

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

WINTERSEMESTER 2023/24

Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

MARTIN BEYER

Inhaltsverzeichnis

1	Grundrechnungsarten	3
1.1	Addition und Subtraktion	3
1.2	Multiplikation und Division	4
1.3	Bruchrechnung	5
1.4	Potenzen und Wurzeln	6
1.4.1	Potenzen	6
1.4.2	Wurzeln	7
1.5	Gleichungen	8
2	Lineare Gleichungssysteme	9
2.1	Mengen und Intervalle	9

1 Grundrechnungsarten

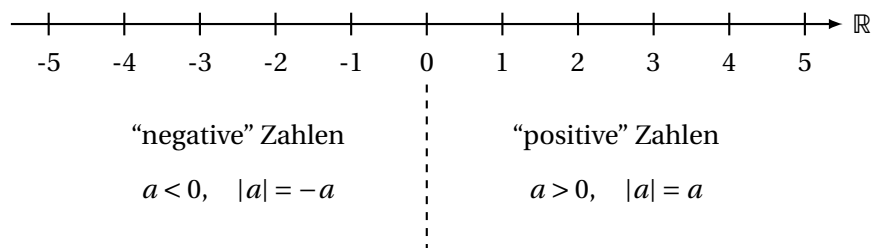
Wir beginnen bei den elementaren Regeln des Rechnes.

1.1 Addition und Subtraktion

algebraische Eigenschaften der Addition reeller Zahlen ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

- Kommutativität: $a + b = b + a$
- Assoziativität: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Auf dem (reellen) Zahlenstrahl unterscheiden wir zwischen positiven und negativen Zahlen. Der *Betrag* (einer Zahl ungleich Null) liefert immer eine positive Zahl.



Offenbar gilt für den Betrag bei Addition und Subtraktion

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|. \quad (1.1)$$

Die Addition von negativen Zahlen entspricht einer Subtraktion

$$a + (-b) = a - b, \quad (-a) + b = b - a, \quad (-a) + (-b) = -(a + b). \quad (1.2)$$

Die Zahl *Null* hat eine Sonderrolle. Sie ergibt sich bei der Addition einer Zahl a mit ihrem additiven Inversen $-a$ und ist das neutrale Element der Addition:

$$a + (-a) = 0, \quad a + 0 = a. \quad (1.3)$$

1.2 Multiplikation und Division

algebraische Eigenschaften der Multiplikation reeller Zahlen $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

- Kommutativität: $ab = ba$
- Assoziativität: $a(bc) = (ab)c = abc$
- Distributivität: $a(b + c) = ab + ac$

Das Distributivitätsgesetz liefert die Rechenregeln zum *Ausmultiplizieren* und *Ausklammern*

$$\begin{aligned} (a+b) \underbrace{(c+d)}_f &= af + bf = a(c+d) + b(c+d) \\ &= ac + ad + bc + bd. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Für die Multiplikation mit negativen Zahlen gilt “+” mal “-” = “-” und “-” mal “-” = “+”

$$(+a)(-b) = -(ab), \quad (-a)(+b) = -(ab), \quad (-a)(-b) = +(ab). \quad (1.5)$$

Alternativ lässt sich auch schreiben $-a = (-1)a$ und $(-1)(-1) = 1$. Die Zahl Null besitzt in der Multiplikation ebenfalls eine Sonderrolle: $a \cdot 0 = 0$.

Eine wichtige Reihe an Rechenregeln stellen die *binomischen* Formeln dar.

Binomische Formeln	
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	(1.6)
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$	

.

Wir können nun die Division als Umkehrung der Multiplikation einführen:

$$a = bc \Rightarrow b = \frac{a}{c}, \quad \text{es sei denn } c = 0. \quad (1.7)$$

Dies führt dazu, dass nicht jede Multiplikation in eine Division überführt werden kann. Ebenso ist die Division mit Null nicht möglich:

- $\frac{a}{0}$ nicht definiert, da keine Zahl mit Null multipliziert a ergibt
- $\frac{0}{0}$ unbestimmt, da *jede* Zahl mit Null multipliziert Null ergibt.

