

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

**Thema 1:** Grundrechenarten  
Brüche  
Potenzen  
Wurzeln

**Vorbereitung der Übung:** Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

## Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

## Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

**Aufgabe 1:** Bruchrechnung

Ziel: (a) bis (f)

$$(a) \quad \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a + b} = \underline{\underline{b - a}}$$

$$(b) \quad \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a+b+a-b}{a+b-a-b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

$$(c) \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy} = \frac{1}{x} \left( \frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2 - y^2}{x+y} \right) = \frac{x-y}{x} \underbrace{\left( \frac{x+y}{y} - 1 \right)}_{\frac{x}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

$$(d) \quad \frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

$$(e) \quad \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

$$\begin{aligned}
\text{(f)} \quad & \frac{a^2-1}{a^2+a} - \cancel{a} \frac{a+1}{a^3-\cancel{a}} + \frac{1}{a} + \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2 + 4}{4(a^2-1)} \\
&= \frac{1}{a} \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} - \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} + \cancel{\frac{1}{a}} + \frac{4a+4}{4(a+1)(a-1)} = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \underline{\underline{1}} \\
\text{(g)} \quad & \frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{ax} - \frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2} \right] \text{ für } x = \frac{1}{a-1} \\
&= \frac{a+x+1}{a+x-1} \left[ \frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2} \right] = \frac{a+x+1}{\overbrace{a+x-1}^{(a+x+1)(a+x-1)}} \frac{(a+x)^2-1}{\sqrt{2}a^2x^2} = \frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \\
&\qquad\qquad\qquad x+a+1 = \frac{1}{a-1} + a+1 = \frac{a^2}{a-1}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Potenzgesetze

Ziel: (a) bis (c)

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \left( \frac{a^2-b^2}{x^2-y^2} \right)^n \left( \frac{x+y}{a-b} \right)^n = \frac{(a+b)^n \cancel{(a-b)^n} (x+y)^n}{\cancel{(x+y)^n} (x-y)^n \cancel{(a-b)^n}} = \underline{\underline{\left( \frac{a+b}{x-y} \right)^n}} \\
\text{(b)} \quad & \frac{b^x c^y (ab)^{2z+y} (cb)^{-x}}{(ac)^{y-x} [(abc^{-0,5})^z]^2} = a^{2z+y-(y-x+2z)} b^{x+2z+y-x-2z} c^{y-x-(y-x-z)} = \underline{\underline{a^x b^y c^z}} \\
\text{(c)} \quad & \frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1} b} \cdot \frac{a^{4n-3} (a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}} \cdot \frac{a^{4-3n} b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}} \\
&= a^{1-n+4n-3+4-3n} b^{-1-2n+5+3n-6} (a+b)^{3n-4+3-2n-n+2} \\
&= \underline{\underline{a^2 b^{n-2} (a+b)}} \\
\text{(d)} \quad & (a^{n+2} - a^n) : (a^3 + a^2) = \frac{a^n}{a^2} \frac{a^2-1}{a+1} = \underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}} \\
\text{(e)} \quad & \left( \frac{a^{-4} b^{-5}}{x^{-1} y^3} \right)^2 \cdot \left( \frac{a^{-2} x}{b^3 y^2} \right)^3 = a^{-8-6} b^{-10-9} x^{2+3} y^{-6-6} = \underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14} b^{19} y^{12}}}}
\end{aligned}$$

Wurzelgesetze

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, & \sqrt[n]{a^n b} &= a\sqrt[n]{b}, & (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}, & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\ \sqrt[p]{a^m}\sqrt[q]{a^n} &= \sqrt[pq]{a^{mq+np}}, & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, & \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} &= \sqrt[pq]{a^{mq-np}}\end{aligned}$$

Beispiel für "Rationalmachen des Nenners":

$$r + \sqrt{1+r^2} - \frac{1}{r + \sqrt{1+r^2}} = r + \cancel{1+r^2} - \frac{r - \sqrt{1+r^2}}{-1} = \underline{\underline{2r.}}$$

$$(a) \quad \sqrt[6]{a^3} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1 - ab} = \frac{1 - \sqrt{ab}}{1 + \sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{ab}}{1 - ab} = \frac{(1 - \sqrt{ab})^2 + 2\sqrt{ab}}{1 - ab} = \underline{\underline{\frac{1 + ab}{1 - ab}}}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad & \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}} \quad \text{für } x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \text{ mit } |m| < 1 \\ &= \frac{(\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx})^2}{2bx} = \frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{2bx} = \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{4a^2m^2}{(1+m^2)^2}}}{2am} (1+m^2) \\ &= \frac{1+m^2 + \sqrt{(1+m^2)^2 - 4m^2}}{2m} = \frac{1+m^2 + 1-m^2}{2m} = \underline{\underline{\frac{1}{m}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) \quad & \left( \sqrt{ab} - \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})} \\ &= \underline{\underline{a(\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b})}}\end{aligned}$$

**Aufgabe 4: Algebraische Umformungen**

Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach  $x$  auf.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & (a + nx)(b - nx) - (a - mx)(b + mx) = x^2(m - n)(m + n) - 1 \\
 & \cancel{(m^2 - n^2)}x^2 + (bn - an + bm - am)x = \cancel{x^2(m^2 - n^2)} - 1 \\
 & (a - b)(m + n)x = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{(a - b)(m + n)}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \frac{ax + b}{ab - b^2} - \frac{a - bx}{ab + b^2} = \frac{2(ax + b)}{a^2 - b^2} \quad | \cdot b(a^2 - b^2) \\
 & (ax + b)(a + b) - (a - bx)(a - b) = 2b(ax + b) \\
 & (ax + b)\cancel{(a - b)} - (a - bx)\cancel{(a - b)} = 0 \quad (a \neq b) \\
 & (a + b)x = a - b \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{a - b}{a + b}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & \frac{x - 1}{n - 1} + \underbrace{\frac{2n^2(1 - x)}{n^4 - 1}}_{n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)} = \frac{2x - 1}{1 - n^4} - \frac{1 - x}{1 + n} \quad | \cdot (n - 1)(n + 1) \\
 & \left( n + 1 - \frac{2n^2}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} - (n - 1) \right) x = n + 1 - \frac{2n^2}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 1} - (n - 1) \\
 & 4x = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{4}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & a(\sqrt{x} - a) - b(\sqrt{x} - b) + a + b = \sqrt{x} \\
 & \cancel{a - b - 1}\sqrt{x} = a^2 - b^2 - (a + b) = (a + b)(\cancel{a - b - 1}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = (a + b)^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad & \frac{\frac{1}{x - \sqrt{1 - 4y^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{1 - 4y^2}}}{\frac{1}{x - \sqrt{1 - 4y^2}} - \frac{1}{x + \sqrt{1 - 4y^2}}} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{1 + 2y}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1 - 2y}}, \quad \text{siehe 1b) mit } a = x, b = \sqrt{1 - 4y^2} \\
 & \frac{x}{\sqrt{1 - 4y^2}} = \frac{|y + 1|}{\sqrt{1 + 2y}} \frac{|y - 1|}{\sqrt{1 - 2y}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\underline{x = y^2 - 1}} & \text{für } |y| \geq 1 \\ \underline{\underline{x = 1 - y^2}} & \text{für } |y| < 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

## – AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

### Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

**Tafelbeispiel:**  $\frac{10(x+y)+3}{x-2y+4} = 1, \quad \frac{36x-3y}{7(x-y)+3} = 3$

1. Sortieren nach  $x$  und  $y$

$$9x + 12y = 1 \quad (1)$$

$$15x + 18y = 9 \quad (2)$$

2. Prüfe auf lineare Unabhängigkeit, d. h. Berechne  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  (Determinante, vgl. Vorlesung):

$$9 \cdot 18 - 15 \cdot 12 = 162 - 180 \neq 0 \Rightarrow \text{genau ein Lösungspaar } (x, y)$$

3. Lösen, bspw. durch geschickte Linearkombination (Elimination von  $y$ )

$$2 \cdot (2) - 3 \cdot (1): \quad 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{in } (1): \quad 12y = -44 \Rightarrow y = -\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = \underline{\underline{\left\{ \left( 5; -\frac{11}{3} \right) \right\}}}$$

### Aufgabe 1: Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Ziel (a) bis (d)

(a)  $33x + 12y = 25 \quad (1)$

$$11x - 3y = 6 \quad (2)$$

$$(1) - 3 \cdot (2): \quad 21y = 7 \Rightarrow y = \frac{1}{3}, \quad \text{in } (2): \quad x = \frac{7}{11} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{7}{11}; \frac{1}{3} \right) \right\}}}$$

