

Domácí úkol 9

Termín odevzdání: 9. 5. 2025 do večera

1.)

Uvažujte funkci

$$F(x, y) = \frac{y^2 \sin(x)}{x^2 + xy + y^2}.$$

Ukažte, že F lze spojitě dodefinovat v bodě $(0, 0)$. Pro spojitou funkci najděte parciální derivace prvního řádu všude, kde existují, a rozhodněte ve kterých bodech jsou tyto derivace spojitě. Dále najděte parciální derivace 2. řádu všude (i smíšené), kde existují, a rozhodněte ve kterých bodech jsou spojitě. Nakonec nalezněte

- derivaci F ve směru, jakým míří vektor $(3, 2)$, v bodě $(\frac{\pi}{2}, -1)$,
- derivaci F ve směru osy 2. kvadrantu v bodě $(0, 0)$,
- jednotkový vektor \mathbf{v} , v jehož směru má F v počátku největší derivaci. (stačí přibližná numerická hodnota).

HINT: Zkuste dokázat nerovnost $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, abyste měli jistotu, že jediný problémový bod je počátek.

Řešení: Nejprve dokážeme nerovnost z *HINTU*.

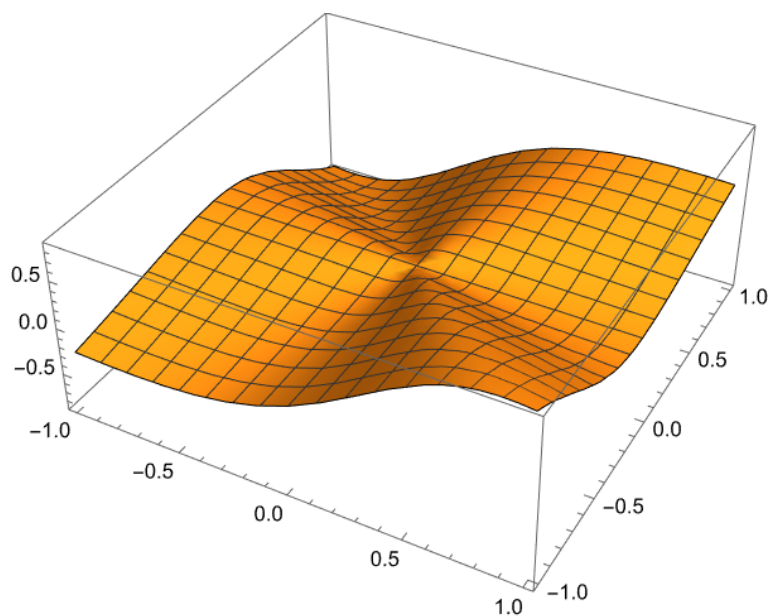
$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &\geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ 2x^2 + 2xy + 2y^2 &\geq x^2 + y^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &\geq 0 \\ (x + y)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce má jediný problémový bod a to $(0, 0)$, jinde jde o kombinaci spojitých funkcí a nemáme problém. Podívejme se tedy na chování v počátku. Zkusme spočítat limitu, pokud bude existovat, můžeme funkci skutečně spojitě dodefinovat její limitní hodnotou.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin^2(\varphi) \sin(r \cos(\varphi))}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} = \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sin(r \cos(\varphi)) \frac{\sin^2(\varphi)}{1 + \cos(\varphi) \sin(\varphi)} &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnost využívá toho, že zlomek je určitě omezený a člen $\sin(r \cos(\varphi))$ před ním jde do nuly. Definujme tedy $F(0, 0) = 0$.

Pro představu, takto nějak vypadá graf funkce F .

Obrázek 1: Graf F

Najdeme nyní obě parciální derivace prvního řádu. Nejprve jednoduše zderivujeme, ale poté se důkladně podíváme, kde všude není derivace definována (srovnejte s příkladem 5 v 11. sadě - funkce všude spojitá, ale derivace ne všude existují).

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 \cos(x)(x^2 + xy + y^2) - y^2 \sin(x)(2x + y)}{(x^2 + xy + y^2)^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{2y \sin(x)(x^2 + xy + y^2) - y^2 \sin(x)(x + 2y)}{(x^2 + xy + y^2)^2} \quad (1b)$$

Tyto vzorce zjevně nejsou definované opět pouze pro bod $(0, 0)$. Na ten se podíváme zvlášť, postupujme podle definice parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h, 0) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0, h) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Tohoto výsledku šlo také jednoduše nahlédnout tím, že funkce F je zjevně nulová na osách.

