Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Aufgabe 1: *Bruchrechnung*

(a) $b-a$

(b) $\frac{a}{b}$

(c) $\frac{x}{y}-1$

(d) $\frac{n^2}{n-1}$

(e) $\frac{x+y}{x-y}$

(f) 1

(g) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze*

(a) $\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n$

(b) $a^x b^y c^z$

(c) $(a+b)a^2 b^{n-2}$

(d) $(a-1)a^{n-2}$

(e) $\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken*

(a) $\frac{1+ab}{1-ab}$

(b) $\frac{1}{m}$

(c) $a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen*

(a) $x=\frac{1}{(a-b)(m+n)}$

(b) $x=\frac{a-b}{a+b}$

(c) $x=\frac{3}{4}$

(d) $x=(a+b)^2$

(e) $x=\left|y^2-1\right|$

Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten*

(a) $\{(x;y)\} = \left\{\left(\frac{7}{11};\frac{1}{3}\right)\right\}$

(b) $\{(x;y)\} = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)\right\}$

(c) $\{(x;y)\} = \{(-1;0)\}$

(d) $\{(x;y)\} = \left\{\left(\frac{b}{a}+1;\frac{a}{b}-1\right)\right\}$

(e) $\{(x;y)\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

(f) $\{(x;y)\} = \{(a(a+b);b(a-b))\}$

(g) $\{(x;y)\} = \left\{\left(\frac{1}{13};\frac{1}{19}\right)\right\}$

Aufgabe 2: *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten*

(a) $\{(x;y;z)\} = \{(1;1;1)\}$

(b) $\{(x;y;z)\} = \{(1;2;3)\}$

(c) $\{(x;y;z)\} = \{(a;b;c)\}$

(d) $\{(x;y;z)\} = \{(2z;5z;z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3: *Parametrisierung von Lösungsmengen*

(a) $\{(x;y)\} = \left\{\left(\frac{1+7\lambda}{13};\lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $\{(x;y)\} = \{(6+7n;11+13n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Aufgabe 4: *Gleichungssysteme*

(a) $\{(x;y)\} = \{(2;4),(4;2)\}$

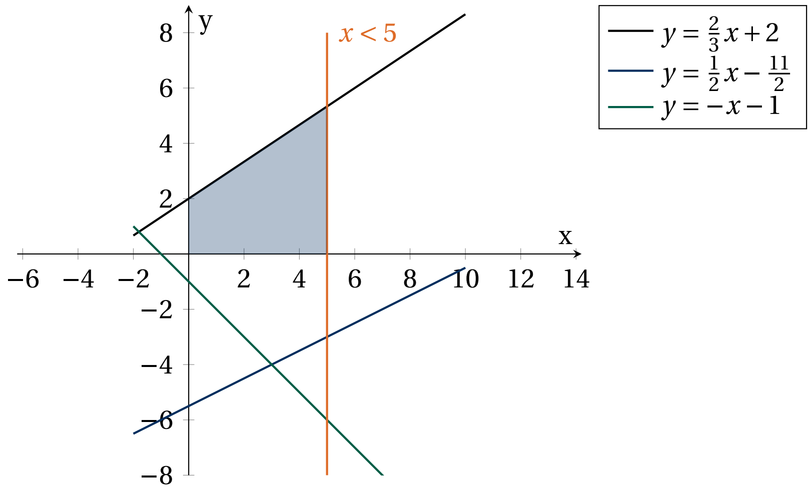
(b) $\{(x;y)\} = \{(17;6)\}$

(c) $\{(x;y)\} = \{(-3;-3),(-1;1)\}$

Aufgabe 5: *Ungleichungssysteme*

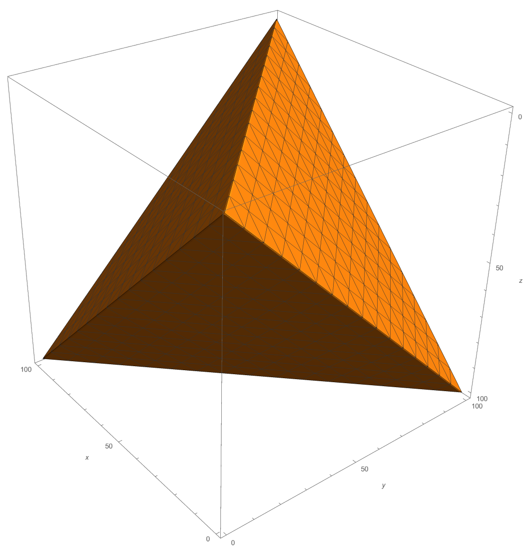
(a)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6\,, \\ x - 2y &< 11\,, \\ x &> -y - 1\,, \\ x &< 5\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$



Offenbar können die zweite und dritte Ungleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am eingefärbten Gebiet ändert.