(b) 
$$\left. \begin{array}{l} \frac{2x+3y}{3x-y} = \frac{17}{9} \\ \frac{3x+4y}{6x-1} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x-4y=0 \quad (1) \\ 9x-4y=2 \quad (2) \end{array}$$

$$(1) - (2): \quad 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot (1) - (2): \quad 8y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right) \right\}}}$$

$$(c) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x+2}{y+3} = \frac{1}{3} \\ \frac{y+3}{2y-5x} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x - y = -3 \quad (1) \\ 15x - y = -15 \quad (2) \end{array}$$

$$(1) - (2): -12x = 12 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{in (1):} \quad y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-1; 0)\}}}$$

$$(d) \quad ax + by = 2a \quad (1)$$

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{2}{a} \quad (2)$$

$$(1) - ab \cdot (2): 2by = 2(a - b) \Rightarrow y = \frac{a}{b} - 1$$

$$\text{in (1):} \quad ax + a - b = 2a \Rightarrow x = \frac{b}{a} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{b}{a} + 1; \frac{a}{b} - 1 \right) \right\}}}$$

$$(e) \quad x + 14y = \frac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} \quad (1)$$

$$3\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (2)$$

$$(1) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot (2): \quad \left( 14 + \frac{1}{3\sqrt{6}} \right) y = \frac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{12}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( 14 + \frac{1}{3\sqrt{6}} \right) \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{in (1):} \quad x - 7\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}}}$$

$$(f) \quad \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b \quad (1)$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2b \quad (2)$$

$$(a+b) \cdot (1) - a \cdot (2): \quad \left( \frac{a+b}{a-b} + \frac{a}{b} \right) y = a^2 + b^2$$

$$\left( \cancel{ab} + b^2 + a^2 - \cancel{ab} \right) y = b(a-b)(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow y = b(a-b)$$

$$\text{in (1):} \quad \frac{x}{a+b} + \cancel{b} = a + \cancel{b} \Rightarrow x = a(a+b) \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a(a+b); b(a-b))\}}}$$

$$(g) \quad 39x - 38y = 1 \quad (1)$$

$$91x - 57y = 4 \quad (2)$$

$$2 \cdot (2) - 3 \cdot (1): (182 - 117)x = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{13}$$

$$\text{in (1):} \quad 38y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{19} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{1}{13}; \frac{1}{19} \right) \right\}}}$$

**Aufgabe 2: Drei Gleichungen mit drei Unbekannten**

Ziel: (a) und (b)

*Tafelbeispiel:*

$$x + y + z = 9 \quad (1)$$

$$x + 2y + 4z = 15 \quad (2)$$

$$x + 3x + 9z = 23 \quad (3)$$

Vorgehen: Wir wollen eine Linearkombination der drei Gleichungen finden, sodass (bspw.)  $x$  und  $y$  verschwinden; d. h. in  $a \cdot (1) + b \cdot (2) + c \cdot (3)$  soll  $a + b + c = 0$  sein und  $a + 2b + 3c = 0$ . Wir haben offenbar die Freiheit,  $a = 1$  zu wählen, also  $b = -2$  und  $c = 1$ .

$$(1) - 2 \cdot (2) + (3): \quad 2z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

$$\text{in (1):} \quad x + y = 8 \quad (4)$$

$$\text{in (2):} \quad x + 2y = 11 \quad (5)$$

Die Gleichungen (4), (5) können nun mit den früheren Methoden gelöst werden.

Optionale Kreativlösung: Angenommen  $x, y \in \mathbb{N}$ . Nach (5) muss  $x$  ungerade sein, damit nach (4) auch  $y$ . Die einzigen positiven Zerlegungen der Zahl 8 in zwei ungerade Zahlen sind (1,7) und (3,5). Nur letztere löst (4) und (5). Wir erhalten  $\mathbb{L} = \{(5; 3; 1)\}$ .

*Lösung:*

$$(a) \quad x - y + 5z = 5 \quad (1)$$

$$3x + 7y - 5z = 5 \quad (2)$$

$$x + y - z = 1 \quad (3)$$

$$2 \cdot (1) + (2) - 5 \cdot (3): \quad 10z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{in (1):} \quad x - y = 0 \\ \text{in (3):} \quad x + y = 2 \end{array} \right\} \quad x = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1; 1; 1)\}}}$$

$$(b) \quad 3x - 4y + 3z = 4 \quad (1)$$

$$-x + y - z = -2 \quad (2)$$

$$7x + 4y - 5z = 0 \quad (3)$$

$$(1) + 8 \cdot (2) - (3): \quad -12x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{in (1):} \quad -4y + 3z = 1 \\ \text{in (2):} \quad y - z = -1 \end{array} \right\} \quad y = 2, z = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}}}$$

$$(c) \quad x + y = b + a \quad (1)$$

$$x + z = a + c \quad (2) \quad \text{Lösung durch Draufschaun.}$$

$$y + z = c + b \quad (3)$$

$$(1) + (2) - (3): \quad 2x = 2a$$

$$(1) - (2) + (3): \quad 2y = 2b$$

$$(2) + (3) - (1): \quad 2z = 2c \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a; b; c)\}}}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad & 6x - 4y + 8z = 0 \quad (1) \\
& -2x + y - z = 0 \quad (2) \quad \text{Da } (1) - 3 \cdot (2) = (3), \text{ ist das System unterbestimmt.} \\
& 12x - 7y + 11z = 0 \quad (3) \\
& (1) + 3 \cdot (2): -y + 5z = 0 \Rightarrow y = 5z \\
& (1) + 4 \cdot (2): -2x + 4z = 0 \Rightarrow x = 2z \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2z; 5z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}}}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 3: Parametrisierung von Lösungsmengen

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung  $13x - 7y = 1$  an für

(a)  $x, y \in \mathbb{R};$

(b)  $x, y \in \mathbb{N}.$

(a) Für  $x, y \in \mathbb{R}$  ist nichts zu beachten. Wir lösen die Gleichung nach  $x$  auf und erhalten

$$x = \frac{1+7y}{13} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{1+7\lambda}{13}; \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}}}.$$

(b) Für  $x, y \in \mathbb{N}$  muss  $1+7n, n \in \mathbb{N}$ , ein Vielfaches von 13 sein. Die kleinste natürliche Zahl, für die das gilt, ist  $n = 11$  (ausprobieren), d. h. alle übrigen Teiler liegen in 13er-Schritten darüber.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n+1$	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
13-Reihe	13	26	39	52	65	78					

Setzen wir also  $\lambda = 11 + 13n$  in  $\mathbb{L}$  von oben ein, ergibt sich  $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(6+7n; 11+13n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}}}.$

### Aufgabe 4: Gleichungssysteme

Ziel (a) und (b)

*Tafelbeispiel:* In dieser Aufgabe werden nicht linear aussehende Gleichungen auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt.

$$\begin{aligned}
(1-x)^2 &= 5y^2 - 4(x-2)^2 \quad (1) \\
2(x^2 - y^2) &= 6x - 5 \quad (2).
\end{aligned}$$

Sortieren wir das Gleichungssystem um, ergibt sich

$$\begin{aligned}
5(x^2 - y^2) - 18x + 17 &= 0 \quad (3) \\
2(x^2 - y^2) - 6x + 5 &= 0 \quad (4) \\
(3) - \frac{5}{2} \cdot (2): -3x + \frac{9}{2} &= 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\
\text{in (2): } y^2 = x^2 - 3x + \frac{5}{2} = \frac{1}{4} \quad y = \pm \frac{1}{2} &\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{2} \right) \right\}}}.
\end{aligned}$$



Lösung:

$$(a) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2(xy + 2) \quad (1) \Rightarrow (x - y)^2 = 4 \Rightarrow x - y = \pm 2 \quad (1a) \\ x + y &= 6 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1a) + (2): \quad 2x = \begin{cases} 8, & \text{oberes VZ} \\ 4, & \text{unteres VZ} \end{cases}$$

$$\text{in (2):} \quad y = \begin{cases} 2, & \text{oberes VZ} \\ 4, & \text{unteres VZ} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(4; 2), (2; 4)\}}}$$

$$(b) \quad \frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5 \quad (1)$$

$$\frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6 \quad (2)$$

$$2 \cdot (1) - (2): \quad 16 = 4\sqrt{x-1} \Rightarrow x = 17$$

$$2 \cdot (1) - 3 \cdot (2): \quad 20 = 8\sqrt{y+\frac{1}{4}} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(17; 6)\}}}$$

Optionaler Hinweis: nicht immer muss alles mühsam quadriert und aufgelöst werden, sondern man kann auch versuchen draufzuschauen.

