Auffrischungskurs Mathematik

– ein Vorkurs für Studienanfänger –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Aufgabe 1: *Bruchrechnung*

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

(b) $\dfrac{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}$

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{x^2}{xy+x^2}+\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

(d) $\dfrac{n+1}{2-\frac{1}{1-\frac{1}{n^2+1}}}$

(e) $\dfrac{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$

(f) $\dfrac{a^2-1}{a^2+a}-a\dfrac{a+1}{a^3-a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$

(g) $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{ax}-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]$ für $x=\dfrac{1}{a-1}$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze*

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $\left(\dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\dfrac{x+y}{a-b}\right)^n$

(b) $\dfrac{b^x c^y (ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0,5}\right)^z\right]^2}$

(c) $\dfrac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\dfrac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\dfrac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$

(d) $\left(a^{n+2}-a^n\right):(a^3+a^2)$

(e) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^{3}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^{3}y^{2}}\right)^{3}$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken*

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $\sqrt[6]{a^3}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab}$

(b) $\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$ für $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$ mit $|m|<1$

(c) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

(a) $(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$

(b) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

(c) $\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}$

(d) $a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$

(e) $\frac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\frac{y^2}{1-2y}}$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x und y.

(a) $33x + 12y = 25\,,\qquad 11x - 3y = 6$

(b) $\dfrac{2x+3y}{3x-y} = \dfrac{17}{9}\,,\qquad \dfrac{3x+4y}{6x-1} = 2$

(c) $\dfrac{x+2}{y+3} = \dfrac{1}{3}\,,\qquad \dfrac{y+3}{2y-5x} = \dfrac{3}{5}$

(d) $ax + by = 2a\,,\qquad \dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{a} = \dfrac{2}{a}$

(e) $x + 14y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2}\,,\qquad 3\sqrt{2}x - \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(f) $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = a + b\,,\qquad \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2b$

(g) $39x - 38y = 1\,,\qquad 91x - 57y = 4$

Aufgabe 2: *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x, y und z.

(a)
$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 5\,,\\ 3x + 7y - 5z &= 5\,,\\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - 4y + 3z &= 4\,,\\ -x + y - z &= -2\,,\\ 7x + 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y &= b + a\,,\\ x + z &= a + c\,,\\ y + z &= c + b \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 6x - 4y + 8z &= 0\,,\\ -2x + y - z &= 0\,,\\ 12x - 7y + 11z &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: *Parametrisierung von Lösungsmengen*

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x - 7y = 1$ an für

(a) $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $x, y \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y.

(a)
$$x^2 + y^2 = 2(xy + 2)\,,$$
$$x + y = 6$$

(b)
$$\frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5\,,$$
$$\frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6$$

(c)
$$\frac{x^2 - y^2}{2x+3} + y^2 = (x+y)x - xy\,,$$
$$y - 2x = 3$$

Aufgabe 5: *Ungleichungssysteme*

(a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6\,,\\ x - 2y &< 11\,,\\ x &> -y - 1\,,\\ x &< 5\,,\\ x &\geq 0\,,\\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) * Welches Gebiet im ersten Oktanden ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z\,,\\ x + z &\geq y\,,\\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Quadratische Gleichungen*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der pq-Formel.

(a) $x^2 - 10x + 9 = 0$

(b) $x^2 + x - 12 = 0$

(c) $x^2 - \sqrt{8}x + 1 = 0$

Aufgabe 2: *Wurzeln quadratischer Gleichungen*

(a) Stellen Sie $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.

(b) Bestimmen Sie in der Gleichung $5x^2 - kx + 1 = 0$ den Koeffizienten k so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.

(c) Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich p und q sind.

(d) Gegeben ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich

- dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung,
- den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung

sind.

Aufgabe 3: *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y.

(a) $$\begin{aligned} x + y^2 &= 7\,, \\ xy^2 &= 12 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x + xy + y &= 11\,, \\ x^2y + xy^2 &= 30 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{5}{2}xy\,, \\ x - y &= \frac{1}{4}xy \end{aligned}$$

Hinweis: Substitution $z_1 = xy$, $z_2 = x + y$ in Aufgabe (b).

