

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



FRIEDRICH-SCHILLER-  
UNIVERSITÄT  
JENA

WINTERSEMESTER 2023/24

---

## Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

---

MARTIN BEYER

Version: 18. September 2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundrechnungsarten</b>	<b>3</b>
1.1	Addition und Subtraktion . . . . .	3
1.2	Multiplikation und Division . . . . .	4
1.3	Bruchrechnung . . . . .	5
1.4	Potenzen und Wurzeln . . . . .	6
1.4.1	Potenzen . . . . .	6
1.4.2	Wurzeln . . . . .	7
1.5	Gleichungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>9</b>
2.1	Mengen und Intervalle . . . . .	9
2.2	Lineare Funktionen . . . . .	12
2.3	Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten . . . . .	15
2.4	Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Quadratische Gleichungssysteme</b>	<b>20</b>
3.1	Die quadratische Gleichung . . . . .	20
3.2	Quadratische Funktionen . . . . .	22
3.3	Quadratische Gleichungssystem mit zwei Unbekannten . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Umgang mit beliebigen Potenzen</b>	<b>25</b>
4.1	Polynome und Polynomdivision . . . . .	25
4.2	Partialbruchzerlegung . . . . .	26
4.3	Potenzfunktionen . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Das Summenzeichen</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Exponentialfunktionen und Logarithmen</b>	<b>32</b>
6.1	Logarithmen . . . . .	32
6.2	Die Exponentialfunktion . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b>	<b>38</b>
7.1	Winkelfunktionen . . . . .	39
7.2	Graphische Darstellung der Winkelfunktionen . . . . .	40
7.3	Definition durch Reihen . . . . .	42
7.4	Additionstheoreme . . . . .	42
7.5	Ebene Trigonometrie . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Grundlagen der Differentialrechnung (Ableiten)</b>	<b>46</b>
8.1	Allgemeine Eigenschaften . . . . .	47
8.2	Ableitungen spezieller Funktionen . . . . .	48

# 1 Grundrechnungsarten

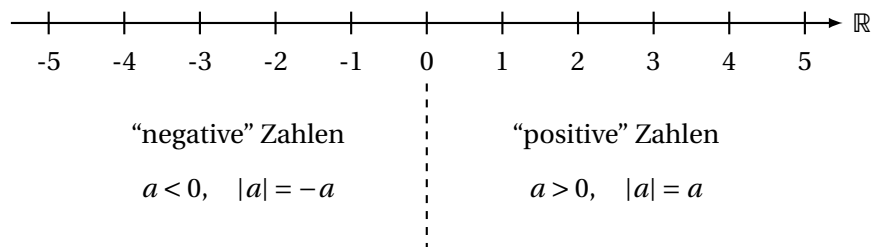
Wir beginnen bei den elementaren Regeln des Rechnes. Dazu gehören Addition, Subtraktion, sowie Multiplikation und Division reeller Zahlen. Wir führen die Bruchschreibweise, als auch Potenzen und Wurzeln ein.

## 1.1 Addition und Subtraktion

algebraische Eigenschaften der Addition reeller Zahlen ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ):

- Kommutativität:  $a + b = b + a$
- Assoziativität:  $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Auf dem (reellen) Zahlenstrahl unterscheiden wir zwischen positiven und negativen Zahlen. Der *Betrag* (einer Zahl ungleich Null) liefert immer eine positive Zahl.



Offenbar gilt für den Betrag bei Addition und Subtraktion

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|. \quad (1.1)$$

Die Addition von negativen Zahlen entspricht einer Subtraktion

$$a + (-b) = a - b, \quad (-a) + b = b - a, \quad (-a) + (-b) = -(a + b). \quad (1.2)$$

Die Zahl *Null* hat eine Sonderrolle. Sie ergibt sich bei der Addition einer Zahl  $a$  mit ihrem additiven Inversen  $-a$  und ist das neutrale Element der Addition:

$$a + (-a) = 0, \quad a + 0 = a. \quad (1.3)$$

## 1.2 Multiplikation und Division

algebraische Eigenschaften der Multiplikation reeller Zahlen  $(a, b, c \in \mathbb{R})$ :

- Kommutativität:  $ab = ba$
- Assoziativität:  $a(bc) = (ab)c = abc$
- Distributivität:  $a(b + c) = ab + ac$

Das Distributivitätsgesetz liefert die Rechenregeln zum *Ausmultiplizieren* und *Ausklammern*

$$\begin{aligned} (a+b) \underbrace{(c+d)}_f &= af + bf = a(c+d) + b(c+d) \\ &= ac + ad + bc + bd. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Für die Multiplikation mit negativen Zahlen gilt “+” mal “-” = “-” und “-” mal “-” = “+”

$$(+a)(-b) = -(ab), \quad (-a)(+b) = -(ab), \quad (-a)(-b) = +(ab). \quad (1.5)$$

Alternativ lässt sich auch schreiben  $-a = (-1)a$  und  $(-1)(-1) = 1$ . Die Zahl Null besitzt in der Multiplikation ebenfalls eine Sonderrolle:  $a \cdot 0 = 0$ .