- Was ergibt 8 multipliziert mit 20? Antwort:  $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
- Die Wurzel woraus ist  $\frac{5}{2}$ ? Antwort:  $\frac{25}{4}$ .
- Damit ist  $y = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6$ .

$$(c) \quad \begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2x + 3} + y^2 &= (x + y)x - xy \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{2x + 3} = x^2 - y^2 \quad (1) \\ y - 2x &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

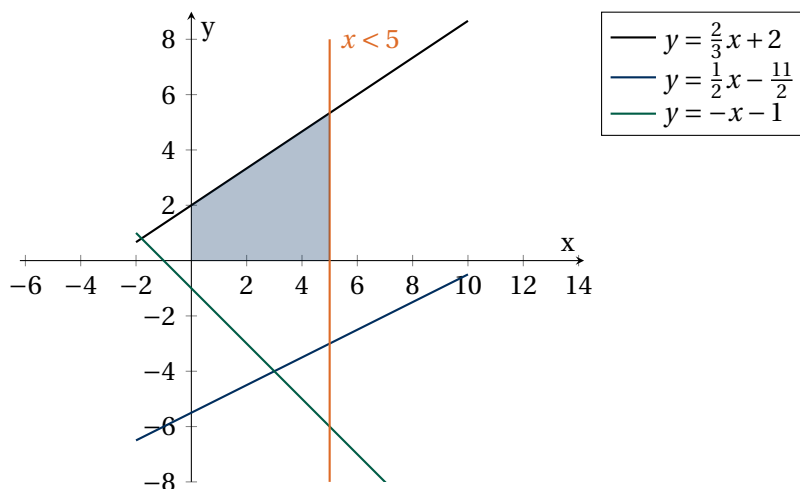
$$\text{Fall } x^2 \neq y^2 \quad \left. \begin{array}{l} (1): 1 = 2x + 3 \Rightarrow x = -1 \\ \text{in (2): } y = 1 \end{array} \right\} \text{Widerspruch}$$

$$\text{Fall } x = \pm y \quad (2): \quad y = \begin{cases} -3, & \text{oberes VZ} \\ 1, & \text{unteres VZ} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-3; -3), (-1; 1)\}}}$$

## Aufgabe 5: Ungleichungssysteme

- (a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6, \\ x - 2y &< 11, \\ x &> -y - 1, \\ x &< 5, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

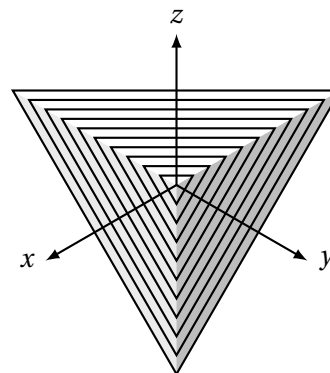


Offenbar können die zweite und dritte Gleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am schraffierten Gebiet ändert.

- (b) \* Welches Gebiet im ersten Oktanten ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z, \\ x + z &\geq y, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige (unendlich große) Pyramide, deren Spitze auf dem Koordinatenursprung liegt und deren Kanten jeweils die  $x-y$ -,  $x-z$ - und  $x-z$ -Ebene halbieren.



# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

## – AUSFÜHRliche LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

### Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

#### Aufgabe 1: Quadratische Gleichungen

Ziel: (a) und (b)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für  $x$  durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der  $pq$ -Formel.

Tafelbeispiel: Ziel ist es, die Ausdrücke in die Form  $(x + a)^2$  oder  $(ax + b)^2$  zu bekommen.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 3x^2 + 18x + 15 = 0, \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0, \\ & \text{vgl. mit } (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \Rightarrow 2a \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow a = 3, \Rightarrow a^2 = 9. \\ & \Rightarrow \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} - 4 = 0 \xRightarrow{\text{Wurzel}} \pm(x + 3) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -1, x_2 = -5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 16x^2 - 56x - 15 = 0, \\ & \text{vgl. mit } (ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, \Rightarrow a^2 = 9. \\ & 2ab = -56 \Rightarrow b = -7 \Rightarrow b^2 = 49 \\ & \underbrace{16x^2 - 56x + 49}_{(4x-7)^2} - 64 = 0 \Rightarrow \pm(4x - 7) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{15}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (a) \quad & x^2 - 10x + 9 = 0 \quad | + 16 \\ & (x - 5) = 16 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 9, x_2 = 1}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases} \\ (b) \quad & x^2 + x - 12 = 0 \quad | + \frac{49}{4} \\ & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3, x_2 = -4}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist immer am Vorfaktor von  $x$  abzulesen, welches  $a$  in  $(x \pm a)^2$  steckt; hier offenbar  $n = 1/2$ , wir erzeugen also  $1/4$  auf der linken Seite.

$$\begin{aligned} (c) \quad & x^2 - \sqrt{8}x + 1 = 0 \quad | + 1 \quad (\sqrt{8} = 2\sqrt{2}) \\ & (x - \sqrt{2})^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = \pm 1 + \sqrt{2}}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 1} = \sqrt{2} \pm 1. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Wurzeln quadratischer Gleichungen

Tafelbeispiel:

1. Wiederholung Vieta'scher Wurzelsatz:

Habe die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  die Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$ , dann lautet die Linearfaktorzerlegung

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_p + \underbrace{x_1 x_2}_q$$

2. Wann sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung identisch?

$$x_1 = x_2 = a \xrightarrow{\text{Vieta}} p = -(a + a) = 2a, \quad q = a^2$$

Die Gleichung muss von der Form  $0 = x^2 - 2ax + a^2$  sein (vgl. 2. binomische Formel).

3. Von welcher Form ist eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln den Quotienten  $a$  und die Differenz  $b$  haben?

$$\frac{x_1}{x_2} = a, \quad x_1 - x_2 = b \Rightarrow x_1 = \frac{ab}{a-1}, \quad x_2 = \frac{b}{a-1}$$

$$\xrightarrow{\text{Vieta}} p = -\frac{(a+1)b}{a-1}, \quad q = \frac{ab^2}{(a-1)^2}$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - \frac{(a+1)b}{a-1}x + \frac{ab^2}{(a-1)^2}$$

Lösung:

- (a) Stellen Sie  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$  als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  ist.

$$\text{Vieta: } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = x_1 x_2 \quad (1), \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad (2)$$

- 1) Variante 1: raten und konstruieren

Gleichung (2) legt nahe, dass  $x_1 = a/b$ ,  $x_2 = b/a$ , jedoch gilt dann  $x_1 x_2 = 1$ . Welche ist die einfachste Modifikation dieser Idee, die immer noch (2) erfüllt?

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{b} + n, \quad x_2 = \frac{b}{a} - n \\ \Rightarrow x_1 x_2 &= 1 + n \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - n^2 \stackrel{!}{=} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \Rightarrow n = -1 \\ \Rightarrow x_1 &= \underline{\underline{\frac{a}{b} - 1}}, \quad x_2 = \underline{\underline{\frac{b}{a} + 1}} \end{aligned}$$

Da es sich bei  $x_{1/2}$  um die Wurzeln einer quadratischen Gleichung handelt, ist die Lösung - bis auf Numerierung - eindeutig.

2) Variante 2: Lösen der quadratischen Gleichung. Nach Vieta folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= x^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x + \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \\
 \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{a^2 + b^2}{2ab} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2} - \frac{a^2 - b^2}{ab}} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4a^3b + 4ab^3}}{2ab}
 \end{aligned}$$

Versuche den Wurzelterm zu faktorisieren:

$$\begin{aligned}
 (a^2 \pm b^2 \pm 2ab)^2 &= (a^2 \pm b^2)^2 + 4a^2b^2 \pm 4ab(a^2 + b^2) \\
 &= a^4 + b^4 + 4a^2b^2 \pm 2a^2b^2 \pm 4a^3b + (\pm 1 \cdot \pm 1)4ab^3.
 \end{aligned}$$

Wir sollten also zweimal das untere Vorzeichen wählen, dann folgt:

$$\begin{aligned}
 x_{1/2} &= \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2 - 2ab)}{2ab} = \begin{cases} \frac{a}{b} - 1 \\ \frac{b}{a} + 1 \end{cases} \\
 \Rightarrow x_1 &= \underline{\underline{\frac{a}{b} - 1}}, \quad x_2 = \underline{\underline{\frac{b}{a} + 1}}
 \end{aligned}$$

- (b) Bestimmen Sie in der Gleichung  $5x^2 - kx + 1 = 0$  den Koeffizienten  $k$  so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.

Wir berechnen die Wurzeln mit der  $pq$ -Formel

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{k}{5}x + \frac{1}{5} &= 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{k}{10} \pm \sqrt{\frac{k^2}{100} - \frac{1}{5}} \\
 \Rightarrow x_1 - x_2 &= 2\sqrt{\frac{k^2 - 20}{100}} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \frac{k^2 - 20}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow k^2 = 45 \Rightarrow \underline{\underline{k = \pm 3\sqrt{5}}}.
 \end{aligned}$$

- (c) Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich  $p$  und  $q$  sind.

