Лабораторна робота 3.

Тема: «Чисельні методи розв’язання нелінійних рівнянь. Уточнення кореня нелінійного рівняння». Метод Ньютона (метод дотичних). Комбінований метод.

Теоретичні відомості

Нехай нам вдалося відокремити відрізок $[a;b]$, в якому розташоване шукане значення кореня рівняння $f(x)=0$. За початкове наближення x_0 обираємо точку $B(b;\ f(b))$. Проводимо у цій точці дотичну до кривої $y=f(x)$ (рис. 1), що задається рівнянням

$$y-f(b)=f'(b)(x-b).$$

Перше наближенням кореня x_1 знаходимо як абсцису точки перетину цієї дотичної з віссю *Ox*. Для цього потрібно підставити в рівняння дотичної $y=0$, $x=x_1$. Отримуємо:

$$-f(b)=f'(b)(x_1-b).$$

Звідки:

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

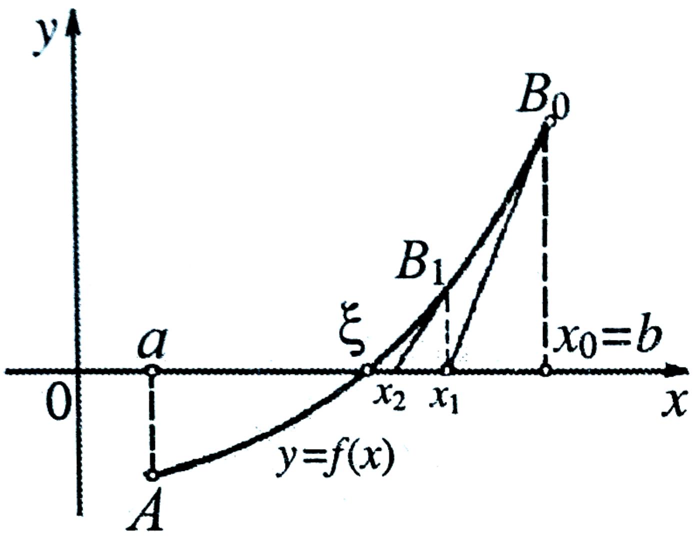


Рис. 1. Геометрична інтерпретація методу Ньютона

Очевидно, що тепер корінь ξ знаходиться на відрізку $[a;\ x_1]$. Проводимо наступну дотичну в точці $B_1(x_1;\ f(x_1))$ і друге наближення кореня x_2 знаходимо як абсцису точки перетину цієї дотичної з віссю *Ox*:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогічно знаходимо й наступні наближення кореня.

Загальна *формула методу дотичних* має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

У якості критерію закінчення ітераційного процесу може бути використана умова:

$$\left| f(x_n) \right| < \varepsilon .$$

Можна також оцінювати близькість двох послідовних наближень:

$$\left| x_n - x_{n-1} \right| < \varepsilon .$$

Послідовні наближення $x_0 = b, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ утворюють обмежену монотонно спадаючу послідовність, причому $a < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0$, тобто виходять наближені значення кореня ξ із надлишком.

Якщо перша дотична проводиться до кривої $y = f(x)$ у точці $A_0(a;\ f(a))$, то отримаємо послідовні наближення $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, які утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність, причому $x_0 < x_1, < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b$, тобто виходять наближені значення кореня ξ із нестачею.

Для того, щоб визначити, до якого з кінців відрізка $[a,\ b]$ проводити першу дотичну, треба скористатися одним з наступних правил:

- в методі Ньютона першу дотичну проводять до того кінця відрізка $[a;b]$, для якого знак функції співпадає зі знаком другої похідної, тобто за початкове наближення беремо точку a, якщо $f(a) \cdot f''(a) > 0$; за початкове наближення беремо точку b, якщо $f(b) \cdot f''(b) > 0$;

- якщо в інтервалі $[a;b]$ знаки першої і другої похідних функції *f(x)* співпадають, тобто для всіх $x \in [a;b]$ справедлива нерівність $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то першу дотичну в методі Ньютона слід проводити в правому кінці відрізка $[a;b]$; якщо знаки похідних різні, тобто для всіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то перша дотична проводиться в лівому кінці.

