FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT

WINTERSEMESTER 2023/24

Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

MARTIN BEYER

LaTeX-Satz und Design von Martin Beyer

Inhaltsverzeichnis

1 Grundrechnungsarten

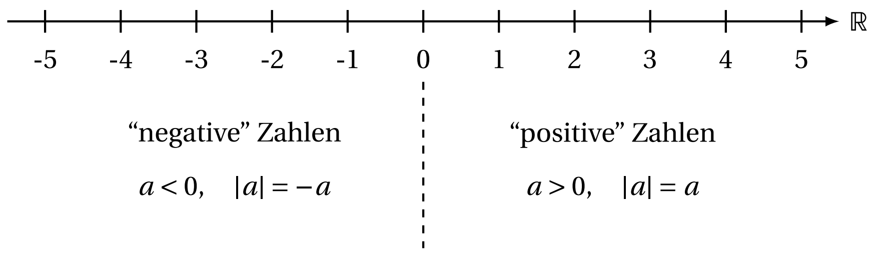
Wir beginnen bei den elementaren Regeln des Rechnes.

1.1 Addition und Subtraktion

algebraische Eigenschaften der Addition reeller Zahlen ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

- Kommutativität: $a + b = b + a$
- Assoziativität: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Auf dem (reellen) Zahlenstrahl unterscheiden wir zwischen positiven und negativen Zahlen. Der *Betrag* (einer Zahl ungleich Null) liefert immer eine positive Zahl.



Offenbar gilt für den Betrag bei Addition und Subtraktion

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|. \tag{1.1}$$

Die Addition von negativen Zahlen entspricht einer Subtraktion

$$a + (-b) = a - b, \quad (-a) + b = b - a \quad (-a) + (-b) = -(a + b). \tag{1.2}$$

Die Zahl *Null* hat eine Sonderrolle. Sie ergibt sich bei der Addition einer Zahl a mit ihrem additiven Inversen $-a$ und ist das neutrale Element der Addition:

$$a + (-a) = 0, \quad a + 0 = a. \tag{1.3}$$

1.2 Multiplikation und Division

algebraische Eigenschaften der Multiplikation reeller Zahlen $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

- Kommutativität: $ab = ba$
- Assoziativität: $a(bc) = (ab)c = abc$
- Distributivität: $a(b + c) = ab + ac$

Das Distributivitätsgesetz liefert die Rechenregeln zum *Ausmultiplizieren* und *Ausklammern*

$$\begin{aligned}(a+b)\underbrace{(c+d)}_{f} = af + bf &= a(c+d) + b(c+d)\\ &= ac + ad + bc + bd.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Für die Multiplikation mit negativen Zahlen gilt "+" mal "−" = "−" und "−" mal "−" = "+"

$$(+a)(-b) = -(ab), \quad (-a)(+b) = -(ab), \quad (-a)(-b) = +(ab). \tag{1.5}$$

Alternativ lässt sich auch schreiben $-a = (-1)a$ und $(-1)(-1) = 1$. Die Zahl Null besitzt in der Multiplikation ebenfalls eine Sonderrolle: $a \cdot 0 = 0$.

Eine wichtige Reihe an Rechenregeln stellen die *binomischen* Formeln dar.

Binomische Formeln

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab\\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2.\end{aligned} \tag{1.6}$$

.

Wir können nun die Division als Umkehrung der Multiplikation einführen:

$$a = bc \Rightarrow b = \frac{a}{c}, \quad \text{es sei denn} \quad c = 0. \tag{1.7}$$

Dies führt dazu, dass nicht jede Multiplikation in eine Division überführt werden kann. Ebenso ist die Division mit Null nicht möglich:

- $\frac{a}{0}$ nicht definiert, da keine Zahl mit Null multipliziert a ergibt
- $\frac{0}{0}$ unbestimmt, da *jede* Zahl mit Null multipliziert Null ergibt.

1.3 Bruchrechnung

Wir haben gerade schon von der Notation eines Bruches Gebrauch gemacht, um die Division zweier Zahlen zu beschreiben. Ein Bruch besteht aus *Zähler* (oben) und *Nenner* (unten).

- Multiplikation immer im Zähler: $k\frac{a}{b} = \frac{k}{1}\frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$.
- Divison immer im Nenner: $\frac{1}{k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{kb}$
- Kürzen: $\frac{ka}{kb} = \frac{k}{k}\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{da} \quad \frac{k}{k} = 1$
- Erweitern: $\frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{k}{k}\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

Den *Kehrwert* bzw. das Reziproke eines Bruches zu bilden, heißt:

$$\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{b}{a}, \quad \text{sodass} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \tag{1.8}$$

Wir können damit auch den Begriff der *Mehrfachbrüche* einführen, d. h.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \tag{1.9}$$

Addition von Brüchen

Sofern die Nenner zweier Brüche gleich sind, können die Zähler addiert werden

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}. \tag{1.10}$$

Andernfalls wird zunächst der Hauptnenner gebildet

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{m}{m} + \frac{b}{m} \cdot \frac{n}{n} = \frac{am}{nm} + \frac{bn}{nm} = \frac{am+bn}{nm}. \tag{1.11}$$

Der Hauptnenner kann durch Multiplikation der beiden Nenner gebildet werden. Enthalten beide Nenner jeweils den gleichen Faktor, so kann der Hauptnenner einfacher gebildet werden, beispielsweise:

$$\begin{aligned}\frac{2c-5b}{6ab-10b^2}-\frac{5(2c-3a)}{18a^2-30ab} &= \frac{2c-5b}{2b(3a-5b)}-\frac{5(2c-3a)}{6a(3a-5b)}\\ &= \frac{1}{2(3a-5b)}\left[\frac{2c-5b}{b}-\frac{5(2c-3a)}{3a}\right]\\ &= \frac{1}{2(3a-5b)}\left[\frac{3a(2c-5b)-5b(2c-3a)}{3ab}\right]\\ &= \frac{1}{6ab(3a-5b)}(6ac-\cancel{15ab}-10bc+\cancel{15ab})\\ &= \frac{1}{6ab\cancel{(3a-5b)}}2c\cancel{(3a-5b)}=\frac{c}{3ab}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

1.4.1 Potenzen

Potenzen drücken die mehrfache Ausführung eine Multiplikation in einer kompakten Schreibweise aus

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ gleiche Faktoren}} = \overset{\text{Exponent}}{\underset{\text{Basis}}{a^n}} = \underbrace{b}_{\text{Potenzwert}}. \tag{1.13}$$

Spezielle Werte des Potenzierens sind im Folgenden aufgelistet:

$$a^0 = 1, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1. \tag{1.14}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \quad \text{gerade} \\ -1, & n \quad \text{ungerade} \end{cases} \quad \text{oder:} \quad \begin{cases} (-1)^{2n} = 1 \\ (-1)^{2n+1} = -1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Der Term 0^0 ist hingegen nicht definiert, da der Wert durch Grenzwertbildung von verschiedenen Zahlenfolgen $\lim_{x\to 0} x^0 = 1$ bzw. $\lim_{x\to 0} 0^x = 0$ verschiedene Werte liefert.