Aufgabe 4: *Wurzelgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x.

(a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$

(b) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$

(c) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$

(d) $\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3$

(e) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1{,}5}=\dfrac{6}{\sqrt{2x-1}}$

Aufgabe 5: *Nullstellensuche*

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.

(a) $x^2+2x-15$

(b) $4x^2+8x-5$

(c) $ax^3+bx^2+adx^2+bdx$

(d) $(a-x)^2+(x-b)^2-a^2-b^2$

(e) $a\sqrt{8}x^2-2kax-3ak+ax\sqrt{18}$

Auffrischungskurs Mathematik

– ein Vorkurs für Studienanfänger –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades

Aufgabe 1: *Nullstellensuche*

(a) Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln a, b und c hat.

(b) Zerlegen Sie das Polynom $f_4(x) = x^3+2x^4+4x^2+2+x$ in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$.

(d) Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Setzen Sie näherungsweise $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 2: *Polynomdivision*

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Für welche Werte von n bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

(a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$

(b) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$

(c) $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2)$

(d) $(x^2 + 2x - 15) : (x + n)$

Aufgabe 3: *Kubische Gleichungen*

(a) Bestimmen Sie den Wert von m in der Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0\,,$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln.

(b) Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0\,.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von m und n, und geben Sie die dritte Wurzel an.

Aufgabe 4: *Nullstellenraten*

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor $(x - x_0)$ vom Polynom ab.

(a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

(b) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9$

(c) $x^4 - 3x^2 + 3x + 2$

(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung*

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a) $\dfrac{x-5}{x^2-2x-3}$

(b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(c) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

(d) $\dfrac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3}$

Aufgabe 6: *Polynome in Ungleichungen*

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) $(1+a+a^2)^2 < 3(1+a^2+a^4)\,,\quad$ für $\quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b) $x^4 - x^2 - 6x + 10 > 0\,,\quad$ für $\quad x \in \mathbb{R}$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ein Vorkurs für Studienanfänger –

WS 2023/24

Thema 5: Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

Aufgabe 1: *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

Lösen Sie jeweils für x bzw. y. Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

(a) $a2^x = \mathrm{e}^{bx}$

(b) $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)}$

(c) $\mathrm{e}^{3ax} - 2^{a+1}\mathrm{e}^{2ax} + 4^a\mathrm{e}^{ax} = \log_b(1)$

(d) $\sqrt[x^2-1]{a^3} \cdot \sqrt[2x-2]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-1}} = 1$

(e) $\log_a x + \log_a y = 2, \quad \log_b x - \log_b y = 4$

(f) $3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$

Aufgabe 2: *Verdopplungszeit*

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen A sei beschrieben durch

$$W(t) = A\mathrm{e}^{ct}, \qquad c > 0,$$

sodass $W(t)$ die „Menge“ an Wissen zur Zeit t gibt.

(a) Nach welcher Zeit τ_2 hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?

(b) Nach welcher Zeit τ_n hat das Wissen eines Studenten auf das n-Fache zugenommen?

(c) Drücken Sie τ_n als Vielfaches von τ_2 aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$? Welche Aussage können Sie für $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, treffen?

Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen*

Es seien die Funktionen

$$f(x) := \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x},$$
$$g(x) := \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$$

definiert.

(a) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(2x)$ und $g(2x)$ in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente, $f(x)$ und $g(x)$.

(b) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(x+y)$ und $g(x+y)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $f(y)$ sowie $g(x)$ und $g(y)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie $x = y$ setzen.

(c) Schreiben Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Reihendarstellung.

(d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von $g(x)$.

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 6: Trigonometrische Funktionen
Ebene Trigonometrie

Aufgabe 1: *Additionstheoreme*

(a) Leiten Sie das Additionstheorem für Kosinusfunktionen aus dem für Sinusfunktionen her.

$$\text{Es gilt:} \quad \sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

(b) Leiten Sie das Additionstheorem für Tangensfunktionen her,

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass für Doppelwinkelfunktionen gilt:

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\,,$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1\,.$

Aufgabe 2: *Trigonometrische Umformungen I*

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Identitäten.

