Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Vorbereitung der Übung: Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Aufgabe 1: *Bruchrechnung* Ziel: (a) bis (f)

(a) $$\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = \underline{\underline{b-a}}$$

(b) $$\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a + \cancel{b} + a - \cancel{b}}{\cancel{a} + b - \cancel{a} + b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

(c) $$\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}\left(\frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2 - y^2}{x+y}\right) = \frac{x-y}{\cancel{x}} \underbrace{\left(\frac{x+y}{y} - 1\right)}_{\frac{\cancel{x}}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

(d) $$\frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

(e) $$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

(f) $\frac{a^2-1}{a^2+a} - \cancel{a}\frac{a+1}{a^{\cancel{3}2}-\cancel{a}} + \frac{1}{a} + \frac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$

$= \frac{1}{a}\frac{\cancel{(a+1)}(a-\cancel{1})}{\cancel{a+1}} - \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)} + \cancel{\frac{1}{a}} + \frac{\cancel{4a+4}}{4\cancel{(a+1)}(a-1)} = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \underline{\underline{1}}$

(g) $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\frac{\sqrt{2}}{ax} - \frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]$ für $x = \frac{1}{a-1}$

$$= \frac{a+x+1}{a+x-1}\left[\frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2}\right] = \frac{a+x+1}{\cancel{a+x-1}}\frac{\overbrace{(a+x)^2-1}^{(a+x+1)\cancel{(a+x-1)}}}{\sqrt{2}a^2x^2} = \underbrace{\frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}}$$

$$x+a+1 = \frac{1}{a-1} + a + 1 = \frac{a^2}{a-1}$$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze* Ziel: (a) bis (c)

(a) $\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n = \frac{(a+b)^n\cancel{(a-b)^n}}{\cancel{(x+y)^n}(x-y)^n}\frac{\cancel{(x+y)^n}}{\cancel{(a-b)^n}} = \underline{\underline{\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n}}$

(b) $\frac{b^x c^y (ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0,5}\right)^z\right]^2} = a^{2z+y-(y-x+2z)}b^{x+2z+y-x-2z}c^{y-x-(y-x-z)} = \underline{\underline{a^x b^y c^z}}$

(c) $\frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$

$= a^{1-n+4n-3+4-3n}b^{-1-2n+5+3n-6}(a+b)^{3n-4+3-2n-n+2}$

$= \underline{\underline{a^2b^{n-2}(a+b)}}$

(d) $\left(a^{n+2}-a^n\right):(a^3+a^2) = \frac{a^n}{a^2}\frac{a^2-1}{a+1} = \underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}}$

(e) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^3 = a^{-8-6}b^{-10-9}x^{2+3}y^{-6-6} = \underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}}}$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken* Ziel: (a) bis (b)

Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} = \sqrt[pq]{a^{mq-np}}$$

Beispiel für "Rationalmachen des Nenners":

$$r + \sqrt{1+r^2} - \frac{1}{r+\sqrt{1+r^2}} = r + \cancel{1+r^2} - \frac{r-\sqrt{1+r^2}}{-1} = \underline{\underline{2r}}.$$

(a) $$\sqrt[6]{a^3}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab} = \frac{1-\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{ab}}{1-ab} = \frac{(1-\sqrt{ab})^2 + 2\sqrt{ab}}{1-ab} = \underline{\underline{\frac{1+ab}{1-ab}}}$$

(b) $$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}} \quad \text{für } x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \quad \text{mit } |m| < 1$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}\right)^2}{2bx} = \frac{\cancel{2}a + \cancel{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}}{\cancel{2}bx} = \frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4a^2m^2}{(1+m^2)^2}}}{2am}(1+m^2)$$

$$= \frac{1+m^2+\sqrt{(1+m^2)^2-4m^2}}{2m} = \frac{1+m^2+1-m^2}{2m} = \underline{\underline{\frac{1}{m}}}$$

(c) $$\left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{a\sqrt{b} + \cancel{b\sqrt{a}} - \cancel{\sqrt{a}b}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\,\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt[4]{b}\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}$$

$$= \underline{\underline{a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}}$$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

(a)
$$(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$$
$$\cancel{(m^2-n^2)x^2}+(bn-an+bm-am)x=\cancel{x^2(m^2-n^2)}-1$$
$$(a-b)(m+n)x=1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{1}{(a-b)(m+n)}}}$$

(b)
$$\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2} \quad |\cdot b(a^2-b^2)$$
$$(ax+b)(a+b)-(a-bx)(a-b)=2b(ax+b)$$
$$(ax+b)\cancel{(a-b)}-(a-bx)\cancel{a-b}=0 \quad (a\neq b)$$
$$(a+b)x=a-b \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{a-b}{a+b}}}$$

(c)
$$\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{\underbrace{n^4-1}_{n^4-1=(n^2+1)(n+1)(n-1)}}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n} \quad |\cdot(n-1)(n+1)$$
$$\left(\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)\right)x=\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)$$
$$4x=3 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{3}{4}}}.$$

(d)
$$a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$$
$$\cancel{a-b-1}\sqrt{x}=a^2-b^2-(a+b)=(a+b)\cancel{(a-b-1)} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=(a+b)^2}}$$

(e)
$$\frac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\frac{y^2}{1-2y}}, \quad \text{siehe 1b) mit } a=x, b=\sqrt{1-4y^2}$$
$$\frac{x}{\cancel{\sqrt{1-4y^2}}}=\frac{|y+1|}{\cancel{\sqrt{1+2y}}}\frac{|y-1|}{\cancel{\sqrt{1-2y}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \underline{\underline{x=y^2-1}} & \text{für} \quad |y|\geq 1 \\ \underline{\underline{x=1-y^2}} & \text{für} \quad |y|<1. \end{cases}$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Tafelbeispiel: $\dfrac{10(x+y)+3}{x-2y+4} = 1, \quad \dfrac{36x-3y}{7(x-y)+3} = 3$

1. Sortieren nach x und y

$$\begin{aligned} 9x + 12y &= 1 \quad (1) \\ 15x + 18y &= 9 \quad (2) \end{aligned}$$

2. Prüfe auf lineare Unabhängigkeit, d. h. Berechne $a_1b_2 - a_2b_1$ (Determinante, vgl. Vorlesung):

$$9 \cdot 18 - 15 \cdot 12 = 162 - 180 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{genau ein Lösungspaar } (x, y)$$

3. Lösen, bspw. durch geschickte Linearkombination (Elimination von y)

$$\begin{aligned} 2\cdot(2) - 3\cdot(1): \quad 3x &= 15 \quad \Rightarrow x = 5 \\ \text{in } (1): \quad 12y &= -44 \quad \Rightarrow y = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lösungsmenge} \quad \mathbb{L} = \left\{\left(5; -\frac{11}{3}\right)\right\}$$

Aufgabe 1: *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten* Ziel (a) bis (d)

(a)

$$\begin{aligned} 33x + 12y &= 25 \quad (1) \\ 11x - 3y &= 6 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - 3\cdot(2): \quad 21y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}, \quad \text{in (2):} \quad x = \frac{7}{11} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{7}{11}; \frac{1}{3}\right)\right\}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3y}{3x-y} &= \frac{17}{9} \\ \frac{3x+4y}{6x-1} &= 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \quad (1) \\ 9x - 4y &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - (2): \quad 6x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$3\cdot(1) - (2): \quad 8y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{y+3}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{y+3}{2y-5x}=\dfrac{3}{5}\end{array}\right\}\Longrightarrow\quad\begin{array}{rl}3x-y=\;\;-3 & (1)\\ 15x-y=-15 & (2)\end{array}$$

$$(1)-(2):\quad -12x=12\quad\Rightarrow\quad x=-1$$
$$\text{in }(1):\qquad y=0\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(-1;0)\}}}$$

(d)
$$ax+by=2a\quad (1)$$
$$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=\frac{2}{a}\quad (2)$$
$$(1)-ab\cdot(2):\ \cancel{2}by=\cancel{2}(a-b)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{a}{b}-1$$
$$\text{in }(1):\quad ax+\cancel{a}-b=\cancel{2}a\quad\Rightarrow\quad x=\frac{b}{a}+1\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{b}{a}+1;\frac{a}{b}-1\right)\right\}}}$$

(e)
$$x+14y=\frac{1}{\sqrt{2}}-7\sqrt{2}\qquad (1)$$
$$3\sqrt{2}x-\frac{y}{\sqrt{3}}=3+\frac{1}{\sqrt{6}}\quad (2)$$
$$(1)-\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(2):\quad \cancel{\left(14+\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)}y=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-7\sqrt{2}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{3\sqrt{12}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\left(14+\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)}\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\text{in }(1):\quad x-\cancel{7\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{7\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}}$$

(f)
$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=a+b\quad (1)$$
$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2b\qquad (2)$$
$$(a+b)\cdot(1)-a\cdot(2):\quad \left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}\right)y=a^2+b^2$$
$$\cancel{\left(\cancel{ab}+b^2+a^2-\cancel{ab}\right)}y=b(a-b)(a^2+b^2)$$
$$\Rightarrow y=b(a-b)$$
$$\text{in }(1):\quad \frac{x}{a+b}+\cancel{b}=a+\cancel{b}\qquad\Rightarrow x=a(a+b)\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(a(a+b);b(a-b))\}}}$$

(g)
$$39x-38y=1\quad (1)$$
$$91x-57y=4\quad (2)$$
$$2\cdot(2)-3\cdot(1):\quad (182-117)x=5\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{13}$$
$$\text{in }(1):\quad 38y=2\qquad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{19}\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{13};\frac{1}{19}\right)\right\}}}$$

Aufgabe 2: *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten* Ziel: (a) und (b)

Tafelbeispiel:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \quad (1)\\ x + 2y + 4z &= 15 \quad (2)\\ x + 3x + 9z &= 23 \quad (3) \end{aligned}$$

Vorgehen: Wir wollen eine Linearkombination der drei Gleichungen finden, sodass (bspw.) x und y verschwinden; d. h. in $a \cdot (1) + b \cdot (2) + c \cdot (3)$ soll $a + b + c = 0$ sein und $a + 2b + 3c = 0$. Wir haben offenbar die Freiheit, $a = 1$ zu wählen, also $b = -2$ und $c = 1$.