Potenzgesetze

Wir wollen im Folgenden die wichtigsten Potenzgesetze anschaulich herleiten:

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}, \quad \text{denn:} \quad a^m\cdot a^n = \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\text{ Faktoren}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ Faktoren}}}_{m+n\text{ Faktoren}} \tag{1.16}$$

$$a^n\cdot b^n = (ab)^n, \quad \text{denn:} \quad a^n\cdot b^n = (a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)(b\cdot b\cdot\ldots b) = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ Paare}} \tag{1.17}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}, \quad \text{denn:} \quad (a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\text{ Faktoren}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\cdot n\text{ Faktoren}}. \tag{1.18}$$

Wir können zudem negative Exponenten einführen

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{bzw.} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = (a^{-n})^{-1} = (a^{-1})^{-n}. \tag{1.19}$$

Daraus können wir weitere Potenzgesetze ableiten

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m (a^n)^{-1} \overset{(1.18)}{=} a^m \cdot a^{-n} \overset{(1.16)}{=} a^{m-n} \tag{1.20}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n b^{-n} \overset{(1.18)}{=} a^n (b^{-1})^n \overset{(1.17)}{=} (a \cdot b^{-1})^n \overset{(1.19)}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{1.21}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = (a \cdot b^{-1})^{-n} = a^{-n} \cdot b^n = (b \cdot a^{-1})^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n. \tag{1.22}$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n. \tag{1.23}$$

1.4.2 Wurzeln

Möchte man die Gleichung $b^n = a$, so hat man die n-te Wurzel zu ziehen

$$\text{Wurzelexponent} \longrightarrow \sqrt[n]{a} = b. \longleftarrow \text{Potenzwert} \tag{1.24}$$

Radikand

Der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ hat als Ergebnis die Zahl b, die in die n-te Potenz erhoben a ergibt, $b^n = a$. Für den Fall $n = 2$ lässt man den Wurzelexponenten weg: $\sqrt[2]{a} \equiv \sqrt{a}$.

Spezielle Werte des Wurzelziehens (für $n > 0$) sind im Folgenden aufgelistet:

$$\sqrt[n]{0} = 0, \ \sqrt[n]{1} = 1, \ \sqrt[1]{a} = a. \tag{1.25}$$

Beachte, dass die Gleichung $b^0 = a$ keine Lösung für b hat, wenn $a \neq= 1$, da $b^0 = 1$, aber beliebig viele hat, wenn $a = 1$.

Quadratwurzel

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist im Reellen nicht definiert für $a < 0$. Ist also $x^2 = a$ $(a \geq 0)$, dann folgt $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$ und daraus $|x| = \sqrt{a}$. Wir müssen also eine Fallunterscheidung treffen:

$$\begin{aligned} x > 0: &\quad x = \sqrt{a} \\ x < 0: &\quad x = -\sqrt{a} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Es wäre hingegen falsch zu schreiben $\sqrt{9} = \pm 3$. Die Wurzel selbst ist positiv definiert.

Wurzelgesetze

Wir können die Wurzelgesetze über die Potenzschreibweise der Wurzeln auf die Potenzgesetze zurückführen. Es gilt

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \text{denn:} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a. \tag{1.27}$$

Daraus folgen die Rechenregeln:

Wurzelgesetze

$$\begin{gathered} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \\ \sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}}, \quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} = \sqrt[pq]{a^{mq-np}} \end{gathered} \tag{1.28}$$

Es gilt weiterhin zu beachten, dass Summen von Wurzeln in der Regel nicht vereinfacht werden können

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}. \tag{1.29}$$

Abschließend wollen wir diskutieren, wie wir Brüche mit Wurzeltermen vereinfachen können. Steht im Nenner des Bruchs ein Wurzelausdruck, so lässt sich dies durch "Rationalmachen" des Nenners vereinfachen:

$$\frac{6}{2+\sqrt{2}} = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{4-2} = 3(2-\sqrt{2}). \tag{1.30}$$

Wir haben hierbei den Bruch geschickt erweitert, sodass wir die dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ nutzen konnten.

1.5 Gleichungen

Wir wollen nun noch allgemeine Eigenschaften von Gleichungen diskutieren, die wir für nachfolgende Kapitel als Grundlage benötigen. Das Gleichheitszeichen erfüllt folgende Bedingungen:

- Reflexivität, d. h. es gilt $a = a$;
- Symmetrie, d. h. gilt $a = b$, dann gilt auch $b = a$;
- Transitivität, d. h. gilt $a = b$ und $b = c$, dann gilt auch $a = c$.

Gleichungen sind Darstellungen logischer Aussagen, deren Form mit Hilfe von *Äquivalenzumformungen* manipuliert werden kann. Eine Äquivalenzumformung kann durch eine Umkehrung der Rechenoperation rückgängig gemacht werden. Außerdem bleibt die Lösungsmenge der Gleichung unverändert. Wir können beispielsweise auf beiden Seiten einer Gleichung Terme addieren oder subtrahieren

Äquivalenzpfeil

$$\begin{aligned} & a+3 = x^2-5 \\ \Longleftrightarrow \quad & a = x^2-8. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Bei Multiplikation/Division einer Zahl muss jedoch sichergestellt werden, dass diese nicht Null ist

$$\begin{aligned} \frac{x}{a-b} &= z \qquad\qquad \not\Longleftarrow\; x = z(a-b) \\ \frac{x}{a-b} &= z, a \neq b \Longleftrightarrow\; x = z(a-b). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Wir müssen ebenfalls beachten, dass die Information über das Vorzeichen einer Zahl beim Quadrieren verloren geht. Es handelt sich deshalb nicht um eine Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} x-1 &= a & &\text{hat eine Lösung,} & x &= 1+a \\ (x-1)^2 &= a^2 & &\text{hat zwei Lösungen,} & x_1 &= 1+a, x_2 = 1-a. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Weiterhin ist das explizite Auflösen einer Gleichung nach einer Größe nicht immer möglich, beispielsweise

$$x + \sin(x) = 0. \tag{1.34}$$

2 Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Verknüpfung von zwei oder mehreren Gleichungen zu einem Gleichungssystem und diskutieren den Mengenbegriff.