(b) Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige, unendlich ausgedehnte Pyramide, deren Spitze im Koordinatenursprung sitzt und deren Seiten jeweils die x-y-, x-z- und y-z-Ebene halbieren.



AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Quadratische Gleichungen*

(a) $x_1 = 9\,;\ x_2 = 1$

(b) $x_1 = 3\,;\ x_2 = -4$

(c) $x_{1/2} = \pm 1 + \sqrt{2}$

Aufgabe 2: *Wurzeln quadratischer Gleichungen*

(a) Faktoren $x = \dfrac{a}{b} - 1$ und $y = \dfrac{b}{a} + 1$

(b) $k = \pm 3\sqrt{5}$

(c) $\{(p\,;q)\} = \{(0;0)\,,(1;-2)\}$

(d)
- $ax^2 + 2bx + 4c = 0$
- $cx^2 + bx + a = 0$

Aufgabe 3: *Gleichungssysteme*

(a) $\{x\,;y)\} = \{(4\,;\pm\sqrt{3})\,,(3\,;\pm 2)\}$

(b) $\{(x\,;y)\} = \{(1;5)\,,(5;1)\,,(2;3)\,,(3;2)\}$

(c) $\{(x\,;y)\} = \{(0;0)\,,(-2;-4)\,,(4;2)\}$

Aufgabe 4: *Wurzelgleichungen*

(a) $x_1 = 1\,,\ x_2 = 5$

(b) $x = \dfrac{(a-1)^2}{4}$, wobei $a \geq 1$; falls $a = 0$: $x = 0$

(c) $x = 0$, wobei $a \geq 0, b \geq 0$

(d) $x = 4$

(e) $x = \dfrac{5}{2}$

Aufgabe 5: *Nullstellensuche*

(a) $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$

(b) $4x^2 + 8x - 5 = (2x+5)(2x-1)$

(c) $ax^3 + bx^2 + adx^2 + bdx = x(ax+b)(x+d)$

(d) $(a-x)^2 + (x-b)^2 - a^2 - b^2 = 2x(x-a-b)$

(e) $a\sqrt{8}x^2 - 2kax - 3ak + ax\sqrt{18} = a(2x+3)(\sqrt{2}x - k)$

Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades
Das Summenzeichen

Aufgabe 1: *Nullstellensuche*

(a) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$

(b) $x^3+2x^4+4x^2+2+x=(x^2+1)(2x^2+x+2)$, keine (reellen) Nullstellen

(c) $x_1=0, \quad x_{2/3}=\pm\sqrt{2}, \quad x_{4/5}=\pm 1$

(d) $x_0 \approx \dfrac{\pi}{2}$

Aufgabe 2: *Polynomdivision*

(a) $(21a^3-34a^2b+25b^3):(7a+5b)=3a^2-7ab+5b^2$

(b) $(9x^3-7xy^2+2y^3):(3x-2y)=3x^2+2xy-y^2$

(c) $(25x^4+a^2x^2+25a^4):(5x^2+7ax+5a^2)=5x^2-7ax+5a^2$

(d) $n=5$ oder $n=-3$, da $(x^2+2x-15)=(x+5)(x-3)$

Aufgabe 3: *Kubische Gleichungen*

(a) $m=12$, $x_2=\dfrac{2}{3}$, $x_3=-\dfrac{3}{2}$

(b) $m=-5$, $n=30$, $x_3=-\dfrac{5}{2}$

Aufgabe 4: *Nullstellenraten*

(a) $x_0=1$ oder $x_0=2 \;\Rightarrow\; x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x^2-4x+4)=(x-1)(x-2)^2$

(b) $x_0=-3 \;\Rightarrow\; x^4-2x^3-13x^2+9x+9=(x+3)(x^3-5x^2+2x+3)$

(c) $x_0=-2 \;\Rightarrow\; x^4-3x^2+3x+2=(x+2)(x^3-2x^2+x+1)$

(d) $x_0=1 \;\Rightarrow\; x^5-x^4-3x^3+3x^2+x-1=(x-1)(x^4-3x^2+1)$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung*