Mit Satz von Vieta folgt

$$\begin{aligned}
 p &= -(x_1 + x_2) \stackrel{!}{=} -(p + q) \Rightarrow 2p + q = 0(*) \\
 q &= x_1 x_2 \stackrel{!}{=} pq, \quad \text{Fallunterscheidung} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{Fall } q = 0: \quad p = 0 \quad \text{aus } (*) \\ \text{Fall } q \neq 0: \quad p = 1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} q = -2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \underline{\underline{\{(p; q)\} = \{(0; 0), (1; -2)\}}}
 \end{aligned}$$

- (d) Gegeben ist die quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$ . Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich

- dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x'_1 = 2x_1, x'_2 = 2x_2 \text{ folgt } \frac{2b}{a} = -(x'_1 + x'_2) = p'$$

$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x'_1 = 2x_1, x'_2 = 2x_2 \text{ folgt } \frac{4c}{a} = x'_1 x'_2 = q'$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{ax^2 + 2bx + 4c = 0}}$$

- den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x'_1 = \frac{1}{x_1}, x'_2 = \frac{1}{x_2} \text{ folgt } \frac{b}{a} = -\left(\frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2}\right) = -\frac{x'_1 + x'_2}{x'_1 x'_2} = \frac{p'}{q'}$$

$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x'_1 = \frac{1}{x_1}, x'_2 = \frac{1}{x_2} \text{ folgt } \frac{c}{a} = \frac{1}{x'_1 x'_2} = \frac{1}{q'}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{cx^2 + bx + a = 0}}$$

### Aufgabe 3: Gleichungssysteme

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für  $x$  und  $y$ .

Tafelbeispiel:

1. Lösung mit  $p - q$ -Formel:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = 5(y - 1) \quad (2)$$

$$(1) - (2): \quad y^2 = \frac{1}{2}(7 - 5y) \quad \Rightarrow \quad 0 = y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{7}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -7/2 \end{cases}$$

$$\text{Fall } y = 1: \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Fall } y = -\frac{7}{2}: \quad x^2 = -\frac{41}{4} \quad \text{keine (reelle) Lösung} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1; 1), (-1; 1)\}}}$$

2. Lösung mit Satz von Vieta:

$$\begin{array}{ll} x + y + y^2 = 3 & \text{mit } u \equiv x + y, v \equiv y^2 \text{ folgt} \\ y^2(x + y) = -54 & \begin{array}{l} u + v = 3 \\ uv = -54 \end{array} \end{array}$$

Vieta:  $u, v$  sind Wurzeln der Gleichung  $0 = z^2 - 3z - 54$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 54} = \frac{3}{2} \pm \frac{15}{2} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

$$\text{Fall: } v = 9, u = -6: \quad y = \pm 3, \quad x = -6 - y = \begin{cases} -9, & y = 3 \\ -3, & y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Fall: } u = 9, v = -6: \quad y^2 = -6 \quad \Rightarrow \quad \text{keine (reelle) Lösung.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-9; 3), (-3; 3)\}}}$$

Lösung:

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} x + y^2 = 7 \\ xy^2 = 12 \end{array} \right\} \text{ mit } u \equiv x, v \equiv y^2 \text{ folgt } \left. \begin{array}{l} u + v = 7 \\ uv = 12 \end{array} \right\}$$

$$\xRightarrow{\text{Vieta}} \quad z^2 - 7z + 12 = 0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fall 1: } x = 4, y = \pm\sqrt{3} \\ \text{Fall 2: } x = 3, y = \pm 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\{(x; y) = \{(4; \pm\sqrt{3}), (3; \pm 2)\}}}}$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} x + xy + y = 11 \quad (1) \\ x^2y + xy^2 = 30 \quad (2) \end{array} \right\} \text{ mit } u \equiv xy, v \equiv x + y \quad \left. \begin{array}{l} u + v = 11 \\ u \cdot v = 30 \end{array} \right\}$$

$$\xRightarrow{\text{Vieta}} \quad z^2 - 11z + 30 = 0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fall 1: } \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \\ \text{Fall 2: } \begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \end{array} \right\} \text{ Vieta } \left. \begin{array}{l} q^2 - 5q + 6 = 0 \\ q^2 - 6q + 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \\ q_{1/2} = 3 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 3, y = 2}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x = 2, y = 3}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 5, y = 1}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x = 1, y = 5}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x; y) = \{(3; 2), (2; 3), (5; 1), (1; 5)\}}}}$$

Man beachte, wie die Symmetrie der Gleichungen unter Vertauschung  $x \leftrightarrow y$  und  $xy \leftrightarrow x + y$  in der Lösungsmenge wiederzufinden ist.

$$(c) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \quad (1) \\ x - y = \frac{1}{4}xy \quad (2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (x - y)^2 = \frac{xy}{2} \\ (x - y)^2 = \frac{x^2y^2}{16} \end{array} \right\} \quad 8xy = (xy)^2$$

$$\text{Fall 1: } \left. \begin{array}{l} x = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} y = 0 \\ \text{oder } y = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x = 0 \end{array} \right\} \quad \underline{\underline{x = 0, y = 0}}$$

$$\text{Fall 2: } x \neq 0 \quad \text{und} \quad y \neq 0: \quad 8 = xy$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{in (1): } x^2 + y^2 = 20 \\ \text{in (2): } x - y = 2 \end{array} \right\} \quad 2x^2 - 4x = 16$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \quad , \quad y = x - 2 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x; y) = \{(0; 0), (4; 2), (-2; 4)\}}}}$$

Da das Quadrieren von Gleichung (2) keine Äquivalenzumformung darstellte, müssen alle Lösungspaare noch durch Probe bestätigt werden.

Beachte außerdem die Aussagenlogik bei der Fallunterscheidung: Das Komplement zu " $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ " ist " $x = 0$  oder  $y = 0$ "; dass dennoch beide gleichzeitig Null sind, folgt erst einen Schritt später.

**Aufgabe 4: Wurzelgleichungen**

Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für  $x$ .

Tafelbeispiel:

$$\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-4} = 1$$

$$\sqrt{3x-5} = 1 - \sqrt{2x-4} \quad |^2$$

$$3x-5 = 1 + 2x-4 - 2\sqrt{2x-4} \quad , \text{ Wurzel isolieren}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x-4} = 2-x \quad |^2$$

$$4(2x-4) = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 12x + 20 \quad , \quad x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36-20} = \begin{cases} 10 \\ 2 \end{cases}$$

Da Quadrieren *keine Äquivalenzumformung* ist, können zusätzliche Lösungen entstehen und es muss die Probe gemacht werden!

Probe:  $x = 10$ :  $\sqrt{25} + \sqrt{16} = 9 \neq 1$  *keine Lösung*

$x = 2$ :  $\sqrt{1} + \sqrt{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=2}}$

Beachte außerdem, dass Einschränkungen an die in den Gleichungen auftretenden Konstanten vorliegen können. *Lösung:*

(a)  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$  (offenbar  $x \geq 1$ )

$$\sqrt{3x+1} = 2 + \sqrt{x-1} \quad |^2$$

$$3x+1 = 3 + 4\sqrt{x-1} + x$$

$$\Rightarrow x-1 = 2\sqrt{x-1} \quad |^2$$

$$(x-1)^2 = 4(x-1) \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad , \quad \xrightarrow{x \neq 1} x=5$$

Probe:  $\begin{cases} x=2: \sqrt{4}-\sqrt{0}=2 \\ x=5: \sqrt{16}-\sqrt{4}=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1=1, x_2=5.}}$

(b)  $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x} \quad |^2 \quad (a=0 \Rightarrow x=0)$

$$\cancel{x} + \cancel{a} = \cancel{a^2} + \cancel{x} - 2a\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} = a-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{(a-1)^2}{4}}}$$

Probe:  $\sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} + a} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 1 + 2a} = \frac{1}{2} \sqrt{(a+1)^2} = \frac{|a+1|}{2}$

$$a - \sqrt{x} = a - \frac{|a-1|}{2} = \begin{cases} \frac{a+1}{2}, & a \geq 1 \\ \frac{3a-1}{2}, & a < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Bedingung } a \geq 1$$



$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & \sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b \xrightarrow{\text{draufschaufen}} \underline{\underline{x=0}} \quad \text{für } a \geq 0, b \geq 0 \\
 & \cancel{a^2} - \cancel{x} = \underbrace{\cancel{a^2} + b^2 + 2ab + b^2 - x}_{(a+b)^2} - 2(a+b)\sqrt{b^2 - x} \\
 & \cancel{(a+b)}\sqrt{b^2 - x} = \cancel{b(a+b)} \Rightarrow x = 0.
 \end{aligned}$$

Schon in der Zeile zuvor zeigt sich: Die Gleichung ist linear in  $x$ , d. h. die Lösung durch Draufschaufen ist tatsächlich die Einzige.