Grundsätzlich können wir Gleichungen in vier Arten unterscheiden:

- *Identische Gleichungen* sind Darstellungen wahrer mathematischer Aussagen, z. B. $5 + 2 = 7$ oder $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Funktionsgleichungen* stellen Zusammenhänge zwischen verschieden variablen Größen her; beispielsweise gehorcht der Flächeninhalt A eines Kreises in Abhängigkeit des Radius r der Gleichung $A(r) = \pi r^2$.
- *Definitionsgleichungen* ordnen mathematischen Ausdrücken eine Bezeichnung durch ein Symbol zu; man schreibt z. B. $z := 2x^2 + 1$.
- *Bestimmungsgleichungen* enthalten eine Variable, deren Wert grundsätzlich jede (reelle) Zahl sein kann. Die Menge aller Werte der Variable, für die eine Gleichung den Wahrheitswert "wahr" hat, heißt *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ dieser Gleichung.

In diesem Abschnitt geht es um lineare Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchstens in erster Potenz auftreten.

2.1 Mengen und Intervalle

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten, die Elemente der Menge genannt werden. Ist ein Element e in einer Menge M enthalten, so schreibt man $e \in M$.

Mengen können mit Hilfe der Mengenklammer $\{\ldots\}$ definiert werden, überlicherweise geschieht dies über eine explizite Auflistung, bspw. $M = \{a, b, k, s\}$, oder durch Angabe einer definierenden Eigenschaft ihrer Elemente beispielsweise ist M

$$M = \{n | \, n \text{ ist eine gerade Zahl}\}, \tag{2.1}$$

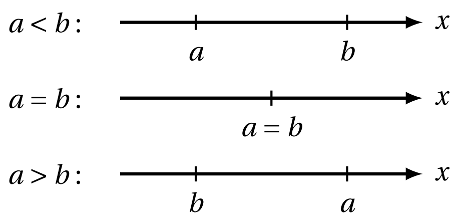
die Menge der geraden Zahlen. Mengen können ebenfalls Mengen als Elemente enthalten. Zum Beispiel enthält die Menge N als Element die Menge $\{a, b\}$

$$N = \{1, \{a, b\}, 3\}. \tag{2.2}$$

Wichtige Mengen sind die Zahlenbereiche, insbesondere Diese speziellen Mengen haben die

die natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
die ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
die rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$;
die reellen Zahlen	$\mathbb{R}$.

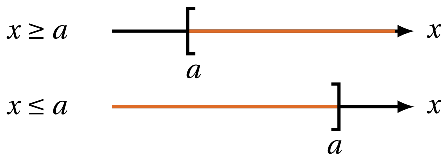
besondere Eigenschaft, einer Ordnungsrelation zu unterliegen, d. h. man kann angeben, ob



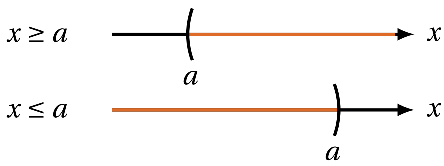
ein bestimmtes Element kleiner, größer oder gleich einem anderen Element ist. Dadurch ist es möglich, *Intervalle* zu definieren.

Im Folgenden wollen wir uns speziell auf die reellen Zahlen. Ein Intervall ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die durch die Angabe begrenzender Elemente gebildet wird. Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Intervallgrenze $a \in \mathbb{R}$ aufzufassen:

- Die Grenze a ist Teil des Intervalls, $x \geq a$ oder $x \leq a$.



- Die Grenze a ist nicht Teil des Intervalls, $x > a$ oder $x < a$.



Damit lassen sich endliche Intervalle definieren als

$$
\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\
&\left.\begin{aligned}
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}
\end{aligned}\right\} && \text{halboffene Intervalle} \\
&(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} && \text{offenes Intervall}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

und unendliche Intervalle als

$$
\begin{aligned}
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \quad & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x\} \quad & (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Weiterhin können wir bestimmte Teilmengen der reellen Zahlen definieren, beispielsweise

$$
\mathbb{R}^+ = (0,\infty), \quad \mathbb{R}^- = (-\infty,0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = (-\infty,\infty). \tag{2.5}
$$

Wir müssen beachten, dass das ∞-Zeichen nur ein Symbol ist und kein Element der reellen Zahlen. Es gibt demnach keine unendlichen abgeschlossenen Intervalle.

Im Umgang mit Ungleichungen sind folgende Rechenregeln zu beachten:

$$\begin{aligned} a < b &\Longleftrightarrow b > a, \\ a < b &\Longleftrightarrow a + c < b + c, \\ a < b \wedge c > 0 &\Longleftrightarrow ca < cb, \\ a < b \wedge c < 0 &\Longleftrightarrow ca > cb, \end{aligned} \tag{2.6}$$

Es ist "$\wedge$" das zeichen für ein logisches "und". Wichtig ist, dass die Multiplikation mit einer negativen Zahl eine Umkehrung des Relationszeichens impliziert, beispielsweise

$$\begin{aligned} 3 &< 5 \quad | \cdot (-2) \\ -6 &> -10. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aus diesem Grund müssen bei der Auflösung von Ungleichungen mit einer Unbekannten oft *Fallunterscheidungen* vorgenommen werden. Ein Beispiel ist

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3, \quad x \neq -2. \tag{2.8}$$

$x > -2 : x+2 \quad$ positiv	$x < -2 : x+2 \quad$ negativ
$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \qquad \| \cdot (x+2)$	$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \qquad \| \cdot (x+2)$
$2x - 1 > 3x + 6 \quad \| \cdot -2x - 6$	$2x - 1 < 3x + 6 \quad \| \cdot -2x - 6$
$-7 < x \quad$ Widerspruch zu $\quad x > -2.$	$-7 < x \quad$ Widerspruch zu $\quad x > -2.$
$\Rightarrow \quad$ keine Lösung	$\Rightarrow -7 < x < -2$

Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung $\mathbb{L} = (-7, -2) = \{x \in \mathbb{R} | -7 < x < -2\}$.