(a) $$\frac{x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-3)}$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

(c) $$\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

(d) $$\frac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3} = 2x^2+1+\frac{\sqrt{2}}{x-3} - \frac{5}{x+1}$$

Aufgabe 6: *Summen*

(a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(c) $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 5: Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

Aufgabe 1: *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

(a) $x = \dfrac{\ln(a)}{b - \ln(2)}$ für $b \neq \ln(2)$ und $a > 0$;

falls $b = \ln(2)$: $a \neq 1$: keine Lsg.
$a = 1$: $x \in \mathbb{R}$

(b) $x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

(c) $x = \ln(2)$, wobei $b \neq 0$ und $b \neq 1$

(d) $x_1 = 5,\ x_2 = -3$ für $a \neq 1$ und $a > 0$;
$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ für $a = 1$

(e) $(x, y) = (ab^2, \frac{a}{b^2})$ für $a > 0$;
$(x, y) = (-ab^2, -\frac{a}{b^2})$ für $a < 0$
in beiden Fällen $a, b \neq 1$ und $b \neq 0$

(f) $x_1 = a^{\frac{4}{3}}$, $x_2 = a$, wobei $a > 0$

Aufgabe 2: *Verdopplungszeit*

(a) $\tau_2 = \dfrac{\ln(2)}{c}$

(b) $\tau_n = \dfrac{\ln(n)}{c}$

(c) $\tau_n = \log_2(n) \cdot \tau_2$,
$\tau_3 \approx 1{,}58 \cdot \tau_{,}$
$\tau_4 = 2 \cdot \tau_2$,
$\tau_{2^m} = m \cdot \tau_2$

Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen*

(a) $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$,
$g(2x) = 2f(x)g(x)$

(b) $f(x+y) = \big(f(x)f(y) + g(x)g(y)\big)$,
$g(x+y) = \big(f(x)g(y) + g(x)f(y)\big)$
Für den Vergleich mit (a): $y = x$, und verwende $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$

(c) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,
$g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(d) $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 6: Trigonometrische Funktionen
Ebene Trigonometrie

Aufgabe 1: *Additionstheoreme*

(a)
$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \sin\left(x \pm y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x \pm z^{\pm}), \qquad z^{\pm} \equiv y \pm \frac{\pi}{2} \\ &= \sin(x)\cos(z^{\pm}) \pm \cos(x)\sin(z^{\pm}) \\ &= \sin(x)\underbrace{\cos\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\mp\sin(y)} \pm \cos(x)\underbrace{\sin\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\pm\cos(y)} \\ &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\tan(x \pm y) &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)} = \frac{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \pm \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\left(1 \mp \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)} \\ &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}\end{aligned}$$

(c)
- $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} = 2\cos^2(x) - 1$

Aufgabe 2: *Trigonometrische Umformungen I*

(a)
$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \qquad \square$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} &= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{(\cos\alpha + \sin\alpha)}(\cos\alpha - \sin\alpha)} \overset{(a)}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \frac{\cancel{\cos(\alpha)}}{\cancel{\cos(\alpha)}}\frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) &= 2\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2} - \underbrace{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}_{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{y}{2}\right)}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 1\right) \\ &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{y}{2} - 1 \overset{(1c)}{=} \cos(x) + \cos(y)\end{aligned}$$

(d) $$\cot\alpha\cot\beta+\cot\alpha\cot\gamma+\cot\beta\cot\gamma=\frac{\overbrace{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta}^{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)}+\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)+\sin\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin\gamma]}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}+1=1 \qquad \square$$

Aufgabe 3: *Trigonometrische Umformungen II*

(a) $$1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

(b) $$\frac{2\sin\beta-\sin(2\beta)}{2\sin\beta+2\sin(2\beta)}=\frac{\sin^2(\beta/2)}{2\cos(\beta/2+\pi/6)\cos(\beta/2-\pi/6)}$$

(c) $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$$

Aufgabe 4: *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme*

(a) $x_1=2\pi k,\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ mit $k\in\mathbb{Z}$

(b) $\cos x=\cos y=\dfrac{1}{2}$

(c) $\sin(x_1)=1$ und $\sin(x_{2/3})=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

(d) $a+b\neq 0$: $\tan(x_1)=1$ und $\tan(x_2)=-\dfrac{1}{2}$
$a+b=0$: $x\in\mathbb{R}$