(a) $\dfrac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

(b) $\dfrac{1 + \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \dfrac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

(c) $2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \cos(x) + \cos(y)$

(d) $\cot(\alpha)\cot(\beta) + \cot(\alpha)\cot(\gamma) + \cot(\beta)\cot(\gamma) = 1$ für $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Aufgabe 3: *Trigonometrische Umformungen II*

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass sie sich einfach logarithmieren lassen.

(a) $1 + \cos(\alpha) + \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, *Hinweis:* Es ist $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\,.$

(b) $\dfrac{2\sin(\beta) - \sin(2\beta)}{2\sin(\beta) + 2\sin(2\beta)}$

(c) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)$, für $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Aufgabe 4: *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und machen Sie jeweils die Probe.

(a) $\sin(x) + \cos(x) = 1$

(b) $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4}$

(c) $\sin(3x) = \cos(2x)$

(d) $a\big(3\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x)\big) - b\big(3\sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)\big) = 2a - b$

Hinweis: Formen Sie die Gleichungen so um, dass nach Möglichkeit nur noch eine Funktionsart auftritt.

Aufgabe 5: *Dreiecksfläche*

Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten a und b sowie die Länge w der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind.

Aufgabe 6: *Sehnen im Kreis*

Durch einen Punkt auf einem Kreis vom Radius r seien zwei Sehnen der Längen a und b gelegt. Wenn man die Schnittpunkte der Sehnen mit der Peripherie untereinander geradlinig verbindet, erhält man ein Dreieck. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt A.

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung
Kurvendiskussion

Aufgabe 1: *Ableitungen I*

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $Q(r) = \dfrac{3r^2}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{r}{r_0}\right)$

(b) $f(x) = \cos^4(3tx) - \sin^4(3tx)$

(c) $S(\tau) = (\tau - 1)\mathrm{e}\tau + \dfrac{\tau^2}{4}(2\ln\tau - 1)$

(d) $y(x) = \dfrac{\exp(2x)}{25}\left[(5x-4)\sin x + (10x-3)\cos x\right]$

(e) $F(x) = -\dfrac{k}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$

(f) $N(z) = \dfrac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{1+\cos(z)}}\left[\ln\left(\cos\dfrac{z}{4} + \sin\dfrac{z}{4}\right) - \ln\left(\cos\dfrac{z}{4} - \sin\dfrac{z}{4}\right)\right]$

Aufgabe 2: *Ableitungen II*

Finden Sie die n-te Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = x^n$

(b) $f(x) = \mathrm{e}kx + \mathrm{e}{-}kx$

(c) $f(x) = x^{n-1}$

(d) $f(x) = a^x$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(f)* $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

Aufgabe 3: *Kurvendiskussion I*

Ein zweiatomiges Molekül lässt sich näherungsweise durch das sogenannte "Morse-Potential" beschreiben,

$$U(x) = D(\mathrm{e}{-}2\alpha x - 2\mathrm{e}{-}\alpha x)\,, \qquad D, \alpha = \text{const}.$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(x)$ sowie deren Verhalten für $x \to \pm\infty$.
- Skizzieren Sie die Funktion $U(x)$ für $D = \alpha = 1$ im Intervall $x \in [-1, 5]$.

Aufgabe 4: *Kurvendiskussion II*

Die Bewegung eines Teilchens mit Drehimpuls L und Energie E in der gekrümmten Raumzeit eines Schwarzen Loches der Masse m wird beschrieben durch das Potential

$$U(r) = \frac{E}{2} - \frac{Em}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{mL^2}{r^3}, \qquad r > 0.$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(r)$ sowie deren Verhalten für $\to \infty$ und $\to 0$.
- Setzen Sie $m = \frac{1}{2}$. Welche Bedingungen an E und L müssen erfüllt sein, damit $U(r)$ zwei, ein oder keine lokalen Extrema besitzt?
- Skizzieren Sie die Funktion $U(r)$ für $E = 1$ und $L = 2$ (nicht maßstabsgerecht).