2.2 Lineare Funktionen

Unter einer *Funktion* f versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge $\mathbb{D}$ *genau* ein Element y aus einer Menge $\mathbb{W}$ zuordnet. Wir schreiben $y = f(x)$. Wir bezeichnen dabei

- x - unabhängige Variable oder Argument
- y - abhängige Variable oder Funktionswert
- $\mathbb{D}$ - Definitionsbereich der Funktion
- $\mathbb{W}$ - Wertebereich der Funktion

Die mathematische Schreibweise zur Definition einer Funktion lautet

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}, \quad x \mapsto y = f(x). \tag{2.9}$$

In der Physik findet man viele *lineare* Abhängigkeiten, unter anderem

- die Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Zeit t,

$$v(t) = g \cdot t + v_0 \quad (g\text{: Erdbeschleunigung}); \tag{2.10}$$

- das Ohmsche Gesetz für die Spannung U als Funktion des Stromes I

$$U(I) = R \cdot I \quad (R\text{: elektrischer Widerstand}); \tag{2.11}$$

- Beim äußeren photoelektrischen Effekt gilt für die kinetische Energie des Photoelektrons E_{kin} als Funktion der Frequenz ν des Lichtes

$$E_{\text{kin}}(\nu) = h\nu - W_A \qquad \begin{array}{l}(h\text{: Plancksches Wirkungsquantum}\\ W_A\text{: Austrittsarbeit}).\end{array} \tag{2.12}$$

Die allgemeine Form einer linearen Funktion ist

lineare Funktion

$$f(x) = mx + n, \qquad \begin{array}{l} m\text{: Anstieg} \\ n\text{: Verschiebung entlange der } y\text{-Achse}\end{array} \tag{2.13}$$

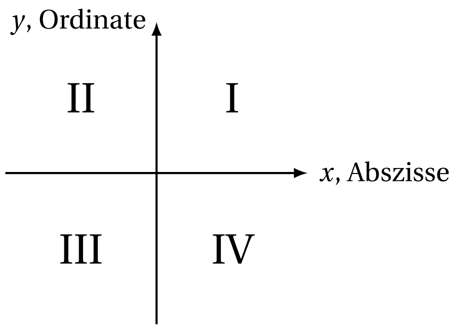
Die graphische Darstellung erfolgt mit Hilfe des kartesischen Koordinatensystems. Dieses ist in vier Quadranten eingeteilt:

I) $x > 0, y > 0$

II) $x < 0, y > 0$

III) $x < 0, y < 0$

IV) $x > 0, y < 0$



Wir können eine lineare Funktion wie in Abbildung 1 darstellen.

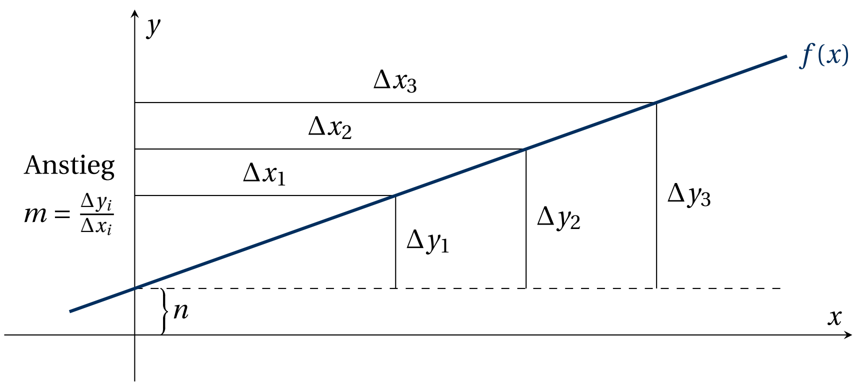


Fig. 1: Unter dem Graphen der linearen Funktion befinden sich ähnliche Dreiecke (rechtwinklig, übereinstimmendes Kathetenverhältnis).

Spezialfälle linearer Funktionen sind

- $y = \pm x$, Anstieg von 45° ($m = \pm 1$)
- $y = 0$, x-Achse ($m = 0$)
- $y = n$, Horizontale im Abstand n von der x-Achse ($m = 0$)

Beispiel: Innenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks

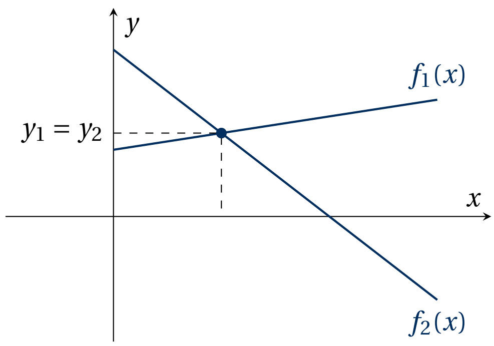
Für die Innenwinkelsumme gilt

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wir können nun β als lineare Funktion von α auffassen

$$\beta(\alpha) = -\alpha + 90^\circ \quad , \quad \mathbb{D} = (0^\circ, 90^\circ), \quad \mathbb{W} = (0^\circ, 90^\circ). \tag{2.15}$$

Schnittpunkt zweier linearer Funktionen



Stellen wir die Graphen zweier linearer Funktionen im selben kartesischen Koordinatensystem dar, so existiert ein *Schnittpunkt* (sofern die beiden Geraden nicht parallel sind).

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) = m_1 x + n \\ y_2 &= f_2(x) = m_2 x + n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Am Schnittpunkt ist $y_1 = y_2 = y$ und wir können schreiben

$$y - m_1 x = n_1 \quad \text{und} \quad y - m_2 x = n_2. \tag{2.17}$$

Es handelt sich also um ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (den Schnittpunktkoordinaten) der Form

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= k_1, \\ a_2 x + b_2 y &= k_2, \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_1 = -m_1 \quad , \quad a_2 = -m_2; \\ b_1 = b_2 = 1; k_1 = n_1, k_2 = n_2. \end{cases} \tag{2.18}$$

Ein lineare Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu lösen, bedeutet, den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen (und umgekehrt).

Diskutieren wir abschließend noch den Spezialfall $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Dann sind die Geraden parallel und wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a_1 k_2 = a_2 k_1$: Die Geraden liegen aufeinander (unendlich viele Schnittpunkte).
- $a_1 k_2 \neq a_2 k_1$: Die geraden liegen nicht aufeinander (kein Schnittpunkt).