Parciální derivace tedy existují všude, i v počátku, ale otázkou zůstává, zda jsou i zde tyto derivace spojitými funkcemi. Mimo počátek jde o racionální funkci, která je zřejmě spojitá, ale v počátku dokážeme, že ani jedna parciální derivace není spojitá, stačí se přiblížit po správné přímce a dostaneme nenulovou limitu. V případě derivace podle x sledujme její chování na ose y . Dosazujeme do (1a) a dostáváme

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial x}(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4} = 1.$$

U parciální derivace podle y se přibližujeme po přímce $y = x$. Dosazujeme do (1b) a dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial y}(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 \sin(x)}{9x^4} = \frac{1}{3}.$$

Pokračujeme parciálními derivacemi druhých řádů, nejprve mimo počátek.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = & -y^2 \frac{4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 2y^3}{(x^2 + xy + y^2)^3} \cos(x) - \\ & - y^2 \frac{x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - 6xy - 6x^2}{(x^2 + xy + y^2)^3} \sin(x) \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^4 - 6x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + xy + y^2)^3} \sin(x) \quad (2b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2x^4y + 3x^3y^2 + 3x^2y^3 + xy^4}{(x^2 + xy + y^2)^3} \cos(x) - \frac{4x^3y + 3x^2y^2 - 3xy^3 - y^4}{(x^2 + xy + y^2)^3} \sin(x) \quad (2c)$$

Jelikož jde opět o racionální funkce, máme jistotu, že jsou mimo počátek spojité a tedy ve smíšených derivacích můžeme prohodit pořadí. Nyní se speciálně podíváme na parciální derivace druhého řádu v počátku. Vyjděme z definice parciální derivace a využijme předchozích výsledků.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(h, 0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0, h) - \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{h} \dots \text{neexistuje} \end{aligned}$$

Vidíme, že v počátku již není vše tak jednoduché a krásně spojité jako jinde, dokonce vidíme, že zde existuje pouze jedna ze smíšených derivací. Ostatní zde existují ale nejsou spojité (stačí se ve vzorečkách (2a)-(2c) přiblížit po přímce $y = x$ a dostaneme nenulovou nebo neexistující limitu).

Nyní už pouze nalezneme hledané směrové derivace. Nesmíme zapomenout na znor-mování směrového vektoru na normu 1. V bodě $(\frac{\pi}{2}, -1)$ máme spojité parciální derivace,

můžeme tedy použít vzoreček s gradientem.

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{13}} (3, 2)^T \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\pi}{2}, -1 \right) = \nabla F \left(\frac{\pi}{2}, -1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} (3, 2)^T$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\pi}{2}, -1 \right) &= \left(\frac{16(1-\pi)}{(\pi^2 - 2\pi + 4)^2}, \frac{8\pi(1-\pi)}{(\pi^2 - 2\pi + 4)^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} (3, 2)^T = \\ &= \frac{16(3 - 2\pi - \pi^2)}{\sqrt{13}(\pi^2 - 2\pi + 4)^2} \approx -1.01413 \dots \end{aligned}$$

Pro nalezení směrové derivace v počátku musíme použít definici, neboť zde nemáme spojitost parciálních derivací a vzoreček nefunguje.

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1)^T$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-\frac{1}{\sqrt{2}}h, \frac{1}{\sqrt{2}}h) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\frac{1}{2}h^2 \sin(-\frac{1}{\sqrt{2}}h)}{\frac{1}{2}h^2} - 0}{h} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nakonec se podívejme na směr, ve kterém je derivace největší. Opět nemůžeme použít vzoreček s gradientem. Vyjděme z definice s obecným jednotkovým vektorem $\mathbf{v} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\cos(\varphi)h, \sin(\varphi)h) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2(\varphi)h^2 \sin(\cos(\varphi)h)}{h^2(1+\cos(\varphi)\sin(\varphi))}}{h} = \\ &= \frac{\sin^2(\varphi) \cos(\varphi)}{1 + \cos(\varphi) \sin(\varphi)} \end{aligned}$$

Tato funkce je spojitá a na intervalu $[0, 2\pi]$ nabývá globálního maxima přibližně v bodě $\varphi = 5.39541 \dots$, což odpovídá hledanému vektoru

$$\mathbf{v} = (0.631138 \dots, -0.775670 \dots)^T$$

□