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = 3 \quad |^2 \\
 & \sqrt{3x+4} = 8 - x \quad |^2 \\
 & \Rightarrow 0 = x^2 - 19x + 60 \\
 & \Rightarrow x_{1/2} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} - 60} = \begin{cases} 15 & \Rightarrow \text{Probe: falsch} \\ 4 & \Rightarrow \text{Probe: wahr} \end{cases} \quad \underline{\underline{x=4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad & \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-3/2} = \frac{6}{\sqrt{2x-1}} \quad (\text{offenbar } x \geq \frac{3}{2}) \\
 & \sqrt{2x^2 - 4x + 3/2} = 7 - 2x \\
 & 0 = 2x^2 - 24x + \frac{95}{2} \\
 & \Rightarrow x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36 - \frac{95}{4}} = \begin{cases} \frac{19}{2} & \Rightarrow \text{Probe: falsch} \\ \frac{5}{2} & \Rightarrow \text{Probe: wahr} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{5}{2}}}.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 5: Nullstellensuche**

Ziel: (a) bis (c)

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.

*Tafelbeispiel:* Beachte zunächst, dass nicht jedes Polynom als Produkt (reeller) Linearfaktoren geschrieben werden kann, bspw.

$$x^2 - 3x + 6, \text{ da } 0 = x^2 - 3x + 6 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}}.$$

Oft lässt sich die Zerlegung durch Vergleich mit

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$$

erkennen, bspw.  $x^2 + 13x + 12 \Rightarrow m + n = 13, mn = 12$ . Dort erkennen wir schnell  $m = 1, n = 12$  und somit

$$x^2 + 13x + 12 = (x + 1)(x + 12)$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x^2 + 2x - 15 &\Rightarrow m + n = 2 \quad \text{und} \quad m \cdot n = -15 \\ &\Rightarrow \text{klappt für } m = 5, n = -3 \Rightarrow \underline{x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)}. \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad 4x^2 + 8x - 5$$

$$\text{Konstruktion: } (ax + m)(bx + n) = abx^2 + (an + bm)x + mn$$

Wir können nun zwei Zahlen  $x_1 = an, x_2 = bm$  suchen, deren Summe gleich dem linearen Faktor  $x_1 + x_2 = (an + bm) = 8$  und deren Produkt gleich  $x_1 \cdot x_2 = (ab) \cdot (mn) = 4 \cdot (-5) = -20$  entspricht. Wir finden durch ausprobieren  $x_1 = -2, x_2 = 10$  und können nun den linearen Term in  $x$  aufteilen

$$4x^2 - 2x + 10x - 5 = 2x(2x - 1) + 5(2x - 1) = \underline{(2x - 1)(2x + 5)}.$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad ax^3 + bx^2 + adx^2 + bdx &= x(ax^2 + (b + ad)x + bd) = x(\underbrace{ax^2 + bx}_{x(ax+b)} + (ax + b)d) \\ &= \underline{x(ax + b)(x + d)}. \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad (a - x)^2 + (x - b)^2 - a^2 - b^2 = 2x^2 - 2ax - 2bx = \underline{2x(x - a - b)}.$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad a\sqrt{8}x^2 - 2kax - 3ak + ax\sqrt{18} &= a(\sqrt{x}x^2 + \sqrt{18}x - k(2x + 3)) \\ &= a(\sqrt{2}x(2x + 3) - k(2x + 3)) = \underline{a(2x + 3)(\sqrt{2}x - k)}. \end{aligned}$$

# AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

## – AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

### Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades Das Summenzeichen

#### Aufgabe 1: Nullstellensuche

Ziel: (a) bis (c)

- (a) Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln  $a$ ,  $b$  und  $c$  hat.

$$f_3(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = \underline{\underline{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc}}$$

*Bemerkung:* Hier kann man versuchen, sich klarzumachen, wie der verallgemeinerte Satz von Vieta aussieht.

- (b) Zerlegen Sie das Polynom  $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$  in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?

$$f_4(x) = x^3 + \underbrace{2x^4 + 4x^2 + 2}_{2x^4 + 2x^2 + 2x^2 + 2 = 2x^2(x^2+1) + 2(x^2+1)} + x = (x^2+1)(2x^2+2) + \underbrace{x^3+x}_{x(x^2+1)} = \underline{\underline{(x^2+1)(2x^2+x+2)}}$$

Da weder  $x^2+1=0$  noch  $x^2+\frac{1}{x}x+1=0$  eine (reelle) Lösung hat, besitzt das Polynom keine (reellen) Nullstellen.

- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms  $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ . Offensichtlicherweise gilt  $x_1 = 0$  und wir können das Polynom mit Division durch  $x$  vereinfachen. Mit der Substitution  $z \equiv x^2$  erhalten wir

$$0 = z^2 - 3z + 2 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x_{2/3} = \pm\sqrt{2}}}, \quad \underline{\underline{x_{4/5} = \pm 1}}.$$

- (d) Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms  $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ . Setzen Sie näherungsweise  $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$ . Wir führen wieder die Substitution  $z \equiv x^2$  aus und erhalten

$$0 = z^2 - 12z + 24 \Rightarrow z_{1/2} = 6 \pm 2\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}.$$

Wir suchen nun das kleinste positive  $x$ , also 1.VZ: “+” und 2.VZ: “–”

$$x_0 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} \stackrel{\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}}{\approx} \sqrt{6 - \left(3 - \frac{\pi^2}{8}\right)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

*Bemerkung:* Die Funktion  $f_4(x)$  ist das dritte Taylorpolynom der Kosinusfunktion. Es gilt  $\cos(x) = f_4(x) + \mathcal{O}(x^6)$ .

## Aufgabe 2: Polynomdivision

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zusatz: Für welche Werte von  $n$  bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

$$\begin{array}{r}
 (a) \quad (21a^3 + 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b) = \underline{3a^2 - 7ab + 5b^2} \\
 \underline{-(21a^3 + 15a^2b)} \\
 -49a^2b + 25b^3 \\
 \underline{-(-49a^2b - 35ab^2)} \\
 35ab^2 + 25b^3 \\
 \underline{-(35ab^2 + 25b^3)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (b) \quad (9x^3 - 7xy^2 + 2y^3) : (3x - 2y) = \underline{3x^2 + 2xy - y^2} \\
 \underline{-(9x^3 - 6x^2y)} \\
 6x^2y - 7xy^2 + 2y^3 \\
 \underline{-(6x^2y - 4xy^2)} \\
 -3xy^2 + 2y^3 \\
 \underline{-(-3xy^2 + 2y^3)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (c) \quad (25x^4 - a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2) = \underline{5x^2 - 7ax + 5a^2} \\
 \underline{-(-25x^4 + 35ax^3 + 25a^2x^2)} \\
 -35ax^3 - 24a^2x^2 + 25a^4 \\
 \underline{-(-35ax^3 - 49a^2x^2 - 35a^3x)} \\
 25a^2x^2 + 35a^3x + 25a^4 \\
 \underline{-(25a^2x^2 + 35a^3x + 25a^4)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (d) \quad (x^2 + 2x - 15) : (x + n) = x + 2 - n + \underline{\underline{\frac{n(n-2)-15}{x+n}}} \\
 \underline{-(x^2 + nx)} \\
 (2-n)x - 15 \\
 \underline{-((2-n)x + n(2-n))} \\
 -15 + n(n-2) \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} n^2 - 2n - 15 \Rightarrow n_{1/2} = 1 \pm \sqrt{16}
 \end{array}$$

Wir erhalten damit die beiden Werte  $n_{1/2}$  die den Wurzeln des quadratischen Gleichungssystems entsprechen

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3).$$

**Aufgabe 3: Kubische Gleichungen**

Ziel: (a)

- (a) Bestimmen Sie den Wert von
- $m$
- in der Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0, \quad \overset{x=2}{\Rightarrow} \quad -12 + m \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m=12}}.$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln. Wir bestimmen die restlichen Wurzeln per Polynomdivision und  $pq$ -Formel:

$$\begin{array}{r} (6x^3 - 7x^2 - 16x + 12) : (x - 2) = \underline{6x^2 + 5x - 6} \\ -(6x^3 - 12x^2 \quad \quad) \\ \hline 5x^2 - 16x + 12 \\ -(5x^2 - 10x \quad \quad) \\ \hline -6x + 12 \\ - (-6x + 12) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} x^2 + \frac{5}{6}x - 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{3}{2}}}.$$

- (b) Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von  $m$  und  $n$ , und geben Sie die dritte Wurzel an. Zu Bestimmung der Lösung setzen wir die beiden Wurzeln in die Gleichung ein:

$$x_1 = 2: \quad 4m + n = 10 \quad (1)$$

$$x_2 = 3: \quad 9m + n = -15 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad (1) - (2): \quad -5m = 25 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m = -5}}, \quad \underline{\underline{n = 30}}.$$

Die dritte Wurzel ermitteln wir durch Polynomdivision mit  $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 5x^2 - 13x + 30) : (x^2 - 5x + 6) = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = -\frac{5}{2}}} \\ -(2x^3 - 10x^2 + 12x) \\ \hline 5x^2 - 25x + 30 \\ -(5x^2 - 25x + 30) \\ \hline 0 \end{array}$$

**Aufgabe 4: Nullstellenraten**

(Zusatzaufgabe)

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor  $(x - x_0)$  vom Polynom ab.

