Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Vorbereitung der Übung: Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Aufgabe 1: *Bruchrechnung* Ziel: (a) bis (f)

(a) $$\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = \underline{\underline{b-a}}$$

(b) $$\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a + \cancel{b} + a - \cancel{b}}{\cancel{a} + b - \cancel{a} + b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

(c) $$\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}\left(\frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2 - y^2}{x+y}\right) = \frac{x-y}{\cancel{x}}\underbrace{\left(\frac{x+y}{y} - 1\right)}_{\frac{\cancel{x}}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

(d) $$\frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

(e) $$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

(f) $$\frac{a^2-1}{a^2+a} - \cancel{a}\frac{a+1}{a^{\cancel{3}2}-\cancel{a}} + \frac{1}{a} + \frac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$$
$$= \frac{1}{a}\frac{(\cancel{a+1})(a-\cancel{1})}{\cancel{a+1}} - \frac{\cancel{a+1}}{(\cancel{a+1})(a-1)} + \cancel{\frac{1}{a}} + \frac{\cancel{4a+4}}{\cancel{4(a+1)}(a-1)} = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \underline{\underline{1}}$$

(g) $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\frac{\sqrt{2}}{ax} - \frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right] \text{ für } x = \frac{1}{a-1}$$
$$= \frac{a+x+1}{a+x-1}\left[\frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2}\right] = \frac{a+x+1}{\cancel{a+x-1}}\frac{\overbrace{(a+x)^2-1}^{(a+x+1)(\cancel{a+x-1})}}{\sqrt{2}a^2x^2} = \underbrace{\frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2}}_{x+a+1=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}}$$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze* Ziel: (a) bis (c)

(a) $$\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n = \frac{(a+b)^n\cancel{(a-b)^n}}{\cancel{(x+y)^n}(x-y)^n}\frac{\cancel{(x+y)^n}}{\cancel{(a-b)^n}} = \underline{\underline{\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n}}$$

(b) $$\frac{b^x c^y (ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0,5}\right)^z\right]^2} = a^{2z+y-(y-x+2z)}b^{x+2z+y-x-2z}c^{y-x-(y-x-z)} = \underline{\underline{a^x b^y c^z}}$$

(c) $$\frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}} = a^{1-n+4n-3+4-3n}b^{-1-2n+5+3n-6}(a+b)^{3n-4+3-2n-n+2}$$
$$= \underline{\underline{a^2b^{n-2}(a+b)}}$$

(d) $$\left(a^{n+2}-a^n\right):(a^3+a^2) = \frac{a^n}{a^2}\frac{a^2-1}{a+1} = \underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}}$$

(e) $$\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^3 = a^{-8-6}b^{-10-9}x^{2+3}y^{-6-6} = \underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}}}$$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken* Ziel: (a) bis (b)

Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\quad \sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b},\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n}=\sqrt[pq]{a^{mq+np}},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}}=\sqrt[pq]{a^{mq-np}}$$

Beispiel für “Rationalmachen des Nenners”:

$$r+\sqrt{1+r^2}-\frac{1}{r+\sqrt{1+r^2}}=r+\cancel{1+r^2}-\frac{r-\sqrt{1+r^2}}{-1}=\underline{\underline{2r}}.$$

(a) $$\sqrt[6]{a^3}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab}=\frac{1-\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{ab}}{1-ab}=\frac{(1-\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}}{1-ab}=\frac{1+ab}{\underline{\underline{1-ab}}}$$

(b) $$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}\quad \text{für } x=\frac{2am}{b(1+m^2)}\quad \text{mit } |m|<1$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}\right)^2}{2bx}=\frac{\cancel{2}a+\cancel{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}}{\cancel{2}bx}=\frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4a^2m^2}{(1+m^2)^2}}}{2am}(1+m^2)$$

$$=\frac{1+m^2+\sqrt{(1+m^2)^2-4m^2}}{2m}=\frac{1+m^2+1-m^2}{2m}=\frac{1}{\underline{\underline{m}}}$$

(c) $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{a\sqrt{b}+\cancel{b\sqrt{a}}-\cancel{\sqrt{a}}b}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\,\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt[4]{b}\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}$$

$$=\underline{\underline{a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}}$$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

(a)
$$(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$$
$$\cancel{(m^2-n^2)x^2}+(bn-an+bm-am)x=\cancel{x^2(m^2-n^2)}-1$$
$$(a-b)(m+n)x=1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{1}{(a-b)(m+n)}}}$$

(b)
$$\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2} \qquad |\cdot b(a^2-b^2)$$
$$(ax+b)(a+b)-(a-bx)(a-b)=2b(ax+b)$$
$$(ax+b)\cancel{(a-b)}-(a-bx)\cancel{a-b}=0 \qquad (a\neq b)$$
$$(a+b)x=a-b \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{a-b}{a+b}}}$$