$$\begin{aligned} &(1) - 2 \cdot (2) + (3): \quad 2z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1\\ &\text{in } (1): \quad x + y = 8 \quad (4)\\ &\text{in } (2): \quad x + 2y = 11 \quad (5) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4),(5) können nun mit den früheren Methoden gelöst werden.
Optionale Kreativlösung: Angenommen $x, y \in \mathbb{N}$. Nach (5) muss x ungerade sein, damit nach (4) auch y. Die einzigen positiven Zerlegungen der Zahl 8 in zwei ungerade Zahlen sind (1,7) und (3,5). Nur letztere löst (4) und (5). Wir erhalten $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(5; 3; 1)\}}}$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 5 \quad (1)\\ 3x + 7y - 5z &= 5 \quad (2)\\ x + y - z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$2 \cdot (1) + (2) - 5 \cdot (3): \quad 10z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \text{in } (1): \quad x - y &= 0\\ \text{in } (3): \quad x + y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad x = y = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1; 1; 1)\}}}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 3z &= 4 \quad (1)\\ -x + y - z &= -2 \quad (2)\\ 7x + 4y - 5z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(1) + 8 \cdot (2) - (3): \quad -12x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \text{in } (1): \quad -4y + 3z &= 1\\ \text{in } (2): \quad y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad y = 2, z = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}}}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + y &= b + a \quad (1)\\ x + z &= a + c \quad (2) \qquad \text{Lösung durch Draufschauen.}\\ y + z &= c + b \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1) + (2) - (3): \quad 2x = 2a\\ &(1) - (2) + (3): \quad 2y = 2b\\ &(2) + (3) - (1): \quad 2z = 2c \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a; b; c)\}}} \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 6x-4y+\ \ 8z&=0 \quad (1)\\ -2x+\ \ y-\ \ \ \ z&=0 \quad (2)\\ 12x-7y+11z&=0 \quad (3)\end{aligned}$$

Da (1) − 3 · (2) = (3), ist das System unterbestimmt.

$$(1)+3\cdot(2):\quad -\ y+5z=0 \quad \Rightarrow y=5z$$
$$(1)+4\cdot(2):\quad -2x+4z=0 \quad \Rightarrow x=2z \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(2z;5z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}}}$$

Aufgabe 3: *Parametrisierung von Lösungsmengen*

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x-7y=1$ an für

(a) $x,y\in\mathbb{R}$;

(b) $x,y\in\mathbb{N}$.

(a) Für $x,y\in\mathbb{R}$ ist nichts zu beachten. Wir Lösen die Gleichung nach x auf und erhalten

$$x=\frac{1+7y}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1+7\lambda}{13};\lambda\right)\mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}}}.$$

(b) Für $x,y\in\mathbb{N}$ muss $1+7n, n\in\mathbb{N}$, ein Vielfaches von 13 sein. Die kleinste natürliche Zahl, für die das gilt, ist $n=11$ (ausprobieren), d. h. alle übrigen Teiler liegen in 13er-Schritten darüber.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n+1$	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
13-Reihe	13	26	39	52	65	78					

Setzen wir also $\lambda=11+13n$ in $\mathbb{L}$ von oben ein, ergibt sich $\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{(6+7n;11+13n)\mid n\in\mathbb{N}_0\right\}}}$.

Aufgabe 4: *Gleichungssysteme* Ziel (a) und (b)

Tafelbeispiel: In dieser Aufgabe werden nicht linear aussehende Gleichungen auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt.

$$\begin{aligned}(1-x)^2&=5y^2-4(x-2)^2 \quad (1)\\ 2(x^2-y^2)&=6x-5 \qquad\qquad (2).\end{aligned}$$

Sortieren wir das Gleichungssystem um, ergibt sich

$$\begin{aligned}5(x^2-y^2)-18x+17&=0 \quad (3)\\ 2(x^2-y^2)-\ \ 6x+\ \ 5&=0 \quad (4)\end{aligned}$$

$$(3)-\frac{5}{2}\cdot(2):\quad -3x+\frac{9}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{2}$$

$$\text{in } (2):\quad y^2=x^2-3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{4} \qquad y=\pm\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\right)\right\}}}.$$

Lösung:

(a)

$$x^2+y^2=2(xy+2)\quad(1)\quad\Rightarrow\quad(x-y)^2=4\Rightarrow x-y=\pm 2\quad(1a)$$
$$x\ +y\ =6\qquad\qquad(2)$$

$$(1a)+(2):\quad 2x=\begin{cases}8, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases}$$

$$\text{in }(2):\qquad y=\begin{cases}2, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(4;2),(2;4)\Big\}}}$$

(b)

$$\frac{12}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5\quad(1)$$
$$\frac{8}{\sqrt{x-1}}+\frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6\quad(2)$$
$$2\cdot(1)-(2):\qquad 16=4\sqrt{x-1}\qquad\Rightarrow\qquad x=17$$
$$2\cdot(1)-3\cdot(2):\quad 20=8\sqrt{y+\frac{1}{4}}\quad\Rightarrow\quad y=6\qquad\Longrightarrow\qquad\underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(17;6)\Big\}}}$$

Optionaler Hinweis: nicht immer muss alles mühsam quadriert und aufgelöst werden, sondern man kann auch versuchen draufzuschauen.

- Was ergibt 8 multipliziert mit 20? Antwort: $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
- Die Wurzel woraus ist $\frac{5}{2}$? Antwort: $\frac{25}{4}$.
- Damit ist $y=\dfrac{25}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{24}{4}=6.$

(c)

$$\frac{x^2-y^2}{2x+3}+y^2=(x+y)x-xy\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2-y^2}{2x+3}=x^2-y^2\quad(1)$$
$$y-2x=3\quad(2)$$

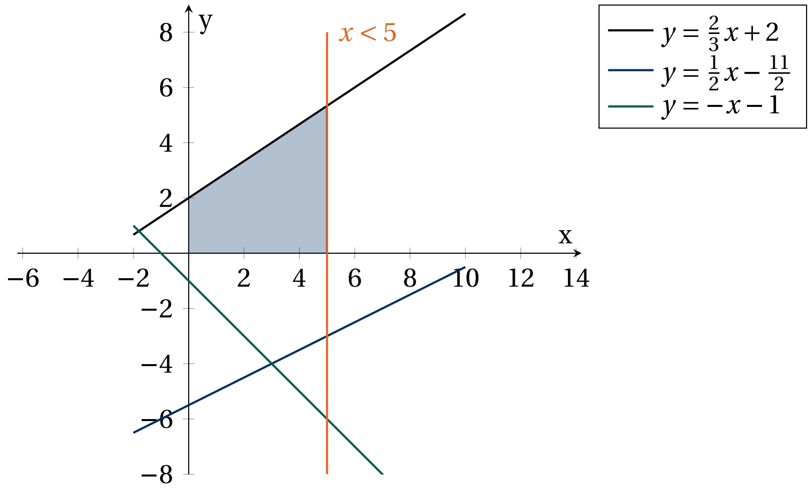
$$\text{Fall } x^2\neq y^2\qquad\left.\begin{array}{ll}(1):1=2x+3 & \Rightarrow x=-1\\ \text{in }(2): & y=1\end{array}\right\}\text{ Widerspruch}$$

$$\text{Fall } x=\pm y\quad(2):\quad y=\begin{cases}-3, & \text{oberes VZ}\\ 1, & \text{unteres VZ}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad\underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(-3;-3),(-1;1)\Big\}}}$$

Aufgabe 5: *Ungleichungssysteme*

(a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6\,, \\ x - 2y &< 11\,, \\ x &> -y - 1\,, \\ x &< 5\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

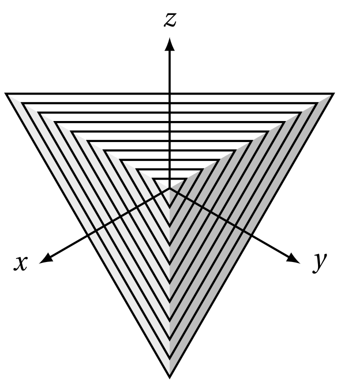


Offenbar können die zweite und dritte Gleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am schraffierten Gebiet ändert.

(b) * Welches Gebiet im ersten Oktanden ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z\,, \\ x + z &\geq y\,, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige (unendlich große) Pyramide, deren Spitze auf dem Koordinatenursprung liegt und deren Kanten jeweils die $x-y-$, $x-z-$ und $x-z$-Ebene halbieren.



AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Quadratische Gleichungen* Ziel: (a) und (b)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der pq-Formel.

Tafelbeispiel: Ziel ist es, die Ausdrücke in die Form $(x+a)^2$ oder $(ax+b)^2$ zu bekommen.

1. $3x^2+18x+15=0, \quad \Rightarrow \quad x^2+6x+5=0,$

   vgl. mit $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2 \quad \Rightarrow 2a \overset{!}{=} 6 \Rightarrow a=3, \Rightarrow a^2=9.$

   $\Rightarrow \underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}-4=0 \quad \overset{\text{Wurzel}}{\Longrightarrow} \pm(x+3)=2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=-1, x_2=-5}}$

2. $16x^2-56x-15=0,$

   vgl. mit $(ax+b)^2 = a^2x^2+2abx+b^2 \quad \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4, \Rightarrow a^2=9.$

   $2ab=-56 \quad \Rightarrow \quad b=-7 \Rightarrow b^2=49$

   $\underbrace{16x^2-56x+49}_{(4x-7)^2}-64=0 \quad \Rightarrow \quad \pm(4x-7)=8 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{15}{4}, x_2=-\frac{1}{4}}}$

Lösung:

(a) $x^2-10x+9=0 \quad |+16$

$$(x-5)=16 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_1=9, x_2=1}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=5\pm\sqrt{25-9}=\begin{cases}9\\1\end{cases}$$

(b) $x^2+x-12=0 \quad |+\frac{49}{4}$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_1=3, x_2=-4}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$$

Es ist immer am Vorfaktor von x abzulesen, welches a in $(x\pm a)^2$ steckt; hier offenbar $n=1/2$, wir erzeugen also $1/4$ auf der linken Seite.