Aufgabe 5*: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

(a) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f''(x) = a^2 f(x) + bx.$$

(b) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) f(x).$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

Aufgabe 1: *Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift*

Eine Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 2a_n + 1\,, \qquad\qquad a_0 = 0\,.$$

Finden Sie einen expliziten Ausdruck für a_n und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2: *Vollständige Induktion I*

Beweisen Sie

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Aufgabe 3: *Vollständige Induktion II*

Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ist.

Aufgabe 4: *Vollständige Induktion III*

Zeigen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 5: *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Stellen Sie eine Summenformel für das Polynom

$$S_n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

auf und beweisen Sie deren Richtigkeit durch vollständige Induktion.

Aufgabe 6*: *Fibonacci-Zahlen I*

Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$ und die Startwerte

$a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Beweisen Sie, dass ein expliziter Ausdruck für die n-te Fibonacci-Zahl gegeben ist durch

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n\right)\,, \quad \text{mit} \quad x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Auffrischungskurs Mathematik

– ein Vorkurs für Studienanfänger –

WS 2023/24

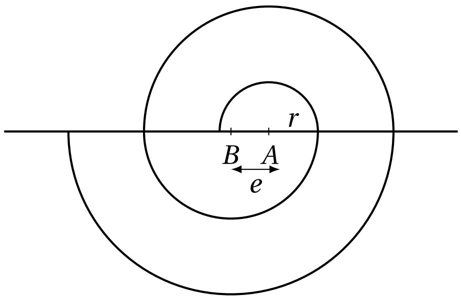
Thema 9: Arithmetische & geometrische Reihen
Der binomische Satz

Aufgabe 1: *Arithmetische Reihe*

Eine Spirale bestehe aus zwei Scharen konzentrischer Halbkreise um die Punkte A und B. Es sei r der Radius des innersten Halbkreises und die Strecke $\overline{AB} = e$.

(a) Wie lang ist der n-te Halbbogen?

(b) Wie lang ist der Gesamtbogen der Spirale bis dahin?



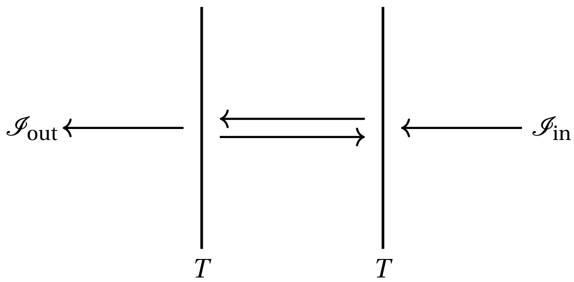
Aufgabe 2: *Geometrische Folge*

Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliert ein Lichtstrahl $\frac{1}{12}$ seiner Lichtstärke. Wie viele Platten muss er durchdringen, wenn er nur noch die Hälfte der ursprünglichen Lichtstärke besitzen soll?

Hinweis: Es genügt die Angabe des Ergebnisses in impliziter Form.

Aufgabe 3: *Geometrische Reihe*

Es sei eine Anordnung aus zwei Glasplatten gegeben, in die ein Laserstrahl der Intensität $\mathscr{I}_{\text{in}}$ eingeschossen werde. Jede Platte besitze einen Transmissionskoeffizienten T $(0 < T < 1)$, d.h. dass an jeder Platte von einem Lichtstrahl der Intensität $\mathscr{I}$ ein Anteil $T\mathscr{I}$ transmittiert und ein Anteil $(1-T)\mathscr{I}$ reflektiert wird. Bestimmen Sie die Intensität $\mathscr{I}_{\text{out}}$, mit der das Licht auf der anderen Seite der Anordnung austritt.



Aufgabe 4: *Der binomische Satz*

(a) Berechnen Sie $(1+a)^6 + (1-a)^6$.

(b) Schreiben Sie die allgemeine Binomialformel für $(1+x)^n$ und $(1-x)^n$ auf und setzen Sie anschließend $x = 1$. In letzterem Falle sei $n \geq 1$.