(c)
$$\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{\underbrace{n^4-1}_{n^4-1=(n^2+1)(n+1)(n-1)}}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n} \qquad |\cdot(n-1)(n+1)$$
$$\left(\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)\right)x=\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)$$
$$4x=3 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{3}{4}}}.$$

(d)
$$a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$$
$$\cancel{a-b-1}\sqrt{x}=a^2-b^2-(a+b)=(a+b)\cancel{(a-b-1)} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=(a+b)^2}}$$

(e)
$$\frac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\frac{y^2}{1-2y}}, \quad \text{siehe 1b) mit } a=x, b=\sqrt{1-4y^2}$$
$$\frac{x}{\cancel{\sqrt{1-4y^2}}}=\frac{|y+1|}{\cancel{\sqrt{1+2y}}}\frac{|y-1|}{\cancel{\sqrt{1-2y}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \underline{\underline{x=y^2-1}} & \text{für} \quad |y|\geq 1 \\ \underline{\underline{x=1-y^2}} & \text{für} \quad |y|<1. \end{cases}$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Tafelbeispiel: $\dfrac{10(x+y)+3}{x-2y+4}=1, \quad \dfrac{36x-3y}{7(x-y)+3}=3$

1. Sortieren nach x und y

$$\begin{aligned} 9x+12y&=1 \quad (1)\\ 15x+18y&=9 \quad (2) \end{aligned}$$

2. Prüfe auf lineare Unabhängigkeit, d. h. Berechne $a_1b_2-a_2b_1$ (Determinante, vgl. Vorlesung):

$$9\cdot 18-15\cdot 12=162-180\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{genau ein Lösungspaar } (x,y)$$

3. Lösen, bspw. durch geschickte Linearkombination (Elimination von y)

$$\begin{aligned} 2\cdot(2)-3\cdot(1): &\quad 3x= \;\; 15 \quad \Rightarrow x=5\\ \text{in}\quad (1): &\quad 12y=-44 \quad \Rightarrow y=-\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lösungsmenge} \quad \mathbb{L}=\left\{\left(5;-\frac{11}{3}\right)\right\}$$

Aufgabe 1: *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten* Ziel (a) bis (d)

(a)

$$\begin{aligned} 33x+12y&=25 \quad (1)\\ 11x-\;\;3y&=\;\;6 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1)-3\cdot(2): \quad 21y=7 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}, \quad \text{in (2):} \quad x=\frac{7}{11} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}=\left\{\left(\frac{7}{11};\frac{1}{3}\right)\right\}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3y}{3x-y}&=\frac{17}{9}\\ \frac{3x+4y}{6x-1}&=2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x-4y&=0 \quad (1)\\ 9x-4y&=2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1)-(2): \quad 6x=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{3}$$

$$3\cdot(1)-(2): \quad 8y=2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{aligned}\frac{x+2}{y+3}&=\frac{1}{3}\\ \frac{y+3}{2y-5x}&=\frac{3}{5}\end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\begin{aligned}3x-y&=-3\quad(1)\\ 15x-y&=-15\quad(2)\end{aligned}$$

$$(1)-(2):\quad -12x=12\quad\Rightarrow\quad x=-1$$

$$\text{in }(1):\quad y=0\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(-1;0)\}}}$$

(d) $ax+by=2a\,,\qquad \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=\dfrac{2}{a}$

(e) $x+14y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-7\sqrt{2}\,,\qquad 3\sqrt{2}x-\dfrac{y}{\sqrt{3}}=3+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(f) $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b\,,\qquad \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2b$

(g) $39x-38y=1\,,\qquad 91x-57y=4$

Aufgabe 2: *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten*

(a)
$$\begin{aligned}x-y+5z&=5\,,\\ 3x+7y-5z&=5\,,\\ x+y-z&=1\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}3x-4y+3z&=4\,,\\ -x+y-z&=-2\,,\\ 7x+4y-5z&=0\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}x+y&=b+a\,,\\ x+z&=a+c\,,\\ y+z&=c+b\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}6x-4y+8z&=0\,,\\ -2x+y-z&=0\,,\\ 12x-7y+11z&=0\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *Parametrisierung von Lösungsmengen*

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x - 7y = 1$ an für

(a) $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $x, y \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y.

(a)
$$x^2 + y^2 = 2(xy + 2)\,,\qquad x + y = 6$$

(b)
$$\frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5\,,\qquad \frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6$$

(c)
$$\frac{x^2 - y^2}{2x+3} + y^2 = (x+y)x - xy\,,\qquad y - 2x = 3$$

Aufgabe 5: *Ungleichungssysteme*

(a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6\,, \\ x - 2y &< 11\,, \\ x &> -y - 1\,, \\ x &< 5\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) * Welches Gebiet im ersten Oktanden ($x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z\,, \\ x + z &\geq y\,, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$