1.3 Bruchrechnung

Wir haben gerade schon von der Notation eines Bruches Gebrauch gemacht, um die Division zweier Zahlen zu beschreiben. Ein Bruch besteht aus *Zähler* (oben) und *Nenner* (unten).

- Multiplikation immer im Zähler: $k \frac{a}{b} = \frac{k a}{1 b} = \frac{ka}{b}$.
- Division immer im Nenner: $\frac{1}{k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{kb}$
- Kürzen: $\frac{ka}{kb} = \frac{k a}{k b} = \frac{a}{b}$ da $\frac{k}{k} = 1$
- Erweitern: $\frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{k a}{k b} = \frac{ka}{kb}$.

Den *Kehrwert* bzw. das Reziproke eines Bruches zu bilden, heißt:

$$\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{b}{a}, \quad \text{sodass} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \quad (1.8)$$

Wir können damit auch den Begriff der *Mehrfachbrüche* einführen, d. h.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \quad (1.9)$$

Addition von Brüchen

Sofern die Nenner zweier Brüche gleich sind, können die Zähler addiert werden

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}. \quad (1.10)$$

Andernfalls wird zunächst der Hauptnenner gebildet

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{m}{m} + \frac{b}{m} \cdot \frac{n}{n} = \frac{am}{nm} + \frac{bn}{nm} = \frac{am+bn}{nm}. \quad (1.11)$$

Der Hauptnenner kann durch Multiplikation der beiden Nenner gebildet werden. Enthalten beide Nenner jeweils den gleichen Faktor, so kann der Hauptnenner einfacher gebildet werden, beispielsweise:

$$\begin{aligned} \frac{2c-5b}{6ab-10b^2} - \frac{5(2c-3a)}{18a^2-30ab} &= \frac{2c-5b}{2b(3a-5b)} - \frac{5(2c-3a)}{6a(3a-5b)} \\ &= \frac{1}{2(3a-5b)} \left[\frac{2c-5b}{b} - \frac{5(2c-3a)}{3a} \right] \\ &= \frac{1}{2(3a-5b)} \left[\frac{3a(2c-5b) - 5b(2c-3a)}{3ab} \right] \\ &= \frac{1}{6ab(3a-5b)} (6ac - 15ab - 10bc + 15ab) \\ &= \frac{1}{6ab(3a-5b)} 2c(3a-5b) = \frac{c}{3ab}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

1.4.1 Potenzen

Potenzen drücken die mehrfache Ausführung einer Multiplikation in einer kompakten Schreibweise aus

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gleiche Faktoren}} = a^n = b. \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{Exponent} \\ \nwarrow \text{Potenzwert} \\ \nearrow \text{Basis} \end{array} \quad (1.13)$$

Spezielle Werte des Potenzierens sind im Folgenden aufgelistet:

$$a^0 = 1, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1. \quad (1.14)$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{oder:} \quad \begin{cases} (-1)^{2n} = 1 \\ (-1)^{2n+1} = -1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Der Term 0^0 ist hingegen nicht definiert, da der Wert durch Grenzwertbildung von verschiedenen Zahlenfolgen $\lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 0} 0^x = 0$ verschiedene Werte liefert.

Potenzgesetze

Wir wollen im Folgenden die wichtigsten Potenzgesetze anschaulich herleiten:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \text{denn:} \quad a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} \quad (1.16)$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \text{denn:} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a)(b \cdot b \cdot \dots \cdot b) = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ Paare}} \quad (1.17)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}, \quad \text{denn:} \quad (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ Faktoren}} \quad (1.18)$$

Wir können zudem negative Exponenten einführen

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{bzw.} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = (a^{-n})^{-1} = (a^{-1})^{-n}. \quad (1.19)$$

Daraus können wir weitere Potenzgesetze ableiten

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m (a^n)^{-1} \stackrel{(1.18)}{=} a^m \cdot a^{-n} \stackrel{(1.16)}{=} a^{m-n} \quad (1.20)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n b^{-n} \stackrel{(1.18)}{=} a^n (b^{-1})^n \stackrel{(1.17)}{=} (a \cdot b^{-1})^n \stackrel{(1.19)}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = (a \cdot b^{-1})^{-n} = a^{-n} \cdot b^n = (b \cdot a^{-1})^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n. \quad (1.22)$$