(c) $x^2-\sqrt{8}x+1=0 \quad |+1 \quad (\sqrt{8}=2\sqrt{2})$

$$(x-\sqrt{2})^2=1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2}=\pm1+\sqrt{2}}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}=\sqrt{2}\pm1.$$

Aufgabe 2: *Wurzeln quadratischer Gleichungen*

Tafelbeispiel:

1. Wiederholung Vieta'scher Wurzelsatz:
   Habe die Gleichung $x^2+px+q=0$ die Wurzeln x_1 und x_2, dann lautet die Linearfaktorzerlegung

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 \underbrace{-(x_1+x_2)}_{p} + \underbrace{x_1 x_2}_{q}$$

2. Wann sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung identisch?

$$x_1 = x_2 = a \quad \overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad p = -(a+a) = 2a, \quad q = a^2$$

   Die Gleichung muss von der Form $0 = x^2 - 2ax + a^2$ sein (vgl. 2. binomische Formel).

3. Von welcher Form ist eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln den Quotienten a und die Differenz b haben?

$$\frac{x_1}{x_2} = a, \quad x_1 - x_2 = b \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{ab}{a-1}, \quad x_2 = \frac{b}{a-1}$$

$$\overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad p = -\frac{(a+1)b}{a-1} \quad , \quad q = \frac{ab^2}{(a-1)^2}$$

$$\Longrightarrow 0 = x^2 - \frac{(a+1)b}{a-1}x + \frac{ab^2}{(a-1)^2}$$

Lösung:

(a) *Stellen Sie $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.*

$$\text{Vieta: } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = x_1 x_2 \quad (1), \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad (2)$$

1) Variante 1: raten und konstruieren
   Gleichung (2) legt nahe, dass $x_1 = a/b$, $x_2 = b/a$, jedoch gilt dann $x_1 x_2 = 1$. Welche ist die einfachste Modifikation dieser Idee, die immer noch (2) erfüllt?

$$x_1 = \frac{a}{b} + n, \quad x_2 = \frac{b}{a} - n$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = 1 + n\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) - n^2 \overset{!}{=} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad n = -1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{a}{b} - 1, \quad x_2 = \frac{b}{a} + 1}}$$

   Da es sich bei $x_{1/2}$ um die Wurzeln einer qudratischen Gleichung handelt, ist die Lösung - bis auf Numerierung - eindeutig.

2) Variante 2: Lösen der qudratischen Gleichung. Nach Vieta folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x + \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \\
\Rightarrow x_{1/2} &= \frac{a^2+b^2}{2ab} \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} - \frac{a^2-b^2}{ab}} \\
&= \frac{a^2+b^2 \pm \sqrt{a^4+b^4+2a^2b^2-4a^3b+4ab^3}}{2ab}
\end{aligned}
$$

Versuche den Wurzelterm zu faktorisieren:

$$
\begin{aligned}
(a^2 \pm b^2 \pm 2ab)^2 &= (a^2 \pm b^2)^2 + 4a^2b^2 \pm 4ab(a^2+b^2) \\
&= a^4 + b^4 + 4a^2b^2 \pm 2a^2b^2 \pm 4a^3b + (\pm 1 \cdot \pm 1)4ab^3.
\end{aligned}
$$

Wir sollten also zweimal das untere Vorzeichen wählen, dann folgt:

$$
\begin{aligned}
x_{1/2} &= \frac{a^2+b^2 \pm (a^2-b^2-2ab)}{2ab} = \begin{cases} \frac{a}{b} - 1 \\ \frac{b}{a} + 1 \end{cases} \\
\Rightarrow & \underline{\underline{x_1 = \frac{a}{b} - 1, \quad x_2 = \frac{b}{a} + 1}}
\end{aligned}
$$

(b) *Bestimmen Sie in der Gleichung* $5x^2 - kx + 1 = 0$ *den Koeffizienten* k *so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.*
Wir berechnen die Wurzeln mit der pq-Formel

$$
\begin{aligned}
& x^2 - \frac{k}{5}x + \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{k}{10} \pm \sqrt{\frac{k^2}{100} - \frac{1}{5}} \\
\Rightarrow & x_1 - x_2 = 2\sqrt{\frac{k^2-20}{100}} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k^2-20}{100} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow k^2 = 45 \Rightarrow \underline{\underline{k = \pm 3\sqrt{5}}}.
\end{aligned}
$$

(c) *Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ *so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich* p *und* q *sind.*
Mit Satz von Vieta folgt

$$
\begin{aligned}
& p = -(x_1 + x_2) \overset{!}{=} -(p+q) \quad \Rightarrow \quad 2p + q = 0 (*) \\
& q = x_1 x_2 \overset{!}{=} pq, \quad \text{Fallunterscheidung} \\
& \left.\begin{array}{ll} \text{Fall } q = 0: & p = 0 \quad \text{aus (*)} \\ \text{Fall } q \neq 0: & p = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} q = -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\{(p;q)\} = \{(0;0),(1;-2)\}}}
\end{aligned}
$$

(d) *Gegeben ist die quadratische Gleichung* $ax^2 + bx + c = 0$. *Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich*

- *dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.*

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x_1' = 2x_1, x_2' = 2x_2 \text{ folgt} \quad \frac{2b}{a} = -(x_1' + x_2') = p'$$
$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x_1' = 2x_1, x_2' = 2x_2 \text{ folgt} \quad \frac{4c}{a} = x_1' x_2' = q'$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{ax^2 + 2bx + 4c = 0}}$$

- *den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.*

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x_1' = \frac{1}{x_1}, x_2' = \frac{1}{x_2} \text{ folgt} \quad \frac{b}{a} = -\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2}'\right) = -\frac{x_1' + x_2'}{x_1' x_2'} = \frac{p'}{q'}$$
$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x_1' = \frac{1}{x_1}, x_2' = \frac{1}{x_2} \text{ folgt} \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{x_1' x_2'} = \frac{1}{q'}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{cx^2 + bx + a = 0}}$$

Aufgabe 3: *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y.

Tafelbeispiel:

1. Lösung mit $p-q$-Formel:

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 = 5(y-1) \qquad (2)$$
$$(1)-(2): \quad y^2 = \frac{1}{2}(7-5y) \quad \Rightarrow \quad 0 = y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow \quad y_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{7}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -7/2 \end{cases}$$

Fall $y = 1: \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Fall $y = -\frac{7}{2}: \quad x^2 = -\frac{41}{4}$ keine (reelle) Lösung $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;1), (-1;1)\}}}$

2. Lösung mit Satz von Vieta:

$$\begin{matrix} x + y + y^2 = 3 \\ y^2(x+y) = -54 \end{matrix} \quad \text{mit } u \equiv x + y, v \equiv y^2 \text{ folgt} \quad \begin{matrix} u + v = 3 \\ uv = -54 \end{matrix}$$

Vieta: u, v sind Wurzeln der Gleichung $0 = z^2 - 3z - 54$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 54} = \frac{3}{2} \pm \frac{15}{2} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

Fall: $v = 9, u = -6: \quad y = \pm 3, \quad x = -6 - y = \begin{cases} -9, & y = 3 \\ -3, & y = -3 \end{cases}$

Fall: $u = 9, v = -6: \quad y^2 = -6 \quad \Rightarrow$ keine (reelle) Lösung.

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-9;3), (-3,3)\}}}$.

Lösung:

(a)

$$\left.\begin{aligned} x+y^2 &= 7 \\ xy^2 &= 12 \end{aligned}\right. \quad \text{mit } u \equiv x, v \equiv y^2 \text{ folgt} \quad \left.\begin{aligned} u+v &= 7 \\ uv &= 12 \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{\text{Vieta:}}{\Longrightarrow} \quad z^2 - 7z + 12 = 0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Fall 1: } x = 4, y = \pm\sqrt{3} \\ &\text{Fall 2: } x = 3, y = \pm 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(4;\pm\sqrt{3}), (3;\pm 2)\}}}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 11 \quad (1) \\ x^2y + xy^2 &= 30 \quad (2) \end{aligned} \quad \text{mit } u \equiv xy, v \equiv x+y \quad \begin{aligned} u+v &= 11 \\ u \cdot v &= 30 \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad z^2 - 11z + 30 = 0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$$

$$\text{Fall 1: } \left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x+y &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta} \quad q^2 - 5q + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x = 3, y = 2} \quad \text{oder} \quad \underline{x = 2, y = 3}$$

$$\text{Fall 2: } \left.\begin{aligned} xy &= 5 \\ x+y &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta} \quad q^2 - 6q + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{1/2} = 3 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x = 5, y = 1} \quad \text{oder} \quad \underline{x = 1, y = 5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(3;2), (2;3), (5;1), (1;5)\}}}$$

Man beachte, wie die Symmetrie der Gleichungen unter Vertauschung $x \leftrightarrow y$ und $xy \leftrightarrow x+y$ in der Lösungsmenge wiederzufinden ist.

(c)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{5}{2}xy \quad (1) \\ x - y &= \frac{1}{4}xy \quad (2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} (x-y)^2 &= \frac{xy}{2} \\ (x-y)^2 &= \frac{x^2y^2}{16} \end{aligned}\right\} \quad 8xy = (xy)^2$$

$$\text{Fall 1:} \quad \left.\begin{aligned} x = 0 &\overset{(1)}{\Rightarrow} y = 0 \\ \text{oder } y = 0 &\overset{(2)}{\Rightarrow} x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{x = 0, y = 0}$$

$$\text{Fall 2:} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad y \neq 0: \quad 8 = xy$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in (1):} \quad x^2 + y^2 = 20 \\ &\text{in (2):} \quad x - y = 2 \end{aligned}\right\} \quad 2x^2 - 4x = 16$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \quad , \quad y = x - 2 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(0;0), (4;2), (-2;4)\}}}$$

Da das Quadrieren von Gleichung (2) keine Äquivalenzumformung darstellte, müssen alle Lösungspaare noch durch Probe bestätigt werden.
Beachte außerdem die Aussagenlogik bei der Fallunterscheidung: Das Komplement zu "$x \neq 0$ und $y \neq 0$" ist "$x = 0$ oder $y = 0$"; dass dennoch beide gleichzeitig Null sind, folgt erst einen Schritt später.

Aufgabe 4: *Wurzelgleichungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x.