Aufgabe 5: *Dreiecksfläche*

$$A=\frac{w(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-w^2(a+b)^2}$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung
Kurvendiskussion

Aufgabe 1: *Ableitungen I*

(a) $Q'(r) = 3r\left(1 + \ln\frac{r}{r_0}\right)$

(b) $f'(x) = -12t\sin(3tx)\cos(3tx)$

(c) $S'(\tau) = \tau\left(\mathrm{e}^{\tau} + \ln\tau\right)$

(d) $y'(x) = x\cos(x)\mathrm{e}^{2x}$

(e) $F'(x) = \dfrac{k(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^{\,3}}$

(f) $N'(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos(z)}}$

Aufgabe 2: *Ableitungen II*

(a) $f^{(n)}(x) = n!$

(b) $f^{(n)}(x) = k^n\left(\mathrm{e}^{kx} + (-1)^n\mathrm{e}^{-kx}\right)$

(c) $f^{(n)}(x) = 0$

(d) $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n\, a^x$

(e) $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

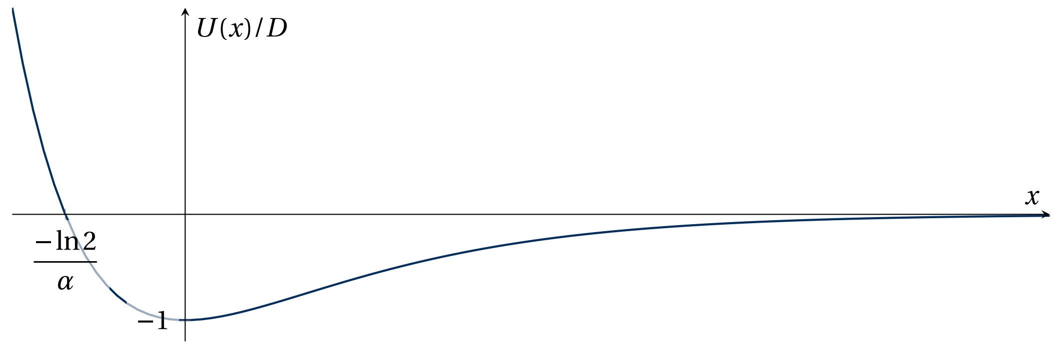
(f) * $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}n!}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{x_1^n}{(1+x_1x)^{n+1}} - \dfrac{x_2^n}{(1+x_2x)^{n+1}}\right)$, wobei $x_{1/2}$ die Nullstellen des Nenners bezeichnen.

Aufgabe 3: *Kurvendiskussion I*

- Nullstelle: $x_0 = -\dfrac{\ln 2}{\alpha}$

  Extremum: $x = 0$, $U(x=0) = -D$

  Asymptotik: $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} U(x) = 0$

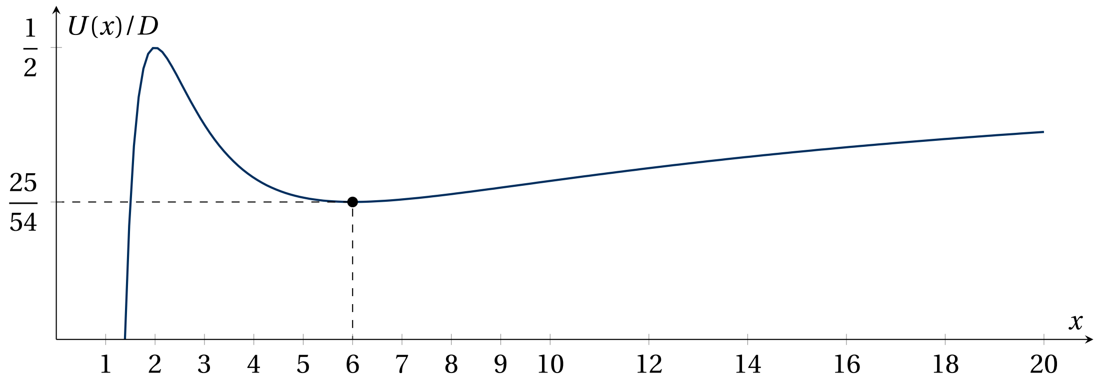


Aufgabe 4: *Kurvendiskussion II*

- Nullstelle: $r_0 = 2m$

  Extrema: $r_{1/2} = \dfrac{L^2}{2Em}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{12Em^2}{L^2}}\right)$

