $dt = dy$

$$(7) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$x, y, a > 0$$



Deska je symetrická $\Rightarrow T_x = T_y$.

Máme se

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

pro $r \in (0, a)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$

$$\int 1 dx dy = \int_0^a \int_0^{\pi/2} 3r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right)^2 d\varphi$$

$$2\varphi = t$$

$$2d\varphi = dt$$

$$= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

$$T_y = \begin{vmatrix} \cos^3 \varphi & -3r \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \sin^3 \varphi & 3r \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= 3r \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + 3r \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi$$

$$= 3r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\int x dx dy = \int_0^a \int_0^{\pi/2} 3r^2 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \cdot (1 - \sin^2 \varphi)^2 \cdot \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= a^3 \cdot \int_0^1 (1-t^2)^2 \cdot t^2 dt = a^3 \int_0^1 t^2 - 2t^4 + t^6 dt = a^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = a^3 \cdot \frac{35 - 42 + 15}{105} = a^3 \frac{8}{105}$$

$$\text{Proto } T_x = T_y = \frac{\frac{8}{105}a^3}{\frac{3\pi a^2}{32}} = a \cdot \underline{\underline{\frac{256}{315\pi}}}$$

$$\textcircled{8} \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ x &\in (0, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int x^2 dx dy \\ I_y &= \int y^2 dx dy \end{aligned}$$



Použité polární souřadnice: $x = a + r \cos \varphi$
 $y = a + r \sin \varphi$

$$\Rightarrow r \in (0, a), \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), I_\varphi = r \text{ plati stejně}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{0, \frac{\pi}{2}} (a + r \cos \varphi)^2 r dr d\varphi = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a a^2 r + 2ar^2 \cos^2 \varphi + r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{2} + \frac{2}{3}a^4 \cos^2 \varphi + \frac{a^4}{4} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi a^4}{2} - \frac{4}{3}a^4 + \frac{\pi a^4}{8} = \underline{\underline{a^4 \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{4}{3} \right)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a (a + r \sin \varphi)^2 r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a a^2 r + 2ar^2 \sin^2 \varphi + r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{2} + \frac{2}{3}a^4 \sin^2 \varphi + \frac{a^4}{4} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi a^4}{2} + 0 + \frac{\pi a^4}{8} = \underline{\underline{\frac{5\pi a^4}{8}}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2}, z=c \quad \dots \text{ kružel postavený na špicce.}$$

$$\text{Ze symetrie } T_x = T_y = 0 !! \quad T_z = \frac{\int z dx dy dz}{\int 1 dx dy dz}$$

$$\begin{aligned} \text{Uvaha: Převodem do } \tilde{x} = \frac{x}{a}, \tilde{y} = \frac{y}{c}, \tilde{z} = \frac{z}{c} \text{ bude} \quad \int 1 dx dy dz = abc \int 1 d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} \\ a \int z dx dy dz = abc^2 \int \tilde{z} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} \end{aligned}$$

Výsledek pak bude $T_z = c \cdot T_{\tilde{z}}$, kde $T_{\tilde{z}}$ jsou souřadnice středu tělesa $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \tilde{z}^2$ $\tilde{z} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \int 1 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z r dr dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz d\varphi = \frac{\pi}{3} \\ \int z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z r dr dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz d\varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} T_z &= \frac{3}{4}c, \text{ f.j. původní úloha} \\ T_{\tilde{z}} &= \frac{3}{4}c \\ T &= [0, 0, \frac{3}{4}c] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad m_w &= \int_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g z} r dz dr d\phi \\
 &= \frac{2\pi R^2}{2} \cdot \int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g z} dz = \rho_0 \pi R^2 \int_0^h \exp(-\frac{\rho_0}{P_0} g z) dz = \underline{\underline{\frac{\rho_0 \pi R^2}{g} \left(1 - e^{-\frac{\rho_0}{P_0} gh}\right)}}
 \end{aligned}$$

Leviho věta : $\{f_m\}_n^{\infty} \subset L$, $f_m \rightarrow f$

Potom $\int \lim f_m = \lim \int f_m$ (může být neomezený)

Varianta pro řady : $\{f_m\}_n^{\infty} \subset L$, $f_m \geq 0$

$$\text{Potom } \int \sum_{n=1}^{\infty} f_m = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_m$$