Tafelbeispiel:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-4} &= 1\\
\sqrt{3x-5} &= 1-\sqrt{2x-4} \quad |^2\\
3x-5 &= 1+2x-4-2\sqrt{2x-4} \quad \text{, Wurzel isolieren}\\
\Rightarrow 2\sqrt{2x-4} &= 2-x \quad |^2\\
4(2x-4) &= x^2-4x+4 \quad \Longrightarrow \quad 0 = x^2-12x+20 \quad , \quad x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36-20} = \begin{cases} 10 \\ 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Da Quadrieren *keine Äquivalenzumformung* ist, können zusätzliche Lösungen entstehen und es muss die Probe gemacht werden!

$$
\begin{aligned}
\text{Probe: } x = 10: &\quad \sqrt{25}+\sqrt{16} = 9 \neq 1 \quad \textit{keine Lösung}\\
x = 2: &\quad \sqrt{1}+\sqrt{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=2}}
\end{aligned}
$$

Beachte außerdem, dass Einschränkungen an die in den Gleichungen auftetenden Konstanten vorliegen können. *Lösung:*

(a)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} &= 2 \qquad (\text{offenbar } x \geq 1)\\
\sqrt{3x+1} &= 2+\sqrt{x-1} \quad |^2\\
3x+1 &= 3+4\sqrt{x-1}+x\\
\Rightarrow x-1 &= 2\sqrt{x-1} \quad |^2\\
(x-1)^2 &= 4(x-1) \qquad \Longrightarrow x = 1 \quad , \quad \stackrel{x\neq 1}{\Longrightarrow} x = 5
\end{aligned}
$$

$$
\text{Probe: } \begin{cases} x = 2: \ \sqrt{4}-\sqrt{0} = 2 \\ x = 5: \ \sqrt{16}-\sqrt{4} = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1, x_2 = 5}}.
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+a} &= a-\sqrt{x} \quad |^2 \qquad (a = 0 \Rightarrow x = 0)\\
\cancel{x}+\cancel{a} &= a^{\cancel{2}}+\cancel{x}-2\cancel{a}\sqrt{x}\\
2\sqrt{x} &= a-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{(a-1)^2}{4}}}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Probe: } \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}+a} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+1+2a} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2} = \frac{|a+1|}{2}
$$

$$
a-\sqrt{x} = a-\frac{|a-1|}{2} = \begin{cases} \frac{a+1}{2}, & a \geq 1 \\ \frac{3a-1}{2}, & a < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Bedingung} \quad a \geq 1
$$

(c) $$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b \overset{\text{draufschauen}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{x=0}} \quad \text{für} \quad a\ge 0, b\ge 0$$

$$\cancel{a^2}-\cancel{x}=\underbrace{\cancel{a^2}+b^2+2ab}_{(a+b)^2}+b^2-\cancel{x}-2(a+b)\sqrt{b^2-x}$$

$$\cancel{(a+b)}\sqrt{b^2-x}=b\cancel{(a+b)} \quad \Rightarrow x=0.$$

Schon in der Zeile zuvor zeigt sich: Die Gleichung ist linear in x, d. h. die Lösung durch Draufschauen ist tatsächlich die Einzige.

(d) $$\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3 \quad |^2$$

$$\sqrt{3x+4}=8-x \quad |^2$$

$$\Rightarrow 0=x^2-19x+60$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}-60}=\begin{cases}15 & \Rightarrow \text{Probe: falsch}\\ 4 & \Rightarrow \text{Probe: wahr}\end{cases} \qquad \underline{\underline{x=4}}$$

(e) $$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-3/2}=\frac{6}{\sqrt{2x-1}} \qquad (\text{offenbar } x\ge\frac{3}{2})$$

$$\sqrt{2x^2-4x+3/2}=7-2x$$

$$0=2x^2-24x+\frac{95}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=6\pm\sqrt{36-\frac{95}{4}}=\begin{cases}\frac{19}{2} & \Rightarrow \text{Probe: falsch}\\ \frac{5}{2} & \Rightarrow \text{Probe: wahr}\end{cases} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{5}{2}}}.$$

Aufgabe 5: *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.

Tafelbeispiel: Beachte zunächst, dass nicht jedes Polynom als Produkt (reeller) Linearfaktoren geschrieben werden kann, bspw.

$$x^2-3x+6 \quad \text{, da} \quad 0=x^2-3x+6 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}}.$$

Oft lässt sich die Zerlegung durch Vergleich mit

$$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$$

erkennen, bspw. $x^2+13x+12 \Rightarrow m+n=13, mn=12$. Dort erkennen wir schnell $m=1, n=12$ und somit

$$x^2+13x+12=(x+1)(x+12)$$

(a) $$x^2+2x-15 \quad \Rightarrow m+n=2 \quad \text{und} \quad m\cdot n=-15$$
$$\Rightarrow \quad \text{klappt für} \quad m=5, n=-3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2+2x-15=(x+5)(x-3)}}.$$

(b) $4x^2+8x-5$

Konstruktion: $(ax+m)(bx+n)=abx^2+(an+bm)x+mn$

Wir können nun zwei Zahlen $x_1=an, x_2=bm$ suchen, deren Summe gleich dem linearen Faktor $x_1+x_2=(an+bm)=8$ und deren Produkt gleich $x_1\cdot x_2=(ab)\cdot(mn)=4\cdot(-5)=-20$ entspricht. Wir finden durch ausprobieren $x_1=-2, x_2=10$ und können nun den linearen Term in x aufteilen

$$4x^2-2x+10x-5=2x(2x-1)+5(2x-1)=\underline{\underline{(2x-1)(2x+5)}}.$$

(c) $$ax^3+bx^2+adx^2+bdx=x(ax^2+(b+ad)x+bd)=x(\underbrace{ax^2+bx}_{x(ax+b)}+(ax+b)d)$$
$$=\underline{\underline{x(ax+b)(x+d)}}.$$

(d) $$(a-x)^2+(x-b)^2-a^2-b^2=2x^2-2ax-2bx=\underline{\underline{2x(x-a-b)}}.$$

(e) $$a\sqrt{8}x^2-2kax-3ak+ax\sqrt{18}=a(\sqrt{x}x^2+\sqrt{18}x-k(2x+3))$$
$$=a(\sqrt{2}x(2x+3)-k(2x+3))=\underline{\underline{a(2x+3)(\sqrt{2}x-k)}}.$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades
Das Summenzeichen

Aufgabe 1: *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

(a) *Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln a, b und c hat.*

$$f_3(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = \underline{\underline{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc}}$$

Bemerkung: Hier kann man versuchen, sich klarzumachen, wie der verallgemeinerte Satz von Vieta aussieht.

(b) *Zerlegen Sie das Polynom $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$ in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?*

$$f_4(x) = x^3 + \underbrace{2x^4 + 4x^2 + 2}_{2x^4+2x^2+2x^2+2=2x^2(x^2+1)+2(x^2+1)} + x = (x^2+1)(2x^2+2) + \underbrace{x^3 + x}_{x(x^2+1)} = \underline{\underline{(x^2+1)(2x^2+x+2)}}$$

Da weder $x^2+1=0$ noch $x^2+\frac{1}{x}x+1=0$ eine (reelle) Lösung hat, besitzt das Polynom keine (reellen) Nullstellen.

(c) *Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$.* Offensichtlicherweise gilt $x_1 = 0$ und wir können das Polynom mit Division durch x vereinfachen. Mit der Substitution $z \equiv x^2$ erhalten wir

$$0 = z^2 - 3z + 2 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{2/3} = \pm\sqrt{2}}}, \quad \underline{\underline{x_{4/5} = \pm 1}}.$$

(d) *Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Setzen Sie näherungsweise $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$.* Wir führen wieder die Substitution $z \equiv x^2$ aus und erhalten

$$0 = z^2 - 12z + 24 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = 6 \pm 2\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}.$$

Wir suchen nun das kleinste positive x, also 1.VZ: “+” und 2.VZ: “−”

$$x_0 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3}\approx 3-\frac{\pi^2}{8}}{\approx} \sqrt{6 - \left(3 - \frac{\pi^2}{8}\right)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

Bemerkung: Die Funktion $f_4(x)$ ist das dritte Taylorpolynom der Kosinusfunktion. Es gilt $\cos(x) = f_4(x) + \mathcal{O}(x^6)$.

Aufgabe 2: *Polynomdivision*

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zusatz: Für welche Werte von n bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

(a)

$$\begin{array}{rrrl}
(21a^3 & +34a^2b & & +25b^3) : (7a+5b) = \underline{\underline{3a^2-7ab+5b^2}} \\
-(21a^3 & +15a^2b) & & \\
\hline
 & -49a^2b & & +25b^3 \\
 & -(-49a^2b & -35ab^2 &) \\
\hline
 & & 35ab^2 & +25b^3 \\
 & & -(35ab^2 & +25b^3) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrl}
(9x^3 & & -7xy^2 & +2y^3) : (3x-2y) = \underline{\underline{3x^2+2xy-y^2}} \\
-(9x^3 & -6x^2y & &) \\
\hline
 & 6x^2y & -7xy^2 & +2y^3 \\
 & -(6x^2y & -4xy^2 &) \\
\hline
 & & -3xy^2 & +2y^3 \\
 & & -\ (-3xy^2 & +2y^3) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrl}
(25x^4 & & -a^2x^2 & & +25a^4) : (5x^2+7ax+5a^2) = \underline{\underline{5x^2-7ax+5a^2}} \\
-(-25x^4 & +35ax^3 & +25a^2x^2) & & \\
\hline
 & -35ax^3 & -24a^2x^2 & & +25a^4 \\
 & -(-35ax^3 & -49a^2x^2 & -35a^3x &) \\
\hline
 & & 25a^2x^2 & +35a^3x & +25a^4 \\
 & & -(25a^2x^2 & +35a^3x & +25a^4) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rrrl}
(x^2 & +2x & -15) & : (x+n) = \underline{\underline{x+2-n+\dfrac{n(n-2)-15}{x+n}}} \\
-(x^2 & +nx) & & \\
\hline
 & (2-n)x & -15 & \\
 & -((2-n)x & +n(2-n)) & \\
\hline
 & & -15 & +n(n-2) \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} n^2-2n-15 \quad \Rightarrow \quad n_{1/2} = 1 \pm \sqrt{16}
\end{array}$$

Wir erhalten damit die beiden Werte $n_{1/2}$ die den Wurzeln des quadratischen Gleichungssystems entsprechen

$$x^2+2x-15 = (x+5)(x-3).$$

Aufgabe 3: *Kubische Gleichungen* Ziel: (a)

(a) *Bestimmen Sie den Wert von m in der Gleichung*

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0\,, \quad \overset{x=2}{\Rightarrow} \quad -12 + m \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m = 12}}.$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln. Wir bestimmen die restlichen Wurzeln per Polynomdivision und pq-Formel:

$$\begin{array}{l}
(6x^3 \; -7x^2 \; -16x \; +12) : (x-2) = \underline{6x^2 + 5x - 6} \\
\underline{-(6x^3 - 12x^2 \qquad\qquad)} \\
\qquad\quad 5x^2 \; -16x + 12 \\
\qquad \underline{-(5x^2 \; -10x \qquad)} \\
\qquad\qquad\qquad -6x + 12 \\
\qquad\qquad - \; \underline{(-6x + 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} x^2 + \frac{5}{6}x - 1 \quad \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{3}{2}}}.$$

(b) *Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung*

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0\,.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von m und n, und geben Sie die dritte Wurzel an. Zu Bestimmung der Lösung setzen wir die beiden Wurzeln in die Gleichung ein:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = 2: & 4m + n = \;\; 10 & (1) \\
x_2 = 3: & 9m + n = -15 & (2) \\
\Rightarrow & (1) - (2): \quad -5m = 25 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m = -5}}, \quad \underline{\underline{n = 30}}. &
\end{array}$$

Die dritte Wurzel ermitteln wir durch Polynomdivision mit $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 \; -5x^2 \; -13x \; +30) : (x^2 - 5x + 6) = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = -\frac{5}{2}}} \\
\underline{-(2x^3 - 10x^2 + 12x)} \\
\qquad\quad 5x^2 \; -25x + 30 \\
\qquad \underline{-(5x^2 \; -25x + 30)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Aufgabe 4: *Nullstellenraten* (Zusatzaufgabe)

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor $(x - x_0)$ vom Polynom ab.

