AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 10: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1: *Linear (un)abhängige Vektoren*

(a) linear unabhängig

(b) $t = 6$

Aufgabe 2: *Skalarprodukt und Kreuzprodukt*

(a) 59, 2, 0

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$|\vec{c}\,| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})}}$$

(d) Die drei Vektoren der Seiten eines Dreiecks spannen jeweils paarweise dasselbe Parallelogramm auf.

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a} \times \vec{c}\,| = \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| \quad \Rightarrow \quad ab\sin\gamma = ac\sin\beta = bc\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}}$$

Aufgabe 3: *Matrizen*

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = 0 \;\rightarrow$ nicht invertierbar

(b) $3\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(c) nette Parametrisierung: $m_{1/4} = \cos\phi$, $m_{2/3} = \mp\sin\phi$

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_3^2 &= 1 \\ m_1 m_2 + m_3 m_4 &= 0 \\ m_2^2 + m_4^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *Laplace'scher Entwicklungssatz*

$$\det A = 8a^2 + 24a + 18, \quad \text{nicht invertierbar für } a = -\frac{3}{2}$$

Aufgabe 5: *Kreuzprodukt*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det\Omega = 0, \quad \mathrm{tr}(\Omega) = 0, \quad \text{antisymmetrisch: } \Omega^\top = -\Omega$$

Aufgabe 6*: *Höhere Dimensionen*

In d Dimensionen gibt es d kartesische Achsen $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Um jede Achse kann in Richtung der verbleibenden $d-1$ Achsen gedreht werden, sodass $d(d-1)$ Möglichkeiten vorliegen. Allerdings wurde doppelt gezählt, da die Drehung um eine Achse x_i in Richtung einer Achse x_j dasselbe ist wie die Drehung um eine Achse x_j in Richtung einer Achse x_i. Damit verbleiben $\frac{d(d-1)}{2}$ unabhängige Drehungen.

Aufgabe 7*: *Diskreter Laplace-Operator*

1. Rekursionsrelation: $\det(\Delta_n) = -2\det(\Delta_{n-1}) - \det(\Delta_{n-2})$
2. $\det(\Delta_1) = -2$, $\det(\Delta_2) = 3$, $\det(\Delta_3) = -4 \quad \Rightarrow \quad$ Vermutung: $\det(\Delta_n) = (-1)^n(n+1)$

   Beweis durch Induktion:

   (IA) $\quad n = 1: \quad \det(\Delta_1) = (-1)^n(n+1) = -2 \quad \checkmark$

   (IV) $\quad n = k: \quad \det(\Delta_k) = (-1)^k(k+1)$

   (IB) $\quad n = k+1: \quad \det(\Delta_{k+1}) = (-1)^{k+1}(k+2)$

   Beweis.
   $$\begin{aligned} \det(\Delta_{n+1}) &= -2\det(\Delta_n) - \det(\Delta_{n-1}) \\ &= -2(-1)^n(n+1) - (-1)^{n-1}n \\ &= (-1)^{n+1}(2(n+1) - n) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2). \end{aligned}$$

   $\square$