Eine wichtige Reihe an Rechenregeln stellen die *binomischen* Formeln dar.

Binomische Formeln	
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	(1.6)
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	

.

Wir können nun die Division als Umkehrung der Multiplikation einführen:

$$a = bc \Rightarrow b = \frac{a}{c}, \quad \text{es sei denn } c = 0. \quad (1.7)$$

Dies führt dazu, dass nicht jede Multiplikation in eine Division überführt werden kann. Ebenso ist die Division mit Null nicht möglich:

- $\frac{a}{0}$  nicht definiert, da keine Zahl mit Null multipliziert  $a$  ergibt
- $\frac{0}{0}$  unbestimmt, da *jede* Zahl mit Null multipliziert Null ergibt.

## 1.3 Bruchrechnung

Wir haben gerade schon von der Notation eines Bruches Gebrauch gemacht, um die Division zweier Zahlen zu beschreiben. Ein Bruch besteht aus *Zähler* (oben) und *Nenner* (unten).

- Multiplikation immer im Zähler:  $k \frac{a}{b} = \frac{k a}{1 b} = \frac{ka}{b}$ .
- Division immer im Nenner:  $\frac{1}{k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{kb}$
- Kürzen:  $\frac{ka}{kb} = \frac{k a}{k b} = \frac{a}{b}$  da  $\frac{k}{k} = 1$
- Erweitern:  $\frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{k a}{k b} = \frac{ka}{kb}$ .

Den *Kehrwert* bzw. das Reziproke eines Bruches zu bilden, heißt:

$$\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{b}{a}, \quad \text{sodass} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \quad (1.8)$$

Wir können damit auch den Begriff der *Mehrfachbrüche* einführen, d. h.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \quad (1.9)$$

### Addition von Brüchen

Sofern die Nenner zweier Brüche gleich sind, können die Zähler addiert werden

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}. \quad (1.10)$$

Andernfalls wird zunächst der Hauptnenner gebildet

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{m}{m} + \frac{b}{m} \cdot \frac{n}{n} = \frac{am}{nm} + \frac{bn}{nm} = \frac{am+bn}{nm}. \quad (1.11)$$

Der Hauptnenner kann durch Multiplikation der beiden Nenner gebildet werden. Enthalten beide Nenner jeweils den gleichen Faktor, so kann der Hauptnenner einfacher gebildet werden, beispielsweise:

$$\begin{aligned} \frac{2c-5b}{6ab-10b^2} - \frac{5(2c-3a)}{18a^2-30ab} &= \frac{2c-5b}{2b(3a-5b)} - \frac{5(2c-3a)}{6a(3a-5b)} \\ &= \frac{1}{2(3a-5b)} \left[ \frac{2c-5b}{b} - \frac{5(2c-3a)}{3a} \right] \\ &= \frac{1}{2(3a-5b)} \left[ \frac{3a(2c-5b) - 5b(2c-3a)}{3ab} \right] \\ &= \frac{1}{6ab(3a-5b)} (6ac - 15ab - 10bc + 15ab) \\ &= \frac{1}{6ab(3a-5b)} 2c(3a-5b) = \frac{c}{3ab}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 1.4 Potenzen und Wurzeln

### 1.4.1 Potenzen

Potenzen drücken die mehrfache Ausführung einer Multiplikation in einer kompakten Schreibweise aus

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gleiche Faktoren}} = a^n = b. \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{Exponent} \\ \nwarrow \text{Potenzwert} \\ \nearrow \text{Basis} \end{array} \quad (1.13)$$

Spezielle Werte des Potenzierens sind im Folgenden aufgelistet:

$$a^0 = 1, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1. \quad (1.14)$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{oder:} \quad \begin{cases} (-1)^{2n} = 1 \\ (-1)^{2n+1} = -1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Der Term  $0^0$  ist hingegen nicht definiert, da der Wert durch Grenzwertbildung von verschiedenen Zahlenfolgen  $\lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow 0} 0^x = 0$  verschiedene Werte liefert.

