

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

WINTERSEMESTER 2023/24

Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

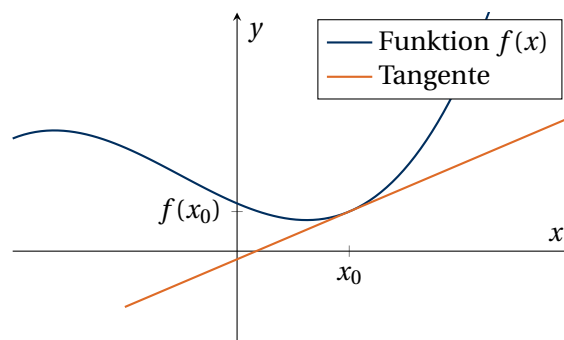
MARTIN BEYER

Inhaltsverzeichnis

1	Grundrechnungsarten	3
1.1	Addition und Subtraktion	3
1.2	Multiplikation und Division	4
1.3	Bruchrechnung	5
1.4	Potenzen und Wurzeln	6
1.4.1	Potenzen	6
1.4.2	Wurzeln	7
1.5	Gleichungen	8
2	Lineare Gleichungssysteme	9
2.1	Mengen und Intervalle	9
2.2	Lineare Funktionen	12
2.3	Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten	15
2.4	Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten	17
3	Quadratische Gleichungssysteme	20
3.1	Die quadratische Gleichung	20
3.2	Quadratische Funktionen	22
3.3	Quadratische Gleichungssystem mit zwei Unbekannten	23
4	Umgang mit beliebigen Potenzen	25
4.1	Polynome und Polynomdivision	25
4.2	Partialbruchzerlegung	26
4.3	Potenzfunktionen	28
5	Das Summenzeichen	29
6	Exponentialfunktionen und Logarithmen	32
6.1	Logarithmen	32
6.2	Die Exponentialfunktion	35
7	Trigonometrische Funktionen	38
7.1	Winkelfunktionen	39
7.2	Graphische Darstellung der Winkelfunktionen	40
7.3	Definition durch Reihen	42
7.4	Additionstheoreme	42
7.5	Ebene Trigonometrie	43
8	Grundlagen der Differentialrechnung (Ableiten)	46
8.1	Allgemeine Eigenschaften	47
8.2	Ableitungen spezieller Funktionen	48

8 Grundlagen der Differentialrechnung (Ableiten)

Wir möchten in diesem Kapitel die Frage stellen, wie man den Anstieg einer beliebigen Funktion $f(x)$ an einem Punkt $x = x_0$ bestimmen kann. Dabei meinen wir den Anstieg der Geraden, die am Punkt x_0 als Tangente angelegt wird. Da das in jedem beliebigen Punkt $x = x_0$ möglich ist, ist der Anstieg selbst wieder eine Funktion von x die wir Ableitung $f'(x)$ nennen wollen.



Konstruktion der Ableitung

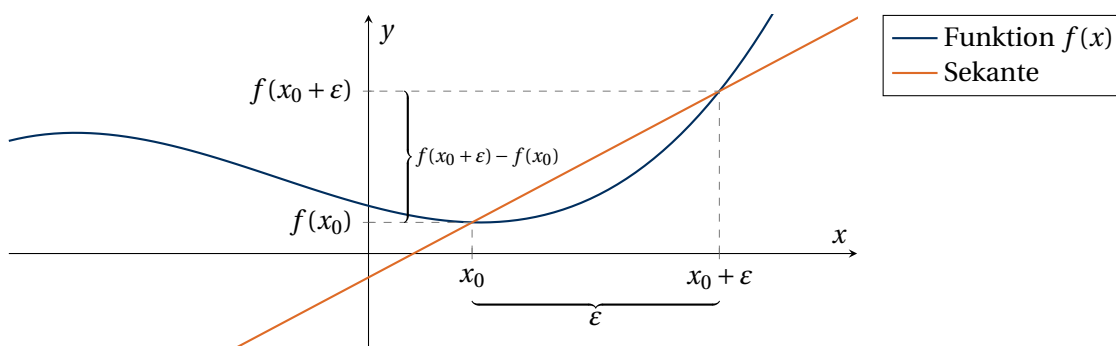


Abb. 9: Für die Konstruktion der Ableitung am Punkt x_0 legen wir zunächst eine Sekante des Graphen durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und einen Punkt $(x_0 + \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon))$ und bilden anschließend den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$.

Wir definieren die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}. \quad (8.1)$$

Wir können die erhaltene Ableitungsfunktion erneut ableiten und erhalten damit die zweite Ableitung. Für Ableitungen n -ter Ordnung schreiben wir schließlich

$$\begin{aligned} \text{1. Ableitung:} \quad & f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \equiv \left(\frac{df}{dx} \right) (x) \\ \text{2. Ableitung:} \quad & f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \text{n. Ableitung:} \quad & f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ableitungen spezieller Funktionen sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) = a = \text{const.} \quad & \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(a) = 0, \\ f(x) = x \quad & \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon) - x}{\varepsilon} = 1. \end{aligned} \quad (8.3)$$

8.1 Allgemeine Eigenschaften

Der Operator $\frac{d}{dx}$ weist bestimmte Eigenschaften auf, die wir als Ableitungsregeln bezeichnen:

- Linearität: ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx} \quad (8.4)$$

- Produktregel (Leibniz-Regel):

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}. \quad (8.5)$$

- Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \underbrace{\left(\frac{df}{dg}\right)(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \overbrace{\frac{dg}{dx}}^{\text{innere Ableitung}}. \quad (8.6)$$

- Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x)^2} \left(\frac{df}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg}{dx} \right). \quad (8.7)$$

- Potenzregel:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \text{insbesondere: } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}. \quad (8.8)$$

Wenden wir einige dieser Regeln mal an einem praktischen Beispiel an:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot g(x) + 7h(y(x)) + \frac{x^2}{j(x)} \quad \text{mit } y(x) = ax + b \\ \frac{df}{dx} &= \underbrace{\frac{dx}{dx} \cdot g(x) + x \cdot \frac{dg}{dx}}_{\text{Produktregel}} + \underbrace{7 \left(\frac{dh}{dy} \right)(y) \cdot \frac{dy}{dx}}_{\text{Kettenregel}} + \underbrace{\frac{2xj(x) - x^2 \frac{dj}{dx}}{j(x)^2}}_{\text{Quotientenregel}} \\ &= g(x) + x \cdot \frac{dg}{dx} + 7a \left(\frac{dh}{dy} \right)(y) + \frac{2xj(x) - x^2 \frac{dj}{dx}}{j(x)^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Wichtig ist es, bei der Kettenregel nach der richtigen Variable abzuleiten, d. h. wir müssen $h(y)$ nach dem Argument $y = ax + b$ ableiten und nicht nach x .

Tabelle 4

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^n
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

8.2 Ableitungen spezieller Funktionen

Wir wollen im Folgenden eine Liste von häufig verwendeten Funktionen und deren Ableitungen angeben.