Potenzgesetze

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, & a^n \cdot b^n &= (ab)^n, & (a^m)^n &= (a^n)^m = a^{mn} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n. \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.4.2 Wurzeln

Möchte man die Gleichung $b^n = a$, so hat man die n -te Wurzel zu ziehen

$$\begin{array}{c} \text{Wurzelexponent} \rightarrow \sqrt[n]{a} = b. \leftarrow \text{Potenzwert} \\ \quad \quad \quad \swarrow \text{Radikand} \end{array} \quad (1.24)$$

Der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ hat als Ergebnis die Zahl b , die in die n -te Potenz erhoben a ergibt, $b^n = a$. Für den Fall $n = 2$ lässt man den Wurzelexponenten weg: $\sqrt[2]{a} \equiv \sqrt{a}$.

Spezielle Werte des Wurzelziehens (für $n > 0$) sind im Folgenden aufgelistet:

$$\sqrt[n]{0} = 0, \sqrt[n]{1} = 1, \sqrt[n]{a} = a. \quad (1.25)$$

Beachte, dass die Gleichung $b^0 = a$ keine Lösung für b hat, wenn $a \neq 1$, da $b^0 = 1$, aber beliebig viele hat, wenn $a = 1$.

Quadratwurzel

Die Quadratwurzel \sqrt{a} ist im Reellen nicht definiert für $a < 0$. Ist also $x^2 = a$ ($a \geq 0$), dann folgt $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$ und daraus $|x| = \sqrt{a}$. Wir müssen also eine Fallunterscheidung treffen:

$$\begin{array}{ll} x > 0: & x = \sqrt{a} \\ x < 0: & x = -\sqrt{a} \end{array} \quad (1.26)$$

Es wäre hingegen falsch zu schreiben $\sqrt{9} = \pm 3$. Die Wurzel selbst ist positiv definiert.

Wurzelgesetze

Wir können die Wurzelgesetze über die Potenzschreibweise der Wurzeln auf die Potenzgesetze zurückführen. Es gilt

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \text{denn: } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a. \quad (1.27)$$

Daraus folgen die Rechenregeln:

Wurzelgesetze
$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, & \sqrt[n]{a^n b} &= a \sqrt[n]{b} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, & (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}, & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\ \sqrt[p]{a^m} \sqrt[q]{a^n} &= \sqrt[pq]{a^{mq+np}}, & \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} &= \sqrt[pq]{a^{mq-np}} \end{aligned} \quad (1.28)$

Es gilt weiterhin zu beachten, dass Summen von Wurzeln in der Regel nicht vereinfacht werden können

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}. \quad (1.29)$$

Abschließend wollen wir diskutieren, wie wir Brüche mit Wurzeltermen vereinfachen können. Steht im Nenner des Bruchs ein Wurzelausdruck, so lässt sich dies durch "Rationalmachen" des Nenners vereinfachen:

$$\frac{6}{2+\sqrt{2}} = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{4-2} = 3(2-\sqrt{2}). \quad (1.30)$$

Wir haben hierbei den Bruch geschickt erweitert, sodass wir die dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ nutzen konnten.

1.5 Gleichungen

Wir wollen nun noch allgemeine Eigenschaften von Gleichungen diskutieren, die wir für nachfolgende Kapitel als Grundlage benötigen. Das Gleichheitszeichen erfüllt folgende Bedingungen:

- Reflexivität, d. h. es gilt $a = a$;
- Symmetrie, d. h. gilt $a = b$, dann gilt auch $b = a$;
- Transitivität, d. h. gilt $a = b$ und $b = c$, dann gilt auch $a = c$.