(a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \quad \underline{\underline{x_0 = 1}}$ oder $\underline{\underline{x_0 = 2}}$

$= (x-1)(x^2-4x+4) = (x-1)(x-2)^2$ (stückweises konstruieren ohne Polynomdivision)

(b) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9, \quad \underline{\underline{x_0 = 3}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$= (x+3)(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)$

(c) $x^4 - 3x^2 + 3x + 2, \quad \underline{\underline{x_0 = -2}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$= (x+2)(x^3 - 2x^2 + x + 1)$

(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1, \quad \underline{\underline{x_0 = 1}}$

$= (x-1)(x^4 - 3x^2 + 1)$ die anderen Nullstellen sind: $x_{2/3/4/5} = \dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$= (x-1)(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung* Ziel: (a) bis (c)

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a) $$\frac{x-5}{x^2-2x-3} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{(x-3)\alpha + (x+1)\beta}{x^2-2x-3} = \frac{(\alpha+\beta)x + \beta - 3\alpha}{x^2-2x-3}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^1: & \alpha + \beta = 1 \\ x^0: & 3\alpha - \beta = 5 \end{array}\right\}$ Addition: $\underline{\alpha = \frac{3}{2}}, \quad \underline{\beta = -\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-3)}}}$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-1} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} + \gamma = \frac{(x-1)\alpha + (x+1)\beta + (x^2-1)\gamma}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^2: & \underline{\gamma = 1} \\ x^1: & \alpha + \beta = 0 \\ x^0: & 1 = \beta - \alpha - \gamma \end{array}\right\}$ $\underline{\beta = 1}, \underline{\alpha = -1}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}}$$

Alternativ kann auch eine Poylnomdivision mit Rest durchgeführt werden mit anschließender Partialbruchzerlegung des Restglieds: $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$.

(c) $$\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{(x-2)^2} = \frac{(x^2-4x+4)\alpha + (x^2-3x+2)\beta + (x-1)\gamma}{(x-1)(x-2)^2}$$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{lll} x^2: & \alpha + \beta = 2 & \\ x^1: & -4\alpha - 3\beta + \gamma = -3 & (2) \\ x^0: & 4\alpha + 2\beta - \gamma = \ \ 1 & (3) \end{array}\right\}$ $(2)+(3): \quad \beta = 2 \Rightarrow \underline{\alpha = 0}, \underline{\gamma = 3}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}}}$$

Die Faktorisierung des Nenners haben wir in Aufgabe 4a bereits gesehen. Wir müssen die

Vielfachheit der Nullstelle in unserem Ansatz berücksichtigen. Durch $\alpha = 0$ sehen wir, dass die rechte Seite bei $x = 1$ keine Pollstelle hat. Die Partialbruchzerlegung hat uns also den Limes $x \to 1$ der linken Seite verschafft.

(d) $\dfrac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3}$

Da der Zähler von höherem Grade ist als das Nennerpolynom, wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12) : (x^2 - 2x - 3) = \underline{2x^2 + 1 + \dfrac{(\sqrt{2}-5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3}} \\
\underline{-(-2x^4 - 4x^3 - 6x^2)} \\
\qquad x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12 \\
\qquad \underline{-(x^2 \quad - 2x \quad - 3)} \\
\qquad\qquad (\sqrt{2}-5)x + \sqrt{2} + 15
\end{array}$$

Die Nullstellen des Nenners lauten: $x_1 = 3, x_2 = -1$. Damit folgt

$$\frac{(\sqrt{2}-5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{(x+1)\alpha + (x-3)\beta}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich:} \quad \left.\begin{array}{l} x^1 : \alpha + \beta = \sqrt{2} - 5 \\ x^0 : \alpha - 3\beta = \sqrt{2} + 15 \end{array}\right\} \quad \text{Differenz:} \quad \underline{\beta = -5}, \quad \Rightarrow \underline{\alpha = \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3} = 2x^2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{x-3} - \frac{5}{x+1}}}$$

Aufgabe 6: *Summen* Ziel: (a) bis (b)

Vereinfachen bzw. berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1}}_{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2n} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}}}$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$

Hinweis zu (b): Der Term in der Summe kann mithilfe von Partialbruchzerlegung vereinfacht und die entstehende Summe auseinandergezogen werden.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(k+1) + Bk = (A+B)k + A.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A = 1, B = -1$ und wir können weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad k+1 = l \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = \left(1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n}}\right) - \left(\cancel{\sum_{l=2}^{n}} + \frac{1}{n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}}}.\end{aligned}$$

Hinweis zu (c): Hierfür kann ein expliziter Ausdruck gefunden werden, wenn man die Formel mit $(1-x)$ multipliziert und analog vorgeht wie in (b)

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad l = k+1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{l=1}^{n+1} x^l = 1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x^k} - \left(\cancel{\sum_{l=1}^{n} x^l} + x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \underline{\underline{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}}.$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 5: Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

Logarithmengesetze, Basiswechsel

$$\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v), \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$$
$$\log_b(u^m) = m\log_b(u), \quad \log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)}\log_b(x).$$

Aufgabe 1: *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

Lösen Sie jeweils für x bzw. y. Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

Tafelbeispiele:

1.
$$3\ln\left[\frac{\sqrt[3]{e^x}}{\exp\big(3\log_2(\sqrt{2})\big)}\right] + 2x = 0$$
$$3\ln\left(\frac{e^{x/3}}{e^{3/2}}\right) + 2x = 0$$
$$3\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\right) + 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}.$$

2.
$$2\log_{\sqrt[5]{9}}(3x) - 5\ln(x) = \log_3(e^5)$$
$$\text{Basiswechsel: } \log_a(\xi) = \frac{\ln(\xi)}{\ln(a)}$$
$$2\cdot\frac{\ln(3x)}{\ln\big(3^{2/5}\big)} - 5\ln(x) = \frac{5}{\ln(3)}$$
$$\cancel{5}\frac{\ln(3) + \ln(x)}{\ln(3)} - \cancel{5}\ln(x) = \frac{\cancel{5}}{\ln(3)}$$
$$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1 - \ln(3)}{1 - \ln(3)} = 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = e}}.$$

Lösung:

(a) $a2^x = e^{bx} \quad\Rightarrow\quad \ln(a) + x\ln(2) = bx \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(a)}{b - \ln(2)}}},$ offenbar $a > 0$

(b) $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)} = \dfrac{49}{(7\cdot 7)^{\log_7(2\sqrt{x})}} + \dfrac{1}{4x} = \dfrac{25}{2x} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}}},$ (nur positive Lsg.)

(c)
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3ax} - 2^{a+1}\mathrm{e}^{2ax} + 4^a\mathrm{e}^{ax} &= \log_b(1) \quad |\cdot \mathrm{e}^{-ax} \\ \mathrm{e}^{2ax} - 2\cdot 2^a\mathrm{e}^{ax} + (2^a)^2 &= 0 \\ (\mathrm{e}^{ax}+2^a)^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{e}^x = 2 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = \ln(2)}}. \end{aligned}$$

(d)
$$\sqrt[x^2-1]{a^3}\cdot \sqrt[2x-2]{a}\cdot \sqrt[4]{a^{-1}} = 1 \qquad \text{offenbar } a > 0$$
$$a^{\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}} = 1.$$
Fall $a = 1$: $\quad \underline{\underline{x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}}}$

Fall $a \neq 1$: $\quad 0 = \dfrac{3}{x^2-1} + \dfrac{1}{2x-2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{15+2x-x^2}{x^2-1}$

$$0 = x^2 - 2x - 15 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_1 = 5, x_2 = -3}}$$

(e)
$$\log_a(x) + \log_a(y) = 2 \quad\Rightarrow\quad \log_a(xy) = 2 \quad\Rightarrow\quad xy = a^2$$
$$\log_b(x) - \log_b(y) = 4 \quad\Rightarrow\quad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = 4 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{y} = b^4$$
$$\Rightarrow x^2 = a^2b^4 \quad\Rightarrow\quad x = \pm ab^2, y = \pm\frac{a}{b^2}$$
Die Argumente der Logarithmen müssen positiv sein:
$$\underline{\underline{x = \begin{cases} ab^2, & a > 0 \\ -ab^2, & a < 0 \end{cases}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y = \begin{cases} \frac{a}{b^2}, & a > 0 \\ -\frac{a}{b^2}, & a < 0 \end{cases}}}, \quad (a = 0 \text{ nicht zulässig})$$

(f)
$$3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2 \overset{\text{Basiswechsel}}{\Longrightarrow} \frac{3\ln(x)}{\ln(xa^2)} + \frac{\ln(x)}{2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} = 2$$
Substitution: $z \equiv \ln(x), b \equiv \ln(a)$
$$\Rightarrow \quad \frac{3z}{z+2b} + \frac{z}{2z-b} = 2 \quad |\cdot(z+2b)(2z-b)$$
$$7z^2 - z = 4z^2 + 6bz - 4b^2$$
$$\Rightarrow 0 = z^2 - \frac{7b}{3}z + \frac{4b^2}{3} \quad\Rightarrow\quad z_{1/2} = \frac{7b}{6} \pm \sqrt{\frac{49b^2}{36} - \frac{4b^2}{3}} = \begin{cases} \frac{4b}{3} \\ b \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = a^{4/3}, x_2 = a}}$$

Aufgabe 2: *Verdopplungszeit*

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen A sei beschrieben durch

$$W(t) = A\mathrm{e}^{ct}, \qquad c > 0,$$

sodass $W(t)$ die „Menge" an Wissen zur Zeit t gibt.

