

Fourierovy řady

Trigonometrické řady

1. Rozvíjte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.
2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$?
3. Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?
4. Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu a vyšetřete její konvergenci
 - a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$
 - b) $f(x) = ax$ na $(-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ na $(0, \pi)$
 - c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody
 - d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$
 - e) e^{ax} na $(-1, 1)$
 - f) $\ln |\sin \frac{x}{2}|$ na intervalu periody
5. Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2 .

Sčítání trigonometrických řad

6. Sečtěte následující řady v uvedených intervalech
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $[0, 2\pi]$
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $(-\pi, \pi)$
 - d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $[-\pi, \pi]$
7. Spočtěte
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$
 - d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Aplikace na řešení některých PDR

Pomocí trigonometrických řad řešte následující úlohy

8.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= x(l - x) \quad \text{na } [0, l] \\ u_t(0, x) &= 0 \quad \text{na } [0, l] \\ u(t, 0) = u(t, l) &= 0 \quad \text{na } [0, T].\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= 0 \quad \text{na } [0, l] \\ u_t(0, x) &= \cosh x \quad \text{na } [0, l] \\ u_x(t, 0) = u_x(t, l) &= 0 \quad \text{na } [0, T].\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= x e^{-x} \quad \text{na } [0, l] \\ u(t, 0) = u_x(t, l) &= 0 \quad \text{na } [0, T].\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{na } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\} \\ u(x, y) &= f_1(\varphi) \quad \text{na } x^2 + y^2 = 1 \\ u(x, y) &= f_2(\varphi) \quad \text{na } x^2 + y^2 = 4,\end{aligned}$$

kde f_1 a f_2 jsou 2π periodické spojité funkce, φ označuje úhlovou proměnnou v polárních souřadnicích.