Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische-Fakultät

Wintersemester 2023/24

Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

Martin Beyer

LaTeX-Satz und Design von Martin Beyer

Inhaltsverzeichnis

6 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Wir wollen uns nun mit Funktionen beschäftigen, die exponentielles Wachstum beschreiben. *Exponentialfunktionen* sind Funktionen, deren Variable im Exponenten steht $f(x) = a^x$. Hierbei muss die Basis $a > 0$ sein. Unabhängig von a gilt dann $a^0 = 1$, d. h. alle Exponentialfunktionen schneiden die y-Achse im Punkt $(0, 1)$.

Wir können, abhängig von a, drei Fälle unterscheiden

- $a > 1:$ $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, asymptotische Annäherung an x-Achse von rechts
- $a < 1:$ $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, asymptotische Annäherung an x-Achse von links
- $a = 1:$ $y = 1$ für alle x

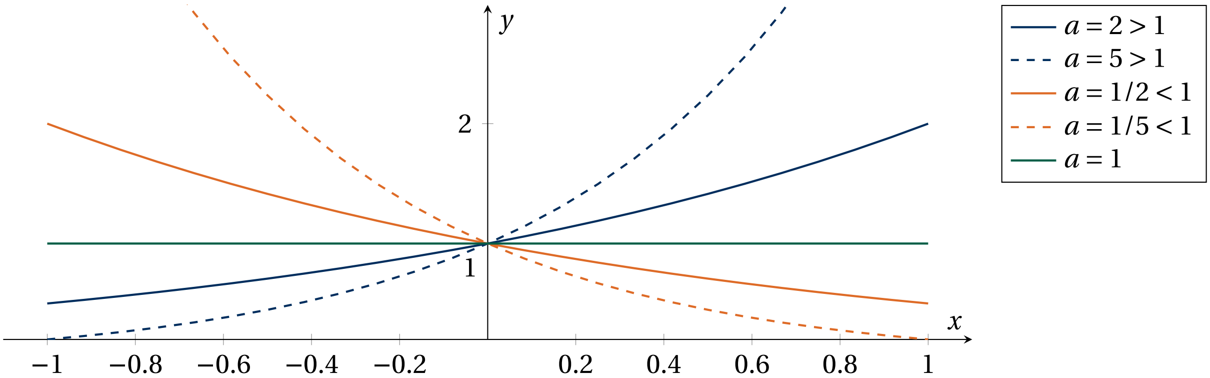

Abb. 4: Darstellung von Exponentialfunktionen für verschiedene Werte von a.

Die Funktionen sind spiegelbildlich zur x-Achse, denn

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= a^x \\ f_2(x) &= \left(\tfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f_1(-x) \end{aligned}\right\} \quad \text{wenn} \quad a > 1, \quad \text{dann} \quad \frac{1}{a} < 1. \tag{6.1}$$

Das heißt, zu jeder blauen Funktion mit Basis a, findet man eine spiegelsymmetrische orangene Funktion mit Basis $\frac{1}{a}$.

6.1 Logarithmen

Wir wollen uns nun die Frage stellen, welchen Wert n ein Exponent zu einer gegebenen Basis b haben muss, damit der Potenzwert a herauskommt. Also es gelte $a = b^n$ für ein bekanntes a und b, was ist dann n?

Die Antwort auf diese Frage liefert die Logarithmusfunktion:

$$\text{Exponent} \longrightarrow n = \log_b(a). \longleftarrow \text{Numerus (Potenzwert)} \tag{6.2}$$

Radikand