(a) *Nach welcher Zeit τ_2 hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?*

$$W(t_0+\tau_2) \stackrel{!}{=} 2W(t_0) \quad \Rightarrow \quad \cancel{A}\mathrm{e}^{c(\cancel{t_0}+\tau_2)} = 2\cancel{A}\cancel{\mathrm{e}^{ct_0}}$$
$$\Rightarrow \quad \tau_2 = \underline{\underline{\frac{\ln(2)}{c}}}.$$

(b) *Nach welcher Zeit τ_n hat das Wissen eines Studenten auf das n-Fache zugenommen?*

$$W(t_0+\tau_n) \stackrel{!}{=} nW(t_0) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{c\tau_n} = n$$
$$\Rightarrow \quad \tau_n = \underline{\underline{\frac{\ln(n)}{c}}}.$$

(c) *Drücken Sie τ_n als Vielfaches von τ_2 aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen $n=3$ und $n=4$? Welche Aussage können Sie für $n=2^m$, $m \in \mathbb{N}$, treffen?*

$$\tau_n \stackrel{!}{=} x\tau_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(n)}{\cancel{c}} = x\frac{\ln(2)}{\cancel{c}}$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_n = \log_2(n)\tau_2}}$$
$$n=3: \quad \tau_3 = \log_2(3)\tau_2 \approx 1.6\tau_2$$
$$n=4: \quad \tau_4 = \log_2(4)\tau_2 = 2\tau_2$$
$$n=2^m \quad \tau_{2^m} = \log_2(2^m)\tau_2 = m\tau_2.$$

Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen* (Zusatzaufgabe)

Es seien die Funktionen

$$f(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}),$$
$$g(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

definiert.

(a) *Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(2x)$ und $g(2x)$ in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente, $f(x)$ und $g(x)$.*

$$f(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + (\mathrm{e}^{-x})^2}{2} = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - 2\cancel{\mathrm{e}^x}\cancel{\mathrm{e}^{-x}}}{2}$$
$$= 2\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \underline{\underline{2f(x)^2 - 1}}.$$
$$g(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{2} = 2\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = \underline{\underline{2f(x)g(x)}}.$$

(b) *Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(x+y)$ und $g(x+y)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $f(y)$ sowie $g(x)$ und $g(y)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie $x = y$ setzen.*
Wir stellen zunächst fest: $\mathrm{e}^x = f(x) + g(x)$ und $\mathrm{e}^{-x} = f(x) - g(x)$

$$f(x+y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}\big[(f(x)+g(x))\cdot(f(y)+g(x)) + (f(x)-g(x))\cdot(f(y)-g(y))\big]$$
$$= \underline{\underline{f(x)f(y) + g(x)g(y)}}$$
$$g(x+y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}\big[(f(x)-g(x))\cdot(f(y)+g(x)) + (f(x)-g(x))\cdot(f(y)-g(y))\big]$$
$$= \underline{\underline{f(x)g(y) + g(y)f(x)}}$$

Ein Vergleich mit (a) zeigt

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2 + g(x)^2 \stackrel{!}{=} f(x)^2 - 1$$
$$\Rightarrow \quad \text{Es gilt} \quad f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$
$$g(2x) = g(x+x) = f(x)g(x) + g(x)f(x) = 2f(x)g(x).$$

Bemerkung: DAs sind die Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen sowie die hyperbolische Variante des trigonometrischen Pythagoras, $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

(c) *Schreiben Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Reihendarstellung.*

$$\text{Vorlesung:} \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0,\text{gerade}}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}}$$
$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0,\text{ungerade}}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}}.$$

(d) *Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von $g(x)$.*

Wir schreiben $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und versuchen nach x aufzulösen. Dafür wenden wir zunächst die Substitution $z \equiv \mathrm{e}^x$ an:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad &\Rightarrow \quad 0 = z^2 - 2yz - 1 \\ & \quad z_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \ln(z) = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2+1}\right). \end{aligned}$$

Da $\sqrt{y^2+1} > y$, muss das "+" gewählt werden, um ein positives Argument im Logarithmus zu erhalten. Es folgt

$$\underline{\underline{g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}}.$$

Bemerkung: Wir erhalten hiermit die Umkehrfunktion des $g(x) = \sinh(x)$, den $\operatorname{arsinh}(x)$.

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 6: Trigonometrische Funktionen
Ebene Trigonometrie

Wiederholung Trigonometrische Funktionen

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Weitere wichtige Relationen, die nützlich sein können:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \sin(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & \sin(0) &= 0 \quad \cos(0) = 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1: *Additionstheoreme*

(a) Leiten Sie das Additionstheorem für Kosinusfunktionen aus dem für Sinusfunktionen her.

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \sin\left(x \pm y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x \pm z^{\pm}), \qquad z^{\pm} \equiv y \pm \frac{\pi}{2} \\ &= \sin(x)\cos(z^{\pm}) \pm \cos(x)\sin(z^{\pm}) \\ &= \sin(x)\underbrace{\cos\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\mp\sin(y)} \pm \cos(x)\underbrace{\sin\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\pm\cos(y)} \\ &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

(b) Leiten Sie das Additionstheorem für Tangensfunktionen her,

$$\begin{aligned} \tan(x \pm y) &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)} = \frac{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \pm \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\left(1 \mp \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)} \\ &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} \end{aligned}$$

(c) *Zeigen Sie, dass für Doppelwinkelfunktionen gilt:*

- $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} = 2\cos^2(x) - 1$

Aufgabe 2: *Trigonometrische Umformungen I* Ziel: (a) bis (c)

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Identitäten.

Tafelbeispiel:

1. Identität: $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

   $$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha) + 1. \qquad \square$$

2. $\sin(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

   $$\Rightarrow \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\tan(x)\cos^2(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \qquad \square$$

Lösung:

(a) $$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \qquad \square$$

(b) $$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}(\cos\alpha-\sin\alpha)} \overset{(a)}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$
$$= \frac{\cancel{\cos(\alpha)}}{\cancel{\cos(\alpha)}}\frac{1+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)}$$

(c) $$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2} - \underbrace{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}_{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{y}{2}\right)}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 1\right)$$
$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{y}{2} - 1 \overset{(1c)}{=} \cos(x) + \cos(y)$$

(d) $$\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = \frac{\overbrace{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta}^{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)} + \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma) + \sin\alpha[\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma]}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} + 1 = 1 \qquad \square$$

Aufgabe 3: *Trigonometrische Umformungen II* Ziel (a) und (b)

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass sie sich einfach logarithmieren lassen. Das heißt, die Terme sollen möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden.

Tafelbeispiel:
Es ist mit "einfach logarithmierbar" gemeint, dass möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden soll.

$$
\begin{aligned}
\cot(\alpha)+\cot(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} &= \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\
&= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \quad \longrightarrow \quad \text{Ziel erreicht.}
\end{aligned}
$$

Lösung:

(a)
$$1+\cos(\alpha)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \textit{Hinweis:} \text{ Es ist } \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
1+\cos(\alpha)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \\
&\overset{(2c)}{=} \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}}
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
\frac{2\sin(\beta)-\sin(2\beta)}{2\sin(\beta)+2\sin(2\beta)} &= \frac{2\cancel{\sin(\beta)}-2\cancel{\sin(\beta)}\cos(\beta)}{2\cancel{\sin(\beta)}+4\cancel{\sin(\beta)}\cos(\beta)} = \frac{1-\cos(\beta)}{1+2\cos(\beta)} \\
&= \frac{2-2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\cos(\beta)\right)\right)} \overset{(2c)}{=} \underline{\underline{\frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}}.
\end{aligned}
$$

(c)
$$
\begin{aligned}
&\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma), \quad \text{für} \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi \\
&= \sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\alpha+\beta) \\
&= \sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha) \\
&= \sin(\alpha)(1+\cos(\beta))+\sin(\beta)(1+\cos(\alpha)) \\
&= 2\sin(\alpha)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\sin(\beta)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2(\frac{\beta}{2})+4\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \\
&= \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme* Ziel: (a) bis (c)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und machen Sie jeweils die Probe.

Tafelbeispiel:

$$\begin{aligned} \cos(x)\sin(y) &= 1 \\ \cos(x) - \sin(y) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \overset{z\equiv -y}{\Longrightarrow} \quad \left.\begin{aligned} \cos(x)\sin(z) &= -\frac{1}{2} \\ \cos(x) + \sin(z) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ Vieta!}$$

$\cos(x)$ und $\sin(z)$ sind Wurzeln des Polynoms

$$\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Fall 1: $\cos(x) = 1, \sin(y) = 1/2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2\pi k}}, \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fall 2: $\cos(x) = 1/2, \sin(y) = -1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Natürlich kann auch die implizite Form stehen gelassen werden!