- (a)  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ ,  $x_0 = 1$  oder  $x_0 = 2$   
 $= (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$  (stückweises konstruieren ohne Polynomdivision)
- (b)  $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9$ ,  $x_0 = 3$  (einzige reelle Nullstelle)  
 $= (x + 3)(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)$
- (c)  $x^4 - 3x^2 + 3x + 2$ ,  $x_0 = -2$  (einzige reelle Nullstelle)  
 $= (x + 2)(x^3 - 2x^2 + x + 1)$
- (d)  $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1$ ,  $x_0 = 1$   
 $= (x - 1)(x^4 - 3x^2 + 1)$  die anderen Nullstellen sind:  $x_{2/3/4/5} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$   
 $= (x - 1)(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$

**Aufgabe 5: Partialbruchzerlegung**

Ziel: (a) bis (c)

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

- (a)  $\frac{x-5}{x^2-2x-3} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{(x-3)\alpha + (x+1)\beta}{x^2-2x-3} = \frac{(\alpha+\beta)x + \beta - 3\alpha}{x^2-2x-3}$   
 Koeffizientenvergleich im Zähler:  $\left. \begin{array}{l} x^1: \alpha + \beta = 1 \\ x^0: 3\alpha - \beta = 5 \end{array} \right\} \text{Addition: } \underline{\alpha = \frac{3}{2}}, \underline{\beta = -\frac{1}{2}}$   
 $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-3)}}}$
- (b)  $\frac{x^2+1}{x^2-1} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} + \gamma = \frac{(x-1)\alpha + (x+1)\beta + (x^2-1)\gamma}{x^2-1}$   
 Koeffizientenvergleich im Zähler:  $\left. \begin{array}{l} x^2: \gamma = 1 \\ x^1: \alpha + \beta = 0 \\ x^0: 1 = \beta - \alpha - \gamma \end{array} \right\} \underline{\underline{\beta = 1, \alpha = -1}}$   
 $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}}$   
 Alternativ kann auch eine Polynomdivision mit Rest durchgeführt werden mit anschließender Partialbruchzerlegung des Restglieds:  $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$ .
- (c)  $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{(x-2)^2} = \frac{(x^2-4x+4)\alpha + (x^2-3x+2)\beta + (x-1)\gamma}{(x-1)(x-2)^2}$   
 Koeffizientenvergleich:  $\left. \begin{array}{l} x^2: \alpha + \beta = 2 \\ x^1: -4\alpha - 3\beta + \gamma = -3 \quad (2) \\ x^0: 4\alpha + 2\beta - \gamma = 1 \quad (3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2) + (3): \beta = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 0}}, \underline{\underline{\gamma = 3}} \end{array}$   
 $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}}}$

Die Faktorisierung des Nenners haben wir in Aufgabe 4a bereits gesehen. Wir müssen die

Vielfachheit der Nullstelle in unserem Ansatz berücksichtigen. Durch  $\alpha = 0$  sehen wir, dass die rechte Seite bei  $x = 1$  keine Polstelle hat. Die Partialbruchzerlegung hat uns also den Limes  $x \rightarrow 1$  der linken Seite verschafft.

$$(d) \quad \frac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3}$$

Da der Zähler von höherem Grade ist als das Nennerpolynom, wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{r} (2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12) : (x^2 - 2x - 3) = 2x^2 + 1 + \frac{(\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3} \\ - (-2x^4 + 4x^3 - 6x^2) \\ \hline x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12 \\ - (x^2 - 2x - 3) \\ \hline (\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15 \end{array}$$

Die Nullstellen des Nenners lauten:  $x_1 = 3, x_2 = -1$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3} &= \frac{\alpha}{x - 3} + \frac{\beta}{x + 1} = \frac{(x + 1)\alpha + (x - 3)\beta}{x^2 - 2x - 3} \\ \text{Koeffizientenvergleich: } \left. \begin{array}{l} x^1: \alpha + \beta = \sqrt{2} - 5 \\ x^0: \alpha - 3\beta = \sqrt{2} + 15 \end{array} \right\} &\text{Differenz: } \underline{\beta = -5}, \Rightarrow \underline{\alpha = \sqrt{2}} \\ \Rightarrow \frac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3} &= 2x^2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{x - 3} - \frac{5}{x + 1} \end{aligned}$$

### Aufgabe 6: Summen

Ziel: (a) bis (b)

Vereinfachen bzw. berechnen Sie die folgenden Summen.

$$(a) \quad \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1}}_{= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}}}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^n x^k$$

*Hinweis zu (b):* Der Term in der Summe kann mithilfe von Partialbruchzerlegung vereinfacht und die entstehende Summe auseinandergezogen werden.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \Rightarrow 1 = A(k+1) + Bk = (A+B)k + A.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert  $A = 1, B = -1$  und wir können weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \quad \text{Indexverschiebung } k+1=l \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = \left(1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{l=2}^n \frac{1}{l} + \frac{1}{n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}}}.\end{aligned}$$

*Hinweis zu (c):* Hierfür kann ein expliziter Ausdruck gefunden werden, wenn man die Formel mit  $(1-x)$  multipliziert und analog vorgeht wie in (b)

$$\begin{aligned}(1-x) \sum_{k=0}^n x^k &= \sum_{k=0}^n x^k - x \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung } l=k+1 \\ &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{l=1}^{n+1} x^l = 1 + \sum_{k=1}^n \cancel{x^k} - \left(\sum_{l=1}^n \cancel{x^l} + x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^n x^k &= \underline{\underline{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}}.\end{aligned}$$



# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRliche LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

**Thema 5:** Exponentialfunktionen  
Logarithmen  
Natürliche Exponentialfunktion

## Logarithmengesetze, Basiswechsel

$$\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v), \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$$
$$\log_b(u^m) = m \log_b(u), \quad \log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x).$$

### Aufgabe 1: Logarithmische und Exponentialgleichungen

Lösen Sie jeweils für  $x$  bzw.  $y$ . Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

Tafelbeispiele:

$$1. \quad 3 \ln \left[ \frac{\sqrt[3]{e^x}}{\exp(3 \log_2(\sqrt{2}))} \right] + 2x = 0$$
$$3 \ln \left( \frac{e^{x/3}}{e^{3/2}} \right) + 2x = 0$$
$$3 \left( \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \right) + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}.$$

$$2. \quad 2 \log_{\sqrt[5]{9}}(3x) - 5 \ln(x) = \log_3(e^5)$$

Basiswechsel:  $\log_a(\xi) = \frac{\ln(\xi)}{\ln(a)}$

$$2 \cdot \frac{\ln(3x)}{\ln(3^{2/5})} - 5 \ln(x) = \frac{5}{\ln(3)}$$
$$5 \frac{\ln(3) + \ln(x)}{\ln(3)} - 5 \ln(x) = \frac{5}{\ln(3)}$$
$$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1 - \ln(3)}{1 - \ln(3)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = e}}.$$

Lösung:

$$(a) \quad a 2^x = e^{bx} \quad \Rightarrow \quad \ln(a) + x \ln(2) = bx \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(a)}{b - \ln(2)}}}, \quad \text{offenbar } a > 0$$

$$(b) \quad x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)} = \frac{49}{(7 \cdot 7)^{\log_7(2\sqrt{x})}} + \frac{1}{4x} = \frac{25}{2x} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{5}{\sqrt{2}}}}, \quad (\text{nur positive Lsg.})$$

$$(c) \quad e^{3ax} - 2^{a+1}e^{2ax} + 4^ae^{ax} = \log_b(1) \quad | \cdot e^{-ax} \\ e^{2ax} - 2 \cdot 2^ae^{ax} + (2^a)^2 = 0 \\ (e^{ax} + 2^a)^2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x = \ln(2)}}.$$

$$(d) \quad x^{2-1}\sqrt{a^3} \cdot x^{2x-2}\sqrt{a} \cdot x^4\sqrt{a^{-1}} = 1 \quad \text{offenbar } a > 0 \\ a^{\frac{3}{x^2-1} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{4}} = 1.$$

$$\text{Fall } a = 1: \quad \underline{\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}}}$$

$$\text{Fall } a \neq 1: \quad 0 = \frac{3}{x^2-1} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \frac{15+2x-x^2}{x^2-1} \\ 0 = x^2 - 2x - 15 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5, x_2 = -3}}$$

$$(e) \quad \log_a(x) + \log_a(y) = 2 \Rightarrow \log_a(xy) = 2 \Rightarrow xy = a^2 \\ \log_b(x) - \log_b(y) = 4 \Rightarrow \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = 4 \Rightarrow \frac{x}{y} = b^4 \\ \Rightarrow x^2 = a^2 b^4 \Rightarrow x = \pm ab^2, y = \pm \frac{a}{b^2}$$

