重庆市高二数学试卷参考答案

1. D　因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$，所以 $A\cap B=\{x|-5<x<-1$ 或 $1<x<7\}$.

2. B　原直线的倾斜角为 $60°$，旋转后倾斜角为 $120°$，即所得新直线的斜率为 $\tan 120°=-\sqrt{3}$.

3. D　因为 $z=2+\mathrm{i}$，所以 $(z+2)\bar{z}=(4+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=9-2\mathrm{i}$.

4. B　由 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-2\cos(\pi+\theta)$，得 $-\sin\theta=2\cos\theta$，则 $\tan\theta=-2$.

5. C　由 $k^2+(-\sqrt{7})^2-4\times 2k=k^2-8k+7>0$，解得 $k>7$ 或 $k<1$.

6. D　因为圆 C 的圆心为 $C(-2,1)$，圆 D 的圆心为 $D(3,-4)$，所以两圆的圆心距为 $|CD|=\sqrt{(-2-3)^2+(1+4)^2}=5\sqrt{2}$. 因为圆 C 的半径为 $2\sqrt{2}$，圆 D 的半径为 $3\sqrt{2}$，所以圆心距等于两圆的半径和，故两圆外切.

7. C　函数 $f(x)=\frac{3x^2\cos x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的定义域 $\{x|x\neq 0\}$ 关于原点对称，且 $f(-x)=\frac{3(-x)^2\cos(-x)}{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，排除 B 和 D；又 $f(\frac{\pi}{2})=0$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$3x^2\cos x>0$，且 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^{-x}$，所以 $f(x)>0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内恒成立，排除 A；所以只有 C 正确.

8. D　因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$

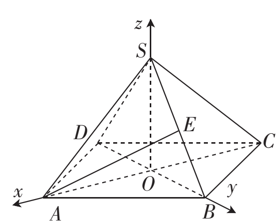
$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AA_1}$，

所以 $x=-1,y=1,z=\frac{1}{6}$，故 $x+y+z=\frac{1}{6}$.

9. CD　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2k+2)\times(-2)+k\times 1+(-4)\times 8=0$，解得 $k=-12$. 因为 $\boldsymbol{b}=(-2,1,8)$，所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+1+64}=\sqrt{69}$.

10. BD　因为 $k_{OA}=2>1$，$k_{OB}<0$，所以直线 $x-y=0$ 与线段 AB 无公共点，A 错误. 因为 $k_{AB}=\frac{4-2}{-3-1}=-\frac{1}{2}>-1$，所以直线 AB 的倾斜角大于 $135°$，B 正确. 因为线段 BC 的中点为 $(-\frac{5}{2},2)$，且直线 BC 的斜率为 $\frac{4-0}{-3+2}=-4$，所以 BC 上的中垂线所在直线的方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x+\frac{5}{2})$，即 $y=\frac{1}{4}x+\frac{21}{8}$，C 错误. 因为 $k_{BC}=\frac{4}{-3+2}=-4$，所以 BC 上的高所在直线的方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-1)$，即 $x-4y+7=0$，D 正确.

11. BCD　以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



可知 $AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=\sqrt{2}$，$SA=\sqrt{6}$，所以 $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{5}$.

因为 $A(1,0,0)$，$S(0,0,\sqrt{5})$，$C(-1,0,0)$，$E(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$，所以 $\overrightarrow{AE}=(-1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$，$\overrightarrow{CS}=(1,0,\sqrt{5})$. 因为 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{SC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CS}|}=\frac{-1+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$，所以异面直线 AE 与 SC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

12. ABD　设 $C(x,y)$. 因为 $\frac{|CA|}{|CB|}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，

所以 $x^2+y^2+4x=0$，即 $(x+2)^2+y^2=4$，

所以动点 C 的轨迹为以 $N(-2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，故 A 正确.

因为直线 l 过定点 $M(-1,1)$，而点 $M(-1,1)$ 在圆 N 内，所以直线 l 与圆 N 相交，故 B 正确.

当直线 l 与 NM 垂直时，动点 C 到直线 l 的距离最大，且最大值为 $r+|NM|=2+\sqrt{2}$，故 C 错误.

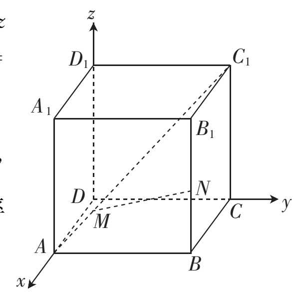
记圆心 N 到直线 l 的距离为 d，则 $d=\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$.