Schreibweisen und Bezeichnungen

Jede lineare Gleichung mit zwei Unbekannten ist schreibbar als

$$ax + by + c = 0 \quad \text{(allgemeine Geradengleichung)} \quad . \tag{2.19}$$

Mit der Substitution $m = -\frac{a}{b}, n = -\frac{c}{b}$ kann sie in die Normalform (2.13) überführt werden.

Eine weitere Variante ist

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \quad , \quad A = -\frac{c}{a}, \; B = -\frac{c}{b}, \tag{2.20}$$

die auch als *Achsenabschnittsform* bezeichnet wird, wobei die Schnittpunkte mit x- und y-Achse unmittelbar als A und B ablesbar sind.

2.3 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

Die allgemeine Form eines solchen Gleichungssystems lautet

$$a_1 x + b_1 y = k_1, \tag{2.21a}$$
$$a_2 x + b_2 y = k_2, \tag{2.21b}$$

mit den festen Größen $a_i, b_i, k_i \, (i = 1, 2)$ und Unbekannten (Variablen) x, y.

Die Lösung erfolgt nun im Allgemeinen durch Rückführung auf zwei Gleichungen mit jeweils einer Unbekannten.

1.) Additions-/Subtraktionsmethode

Durch Linearkombination der Gleichungen wird zunächst eine Variable eliminiert, $a_2 \cdot$(2.21a)$-$ a_1(2.21b):

$$\begin{aligned} \cancel{a_2 a_1 x} + a_2 b_1 y - \cancel{a_1 a_2 x} - a_1 b_2 y &= a_2 k_1 - a_1 k_2 \\ (a_2 b_1 - a_1 b_2) y &= a_2 k_1 - a_1 k_2 \\ \Rightarrow y &= \frac{a_2 k_1 - a_1 k_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad \text{sofern} \quad a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Analog erhält man aus $b_1 \cdot$ (2.21a) $- b_1 \cdot$ (2.21b)

$$x = \frac{b_2 k_1 - b_1 k_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \tag{2.23}$$

2.) Lösung durch Einsetzen

Auflösen von (2.21a) nach y ergibt $y = \frac{k_1 - a_1 x}{b1}$, $(b_1 \neq 0)$ und Einsetzen in (2.21b) führt auf

$$\begin{aligned} a_2 x + \frac{b_2}{b_1}(k_1 - a_1 x) &= k_2 \qquad | \cdot b_1 \\ a_2 b_1 x + b_2 k_1 - a_1 b_2 x &= b_1 k_2 \quad | - b_2 k_1 \\ (a_2 b_1 - a_1 b_2) x &= b_1 k_2 - b_2 k_1 \\ \Rightarrow x &= \frac{b_1 k_2 - b_2 k_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad \text{sofern} \quad a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Einsetzen in den Ausdruck für y ergibt

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{b_1}\left(k_1 - a_1 \frac{b_1 k_2 - b_2 k_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\right) = \frac{1}{\cancel{b_1}} \frac{a_2 \cancel{b_1} k_1 - \cancel{a_1 b_2 k_1} - a_1 \cancel{b_1} k_2 + \cancel{a_1 b_2 k_1}}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \\ &= \frac{a_2 k_1 - a_1 k_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Nach Auffinden der Lösung ist stets die Probe durch Einsetzen in beide Gleichugnen durchzuführen.

Schauen wir uns nun ein spezielles Beispiel an:

$$ax + by = 2a \tag{2.26a}$$
$$a^2 x - b^2 y = a^2 + b^2. \tag{2.26b}$$

Wir addieren nun $b \cdot$ (2.26a) + (2.26b)

$$\begin{aligned} abx + \cancel{b^2 y} + a^2 x - \cancel{b^2 y} &= 2ab + a^2 + b^2 \\ a \cancel{(a+b)} x &\overset{(1.6)}{=} (a+b)^{\cancel{2}} \quad , \quad a + b \neq 0 \\ \Rightarrow x = \frac{a+b}{a} \quad &, \quad a \neq 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Betrachten wir abschließend noch zwei Spezialfälle:

$$\begin{aligned} &1.) \quad b_1 = 0 \quad a_1 x = k_1 \qquad \Rightarrow x = \frac{k_1}{a_1} \\ &\qquad\qquad a_2 \frac{k_1}{a_1} + b_2 y = k_2 \Rightarrow y = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2} \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} &2.) \quad a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0 \quad a_2 \cdot (2.26a): \quad a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 k_1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_2 k_1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_1 \underbrace{(a_2 x + b_2 y)}_{(2.21b) = k_2} = a_2 k_1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow a_1 k_2 \overset{!}{=} a_2 k_1.$$

Gilt diese (von x und y unabhängige) Bedingung nicht, so hat das Gleichungssystem keine Lösung. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge, $\mathbb{L} = \emptyset$.

Gilt die Bedingung hingegen, so gilt $a_2 \cdot (2.21a) = a_1(2.21b)$, das heißt die Gleichungen sind *linear abhängig*. Damit ist jedes Paar (x, y), das eine der Gleichungen erfüllt, Lösung des gesamten Gleichungssystems und es gibt unendlich viele Lösungen, die im Parameterraum (x, y) eine Linie aufspannen.

2.4 Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten

Die allgemeine Form des Gleichungssystems lautet

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1, \tag{2.30a}$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2, \tag{2.30b}$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3, \tag{2.30c}$$

mit den festen Größen a_i, b_i, c_i, k_i $(i = 1, 2, 3)$ und Variablen x, y, z.

Die Lösung erfolgt im Allgemeinen durch Rückführung auf ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$c_2 \cdot (2.30a) - c_1 (2.30b): \quad \underbrace{(a_1 c_2 - a_2 c_1)}_{a_1'} x + \underbrace{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}_{b_1'} y = \underbrace{k_1 c_2 - k_2 c_1}_{k_1'} \tag{2.31}$$
$$c_3 \cdot (2.30a) - c_1 (2.30c): \quad \underbrace{(a_1 c_3 - a_3 c_1)}_{a_2'} x + \underbrace{(b_1 c_3 - b_3 c_1)}_{b_2'} y = \underbrace{k_1 c_3 - k_3 c_1}_{k_2'} \tag{2.32}$$

Unter Zuhilfenahme bereits besprochener Methoden lösen wir nun das neue Gleichungssystem

$$a_1' x + b_1' y = k_1', \tag{2.33a}$$
$$a_2' x + b_2' y = k_2', \tag{2.33b}$$

für x, y und bestimme z durch Einsetzen in das ursprüngliche Gleichungssystem.