Lebesgueova věta : $\{f_m\}_n^{\infty} \subset L$, $f_m \rightarrow f$ s.v. a $\exists g \in L$ $\forall n \in N$: $|f_m| \leq g$

Potom $f \in L$ a ~~□~~ $\int \lim f_m = \lim \int f_m$

Tedy: Levi : monotonie + odhad

Lebesgue : bez monotonie, ale s majorantou

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n} \quad \text{na } x \in (0,1) \text{ je } \frac{x^n}{n} < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x^n < 1 \\ \frac{1}{n} < 1 \end{array} \right\} \frac{x^n}{n} < 1 \\
 |f_n(x)| \leq 1, \quad \int_0^1 1 dx = 1 \dots 1 \text{ je majoranta, použij Lebesgue}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx \quad e^{-x} \text{ vše převažuje} \Rightarrow \text{hledáme majorantu}$$

$$\text{Veliči hrazené: } \frac{\ln(x+n)}{n} \leq \frac{x+n}{n} \leq x+1 \quad \text{pro velká } n$$

$$|f_n(x)| \leq e^{-x} \cdot (x+1) \dots \text{to je očividně integratelná majoranta}$$

$$\Rightarrow \lim \int = \int \lim = \int 0 dx = 0 \quad \text{protože} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+n)}{n} = 0 \quad \text{ze stáloucí limity}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$$

$x \in (0,1) : x^n \rightarrow 0$, takže $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \leq 1$, 1 je integratelná majoranta

$x \in (1, \infty) : x^n \rightarrow \infty$: $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \geq \frac{1}{x^n+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x^2}$ pro $n \geq 2$, $\frac{1}{x^2}$ je int. majoranta

$$\Rightarrow \text{Lebesgue: } \lim \int = \int \lim = \int f(x) dx \quad \text{kde } f(x) = 0 \text{ na } (0,1)$$

$$= \frac{1}{2} \vee x=1$$

$$= 0 \text{ na } (1, \infty)$$

Tedy $f(x)=0$ s.v. a $\int f(x) dx = \underline{0}$.

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^2 dx$$

e^{-nx} je klesající v $n \Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-x}$ pro $x > 0$

$e^{-x} \cdot x^2$ je integratelná (kdo neví, udělá per partes)

$$\Rightarrow \text{Lebesgue: } \lim \int = \int \lim = \int 0 dx = \underline{0}.$$

$$\textcircled{5} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mx} dx = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x e^{-mx} dx$$

$$f_m \geq 0$$

[Vim, že původní integral je konečný, protože u $x=0$ má $\frac{x}{e^x-1}$ konečnou limitu
a $w \rightarrow$ klesá exponenciálně $\Rightarrow \int e^{-x} (N) dx$ konverguje.]

$$\Rightarrow \text{Levi pro řady: } = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-mx} dx = \begin{cases} u=x & u'=1 \\ v=e^{-mx} & v'=-\frac{1}{m} e^{-mx} \end{cases}$$

$$= \sum_1^{\infty} \underbrace{\left[-\frac{1}{m} x e^{-mx} \right]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \frac{1}{m} e^{-mx} dx = \sum_1^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{m} dx = \sum_1^{\infty} \left[-\frac{e^{-mx}}{m^2} \right]_0^{\infty} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{-\ln x dx}{1-x^2} = - \int_0^1 \ln x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} dx = - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \ln x x^{2n} dx$$

$$-\ln x \geq 0, x^{2n} \geq 0 \Rightarrow \text{Levi: } = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \ln x x^{2n} dx = \begin{cases} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ u'=\frac{1}{x} & u=\frac{1}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} v=x^{2n+1} & v'=\frac{1}{2n+1} \\ v=\frac{1}{2n+1} & v'=\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\ln x \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2} - \frac{1}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{7} \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^{x-1}} dx = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty x^{3-nx} e^{-nx} dx \\
 & x^{3-nx} \geq 0 \Rightarrow \text{Lévi: } = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{3-nx} e^{-nx} dx \quad 3x \text{ per partes} \\
 & = \sum \int \frac{3x^2 e^{-nx}}{n} dx = \sum \int \frac{6x e^{-nx}}{n^2} dx = \sum \int \frac{6 e^{-nx}}{n^3} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^4} = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{15}}}
 \end{aligned}$$