(c) Es seien die Funktionen $f(x) = (\mathrm{e}x + \mathrm{e}-x)/2$ und $g(x) = (\mathrm{e}x - \mathrm{e}-x)/2$ definiert. Finden Sie einen Ausdruck, der $f(nx) + g(nx)$, mit $n \in \mathbb{N}$, auf (Potenzen von) $f(x)$ und $g(x)$ zurückführt.

Aufgabe 5: *Erzeugende Funktion*

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = 2a_n + 1$ mit Anfangswert $a_0 = 0$ aus Aufgabe 1, Thema 8. Es sei eine (unbekannte) Funktion definiert als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

(a) Multiplizieren Sie beide Seiten der Rekursionsgleichung mit x^n, summieren Sie über n (von Null bis Unendlich) ab und versuchen Sie alle auftretenden Terme durch $f(x)$ auszudrücken. Lösen Sie für $f(x)$.

(b) Nutzen Sie Ihr Wissen über geometrische Reihen, um $f(x)$ wieder in Reihendarstellung zu überführen und lesen Sie die Koeffizienten vor x^n ab.

Aufgabe 6*: *Zustandssumme*

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\Omega_N = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \sum_{n_3=0}^{N} \cdots \sum_{n_k=0}^{N} f(n_1) f(n_2) f(n_3) \ldots f(n_k) \,, \quad \text{wobei} \quad f(n) = \mathrm{e}-n.$$

Bestimmen Sie anschließend den Grenzwert $\Omega = \lim\limits_{N\to\infty} (\Omega_N)$.

Aufgabe 7*: *Fibonacci-Zahlen II*

Wenden Sie das Verfahren aus Aufgabe 5 auf die Folge $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ der Fibonacci-Zahlen mit Startwerten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ an. Beachten Sie, dass hier $n \geq 1$ gelten muss.

Auffrischungskurs Mathematik

– ein Vorkurs für Studienanfänger –

WS 2023/24

Thema 10: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1: *Linear (un)abhängige Vektoren*

(a) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Für welche Werte von t befinden sich die folgenden Vektoren in einer Ebene?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: *Skalarprodukt und Vektorprodukt*

(a) Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5a+6 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c) Nutzen Sie das Skalarprodukt, um den Kosinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

(d) Nutzen Sie das Vektorprodukt, um den Sinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

Aufgabe 3: *Matrizen*

(a) Bilden Sie – falls möglich – die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Berechnen Sie $A \cdot B - B \cdot A$.

(c) Welche Bedingungen müssen die Einträge m_i einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

erfüllen, damit $|M \cdot \vec{v}| = |\vec{v}|$ für einen beliebigen zweikomponentigen Vektor $\vec{v}$ gilt?

Aufgabe 4: *Laplace'scher Entwicklungssatz*

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix. Für welche Werte von a ist die Matrix nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ -a & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{u}$ zweier Vektoren $\quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

lässt sich auch als Matrixmultiplikation $\Omega \cdot \vec{u}$ mit einer (3×3)-Matrix Ω mit den Einträgen $\pm\omega_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ schreiben. Wie sieht Ω aus? Welche Eigenschaften hat es (Determinante, Spur, Symmetrie)?

Aufgabe 6*: *Höhere Dimensionen*

Im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ kann jede beliebige Drehung in Drehungen um die x-, die y- und die z-Achse zerlegt werden, d.h. man benötigt genau drei linear unabhängige Drehmatrizen für eine solche Zerlegung. Wie viele linear unabhängige Drehmatrizen benötigt man im d-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$?

Aufgabe 7*: *Diskreter Laplace-Operator*

Gegeben sei die $(n \times n)$-Matrix Δ_n, welche die Einträge -2 auf der Haupt- und 1 auf den beiden Nebendiagonalen hat,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante von Δ_n , indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Finden Sie eine Rekursionsrelation, die $\det(\Delta_n)$ auf $\det(\Delta_{n-1})$ und $\det(\Delta_{n-2})$ zurückführt.

2. Raten Sie einen allgemeinen Ausdruck für $\det(\Delta_n)$ und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion. Alternativ kann der Versuch unternommen werden, das Verfahren aus Thema 9, Aufgabe 5 anzuwenden.