

1.1 P9.

11. 解方程组

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

\therefore 不相容

15. 解方程组是否相容. 不必求出.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ -2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_4 = -5 \end{cases}$$

其增广矩阵为:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{array} \right)$$

不相容

25. 求出矩阵 g, h, k 的方程, 使以下矩阵是相容方程组的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & 5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array} \right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & 5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2g+h \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & 5 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2g+h \end{array} \right)$$

$\therefore 2g+h=0$

习题 1.2. P20

习题 9.11. 中线性方程组的增广矩阵. 求其通解.

$$9. \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

主元列是 1, 2. \therefore 基本变量是 x_1, x_2
自由变量是 x_3

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 4 \\ x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 5x_3 \\ x_2 = 5 + 6x_3 \end{cases}$$

$$11. \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

主元列是 1, 2. 基本变量是 x_1, x_2
 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 \text{ 是自由变量} \\ x_3 \text{ 是自由变量} \end{cases}$

15. 使用例 1 中标准矩阵的符号给出线性方程组的增广矩阵判断每个矩阵对应的方程组是否相容. 若相容 则判断是否是唯一.

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相容. 有唯一解.

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不相容.



5. 设一个线性方程组的系数矩阵每行有一个主元位置, 说明为什么方程组是相容的
若系数矩阵每行都有一个主元位置, 那么在底行有一个主元位置, 从而在增广列没有主元位置. 即: 方程组相容

习题 1.3 B1.

1. 计算 $\vec{u} + \vec{v}$ 与 $\vec{u} - 2\vec{v}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. 写出关于所给向量方程的线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = -7 \\ 5x_1 + 0 = -5 \end{cases}$$

1. 写出关于所给出的方程组的向量方程

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

17. 设 $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$ 当 h 取何值时 \vec{b} 在 \vec{a}_1 和 \vec{a}_2 生成的平面内

当 \vec{b} 在 \vec{a}_1 和 \vec{a}_2 生成平面内时有 $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} \quad \text{方程组增广矩阵为 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & 8+h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 17+h \end{pmatrix}$$

$$\therefore 17+h \neq 0 \Rightarrow h \neq -17$$

习题 1.4 计算乘积

$$1. \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12+14 \\ 3-12 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

习题 1.4 1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $\vec{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

习题 1.4 1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ 矩阵乘积未定义

5. 使用 $A\vec{x}$ 的定义把矩阵方程写成向量方程

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -8 & 4 \\ -2 & 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 5 + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot (-1) + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 3 + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$



10. 将方程组写成向量方程和矩阵方程.

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{向量方程: } \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

A中哪几行包含主元位置? 方程 $AX=b$ 是否对 R^4 中的每个 b 都有解?

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有3行包含主元位置, 由定理4, $AX=b$ 不对 R^4 中的每个 b 都有解.

15 1. 确定方程组是否有非平凡解. 使用尽量少的行运算

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
 x_3 为自由变量 \therefore 有非平凡解

5. 用例11.2的方法把给出的线性方程组的解集用参数向量形式表示出来.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 x_3 为自由变量 \therefore 该方程组有平凡解.

把继续化为简化行阶梯形: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

x_1, x_2 是基本变量. $x_1 = 5x_3, x_2 = -2x_3$ 其通解的向量形式为: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 v$ 其中 $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. 把方程 $Ax=0$ 的解用参数向量形式表示出来. 其中 A 行等价于给定的矩阵

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ x_1, x_2 为基本变量, x_3, x_4 为自由变量. $x_1 = -9x_3 - 8x_4, x_2 = 4x_3 + 5x_4$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9x_3 - 8x_4 \\ 4x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p + tv \quad p = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ x_1, x_2 为基本变量, x_3, x_4 为自由变量. $x_1 = -9x_3 - 8x_4, x_2 = 4x_3 + 5x_4$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9x_3 + 8x_4 \\ 4x_3 - 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. 设某线性方程组的解集表示为: $x_1 = 5 + 4x_3 - 2x_4, x_2 = 8 + x_3 - 5x_4$ x_3, x_4 为自由变量. 用向量把它表示成 R^4 中的直线 $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是过 $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 且平行于 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的直线



扫描全能王 创建

20202221014 关竣佑

23. 24. 判断每个命题的真假, 并给出理由

23. a. 齐次方程总是相容的 \checkmark " 总有 ~~非~~ 0 解

b. 方程 $Ax=0$ 给出它的解集的显式表达式 \times

c. 齐次方程 $Ax=0$ 当且仅当方程至少有一个自由变量时有非零解 \times . 即使有自由变量也有零解

d. 方程 $x=pt+u$ 描述了一条直线, 它通过 v 且平行于 $P \times$ 反了

e. 方程 $Ax=b$ 的解集具有形式 $w=p+v$ 的方程向量的集, 其中 v 是方程 $Ax=0$ 的任意一解.

24. a. 若 x 是 $Ax=0$ 的非平凡解, 且则 x 的每个元素不等于 0. \times

b. 方程 $x=x_2u+x_3v$ 中, x_2, x_3 是自由变量, (u, v 为常数关系) 表示经过原点的平面 \checkmark

c. $Ax=b$ 是齐次的当且仅当零向量是它的解. \times

d. 把 x 向量加上 p 是把该向量沿平行于 P 的方向移动 \times

e. $Ax=b$ 的解集可平移 $Ax=0$ 的解集得到 \checkmark

k.b 例一:

$$\begin{cases} P_C = 0.14P_E + 0.16P_S \\ P_E = 0.16P_C + 0.11P_E + 0.12P_S \\ P_S = 0.14P_C + 0.15P_E + 0.12P_S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_C - 0.14P_E - 0.16P_S = 0 \\ -0.16P_C + 0.19P_E - 0.12P_S = 0 \\ -0.14P_C - 0.15P_E + 0.88P_S = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -0.14 & -0.16 & 0 \\ -0.16 & 0.19 & -0.12 & 0 \\ -0.14 & -0.15 & 0.88 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.14 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P \begin{pmatrix} P_C \\ P_E \\ P_S \end{pmatrix} = P_S \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例二: $x_1 + x_2 = 800$
 $x_2 - x_3 + x_4 = 300$
 $x_4 + x_5 = 500$
 $x_1 + x_5 = 600$
 $x_5 = 400$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - x_5 \\ x_2 = 200 + x_5 \\ x_3 = 400 \\ x_4 = 500 - x_5 \\ x_5 \text{ 为自由变量} \end{cases} \quad x_5 \leq 500$$

20202221014 关竣佑



扫描全能王 创建

习题 6.7

79.
 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(e_1) = (3, 1, 1)$ $T(e_2) = (-5, 2, 0)$.

其中 $e_1 = (1, 0)$ $e_2 = (0, 1)$

标准矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

设 T 是线性变换, 求出 T 的标准矩阵