Gleichungen sind Darstellungen logischer Aussagen, deren Form mit Hilfe von *Äquivalenzumformungen* manipuliert werden kann. Eine Äquivalenzumformung kann durch eine Umkehrung der Rechenoperation rückgängig gemacht werden. Außerdem bleibt die Lösungsmenge der Gleichung unverändert. Wir können beispielsweise auf beiden Seiten einer Gleichung Terme addieren oder subtrahieren

$$\begin{array}{l} \text{Äquivalenzpfeil} \rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} a+3 = x^2-5 \\ a = x^2-8. \end{array} \quad (1.31)$$

Bei Multiplikation/Division einer Zahl muss jedoch sichergestellt werden, dass diese nicht Null ist

$$\begin{array}{l} \frac{x}{a-b} = z \quad \Leftrightarrow x = z(a-b) \\ \frac{x}{a-b} = z, a \neq b \Leftrightarrow x = z(a-b). \end{array} \quad (1.32)$$

Wir müssen ebenfalls beachten, dass die Information über das Vorzeichen einer Zahl beim Quadrieren verloren geht. Es handelt sich deshalb nicht um eine Äquivalenzrelation

$$\begin{array}{l} x-1 = a \quad \text{hat eine Lösung,} \quad x = 1+a \\ (x-1)^2 = a^2 \quad \text{hat zwei Lösungen,} \quad x_1 = 1+a, x_2 = 1-a. \end{array} \quad (1.33)$$

Weiterhin ist das explizite Auflösen einer Gleichung nach einer Größe nicht immer möglich, beispielsweise

$$x + \sin(x) = 0. \quad (1.34)$$

2 Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Verknüpfung von zwei oder mehreren Gleichungen zu einem Gleichungssystem und diskutieren den Mengenbegriff.

Grundsätzlich können wir Gleichungen in vier Arten unterscheiden:

- *Identische Gleichungen* sind Darstellungen wahrer mathematischer Aussagen, z. B. $5 + 2 = 7$ oder $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Funktionsgleichungen* stellen Zusammenhänge zwischen verschiedenen variablen Größen her; beispielsweise gehorcht der Flächeninhalt A eines Kreises in Abhängigkeit des Radius r der Gleichung $A(r) = \pi r^2$.
- *Definitionsgleichungen* ordnen mathematischen Ausdrücken eine Bezeichnung durch ein Symbol zu; man schreibt z. B. $z := 2x^2 + 1$.
- *Bestimmungsgleichungen* enthalten eine Variable, deren Wert grundsätzlich jede (reelle) Zahl sein kann. Die Menge aller Werte der Variable, für die eine Gleichung den Wahrheitswert "wahr" hat, heißt *Lösungsmenge* \mathbb{L} dieser Gleichung.

In diesem Abschnitt geht es um lineare Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchstens in erster Potenz auftreten.

2.1 Mengen und Intervalle

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten, die Elemente der Menge genannt werden. Ist ein Element e in einer Menge M enthalten, so schreibt man $e \in M$.

Mengen können mit Hilfe der Mengenklammer $\{\dots\}$ definiert werden, üblicherweise geschieht dies über eine explizite Auflistung, bspw. $M = \{a, b, k, s\}$, oder durch Angabe einer definierenden Eigenschaft ihrer Elemente beispielsweise ist M

$$M = \{n \mid n \text{ ist eine gerade Zahl}\}, \quad (2.1)$$

die Menge der geraden Zahlen. Mengen können ebenfalls Mengen als Elemente enthalten. Zum Beispiel enthält die Menge N als Element die Menge $\{a, b\}$

$$N = \{1, \{a, b\}, 3\}. \quad (2.2)$$

Wichtige Mengen sind die Zahlenbereiche, insbesondere Diese speziellen Mengen haben die

die natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\};$
die ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\};$
die rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\};$
die reellen Zahlen	$\mathbb{R}.$

besondere Eigenschaft, einer Ordnungsrelation zu unterliegen, d. h. man kann angeben, ob ein bestimmtes Element kleiner, größer oder gleich einem anderen Element ist. Dadurch ist es möglich, *Intervalle* zu definieren.

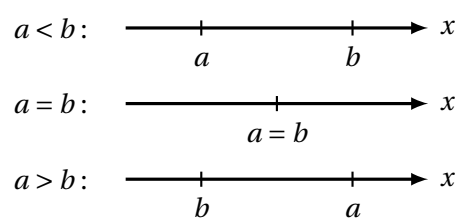


Fig. 1