因为 $|PQ|^2=4(r^2-d^2)$，所以 $4(r^2-d^2)=8$.

因为 $r=2$，所以 $d=\sqrt{2}$. 由 $\frac{(m-1)^2}{m^2+1}=2$，得 $m=-1$，故 D 正确.

13. $\frac{3}{2}$　因为直线 $2x+y-5=0$ 与 $mx-3y+6=0$ 垂直，所以 $2m+1\times(-3)=0$，故 $m=\frac{3}{2}$.

14. $\sqrt{11}$　如图所示，以点 D 为坐标原点，以 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $M(3,1,1)$，$N(4,4,2)$，$|MN|=\sqrt{1^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}$.



15. $\frac{3}{10}$　从 5 位学生中任选 2 人，全部事件有 $AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE$，共 10 种，其中符合条件的事件有 AC,AD,AE，共 3 种，故所求概率为 $\frac{3}{10}$.

16. $(1,1,4)$（答案不唯一）；$\frac{\sqrt{33}}{11}$　依题意可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0$，即 $3+1+t-4=0$，即 $t=0$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1,4)$，即直线 AB 的一个方向向量为 $(1,1,4)$. 由 $t=0$，得 $\overrightarrow{AP}=(-1,-1,5)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AP}\rangle=\frac{-3-1-5}{\sqrt{11}\times\sqrt{27}}=-\frac{\sqrt{33}}{11}$，

故直线 AP 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{11}$.

17. 解：(1) 设所求直线的方程为 $3x-y+b=0$，…… 1 分

将 A 的坐标代入，得 $b=6$，…… 3 分

则所求直线的方程为 $3x-y+6=0$. …… 4 分

(2) 由题意得 $k_{MN}=\frac{4-3}{0-2}=-\frac{1}{2}$. …… 5 分

所求直线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{MN}}=2$. …… 6 分

设所求直线的斜截式方程为 $y=2x+b$，…… 7 分

当 $x=0$ 时，$y=b$；当 $y=0$ 时，$x=-\frac{b}{2}$.

由 $b+\frac{b}{2}=3$，得 $b=2$，…… 9 分

故所求直线的方程为 $y=2x+2$（或 $2x-y+2=0$）. …… 10 分

18. 解：(1) 因为 $\cos A\cos B-1=\sin A\sin B-2\sin^2 C$，

所以 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=1-2\sin^2 C$，即 $\cos(A+B)=\cos 2C$，…… 2 分

整理可得 $2\cos^2 C+\cos C-1=0$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$ 或 $\cos C=-1$（舍去），…… 5 分

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

(2) 因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=32-ab=4^2$，

所以 $ab=16$，…… 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. …… 12 分

19. 解：(1)设圆 M 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}26-D+5E+F=0,\\8-2D-2E+F=0,\\50+5D+5E+F=0,\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

解得 $D=-4,E=-2,F=-20$， ………………………………………… 4 分

所以圆 M 的方程为 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$，

故圆 M 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. ………………………………………… 6 分

(2)当切线斜率不存在时，切线方程为 $x=7$. ………………………………………… 7 分

当切线斜率存在时，设切线方程为 $y-2=k(x-7)$，即 $kx-y-7k+2=0$. ………… 8 分

由 $\frac{|2k-1-7k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=5$，解得 $k=-\frac{12}{5}$， ………………………………………… 10 分

所以切线方程为 $y-2=-\frac{12}{5}(x-7)$，即 $12x+5y-94=0$. ………………………… 11 分

综上所述，所求切线方程为 $x=7$ 或 $12x+5y-94=0$. ………………………………… 12 分

20. (1)证明：因为 E,F 分别是 AD,BD 的中点，所以 $EF/\!/AB$，且 $EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$.

因为 $AB\perp BD$，所以 $EF\perp BD$. ………………………………………… 1 分

因为 $AB=1,AD=\sqrt{2}$，所以 $BD=1$.

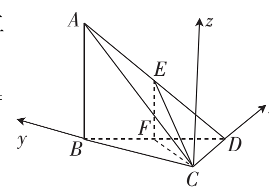
因为 $\angle BCD=90°$，所以 $FC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$，

因为 $EC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $EF^2+FC^2=\frac{1}{2}=EC^2$，所以 $EF\perp FC$. ………………………… 3 分

因为 $BD\cap FC=F$，$BD,FC\subset$平面 BCD，所以 $EF\perp$平面 BCD. ……………………… 5 分

因为 $EF\subset$平面 EFC，所以平面 $EFC\perp$平面 BCD. ………………………………… 6 分

(2)解：分别以 CD,CB 所在直线为 x,y 轴，过 C 且与 EF 平行的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$.



