FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT

WINTERSEMESTER 2023/24

Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

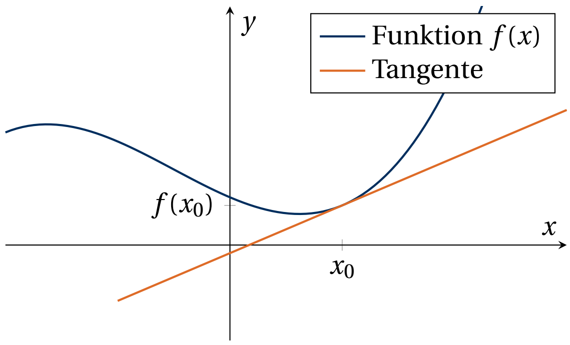
MARTIN BEYER

LaTeX-Satz und Design von Martin Beyer

Inhaltsverzeichnis

8 Grundlagen der Differentialrechnung (Ableiten)

Wir möchten in diesem Kapitel die Frage stellen, wie man den Anstieg einer beliebigen Funktion $f(x)$ an einem Punkt $x = x_0$ bestimmen kann. Dabei meinen wir den Anstieg der Geraden, die am Punkt x_0 als Tangente angelegt wird. Da das in jedem beliebigen Punkt $x = x_0$ möglich ist, ist der Anstieg selbst wieder eine Funktion von x die wir Ableitung $f'(x)$ nennen wollen.



Konstruktion der Ableitung

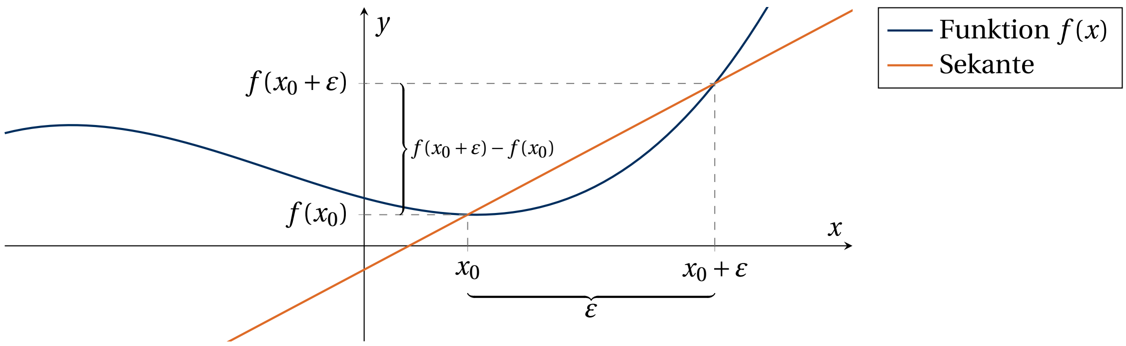


Abb. 9: Für die Konstruktion der Ableitung am Punkt x_0 legen wir zunächst eine Sekante des Graphen durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und einen Punkt $(x_0+\varepsilon, f(x_0+\varepsilon))$ und bilden anschließend den Grenzwert $\varepsilon \to 0$.

Wir definieren die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}. \tag{8.1}$$

Wir können die erhaltene Ableitungsfunktion erneut ableiten und erhalten damit die zweite Ableitung. Für Ableitungen n-ter Ordnung schreiben wir schließlich

$$\begin{aligned}
&\text{1. Ableitung:} && f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(x)\\
&\text{2. Ableitung:} && f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\\
&\text{n. Ableitung:} && f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Ableitungen spezieller Funktionen sind zum Beispiel

$$\begin{aligned}
f(x) = a = \text{const.} \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a) = 0,\\
f(x) = x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x+\varepsilon)-x}{\varepsilon} = 1.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

8.1 Allgemeine Eigenschaften

Der Operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ weißt bestimmte Eigenschaften auf, die wir als Ableitungsregeln bezeichnen:

- Linearität: $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(af(x) + bg(x)\big) = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{8.4}$$

- Produktregel (Leibniz-Regel):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}. \tag{8.5}$$

- Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right)(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\overbrace{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}^{\text{innere Ableitung}}. \tag{8.6}$$

- Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x)^2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right). \tag{8.7}$$

- Potenzregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^n\big) = n\,x^{n-1} \quad\Rightarrow\quad \text{insbesondere: } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}. \tag{8.8}$$

Wenden wir einige dieser Regeln mal an einem praktischen Beispiel an:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\cdot g(x) + 7h(y(x)) + \frac{x^2}{j(x)} \quad \text{mit} \quad y(x) = ax + b\\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) + x\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}_{\text{Produktregel}} + 7\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\right)(y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{\text{Kettenregel}} + \underbrace{\frac{2xj(x) - x^2\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}}{j(x)^2}}_{\text{Quotientenregel}}\\
&= g(x) + x\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + 7a\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\right)(y) + \frac{2xj(x) - x^2\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}}{j(x)^2}.
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Wichtig ist es, bei der Kettenregel nach der richtigen Variable abzuleiten, d. h. wir müssen $h(y)$ nach dem Argument $y = ax + b$ ableiten und nicht nach x.

Tabelle 4

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^n
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

8.2 Ableitungen spezieller Funktionen

Wir wollen im Folgenden eine Liste von häufig verwendeten Funktionen und deren Ableitungen angeben.