Die Argumente der Logarithmen müssen positiv sein:

$$\underline{\underline{x = \begin{cases} ab^2, & a > 0 \\ -ab^2, & a < 0 \end{cases}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y = \begin{cases} \frac{a}{b^2}, & a > 0 \\ -\frac{a}{b^2}, & a < 0 \end{cases}}}, \quad (a = 0 \text{ nicht zulässig})$$

$$(f) \quad 3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2 \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \frac{3\ln(x)}{\ln(xa^2)} + \frac{\ln(x)}{2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} = 2$$

Substitution:  $z \equiv \ln(x), b \equiv \ln(a)$

$$\Rightarrow \frac{3z}{z+2b} + \frac{z}{2z-b} = 2 \quad | \cdot (z+2b)(2z-b) \\ 7z^2 - z = 4z^2 + 6bz - 4b^2$$

$$\Rightarrow 0 = z^2 - \frac{7b}{3}z + \frac{4b^2}{3} \Rightarrow z_{1/2} = \frac{7b}{6} \pm \sqrt{\frac{49b^2}{36} - \frac{4b^2}{3}} = \begin{cases} \frac{4b}{3} \\ b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = a^{4/3}, x_2 = a}}$$

## Aufgabe 2: Verdopplungszeit

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen  $A$  sei beschrieben durch

$$W(t) = Ae^{ct}, \quad c > 0,$$

sodass  $W(t)$  die „Menge“ an Wissen zur Zeit  $t$  gibt.

- (a) Nach welcher Zeit  $\tau_2$  hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?

$$W(t_0 + \tau_2) \stackrel{!}{=} 2W(t_0) \Rightarrow \cancel{A}e^{c(t_0 + \tau_2)} = 2\cancel{A}e^{ct_0}$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{\ln(2)}{\underline{\underline{c}}}.$$

- (b) Nach welcher Zeit  $\tau_n$  hat das Wissen eines Studenten auf das  $n$ -Fache zugenommen?

$$W(t_0 + \tau_n) \stackrel{!}{=} nW(t_0) \Rightarrow e^{c\tau_n} = n$$

$$\Rightarrow \tau_n = \frac{\ln(n)}{\underline{\underline{c}}}.$$

- (c) Drücken Sie  $\tau_n$  als Vielfaches von  $\tau_2$  aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen  $n = 3$  und  $n = 4$ ? Welche Aussage können Sie für  $n = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , treffen?

$$\tau_n \stackrel{!}{=} x\tau_2 \Rightarrow \frac{\ln(n)}{\cancel{c}} = x \frac{\ln(2)}{\cancel{c}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n) \Rightarrow \underline{\underline{\tau_n = \log_2(n)\tau_2}}$$

$$n = 3: \quad \tau_3 = \log_2(3)\tau_2 \approx 1.6\tau_2$$

$$n = 4: \quad \tau_4 = \log_2(4)\tau_2 = 2\tau_2$$

$$n = 2^m \quad \tau_{2^m} = \log_2(2^m)\tau_2 = m\tau_2.$$

**Aufgabe 3: Hyperbelfunktionen**

(Zusatzaufgabe)

Es seien die Funktionen

$$f(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$g(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definiert.

- (a) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für  $f(2x)$  und  $g(2x)$  in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente,  $f(x)$  und  $g(x)$ .

$$f(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 2e^x e^{-x}}{2}$$

$$= 2 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1 = \underline{\underline{2f(x)^2 - 1.}}$$

$$g(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} = 2 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \underline{\underline{2f(x)g(x).}}$$

- (b) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für  $f(x+y)$  und  $g(x+y)$  in Abhängigkeit von  $f(x)$  und  $f(y)$  sowie  $g(x)$  und  $g(y)$ . Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie  $x = y$  setzen. Wir stellen zunächst fest:  $e^x = f(x) + g(x)$  und  $e^{-x} = f(x) - g(x)$

$$f(x+y) = \frac{1}{2}(e^x e^y + e^{-x} e^{-y}) = \frac{1}{2}[(f(x) + g(x)) \cdot (f(y) + g(y)) + (f(x) - g(x)) \cdot (f(y) - g(y))]$$

$$= \underline{\underline{f(x)f(y) + g(x)g(y)}}$$

$$g(x+y) = \frac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x} e^{-y}) = \frac{1}{2}[(f(x) - g(x)) \cdot (f(y) + g(y)) + (f(x) + g(x)) \cdot (f(y) - g(y))]$$

$$= \underline{\underline{f(x)g(y) + g(x)f(y)}}$$

Ein Vergleich mit (a) zeigt

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2 + g(x)^2 \stackrel{!}{=} f(x)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \text{Es gilt } f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$

$$g(2x) = g(x+x) = f(x)g(x) + g(x)f(x) = 2f(x)g(x).$$

Bemerkung: DAs sind die Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen sowie die hyperbolische Variante des trigonometrischen Pythagoras,  $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ .

- (c) Schreiben Sie die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in Reihendarstellung.

Vorlesung:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0, \text{gerade}}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0, \text{ungerade}}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  von  $g(x)$ .

Wir schreiben  $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  und versuchen nach  $x$  aufzulösen. Dafür wenden wir zunächst die Substitution  $z \equiv e^x$  an:

$$y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow 0 = z^2 - 2yz - 1$$

$$z_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x = \ln(z) = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Da  $\sqrt{y^2 + 1} > y$ , muss das “+” gewählt werden, um ein positives Argument im Logarithmus zu erhalten. Es folgt

$$\underline{\underline{g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}}.$$

Bemerkung: Wir erhalten hiermit die Umkehrfunktion des  $g(x) = \sinh(x)$ , den  $\operatorname{arsinh}(x)$ .

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRliche LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

## Thema 6: Trigonometrische Funktionen Ebene Trigonometrie

### Wiederholung Trigonometrische Funktionen

#### Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y).$$

Weitere wichtige Relationen, die nützlich sein können:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin(0) = 0 \quad \cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

### Aufgabe 1: Additionstheoreme

- (a) Leiten Sie das Additionstheorem für Kosinusfunktionen aus dem für Sinusfunktionen her.

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \sin\left(x \pm y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x \pm z^{\pm}), & z^{\pm} &\equiv y \pm \frac{\pi}{2} \\ &= \sin(x) \cos(z^{\pm}) \pm \cos(x) \sin(z^{\pm}) \\ &= \sin(x) \underbrace{\cos\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\mp \sin(y)} \pm \cos(x) \underbrace{\sin\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\pm \cos(y)} \\ &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \end{aligned}$$

- (b) Leiten Sie das Additionstheorem für Tangensfunktionen her,

$$\begin{aligned} \tan(x \pm y) &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)} = \frac{\cancel{\cos(x)} \cancel{\cos(y)} \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \pm \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right)}{\cancel{\cos(x)} \cancel{\cos(y)} \left( 1 \mp \frac{\sin(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y)} \right)} \\ &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)} \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass für Doppelwinkelfunktionen gilt:

- $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} = 2\cos^2(x) - 1$

## Aufgabe 2: Trigonometrische Umformungen I

Ziel: (a) bis (c)

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Identitäten.

Tafelbeispiel:

1. Identität:  $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha) + 1.$$

□

2.  $\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

$$\Rightarrow \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\tan(x)\cos^2(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

□

Lösung:

(a)  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}$

□

(b)  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)} \stackrel{(a)}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$   
 $= \frac{\cancel{\cos(\alpha)} 1 + \tan(\alpha)}{\cancel{\cos(\alpha)} 1 - \tan(\alpha)}$

(c)  $2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$   
 $= 2\left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2} - \underbrace{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}_{(1-\cos^2\frac{x}{2})(1-\cos^2\frac{y}{2})}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 1\right)$   
 $= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{y}{2} - 1 \stackrel{(1c)}{=} \cos(x) + \cos(y)$

(d)  $\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = \frac{\overbrace{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)}^{\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$   
 $= \frac{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma) + \sin\alpha[\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma]}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} + 1 = 1$

□

**Aufgabe 3: Trigonometrische Umformungen II**

Ziel (a) und (b)

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass sie sich einfach logarithmieren lassen. Das heißt, die Terme sollen möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden.

*Tafelbeispiel:*

Es ist mit "einfach logarithmierbar" gemeint, dass möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden soll.

$$\begin{aligned}\cot(\alpha) + \cot(\beta) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \rightarrow \text{Ziel erreicht.}\end{aligned}$$

*Lösung:*

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad 1 + \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad &\text{Hinweis: Es ist } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ 1 + \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &\stackrel{(2c)}{=} \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad \frac{2\sin(\beta) - \sin(2\beta)}{2\sin(\beta) + 2\sin(2\beta)} &= \frac{\cancel{2\sin(\beta)} - \cancel{2\sin(\beta)}\cos(\beta)}{\cancel{2\sin(\beta)} + \cancel{4\sin(\beta)}\cos(\beta)} = \frac{1 - \cos(\beta)}{1 + 2\cos(\beta)} \\ &= \frac{2 - 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \cos(\beta)\right)\right)} \stackrel{(2c)}{=} \underline{\underline{\frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(c)} \quad &\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma), \quad \text{für } \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)(1 + \cos(\beta)) + \sin(\beta)(1 + \cos(\alpha)) \\ &= 2\sin(\alpha)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2\sin(\beta)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \\ &= \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}}$$



**Aufgabe 4: Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme**

Ziel: (a) bis (c)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und machen Sie jeweils die Probe.