由(1)可得 $AB\perp$平面 BCD，因为 $BD,BC\subset$平面 BCD，平面 $ABD\cap$平面 $ABC=AB$，所以 $\angle DBC$ 为二面角 $D-AB-C$ 的平面角，即 $\angle DBC=30°$.

因为 $BD=1,BC\perp CD$，所以 $BC=\frac{\sqrt{3}}{2},CD=\frac{1}{2}$. ………………………… 7 分

因为 $A(0,\frac{\sqrt{3}}{2},1),E(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}),F(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0)$，

所以 $\overrightarrow{CF}=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0),\overrightarrow{CA}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},1),\overrightarrow{CE}=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2})$. ………………………… 8 分

设平面 AEC 的法向量是 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}x_1+\frac{\sqrt{3}}{4}y_1+\frac{1}{2}z_1=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=2$，得 $\boldsymbol{m}=(0,2,-\sqrt{3})$. ………………………… 9 分

设平面 EFC 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}x_2+\frac{\sqrt{3}}{4}y_2=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}x_2+\frac{\sqrt{3}}{4}y_2+\frac{1}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,0)$. ………………………… 10 分

因为 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，所以二面角 $A-CE-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$. ………………… 12 分

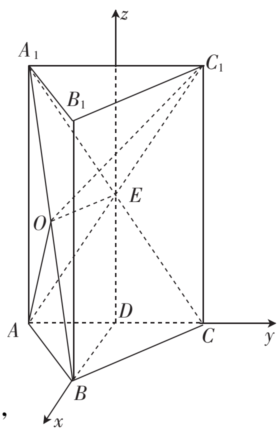
21. (1)证明：连接 A_1C，与 AC_1 交于点 E，则 E 为 A_1C 的中点. ………………… 1 分

连接 OE，在 $\triangle A_1BC$ 中，OE 为中位线，则 $OE\parallel BC$. ………………… 2 分

因为 $OE\subset$ 平面 AOC_1，$BC\not\subset$ 平面 AOC_1，所以 $BC\parallel$ 平面 AOC_1. ………… 4 分

(2)解：设 AC 的中点为 D，在平面 ACC_1A_1 内过点 D 作 AC 的垂线，连接 BD.

如图，以 D 为坐标原点，分别以 DB,DC,DE 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$， ………………………………………………………… 5 分



则 $D(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,-\sqrt{2},0)$，$O(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3})$，$C_1(0,\sqrt{2},2\sqrt{3})$，…
………………………………………………………………………… 6 分

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AO}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{2},2\sqrt{3})$. ……………… 7 分

设平面 AOC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AO}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{3}z=0,\\ 2\sqrt{2}y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$
………………………………………………………………………… 8 分

不妨取 $y=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{2})$. ………………………………………………… 10 分

故点 B 到平面 AOC_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $x^2+y^2+my-21=0$，得 $x^2+(y+\frac{m}{2})^2=21+\frac{m^2}{4}$，

所以其圆心为 $C(0,-\frac{m}{2})$，半径 $R=\sqrt{21+\frac{m^2}{4}}$，………………………………………… 2 分

则点 C 到 l 的距离 $d=\frac{|\frac{3m}{2}-1|}{\sqrt{5}}$. ………………………………………………………… 3 分

由题意可得，$d^2+(\frac{4\sqrt{5}}{2})^2=R^2$，则 $\frac{(\frac{3}{2}m-1)^2}{5}=\frac{m^2}{4}+1$， ………………………………… 4 分

解得 $m=4$ 或 $m=-1$(舍去). ………………………………………………………………… 5 分

故圆 C 的标准方程为 $x^2+(y+2)^2=25$. ……………………………………………………… 6 分

(2)设圆 D 关于直线 $y=4$ 对称的圆为圆 E，则圆 E 的方程为 $(x-8)^2+(y-8)^2=1$. ………… 7 分

设 $M(x,4)$，则当 C,E,M 三点共线时，$|MP|+|MQ|$ 取得最小值，………………………… 9 分

且 $|MP|+|MQ|$ 的最小值为 $|CE|-5-1=\sqrt{8^2+10^2}-6=2\sqrt{41}-6$， ………………… 10 分

此时 $k_{CE}=k_{CM}$，即 $\frac{8+2}{8}=\frac{4+2}{x}$， ……………………………………………………… 11 分

解得 $x=\frac{24}{5}$，故 M 的坐标为 $(\frac{24}{5},4)$. ……………………………………………………… 12 分