Lösung:

(a) $\sin(x) + \cos(x) = 1 \quad |()^2$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(x)\cos(x) = 0$$

Fall 1: $\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

allerdings muss $\cos(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ nur für k gerade

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\pi k}}, k \in \mathbb{Z}$

Fall 2: $\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

allerdings muss $\sin(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ nur für $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k}}, k \in \mathbb{Z}$

(b) $\underbrace{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{2\cos(x)\cos(y)} = \frac{1}{2}, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4}$

$$\text{Vieta: } \xi^2 - \xi + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos(x) = \frac{1}{2} = \cos(y)}} \quad \text{bzw.} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

(c) $\sin(3x) = \cos(2x)$

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x)-1)\sin(x) \\
&= 4\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \\
0 &= 2\cos^2(x)(1-2\sin(x)) + \sin(x) - 1 \\
&= 2(1-\sin^2(x))(1-2\sin(x)) + \sin(x) - 1.
\end{aligned}$$

Wir substituieren nun $u \equiv \sin(x)$:

$$0 = 4u^3 - 2u^2 - 3u + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{draufschauen} \quad u = 1$$

Die restlichen Lösungen erhalten wir durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(4u^3 - 2u^2 \quad - 3u + 1) : (u-1) = 4u^2 + 2u - 1 \\
\underline{-(4u^3 + 4u^2)} \\
\qquad 2u^2 - 3u \\
\qquad \underline{-(2u^2 - 2u)} \\
\qquad\qquad -u + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(-u+1)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Longrightarrow 0 = u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\sin(x_1) = 1, \quad \sin(x_{2/3}) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}}}$$

aufgelöst nach x: $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \frac{9\pi}{10} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{10} + 2\pi k, -\frac{7\pi}{10} + 2\pi k | k \in \mathbb{Z} \right\}$

(d) $a\big(3\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x)\big) - b\big(3\sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)\big) = 2a - b$

$$\begin{aligned}
3a\cos^2(x) - 3b\sin^2(x) + (a+b)\sin(x)\cos(x) &= 2a - b \quad | : \cos^2(x) \\
3a - 3b\tan^2(x) + (a+b)\tan(x) &= \frac{2a-b}{\cos^2(x)} = (2a-b)(1+\tan^2(x)).
\end{aligned}$$

Wir substituieren jetzt $z \equiv \tan(x)$

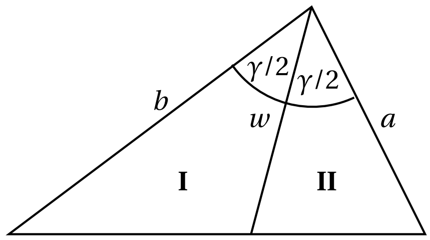
$$0 = 2(a+b)z^2 - (a+b)z - (a+b)$$

$$0 = z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tan(x_1) = 1, \tan(x_2) = -\frac{1}{2}}}$$

Aufgabe 5: *Dreiecksfläche*

Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten a und b sowie die Länge w der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind.



Fläche in I: $A_1 = \dfrac{bw}{2}\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$

Fläche in II: $A_2 = \dfrac{aw}{2}\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$

Gesamtfläche: $A = \dfrac{ab}{2}\sin(\gamma)$

andererseits: $A = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ab}{2}\cancel{\sin\gamma} = \dfrac{(a+b)\,w}{2}\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) = \dfrac{(a+b)\,w}{4}\dfrac{\cancel{\sin\gamma}}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)\,w}{2ab}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(a+b)\,w}{2}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)\,w}{2}\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{(a+b)\,w}{2}\sqrt{1-\frac{(a+b)^2\,w^2}{4a^2b^2}}}}.$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung
Kurvendiskussion

Wiederholung Ableitungsregeln

- Linearität: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(af(x)+bg(x)\big)=a\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+b\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- Produktregel (Leibniz-Regel): $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g(x)+f(x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- Kettenregel: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))=\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right)(g(x))\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$
- Potenzregel: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^n\big)=n\,x^{n-1}.$

Ableitungen spezieller Funktionen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)=+\cos(x)\qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x)=\exp(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)=-\sin(x)\qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=\ln(a)\,a^x.$$

Beispiel: $f(x)=x^2\ln\big(\underbrace{3x^2-5x+2}_{g(x)}\big)$

$$\Rightarrow f'(x)=2x\ln\big(g(x)\big)+x^2\frac{1}{g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}=2x\ln\big(3x^2-5x+2\big)+\frac{x^2(6x-5)}{3x^2-5x+2}.$$

Aufgabe 1: *Ableitungen I* Ziel: (a) bis (e)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $Q(r)=\dfrac{3r^2}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{r}{r_0}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}Q(r)}{\mathrm{d}r}=3r\left(\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)+\frac{3r^2}{2}\frac{r_0}{r}\frac{1}{r_0}=\underline{\underline{3r\left(1+\ln\frac{r}{r_0}\right)}}.$$

(b) $f(x)=\cos^4(3tx)-\sin^4(3tx)=\underbrace{(\cos^2(3tx)+\sin^2(3tx))}_{1}(\cos^2(3tx)-\sin^2(3tx))$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=-6t\sin(3tx)\cos(3tx)-6t\sin(3tx)\cos(3tx)=\underline{\underline{-12t\sin(3tx)\cos(3tx)}}.$$

(c) $S(\tau) = (\tau-1)e^{\tau} + \frac{\tau^2}{4}(2\ln\tau - 1)$

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \cancel{e^{\tau}} + (\tau - \cancel{1})e^{\tau} + \frac{\tau}{2}\left(2\ln(\tau) - \cancel{1}\right) + \frac{\tau^{\cancel{2}}}{4}\frac{2}{\cancel{\tau}} = \underline{\underline{\tau(e^{\tau} + \ln(\tau))}}.$$

(d) $y(x) = \frac{\exp(2x)}{25}[(5x-4)\sin x + (10x-3)\cos x]$

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{2}{25}e^{2x}\left[\dots\right] + \frac{1}{25}e^{2x}[5\sin(x) + (5x-4)\cos(x) + 10\cos(x) - (10x-3)\sin(x)]\\ &= \frac{e^{2x}}{25}\left[\cancel{(10x-8)\sin(x)} + (20x-\cancel{6})\cos(x) + (5x+\cancel{6})\cos(x) - \cancel{(10x-8)\sin(x)}\right]\\ &= \underline{\underline{x\cos(x)e^{2x}}}\end{aligned}$$

(e) $F(x) = -\frac{k}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{k}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x-x_0)}{\sqrt{\dots}^3} = \underline{\underline{\frac{k(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3}}}$$

(f)
$$N(z) = \underbrace{\frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{1+\cos(z)}}}_{1+\cos(z)=2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)}\left[\ln\left(\cos\frac{z}{4} + \sin\frac{z}{4}\right) - \ln\left(\cos\frac{z}{4} - \sin\frac{z}{4}\right)\right] \qquad \sigma_{\pm} = \cos\left(\frac{z}{4}\right) \pm \sin\left(\frac{z}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}(\ln(\sigma_+) - \ln(\sigma_-))\\ \Rightarrow \frac{dN(z)}{dz} &= \sqrt{2}\left(\frac{(\sigma^+)'}{\sigma^+} - \frac{(\sigma^-)'}{\sigma^-}\right) = \sqrt{2}\frac{(\sigma^+)'\sigma^- - (\sigma^-)'\sigma^+}{\sigma^+\sigma^-} \quad \text{mit} \quad (\sigma^{\pm})' = \pm\frac{1}{4}\sigma^{\mp}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(\sigma^+)^2 + (\sigma^-)^2}{\sigma^+\sigma^-} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}\frac{\cancel{2}}{\cos^2\left(\frac{z}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{4}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{z}{4}-1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cos\left(\frac{z}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+\cos(z)}}}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: *Ableitungen II* Ziel: (a) bis (d)

Finden Sie die n-te Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = x^n$

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} = n!$$

(b) $f(x) = e^{kx} + e^{-kx}$

$$f'(x) = k\left(e^{kx} - e^{-kx}\right), \quad f''(x) = k^2\left(e^{kx} + e^{-kx}\right) \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} = k^n\left(e^{kx} + (-1)^n e^{kx}\right)$$

(c) $f(x) = x^{n-1}$

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}} \overset{(a)}{=} (n-1)! \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = 0.$$

(d) $f(x) = a^x$

$$f'(x) = (\ln a) a^x, \quad f''(x) = (\ln a)^2 a^x, \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = (\ln a)^n a^x$$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2} = \dfrac{-x}{x^2+x-1}$, Nullstellen des Nenners $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{-x}{x^2+x-1} \overset{!}{=} \dfrac{\alpha}{x-x_1} + \dfrac{\beta}{x-x_2} = \dfrac{\alpha(x-x_2)+\beta(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$

Koeffizientenvergleich: $-1 = \alpha + \beta \quad (1)$
$0 = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad (2)$

$$x_1 \cdot (1) - (2) \Rightarrow -x_1 = \alpha(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-x_1}{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad \beta = -(1+\alpha) = \frac{x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{x_2}{x - x_1} - \frac{x_1}{x - x_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\overset{(e)}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} &= \frac{(-1)^n n!}{x_1 - x_2}\left(\frac{x_1}{(x-x_1)^{n+1}} - \frac{x_2}{(x-x_2)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x_1 - x_2}\left(\frac{x_2^{n+1}}{x_2^{n+1}}\frac{x_1}{(x-x_1)^{n+1}} - \frac{x_1^{n+1}}{x_1^{n+1}}\frac{x_2}{(x-x_2)^{n+1}}\right), \quad x_1 - x_2 = \sqrt{5} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1 x_2^{n+1}}{(x_2 x - x_1 x_2)^{n+1}} - \frac{x_2 x_1^{n+1}}{(x x_1 - x_1 x_2)^{n+1}}\right), \quad x_1 x_2 = -1 \\
&= \frac{(-1)^n n!}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1^n}{(x_2 x + 1)^{n+1}} - \frac{x_2^n}{(x x_1 + 1)^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Es ergibt $\dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\bigg|_{x=0} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n)$ die n-te Fibonacci-Zahl.