  Asymptotik: $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = \dfrac{E}{2}$, $\lim\limits_{r\to 0} U(r) = -\infty$



Aufgabe 5: *Gewöhnliche Differentialgleichung* (Zusatzaufgabe)

(a) allgemeinste Lösung: $f(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} - \dfrac{b}{a^2}x$ mit Konstanten $c_{1/2}$

(b) allgemeinste Lösung: $f(x) = c\,x^x$ mit Konstante c

Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

Aufgabe 1: *Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift*

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15 \quad \Rightarrow \quad$ Vermutung: $\quad a_n = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) = 2^{k+1} - 1.$

□

Aufgabe 2: *Vollständige Induktion I* $\quad S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = (-1)^{k-1} \dfrac{k(k+1)}{2}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = (-1)^k \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Beweis.
$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2$$
$$= (-1)^k (k+1) \left[\frac{(-1)^{-1} k}{2} + (k+1) \right] = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.$$

□

Aufgabe 3: *Vollständige Induktion II* $\quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = \left[\dfrac{k(k+1)}{2} \right]^2$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = \left[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$

Beweis.
$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 \left[k^2 + 4(k+1) \right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

□

Aufgabe 4: *Vollständige Induktion III* $\quad S_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3, \quad S_n = 9m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 0 + 1^3 + 2^3 = 9. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3, \quad S_k = 9m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3, \quad S_k = 9m' \quad \text{mit} \quad m' \in \mathbb{N}$

Beweis.

$$S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{S_n} + (k+2)^3 - (k-1)^3$$
$$= 9m + (k+2)^3 - (k-1)^3 = 9m + 9(k^2+k+1) = 9m' \text{ mit } m' = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{N}$$

□

Aufgabe 5: *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Vermutung: $S_n = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1 - x. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots((k-x)(k+1-x)}{(k+1)!}$

Beweis.

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!} + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(k+1)!}\Big[(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k+1) + (-1)^{k+1}(-1)^k x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)\Big] \\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}\underbrace{\left[\frac{k+1}{k-x+1} + (-1)^{2k+1}\frac{x}{k-x+1}\right]}_{1} \\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6: *Fibonacci-Zahlen* $\quad a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n\right) \quad \text{mit} \quad x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Zusatzaufgabe)

(IA) $\quad n = 0: \quad a_0 = 0, a_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad a_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^k - x_-^k\right)$

(IB) $\quad n = k+1: \quad a_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{k+1} - x_-^{k+1}\right)$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} = a_n + a_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n + x_+^{n-1} - x_-^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)}_{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}_{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{n+1} - x_-^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 9: Arithmetische & geometrische Reihen
Der binomische Satz

Aufgabe 1: *Arithmetische Reihe*

$$L_n = \pi r + \pi e(n-1), \quad n = 1,2,3,\ldots$$
$$\Rightarrow \quad S_n = n\pi r + \pi e \sum_{k=1}^{n}(k-1) = \pi n\left(r + e\frac{n-1}{2}\right)$$

Aufgabe 2: *Geometrische Folge*

$$L_n = \left(\frac{11}{12}\right)^n L_0 \overset{!}{=} \frac{1}{2}L_0 \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\ln(1/2)}{\ln(11/12)} \approx 7{,}97$$

Der Lichtstrahl muss 8 Platten durchdringen.

Aufgabe 3: *Geometrische Reihe*

$$I_{\text{out}} = \frac{T}{2-T} I_{\text{in}}$$

Aufgabe 4: *Der binomische Satz*

(a) $2a^6 + 30a^4 + 30a^2 + 2$

(b) $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ und $0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ für $n \geq 1$

(c) $f(nx) + g(nx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f(x)^k g(x)^{n-k}$

Aufgabe 5: *Erzeugende Funktion*

1. $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$
2. $a_n = 2^n - 1$

Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 10: Integralrechnung

Aufgabe 1: *Stammfunktionen*

(a) $F(x) = -\dfrac{\cos(2x+5)}{2} + C$

(b) $F(x) = \ln(kx+1) + C$

(c) $F(x) = \ln(\sin x) + C$

(d) $F(x) = \dfrac{a\ln(\sin x) + bx}{c} + C$

(e) $F(x) = x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + C$

(f) $F(x) = -\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$

Aufgabe 2: *Partielle Integration*

(a) π

(b) $6 - 2e$

(c) $\left(\dfrac{3}{4} + 2\ln 2\right) r_0^2$

(d) $\dfrac{\ln^2(x)}{2} + C$

Aufgabe 3: *Substitutionen*

(a) $\dfrac{\pi}{4}$

(b) $\sqrt{\pi}$

Aufgabe 4: *Vollständige Induktion*

(IA) $\quad n = 0: \quad 0! = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad k! = \int\limits_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(IB) $\quad n = k+1: \quad (k+1)! = \int\limits_0^\infty x^{k+1} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$