Beispiel:

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$x - 3y - 2z = 5, \tag{2.34a}$$
$$-x + y + z = 0, \tag{2.34b}$$
$$5x + y + 4z = 3 \tag{2.34c}$$

Nun eliminieren wir z aus dem Gleichungssystem

$$(2.34a) + 2 \cdot (2.34b): \quad -x - y = 5 \tag{2.35a}$$
$$4 \cdot (2.34a) + 2 \cdot (2.34c): \quad 14x - 10y = 26. \tag{2.35b}$$

Dieses System mit zwei Unbekannten Lösen wir durch Elimination von x

$$7 \cdot (2.35a) + 0.5 \cdot (2.35b): \quad -12y = 48 \quad \Rightarrow \quad y = -4$$

$$\text{in } (2.35a): \quad x = -1 \tag{2.36}$$

$$\text{in } (2.34b): \quad z = 3. \tag{2.37}$$

Als letzten Schritt überprüfen wir unsere Rechnung durch Einsetzen in (2.34a) und (2.34c). Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \{(x; y; z)\} = \{(-1; -4; 3)\}. \tag{2.38}$$

Von einem *unterbestimmten* Gleichungssystem spricht man, wenn es mehr Unbekannt als Gleichungen gibt, bzw. Gleichungen linear abhängig sind. Schauen wir uns hierzu ein Beispiel an:

$$2x - y + z + 2 = 0, \tag{2.39a}$$

$$x + y - z + 1 = 0, \tag{2.39b}$$

$$7x + y - z + 7 = 0 \tag{2.39c}$$

Wir können mittels einer Linearkombination das Gleichungssystem auf lineare Abhängigkeit prüfen:

$$a \cdot (2.39a) + b \cdot (2.39b) \stackrel{!}{=} (2.39c) \tag{2.40}$$

$$\Rightarrow (2a + b)x + (b - a)y + (a - b)z + (2a + b) \stackrel{!}{=} 7x + y - z + 7.$$

Wir können die Lösungen für a und b einfach über einen Koeffizientenvergleich bestimmen

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad 2a + b = 7 \\ y:&\quad b - a = 1 \\ z:&\quad a - b = -1 \\ 1:&\quad 2a + b = 7 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2a + b &= 7 \\ b - a &= 1 \end{aligned}\right\} \quad a = 2, b = 3. \tag{2.41}$$

Wenn dieses (überbetimmte) System eine Lösung besitzt, dann ist das ursprüngliche Gleichungssystem unterbestimmt. Da wir $2 \cdot (2.39a) + 3 \cdot (2.39b) = (2.39c)$ enthält die dritte Gleichung keine neuen Informationen und wir können uns bei der Betrachtung auf die ersten beiden Gleichungen betrachten. Substituieren wir $u \equiv y - z$ dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x - u + 2 &= 0 \\ x + u + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = -1, u = 0 \Rightarrow y = z. \tag{2.42}$$

Das heißt, das alle Punkte $x = -1$, $y = z$ (unendlich viele) das Gleichungssystem lösen. Wählen wir eine Parametrisierung $y(t) = t, z(t) = t$ mit $t \in \mathbb{R}$, dann ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(-1, t, t) | t \in \mathbb{R}\}. \tag{2.43}$$

Zur graphischen Darstellung einer Gleichung mit drei Unbekannten wählen wir die allgemeine Form

$$ax + by + cz + d = 0 \quad | : d \tag{2.44}$$

und benenen die Koeffizienten um: $A \equiv -\frac{d}{a}, B \equiv -\frac{d}{b}, C \equiv -\frac{d}{c}$

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \quad \text{(Achsenabschnittsform).} \tag{2.45}$$

Dabei stellen A, B, C jeweils die Schnittpunkte mit der x- y- und z-Achse dar. Die lässt sich einfach durch Nullsetzen der jeweils anderen beiden Koordinaten zeigen.

Demnach wird durch Gleichung (2.45) eine Ebene im dreidimensionalen Raum beschrieben, welche die Koordinatenachsen in den Punkten $(A;0;0), (0;B;0)$ und $(0;0;C)$ schneidet.

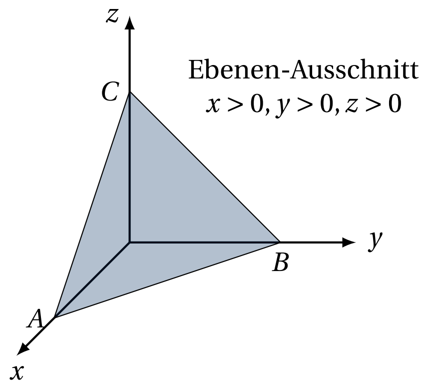


Fig. 2: Grafische Darstellung der Lösung einer Gleichung mit drei Unbekannten.

Jeder der drei Gleichungen entspricht eine Ebene:

- Schneiden sich alle drei Ebenen in einem Schnittpunkt, dann existiert genau eine Lösung.
- Schneiden sich alle drei Ebenen in einer Schnittgeraden, dann ist das Gleichungssystem unterbestimmt.
- Besitzen die drei Ebenen nicht mindestens einen gemeinsamen Punkt, dann existiert auch keine Lösung.

3 Quadratische Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt geht es um quadratische Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchsten in zweiter Potenz auftreten, sowie um quadratische Funktionen und Systeme aus quadratischen Gleichungen.

3.1 Die quadratische Gleichung

Wir schauen uns zunächst die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung an

$$\underbrace{Ax^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{Bx}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{C}_{\text{Absolutglied}} = 0. \tag{3.1}$$

Wir nehmen im Folgenden o. B. d. A. an, es sei $A > 0$. Zudem sind A, B und C reelle Konstanten. Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle

$$B = 0 \qquad \begin{aligned} & Ax^2 + C = 0 \\ \Rightarrow \quad & \text{für} \quad C \leq 0: \quad \text{Lösungen} \quad x_1 = \sqrt{-\frac{C}{A}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}} \\ \Rightarrow \quad & \text{für} \quad C > 0: \quad \text{keine (reellen) Lösungen} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$C = 0 \qquad \begin{aligned} & Ax^2 + Bx = 0 \\ & x(Ax + B) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \text{Lösungen} \quad x_1 = 0, x_2 = -\frac{B}{A}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zur Bestimmung einer allgemeinen Lösung verwenden wir die *Methode der quadratischen Ergänzung*:

1. Überführung in die *Normalform* mit Umbenennung $p \equiv \frac{B}{A}, q \equiv \frac{C}{A}$

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad , \quad x^2 + px + q = 0; \tag{3.4}$$

2. quadratische Ergänzung:

$$x^2 + px = -q \qquad \Big| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2. \tag{3.6}$$

3. Auflösen nach x

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{3.7}$$

p-q-Lösungsformel

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{3.8}$$

Man bezeichnet $D \equiv \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als *Diskriminante*. Anhand ihres Vorzeichens können folgende Fälle auftreten:

- $D > 0$, es existieren zwei reelle Lösungen
- $D = 0$, beide Lösungen fallen zusammen $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
- $D < 0$, es existiert keine (reelle) Lösung.