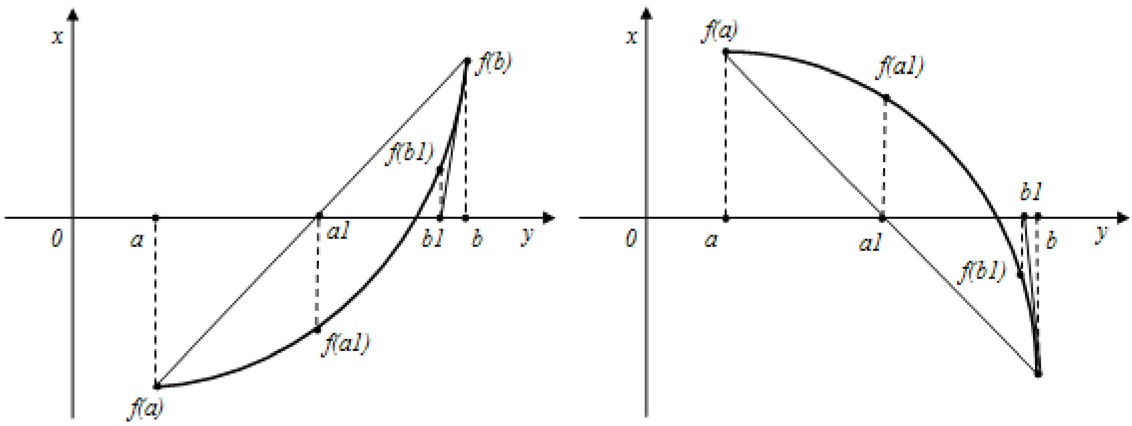
Комбінований метод

Метод хорд та дотичних дають близьке до кореня значення з різних боків. Тому, з метою пришвидшити процес відшукання кореня їх часто використовують у поєднанні.

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$ корінь якого знаходиться на відрізку $[a; b]$. При знаходженні розв'язку даного рівняння за комбінованим методом можливі два випадки:

1. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то з лівого кінця відрізку $[a; b]$ шукають корінь за методом хорд, а з правого кінця – за методом дотичних. В результаті отримуємо наступні розрахункові формули.

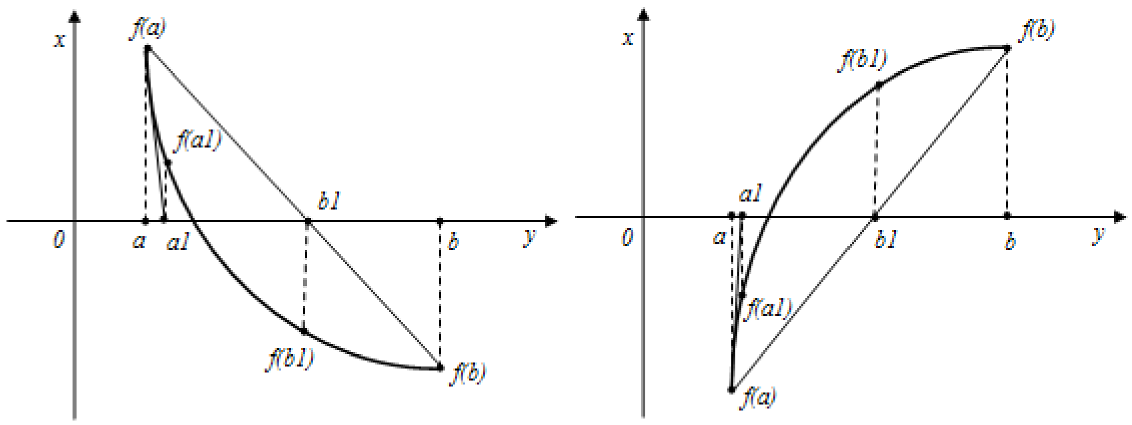
$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)(b_n - a_n)/(f(b_n) - f(a_n))$$
$$b_{n+1} = b_n - f(b_n)/f'(b_n)$$



Графічна інтерпритація першого випадку комбінованого методу

2. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то з лівого кінця відрізку $[a; b]$ шукають корінь за методом дотичних, а з правого кінця – за методом хорд.