Beweis. $\displaystyle \int\limits_0^\infty x^{(k+1)} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\left(-x^{k+1}\mathrm{e}^{-x}\right|_0^\infty}_{=0} + (k+1) \underbrace{\int\limits_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x}_{k!} = (k+1)k! = (k+1)!$

$\square$

Aufgabe 4: *Flächenintegral*

$$\frac{A}{4} = \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y = R \int\limits_0^R \mathrm{d}x \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \overset{(z=x/R)}{=} R^2 \int\limits_0^1 \mathrm{d}z \sqrt{1-z^2} \overset{\text{Aufg. 3}}{=} \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \pi R^2}}$$

Aufgabe 5: *Volumenintegral*

$$V = ab\left(h_0 + y_0 - \frac{b^2}{12}\right) + a \sin(b)$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Kurzlösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2023/24

Thema 10: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1: *Linear (un)abhängige Vektoren*

(a) linear unabhängig

(b) $t = 6$

Aufgabe 2: *Skalarprodukt und Kreuzprodukt*

(a) 59, 2, 0

(b)
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}17\\-7\\-2\end{pmatrix}$$

(c)
$$|\vec{c}\,| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})}}$$

(d) Die drei Vektoren der Seiten eines Dreiecks spannen jeweils paarweise dasselbe Parallelogramm auf.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}\times\vec{c}\,| = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| \quad \Rightarrow \quad ab\sin\gamma = ac\sin\beta = bc\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}}$$

Aufgabe 3: *Matrizen*

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$, $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1/3\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$, $\quad \det C = 0 \;\rightarrow\;$ nicht invertierbar

(b) $3\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

(c) nette Parametrisierung: $m_{1/4} = \cos\phi$, $m_{2/3} = \mp\sin\phi$

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_3^2 &= 1\\ m_1 m_2 + m_3 m_4 &= 0\\ m_2^2 + m_4^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *Laplace'scher Entwicklungssatz*

$$\det A = 8a^2 + 24a + 18, \quad \text{nicht invertierbar für } a = -\frac{3}{2}$$

Aufgabe 5: *Kreuzprodukt*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det\Omega = 0, \quad \mathrm{tr}(\Omega) = 0, \quad \text{antisymmetrisch: } \Omega^\top = -\Omega$$

Aufgabe 6*: *Höhere Dimensionen*

In d Dimensionen gibt es d kartesische Achsen $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Um jede Achse kann in Richtung der verbleibenden $d-1$ Achsen gedreht werden, sodass $d(d-1)$ Möglichkeiten vorliegen. Allerdings wurde doppelt gezählt, da die Drehung um eine Achse x_i in Richtung einer Achse x_j dasselbe ist wie die Drehung um eine Achse x_j in Richtung einer Achse x_i. Damit verbleiben $\frac{d(d-1)}{2}$ unabhängige Drehungen.

Aufgabe 7*: *Diskreter Laplace-Operator*

1. Rekursionsrelation: $\det(\Delta_n) = -2\det(\Delta_{n-1}) - \det(\Delta_{n-2})$
2. $\det(\Delta_1) = -2$, $\det(\Delta_2) = 3$, $\det(\Delta_3) = -4 \quad \Rightarrow \quad$ Vermutung: $\det(\Delta_n) = (-1)^n(n+1)$

   Beweis durch Induktion:

   (IA) $\quad n = 1: \quad \det(\Delta_1) = (-1)^n(n+1) = -2 \quad \checkmark$

   (IV) $\quad n = k: \quad \det(\Delta_k) = (-1)^k(k+1)$

   (IB) $\quad n = k+1: \quad \det(\Delta_{k+1}) = (-1)^{k+1}(k+2)$

   Beweis.
$$\begin{aligned} \det(\Delta_{n+1}) &= -2\det(\Delta_n) - \det(\Delta_{n-1}) \\ &= -2(-1)^n(n+1) - (-1)^{n-1}n \\ &= (-1)^{n+1}(2(n+1) - n) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2). \end{aligned}$$

$\square$