Betrachten wir für den Fall $D \geq 0$ die Summe und das Produkt der beiden allgemeinen Lösungen,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \cancel{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} - \frac{p}{2} - \cancel{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = -p \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &\overset{(1.6)}{=} \frac{p^2}{4} - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{4}} + q = q, \end{aligned} \tag{3.10}$$

dann folgt damit der *Vieta'sche Wurzelsatz*[1] für die Lösungen quadratischer Gleichungen,

$$x_1 + x_2 = -p \quad , \quad x_1 x_2 = q, \quad \text{Vieta'scher Wurzelsatz.} \tag{3.11}$$

Setzen wir dieses Resultat in die Normalform ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \\ &= (x - x_1)(x - x_2), \end{aligned} \tag{3.12}$$

also die Zerlegung in Linearfaktoren.

[1] Wurzeln sind eine Bezeichnung für die Nullstellen eines Polynoms.

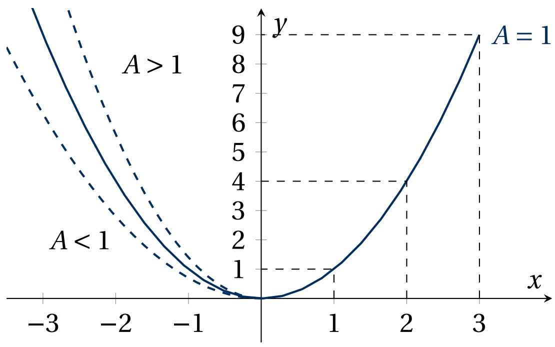
3.2 Quadratische Funktionen

Für quadratische Funktionen lautet die allgemeine Form

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad , \quad A, B, C \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Wir nehmen wieder o. B. d. A. $A > 0$ an. Offenbar enspricht das Lösen einer quadratischen Gleichung der Suche nach den Nullstellen einer quadratischen Funktion (und umgekehrt). Betrachten wir zunächst den Fall $B = C = 0$:

- Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$
  Wertebereich $y \geq 0$;
- $A = 1$: *Normalparabel*
- $A > 1$: gestauchte Normalparabel ;
- $A < 1$: gestreckte Normalparabel;
- doppelte Nullstele bei $x_{1/2} = 0$.



Durch Addition der Konstante y_0 verschiebt sich die Parabel entlang der y-Achse. Für $y_0 > 0$ bzw. $y_0 < 0$ existieren keine bzw. zwei Nullstellen.

Durch die Substitution $x \mapsto x + x_0$ verschiebt sich die y-Achse um den Wert x_0, bzw. die Parabel um $-x_0$ entlang der x-Achse. Wir erhalten damit die quadratische Funktion

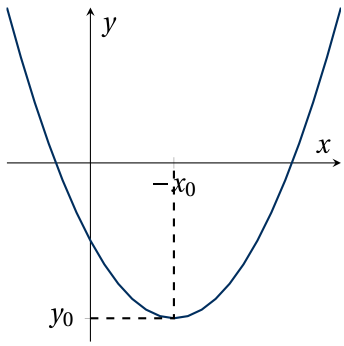
$$f(x) = A(x + x_0)^2 + y_0 \quad \text{Scheitelpunktform,} \tag{3.14}$$

wobei $x_0 > 0$: Verschiebung der y-Achse (Parabel) nach rechts (links)
$x_0 < 0$: Verschiebung der y-Achse (Parabel) nach links (rechts).

Vergleichen wir mittels quadratischer Ergänzung die Scheitelpunktform mit der Normalform, so ergibt sich

$$x_0 = \frac{B}{2A} \quad , \quad y_0 = C - Ax_0^2. \tag{3.15}$$

Das heißt, dass jede quadratische Funktion durch geeignete Verschiebung des Koordinatensystems auf eine Parabel der Form $f(x) = Ax^2$ zurückgeführt werden kann.



3.3 Quadratische Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Die allgemeine Form eines quadratischen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten Größen x, y lautet

$$a_i x^2 + b_i y^2 + c_i x y + d_i x + e_i y + f_i = 0. \tag{3.16}$$

Die allgemeine ist jedoch nur umständlich zu diskutieren und es existieren viele Lösungsmöglichkeiten. Daher beschränken wir uns hier auf zwei Beispiele.

Beispiel 1

$$x^2 + y^2 - 2x = \frac{11}{2}, \tag{3.17a}$$

$$2xy - 2y = \frac{5}{2} \tag{3.17b}$$

Wir addieren nun (3.17a) ± (3.17b) und erhalten

$$\underbrace{x^2 + y^2 \pm 2xy}_{(x\pm y)^2} - 4(x \pm y) = 11 \pm 5. \tag{3.18}$$

Wir substituieren nun $u \equiv x + y$ und $v \equiv x - y$, damit haben wir zwei voneinander unabhängige quadratische Gleichungen

$$\begin{matrix} u^2 - 2u - 8 = 0 \\ v^2 - 2v - 3 = 0 \end{matrix} \quad \text{mit den Lösungen} \quad \begin{matrix} u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} & \Rightarrow & u_1 = 4, u_2 = -2 \\ v_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} & \Rightarrow & v_1 = 3, v_2 = -1. \end{matrix} \tag{3.19}$$

Resubstituieren wir jetzt nun $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$, dann existieren vier Lösungspaare für (x, y), da vier Paare (u_i, v_j) beildet werden können

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{7}{2} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}(u_1 - v_1) = \frac{1}{2}; \\ x_2 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_2) = \frac{3}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2}(u_1 - v_2) = \frac{5}{2}; \\ x_3 &= \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2} \quad , \quad y_3 = \frac{1}{2}(u_2 - v_1) = -\frac{5}{2}; \\ x_4 &= \frac{1}{2}(u_2 + v_2) = -\frac{3}{2} \quad , \quad y_4 = \frac{1}{2}(u_2 - v_2) = -\frac{1}{2}; \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \right\}. \tag{3.21}$$

Im Zweifelsfall (“Sind wirklich alle Kombinationen erlaubt?”) sollte die Probe durchgeführt werden.

