

## Domácí úkol 6

Termín odevzdání: 25. 11. 2024 do cvičení

**1.)**

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^4 + 4} dx.$$

*Hint:* K rozkladu jmenovatele na součin využijte komplexní kořeny.

**Dále využijte tabulku trikových substitucí:**

**2.)**

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x \left( \sqrt{x+1} + 1 \right) + 2\sqrt{x+1} + 1} dx.$$

**3.)**

Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(x) \cos(x)}.$$

Najděte funkci  $F$ , která bude primitivní funkcí k  $f$ , a bude platit  $F(0) = 0$ . Všimněte si, že funkce  $F$  musí být spojitá na celém  $\mathbb{R}$ . Pokud to tedy bude potřeba, proveďte lepení.

1.)

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^4 + 4} dx.$$

*Hint:* K rozkladu jmenovatele na součin využijte komplexní kořeny.

*Řešení:* Vidíme, že integrand je ve tvaru racionální funkce, postupujme podle návodu. Stupeň polynomu v čitateli je v tomto případě rovnou nižší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Dělit tedy nemusíme a tudíž rovnou přejdeme na druhý krok. V něm musíme rozložit jmenovatel na součin lineárních polynomů tvaru  $(x - k_i)$ , kde  $k_i$  jsou kořeny daného polynomu, příp na součin nerozložitelných (bez kořene) kvadratických polynomů. Polynom  $x^4 + 4$  nemá zjevně žádné kořeny nad reálnými čísly, pouze 4 komplexní.

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - (-1 + i))(x - (-1 - i)) = \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

Hledaný integrál  $I$  je tedy roven

$$I = \int \frac{1}{x^4 + 4} dx = \int \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx$$

Dalším krokem je roztrhnout integrál na dva přes parciální zlomky. Víme že bude fungovat ansatz ve tvaru

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

Zbavíme se zlomků a porovnáme polynomy na obou stranách, jejich koeficienty se musí rovnat.

$$\begin{aligned} 1 &= [2B + 2D] + x[2A + 2B + 2C - 2D] + x^2[2A + B - 2C + D] + x^3[A + C] \\ A &= -\frac{1}{8} \quad B = \frac{1}{4} \quad C = \frac{1}{8} \quad D = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Jsme schopni tedy rozdělit náš integrál na 2.

$$I = \int \frac{-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 - 2x + 2} dx + \int \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Další úpravy vedou na opětovné rozdělení obou integrálů, jednu část vyřešíme přes 1. větu o substituci a druhou přes doplnění na čtverec a tabulkový integrál arctg.

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{16} \int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx + \frac{1}{16} \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx = \\
&= -\frac{1}{16} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx + \frac{1}{16} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 2x + 2 \\ dt = (2x - 2) dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} u = x - 1 \\ du = dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = x^2 + 2x + 2 \\ dv = (2x + 2) dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} w = x + 1 \\ dw = dx \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{16} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{8} \int \frac{1}{u^2 + 1} + \frac{1}{16} \int \frac{1}{v} dv + \frac{1}{8} \int \frac{1}{w^2 + 1} dw
\end{aligned}$$

Po zpětné substituci máme výsledek, který je správně definován na celém  $\mathbb{R}$ .

$$I = \frac{1}{16} \ln \left( \left| \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} \right| \right) + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(x - 1) + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(x + 1) + C$$

□

2.)

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x(\sqrt{x+1} + 1) + 2\sqrt{x+1} + 1} dx.$$

*Řešení:* Integrand je ve tvaru racionální funkce s  $x$  a odmocninou  $\sqrt{x+1}$ . Bude tedy fungovat triková substituce  $t = \sqrt{x+1}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{x^2 + 2x(\sqrt{x+1} + 1) + 2\sqrt{x+1} + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 - 1)^2 + 2(t^2 - 1)(t + 1) + 2t + 1} 2t dt = \\ &= \int \frac{2t^5 - 4t^3 + 2t}{t^4 - 2t^2 + 1 + 2t^3 + 2t^2 - 2t - 2 + 2t + 1} dt = 2 \int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^3 + 2t^2} dt \end{aligned}$$

Dostali jsme k integrování racionální funkci, se kterou si již dokážeme poradit. Nejprve vydělíme polynom polynomem, abychom dostali zlomek, kde má čitatel menší stupeň než jmenovatel, a poté tento zlomek rozdělíme na parciální zlomky.

$$I = 2 \int t - 2 + \frac{2t^2 + 1}{t^3 + 2t^2} dt = t^2 - 4t + 2 \int \frac{2t^2 + 1}{t^2(t + 2)} dt$$

Předpokládejme následující tvar parciálních zlomků:

$$\begin{aligned} \frac{2t^2 + 1}{t^2(t + 2)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t + 2} \\ 2t^2 + 1 &= 2B + t[2A + B] + t^2[A + C] \\ A &= -\frac{1}{4} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} I &= t^2 - 4t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2} dt + \frac{9}{2} \int \frac{1}{t + 2} dt = t^2 - 4t - \frac{1}{2} \ln(|t|) - \frac{1}{t} + \frac{9}{2} \ln(|t + 2|) = \\ &= x - 4\sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x+1}) + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{9}{2} \ln(\sqrt{x+1} + 2) + C, \end{aligned}$$

kde generická konstanta  $C$  schovala i jednu 1 ze zpětné substituce. □

3.)

Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(x) \cos(x)}.$$

Najděte funkci  $F$ , která bude primitivní funkcí k  $f$ , a bude platit  $F(0) = 0$ . Všimněte si, že funkce  $F$  musí být spojitá na celém  $\mathbb{R}$ . Pokud to tedy bude potřeba, proveďte lepení.

*Řešení:* V tomto příkladě použijeme jednu z goniometrických substitucí, nejvýhodnější z nich je  $t = \operatorname{tg}(x)$  ( $t = \sin(x)$  ani  $t = \cos(x)$  nefungují a  $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$  je zbytečně složitá). Hledejte tedy integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 - \sin(x) \cos(x)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}(x) \\ \operatorname{arctg}(t) = x \\ \frac{1}{1+t^2} dt = dx \\ \frac{t}{1+t^2} = \sin(x) \cos(x) \end{array} \right| = \int \frac{1}{1 - \frac{t}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2 - t + 1} dt = \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \frac{2}{\sqrt{3}} dt = \left| \begin{array}{l} u = \frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(u) + C_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_k. \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledná primitivní funkce je nespojitá v bodech nespojitosti funkce  $\operatorname{tg}(x)$ . Konstanty  $C_k$  se mohou lišit na každém intervalu  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ . Spočtěme jednostranné limity v krizových bodech a určíme závislost jednotlivých konstant tak, aby se limity rovnaly.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} F(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_k \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} F(x) &= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_{k+1} \end{aligned}$$

Tedy

$$C_{k+1} = C_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = C_{k-1} + 2\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \dots = C_0 + (k+1)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Konstantu  $C_0$  určíme z podmínky  $F(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 = F(0) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} + C_0 \\ C_0 &= \frac{\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

Konečný tvar naší funkce je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi + k \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi & \text{na } \left( -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ \text{spojitě dodefinována v krajních bodech} & \end{cases}$$

□