Tafelbeispiel:

$$\begin{array}{l} \cos(x) \sin(y) = 1 \\ \cos(x) - \sin(y) = \frac{1}{2} \end{array} \xRightarrow{z \equiv -y} \left. \begin{array}{l} \cos(x) \sin(z) = -\frac{1}{2} \\ \cos(x) + \sin(z) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{Vieta!}$$

 $\cos(x)$  und  $\sin(z)$  sind Wurzeln des Polynoms

$$\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \xi_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Fall 1:  $\cos(x) = 1, \sin(y) = 1/2$ 

$$\Rightarrow \underline{x = 2\pi k}, \quad \underline{y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k} \quad \text{oder} \quad \underline{y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fall 2:  $\cos(x) = 1/2, \sin(y) = -1$ 

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k} \quad \text{oder} \quad \underline{x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}$$

$$\Rightarrow \underline{y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k} \quad \text{oder} \quad \underline{y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Natürlich kann auch die implizite Form stehen gelassen werden!

Lösung:

$$(a) \quad \sin(x) + \cos(x) = 1 \quad |()^2$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 1 \Rightarrow \sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\text{Fall 1: } \sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{allerdings muss } \cos(x) = 1 \Rightarrow \text{nur für } k \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Fall 2: } \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{allerdings muss } \sin(x) = 1 \Rightarrow \text{nur für } \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \underline{x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \quad \underbrace{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{2\cos(x)\cos(y)} = \frac{1}{2}, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vieta: } \xi^2 - \xi + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \xi_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos(x) = \frac{1}{2} = \cos(y)} \quad \text{bzw.} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

(c)  $\sin(3x) = \cos(2x)$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x) - 1)\sin(x) \\ &= 4\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)\end{aligned}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\begin{aligned}0 &= 2\cos^2(x)(1 - 2\sin(x)) + \sin(x) - 1 \\ &= 2(1 - \sin^2(x))(1 - 2\sin(x)) + \sin(x) - 1.\end{aligned}$$

Wir substituieren nun  $u \equiv \sin(x)$ :

$$0 = 4u^3 - 2u^2 - 3u + 1 \Rightarrow \text{draufschaufen } u = 1$$

Die restlichen Lösungen erhalten wir durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (4u^3 - 2u^2 - 3u + 1) : (u - 1) = 4u^2 + 2u - 1 \\ -(4u^3 + 4u^2) \\ \hline 2u^2 - 3u \\ -(2u^2 - 2u) \\ \hline -u + 1 \\ -(-u + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 0 = u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \Rightarrow u_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(x_1) = 1, \quad \sin(x_{2/3}) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{aufgelöst nach } x: \mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \frac{9\pi}{10} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{10} + 2\pi k, -\frac{7\pi}{10} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(d)  $a(3\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x)) - b(3\sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)) = 2a - b$

$$3a\cos^2(x) - 3b\sin^2(x) + (a+b)\sin(x)\cos(x) = 2a - b \quad | : \cos^2(x)$$

$$3a - 3b\tan^2(x) + (a+b)\tan(x) = \frac{2a-b}{\cos^2(x)} = (2a-b)(1 + \tan^2(x)).$$

Wir substituieren jetzt  $z \equiv \tan(x)$

$$0 = 2(a+b)z^2 - (a+b)z - (a+b)$$

$$0 = z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tan(x_1) = 1, \tan(x_2) = -\frac{1}{2}}}$$

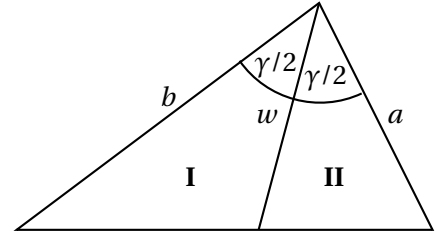
### Aufgabe 5: Dreiecksfläche

Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten  $a$  und  $b$  sowie die Länge  $w$  der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind.

$$\text{Fläche in I: } A_1 = \frac{bw}{2} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\text{Fläche in II: } A_2 = \frac{aw}{2} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\text{Gesamtfläche: } A = \frac{ab}{2} \sin(\gamma)$$



$$\text{andererseits: } A = A_1 + A_2 \Rightarrow \frac{ab}{2} \sin \gamma = \frac{(a+b)w}{2} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)w}{4} \frac{\sin \gamma}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)w}{2ab}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(a+b)w}{2} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)w}{2} \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{(a+b)w}{2} \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2 w^2}{4a^2 b^2}}.$$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

## Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

### Wiederholung des Beweisverfahrens

- Zeige Richtigkeit einer Aussage für einen Startwert
- Zeige: “Aussage richtig für  $k$ ” impliziert “Aussage richtig für  $k + 1$ ”

*Beispiel:* rekursive Bildungsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + 2(n + 1)$ ,  $a_1 = 1$ . Wir wollen nun folgende explizite Darstellung beweisen:<sup>1</sup>

$$a_n = n^2 + n - 1$$

(IA) Induktionsanfang  $n = 1$ :  $a_1 = 1^2 + 1 - 1 = 1$  ✓

(IV) Induktionsvoraussetzung  $n = k$ :  $a_k = k^2 + k - 1$

(IB) Induktionsbehauptung  $n = k + 1$ :  $a_{k+1} = (k + 1)^2 + (k + 1) - 1$

*Beweis.*  $a_{k+1} = a_k + 2(k + 1) = k^2 + k - 1 + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + k.$

□

### Aufgabe 1: Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift

Vermutung:  $a_n = 2^n - 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

□

### Aufgabe 2: Vollständige Induktion I $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

(IA)  $n = 1$ :  $S_1 = 1$ . ✓

(IV)  $n = k$ :  $S_k = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$

(IB)  $n = k + 1$ :  $S_{k+1} = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

---

<sup>1</sup> Solche Ausdrücke kann Mathematica mit Hilfe des Befehls “FindSequenceFunction[]” erraten.

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis.} \quad S_{k+1} &= S_k + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 \\
 &= (-1)^k (k+1) \left[ \frac{(-1)^{-1} k}{2} + (k+1) \right] = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.
 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 3:** *Vollständige Induktion II*  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(IA)  $n = 1: S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV)  $n = k: S_k = \left[ \frac{k(k+1)}{2} \right]^2$

(IB)  $n = k+1: S_{k+1} = \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$

$$\text{Beweis.} \quad S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left( \frac{k+1}{2} \right)^2 [k^2 + 4(k+1)] = \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

□

**Aufgabe 4:** *Vollständige Induktion III*  $S_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3, \quad S_n = 9m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$

(IA)  $n = 1: S_1 = 0 + 1^3 + 2^3 = 9. \quad \checkmark$

(IV)  $n = k: S_k = (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3, \quad S_k = 9m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$

(IB)  $n = k+1: S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3, \quad S_k = 9m' \quad \text{mit} \quad m' \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis.} \quad S_{k+1} &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{S_n} + (k+2)^3 - (k-1)^3 \\
 &= 9m + (k+2)^3 - (k-1)^3 = 9m + 9(k^2 + k + 1) = 9m' \quad \text{mit} \quad m' = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 5:** *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Vermutung:  $S_n = \frac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!}$

(IA)  $n = 1: S_1 = 1 - x. \quad \checkmark$

(IV)  $n = k: S_k = \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!}$

(IB)  $n = k+1: S_{k+1} = \frac{(1-x)(2-x)\dots((k-x)(k+1-x))}{(k+1)!}$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!} \\
 &= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!} \\
 &= \frac{1}{(k+1)!} \left[ (1-x)(2-x)\dots(k-x)(k+1) + (-1)^{k+1} (-1)^k x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k) \right] \\
 &= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!} \underbrace{\left[ \frac{k+1}{k-x+1} + (-1)^{2k+1} \frac{x}{k-x+1} \right]}_1 \\
 &= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}
 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 6:** *Fibonacci-Zahlen*  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^n - x_-^n)$  mit  $x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  (Zusatzaufgabe)

(IA)  $n = 0$ :  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . ✓

(IV)  $n = k$ :  $a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^k - x_-^k)$

(IB)  $n = k+1$ :  $a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^{k+1} - x_-^{k+1})$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^n - x_-^n + x_+^{n-1} - x_-^{n-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \underbrace{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right)}_{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \underbrace{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right)}_{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^{n+1} - x_-^{n+1})
 \end{aligned}$$

□