Bemerkung: Eine geometrische Interpretation ist auch hier möglich: Gleichung (3.17a) beschreibt einen Kreis des Radius $\sqrt{\frac{13}{2}}$, dessen Mittelpunkt um 1 nach rechts verschoben ist, wohingegen (3.17b) als Funktion $y = \frac{5}{4}\frac{1}{x-1}$ geschrieben werden kann. Die Schnittpunktkoordinaten der Hyperbeln mit dem Kreis sind die Lösungspaare.

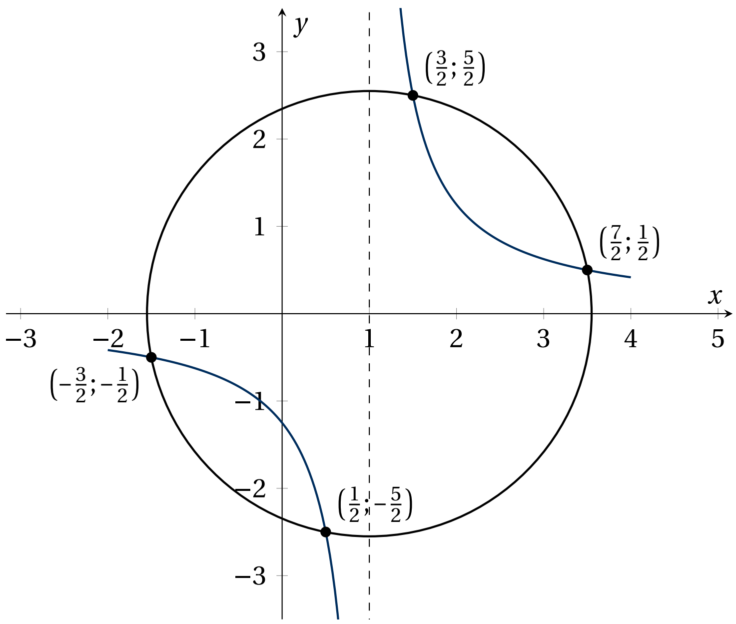


Fig. 3: Grafische Lösung des quadratischen Gleichungssystems.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 2, \\ xy^2 &= -8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{Substitution} \quad y^2 \equiv z \qquad \begin{aligned} x + z &= 2, \\ xz &= -8 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Der Satz von Vieta angewandt auf das Gleichungssystem (3.22), dass x und z Lösungen einer qudratischen Gleichung mit $p = -2$ und $q = -8$ sind, also der Gleichung

$$u^2 + pu + q = u^2 - 2u - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} 4 \\ -2. \end{cases} \tag{3.23}$$

Wir könnten nun $u_1 = x, u_2 = z$ oder $u_1 = z, u_2 = x$ identifizieren, allerdings muss $z = y^2$ positiv sein. wir erhalten somit die Lösungen

$$x = -2, y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{(-2;2), (-2,-2)\}. \tag{3.24}$$

4 Umgang mit beliebigen Potenzen

Bisher habne wir uns auf Gleichungen/Funktionen beschränkt, deren Variablen höchstens in erster oder zweiter Potenz aufgetreten sind. Nun sollen Methoden zum Umgang mit beliebigen (ganzzahligen) Potenzen behandelt werden.

4.1 Polynome und Polynomdivision

Ein *Polynom n-ten Grades* ist eine Funktion der Form

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{4.1}$$

mit den reellen Konstanten $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$. Die Nullstellen der Funktion $f_n(x)$ werden auch *Wurzeln* des Polynoms genannt; ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Wurzeln.

Besitzt ein Polynom $f_n(x)$ genau n reelle Wurzeln, dann kann es als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden (vergleiche den Fall $n = 2$ mit dem Satz von Vieta),

$$f_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n), \tag{4.2}$$

mit Wurzeln $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Demnach kann eine Wurzel gemäß $f_n(x) = (x - x_n) f_{n-1}(x)$ aus einem Polynom abgespalten werden, wobie $f_{n-1}(x)$, bei bekanntem x_n, mit Hilfe der *Methode der Polynomdivision* zu bestimmten ist,

$$f_{n-1}(x) = f_n(x) : (x - x_n). \tag{4.3}$$

Möchte man einen unbekannten Linearfaktor abspalten, so ist ein x_i zu erraten.

Wir wollen jetzt das Verfahren der Polynomdivision am Beispiel folgender Funktion diskutieren:

$$f_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \qquad x_3 = 2. \tag{4.4}$$

Der Algorithmus für die schriftliche Polynomdivision besteht aus drei Schritten:

1. Division: Man dividiere das Glied der höchsten Potenz des Zählerpolynoms durch das Glied der höchsten Potenz des Nennerpolynoms und schreibt das Ergebnis neben dem Gleichheitszeichen auf.
2. Multiplikation: Man multipliziert das Ergebnis von Schritt 1 mit dem Nennerpolynom und schreibt das Ergebnis unter das Zählerpolynom.
3. Subtraktion: Man subtrahiert das Ergebnis von Schritt 2 vom Zählerpolynom und beginnt wieder von vorne.

$$\text{Ergebnis:}\quad \begin{array}{rrrrl}
x^3 & +5x^2 & +8x & -4 & :(x-2) = x^2-3x+2 \\
-(x^2 & -2x^2) & & & \\
\hline
 & -3x^2 & +8x & -4 & \\
 & -(-3x^2 & +6x &) & \\
\hline
 & & 2x & -4 & \\
 & & -(2x & -4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array} \tag{4.5}$$

Die Nullstellen des Restpolynoms $x^2 - 3x + 2$ erhalten wir mittels p-q-Fromel:

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = 1. \tag{4.6}$$

Damit lautet die Linearfaktorzelegung des Polynoms

$$f_3(x) = (x-1)(x-2)^2 \underbrace{= (x-1)(x^2-4x+4) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4}_{\text{Probe}} \tag{4.7}$$