Aufgabe 3: *Kurvendiskussion I*

Ein zweiatomiges Molekül lässt sich näherungsweise durch das sogenannte "Morse-Potential" beschreiben,

$$U(x) = D\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right), \qquad D, \alpha = \text{const}.$$

- *Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(x)$ sowie deren Verhalten für $x \to \pm\infty$.*

Nullstellen: $e^{-2\alpha x_0} \stackrel{!}{=} 2e^{-\alpha x_0} \quad \Rightarrow \quad -2\alpha x_0 = \ln(2) - \alpha x_0$

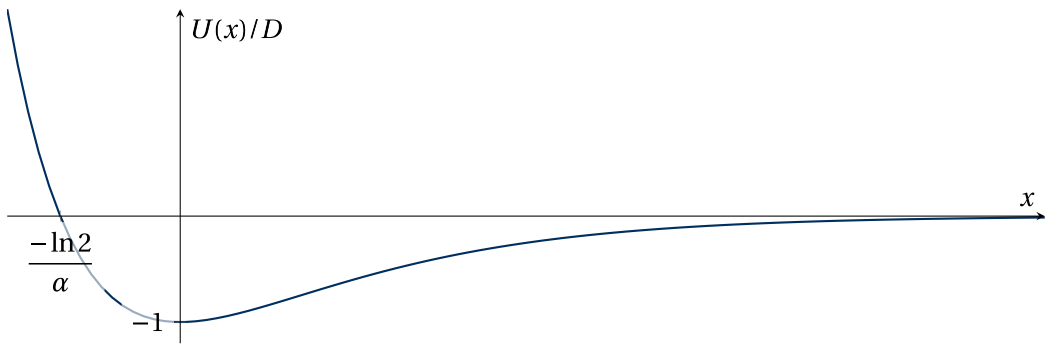
$$\Rightarrow x_0 = -\underline{\underline{\frac{\ln(2)}{\alpha}}}$$

Extrema: $\dfrac{dU(x)}{dx} = D\left(-2\cancel{\alpha} e^{-2\alpha x} + 2\cancel{\alpha} e^{-\alpha x}\right) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad -2\alpha x = -\alpha x \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0, \quad U(x=0) = -D}}.$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} U(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = \infty$

- *Skizzieren Sie die Funktion $U(x)$ für $D = \alpha = 1$ im Intervall $x \in [-1, 5]$.*



Aufgabe 4: *Kurvendiskussion II*

Die Bewegung eines Teilchens mit Drehimpuls L und Energie E in der gekrümmten Raumzeit eines Schwarzen Loches der Masse m wird beschrieben durch das Potential

$$U(r) = \frac{E}{2} - \frac{Em}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{mL^2}{r^3}\,, \qquad r > 0\,.$$

- *Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(r)$ sowie deren Verhalten für $\to\infty$ und $\to 0$.*

$$\text{Nullstellen: } 0 \overset{!}{=} \frac{E}{2} - Emu + \frac{L^2}{2}u^2 - mL^2u^3 \quad , \quad u = \frac{1}{r}$$

$$0 = 1 - 2mu + \frac{L^2}{E}u^2 - \frac{2mL^2}{E}u^3$$

$$= 1 - 2mu + \frac{L^2}{E}(1-2mu)u^2 = (1-2mu)\left(1 + \frac{L^2}{E}u^2\right)$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{1}{2m} \quad , \quad \underline{\underline{r_0 = 2m}}.$$

$$\text{Extrema: } \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{Em}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3mL^2}{r^4} \overset{!}{=} 0 \quad |\cdot r^4$$

$$\Rightarrow \quad 0 = r^2 - \frac{L^2}{Em}r + \frac{3L^2}{E}$$

$$\Rightarrow \quad r_{1/2} = \frac{L^2}{2Em} \pm \sqrt{\frac{L^4}{4E^2m^2} - \frac{3L^2}{E}} = \underline{\underline{\frac{L^2}{2Em}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12Em^2}{L^2}}\right)}}$$

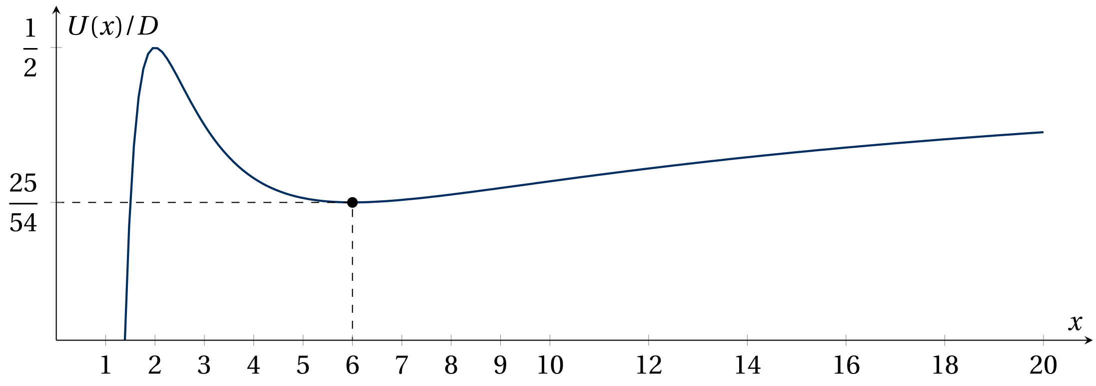
$$\text{Grenzwerte: } \lim_{r\to\infty} U(r) = \frac{E}{2} \quad , \quad \lim_{r\to 0} U(r) = -\infty.$$

- *Setzen Sie $m = \frac{1}{2}$. Welche Bedingungen an E und L müssen erfüllt sein, damit $U(r)$ zwei, ein oder keine lokalen Extrema besitzt?* Für $m = 1/2$ nimmt die Diskriminante den Wert $1 - \frac{3E}{L^2}$ an. Damit können wir zwischen drei Lösungen unterscheiden:

$3E < L^2$:	zwei Extrema.
$3E = L^2$:	ein Extremum.
$3E > L^2$:	keine Extrema.

- *Skizzieren Sie die Funktion $U(r)$ für $E = 1$ und $L = 2$ (nicht maßstabsgerecht).* Für diesen Fall finden wir zwei Extrema. Es ergibt sich

$$r_{1/2} = 4\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \begin{cases} 6 \quad , \quad U(r_1) = \frac{25}{54} = \frac{1}{2} - \frac{1}{27} \\ 2 \quad , \quad U(r_2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Aufgabe 5: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Zusatzaufgabe)

(a) *Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:*

$$f''(x) = a^2 f(x) + bx\,.$$

Wir suchen eine Funktion, die sich selbst (teilweise) reproduziert

Versuch 1: $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda^2 f(x)$

Versuch 2: $f(x) = \mathrm{e}^{ax} + mx$

$$\Rightarrow f''(x) = a^2 \mathrm{e}^{ax} \stackrel{!}{=} a^2 f(x) + bx = a^2 \mathrm{e}^{ax} + a^2 mx + bx$$

offenbar: $m = -\dfrac{b}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a^2} x}}$

$$\left(\text{allgemeine Lösung: } f(x) = c_1 \mathrm{e}^{ax} + c_2 \mathrm{e}^{-ax} - \frac{b}{a^2} x\right)$$

(b) *Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:*

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) f(x)\,.$$

Überlegung: Ableitung von $\mathrm{e}^{g(x)}$ ergibt $g'(x)\mathrm{e}^{g(x)}$

$\Rightarrow$ Welche Funktion ergibt abgeleitet $1 + \ln(x)$? Keine Funktion ergibt abgeleitet $\ln(x)$.

$\Rightarrow$ Es kann $\ln(x)$ durch die Produktregel entstehen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln(x)) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(x)} = x^x}}.$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

Wiederholung des Beweisverfahrens

- Zeige Richtigkeit einer Aussage für einen Startwert
- Zeige: “Aussage richtig für k” impliziert “Aussage richtig für $k+1$”

Beispiel 1:
rekursive Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_n + 2(n+1), \quad a_1 = 1$. Wir wollen nun folgende explizite Darstellung beweisen:[1]

$$a_n = n^2 + n - 1$$

(IA) Induktionsanfang $n = 1 : a_1 = 1^2 + 1 - 1 = 1 \quad \checkmark$

(IV) Induktionsvoraussetzung $n = k : \quad a_k = k^2 + k - 1$

(IB) Induktionsbehauptung $n = k+1 : \quad a_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1) - 1$

Beweis. $a_{k+1} = a_k + 2(k+1) = k^2 + k - 1 + 2(k+1) = (k+1)^2 + k.$

□

Beispiel 2:
Reihe $S_n = 1 \cdot \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + (n-1) \cdot \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Vermutung: $S_n = n \cdot \ln(n) - \ln(n!)$

(IA) $n = 2 : S_n = 2 \cdot \ln(2) - \ln(2!) = \ln(2) \quad \checkmark$

(IV) $n = k : \quad S_k = k \ln(k) - \ln(k!)$

(IB) $n = k+1 : \quad S_{k+1} = (k+1)\ln(k+1) - \ln((k+1)!)$

Beweis.
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \cancel{k \ln(k)} - \ln(k!) + k \ln(k+1) - \cancel{k \ln(k)} \\ &= (k+1)\ln(k+1) \underbrace{- \ln(k+1) - \ln(k!)}_{-\ln((k+1)!)}. \end{aligned}$$

□

[1] Solche Ausdrücke kann Mathematica mit Hilfe des Befehls “FindSequenceFunction[...]” erraten.

Aufgabe 1: *Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift*

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15 \quad \Rightarrow \quad \text{Vermutung:} \quad a_n = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) = 2^{k+1} - 1.$

$\square$

Aufgabe 2: *Vollständige Induktion I* $\quad S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = (-1)^{k-1} \dfrac{k(k+1)}{2}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = (-1)^k \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Beweis.
$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2$$
$$= (-1)^k (k+1) \left[\frac{(-1)^{-1} k}{2} + (k+1) \right] = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.$$

$\square$

Aufgabe 3: *Vollständige Induktion II* $\quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = \left[\dfrac{k(k+1)}{2} \right]^2$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = \left[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$

Beweis.
$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 \left[k^2 + 4(k+1) \right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

$\square$

Aufgabe 4: *Vollständige Induktion III* $\quad S_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3, \quad S_n = 9m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 0 + 1^3 + 2^3 = 9. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3, \quad S_k = 9m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3, \quad S_k = 9m' \quad \text{mit} \quad m' \in \mathbb{N}$

Beweis.
$$S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{S_n} + (k+2)^3 - (k-1)^3$$
$$= 9m + (k+2)^3 - (k-1)^3 = 9m + 9(k^2 + k + 1) = 9m' \text{ mit } m' = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{N}$$

$\square$

Aufgabe 5: *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Vermutung: $S_n = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!}$

(IA) $n=1:\quad S_1 = 1-x.\quad \checkmark$

(IV) $n=k:\quad S_k = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!}$

(IB) $n=k+1:\quad S_{k+1} = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots((k-x)(k+1-x)}{(k+1)!}$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!}\\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!} + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!}\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\Big[(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k+1) + (-1)^{k+1}(-1)^k x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)\Big]\\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}\underbrace{\left[\frac{k+1}{k-x+1} + (-1)^{2k+1}\frac{x}{k-x+1}\right]}_{1}\\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 6: *Fibonacci-Zahlen* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n\right)$ mit $x_\pm = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (Zusatzaufgabe)

(IA) $n=0:\quad a_0 = 0, a_1 = 1.\quad \checkmark$

(IV) $n=k:\quad a_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^k - x_-^k\right)$

(IB) $n=k+1:\quad a_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{k+1} - x_-^{k+1}\right)$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} = a_n + a_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n + x_+^{n-1} - x_-^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)}_{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}_{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{n+1} - x_-^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

□