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)/f'(a_n)$$
$$b_{n+1} = b_n - f(b_n)(b_n - a_n)/(f(b_n) - f(a_n))$$



Графічна інтерпритація другого випадку комбінованого методу

Процес обчислення кореня за комбінованим методом припиняють, якщо виконується умова $|b_n - a_n| < \varepsilon$

І за наближене значення кореня приймають $x = (b_n + a_n)/2$.

Зауваження: на кожному кроці комбінованого методу за нерухомий кінець у формулі методу хорд береться наближення, обчислене на тому ж кроці за формулою дотичних.

Приклад розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона

```
#Лабораторна робота 3
#Відокремлення коренів

import numpy as np
import numdifftools as nd

f = lambda x: x**4 + 2*x**3 +2*x**2  +6*x - 5 # ваша функція f(x)

def find_segments(): #відокремлюємо корені
    search_range = np.arange(-10, 10, 1)

    a = None
    previous_x = None
    current_x  = None
    segments = []

    for x in search_range:
        x = round(x, 4)
        current_x = f(x)
        if previous_x != None and previous_x * current_x < 0:
            segments.append((a, x))
        a = x
        previous_x = current_x
    return segments

segments = find_segments()
for a, b in segments:
    print(f'Found segment:  [{a}, {b}]')
```

```
Found segment:  [-3, -2]
Found segment:  [0, 1]
```

#Лабораторна робота 3 . М. Ньютона, комбінований метод

```
def nuton(a, b, eps, f):
    df2 = nd.Derivative(f, n=2)(b)  # Отримуємо значення похідної другого порядку в точці b
    if f(b) * df2 > 0:
        xi = b
    else:
        xi = a
    df = nd.Derivative(f, n=1)(xi)  # Отримуємо значення похідної першого порядку в точці xi
    xi_1 = xi - f(xi) / df
    while abs(xi_1 - xi) > eps:  # перевіряємо точність
        xi = xi_1
        xi_1 = xi - f(xi) / df
    print('Метод Ньютона, x = ', xi_1.round(4))

def komb(a, b, eps, f):
    if nd.Derivative(f, n=1)(a) * nd.Derivative(f, n=2)(a) > 0:
        a0 = a
        b0 = b
    else:
        a0 = b
        b0 = a
    ai = a0
    bi = b0
    while abs(ai - bi) > eps:
        ai_1 = ai - f(ai) * (bi - ai) / (f(bi) - f(ai))
        bi_1 = bi - f(bi) / nd.Derivative(f, n=1)(bi)
        ai = ai_1
        bi = bi_1
    x = (ai_1 + bi_1) / 2

    print('Комбінований метод, x = ', x.round(4))

if __name__ == "__main__":
    a1, b1 = -3, -2
    a2, b2 = 0, 1
    eps = 0.001

    print("Розв'язки на відрізку [-3, -2]")
    nuton(a1, b1, eps, f)
    komb(a1, b1, eps, f)
    print("\n Розв'язки на відрізку [0, 1]")
    nuton(a2, b2, eps, f)
    komb(a2, b2, eps, f)
```

```
Розв'язки на відрізку [-3, -2]
Метод Ньютона, x =  -2.4898
Комбінований метод, x =  -2.4891

 Розв'язки на відрізку [0, 1]
Метод Ньютона, x =  0.6107
Комбінований метод, x =  0.6103
```

Завдання.

Розв’язати нелінійне рівняння методом Ньютона (дотичних) і комбінованим методом. Варіант брати з попередньої лр.

1. ПІП, група, номер варіанта.
2. Розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона. Код+скрін.
3. Розв'язання нелінійного рівняння комбінованим методом. Код + скрін.
4. Надати результат відокремлення коренів.
5. **Результати виводити обов'язково!!!!**

АБО здати Jupiter notebook (colab)

Контрольні питання

1) Наведіть алгоритм уточнення коренів нелінійного рівняння методом Ньютона (дотичних).
2) Дайте геометричну інтерпретацію методу Ньютона (дотичних).
3) Наведіть розрахункову формулу методу Ньютона (дотичних).
4) Наведіть критерій зупинки ітераційного процесу методу Ньютона (дотичних).
5) Наведіть правила вибору початкового наближення методу Ньютона (дотичних).