### Potenzgesetze

Wir wollen im Folgenden die wichtigsten Potenzgesetze anschaulich herleiten:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \text{denn:} \quad a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m+n \text{ Faktoren}} \quad (1.16)$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \text{denn:} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a)(b \cdot b \cdot \dots \cdot b) = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ Paare}} \quad (1.17)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}, \quad \text{denn:} \quad (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ Faktoren}}. \quad (1.18)$$

Wir können zudem negative Exponenten einführen

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{bzw.} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = (a^{-n})^{-1} = (a^{-1})^{-n}. \quad (1.19)$$

Daraus können wir weitere Potenzgesetze ableiten

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m (a^n)^{-1} \stackrel{(1.18)}{=} a^m \cdot a^{-n} \stackrel{(1.16)}{=} a^{m-n} \quad (1.20)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n b^{-n} \stackrel{(1.18)}{=} a^n (b^{-1})^n \stackrel{(1.17)}{=} (a \cdot b^{-1})^n \stackrel{(1.19)}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = (a \cdot b^{-1})^{-n} = a^{-n} \cdot b^n = (b \cdot a^{-1})^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n. \quad (1.22)$$

### 1.4.2 Wurzeln

Möchte man die Gleichung  $b^n = a$  nach  $b$  lösen, so hat man die  $n$ -te Wurzel zu ziehen

$$\text{Wurzelexponent} \rightarrow \sqrt[n]{a} = b. \leftarrow \text{Potenzwert} \quad (1.23)$$

↙  
Radikand

Der Ausdruck  $\sqrt[n]{a}$  hat als Ergebnis die Zahl  $b$ , die in die  $n$ -te Potenz erhoben  $a$  ergibt,  $b^n = a$ . Für den Fall  $n = 2$  lässt man den Wurzelexponenten weg:  $\sqrt[2]{a} \equiv \sqrt{a}$ .

Spezielle Werte des Wurzelziehens (für  $n > 0$ ) sind im Folgenden aufgelistet:

$$\sqrt[n]{0} = 0, \sqrt[n]{1} = 1, \sqrt[n]{a} = a. \quad (1.24)$$

Beachte, dass die Gleichung  $b^0 = a$  keine Lösung für  $b$  hat, wenn  $a \neq 1$ , da  $b^0 = 1$ , aber beliebig viele hat, wenn  $a = 1$ .

### Quadratwurzel

Die Quadratwurzel  $\sqrt{a}$  ist im Reellen nicht definiert für  $a < 0$ . Ist also  $x^2 = a$  ( $a \geq 0$ ), dann folgt  $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$  und daraus  $|x| = \sqrt{a}$ . Wir müssen also eine Fallunterscheidung treffen:

$$\begin{aligned} x > 0: \quad x &= \sqrt{a} \\ x < 0: \quad x &= -\sqrt{a} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Es wäre hingegen falsch zu schreiben  $\sqrt{9} = \pm 3$ . Die Wurzel selbst ist positiv definiert.

### Wurzelgesetze

Wir können die Wurzelgesetze über die Potenzschreibweise der Wurzeln auf die Potenzgesetze zurückführen. Es gilt

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \text{denn: } (\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a. \quad (1.26)$$

Es gilt weiterhin zu beachten, dass Summen von Wurzeln in der Regel nicht vereinfacht werden können

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}. \quad (1.27)$$

Abschließend wollen wir diskutieren, wie wir Brüche mit Wurzeltermen vereinfachen können. Steht im Nenner des Bruchs ein Wurzelausdruck, so lässt sich dies durch "Rationalmachen" des Nenners vereinfachen:

$$\frac{6}{2 + \sqrt{2}} = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{6(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 3(2 - \sqrt{2}). \quad (1.28)$$

Wir haben hierbei den Bruch geschickt erweitert, sodass wir die dritte binomische Formel  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  nutzen konnten.

## Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n. \quad (1.29)$$

## Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[p]{a^m} \sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} = \sqrt[pq]{a^{mq-np}} \quad (1.30)$$

## 1.5 Gleichungen

Wir wollen nun noch allgemeine Eigenschaften von Gleichungen diskutieren, die wir für nachfolgende Kapitel als Grundlage benötigen. Eigenschaften des Gleichheitszeichens sind:

- Reflexivität, d. h. es gilt  $a = a$ ;
- Symmetrie, d. h. gilt  $a = b$ , dann gilt auch  $b = a$ ;
- Transitivität, d. h. gilt  $a = b$  und  $b = c$ , dann gilt auch  $a = c$ .

Gleichungen sind Darstellungen logischer Aussagen, deren Form mit Hilfe von *Äquivalenzumformungen* manipuliert werden kann. Eine Äquivalenzumformung kann durch eine Umkehrung der Rechenoperation rückgängig gemacht werden. Außerdem bleibt die Lösungsmenge der Gleichung unverändert. Wir können beispielsweise auf beiden Seiten einer Gleichung Terme addieren oder subtrahieren

$$\text{Äquivalenzpfeil} \rightarrow \begin{aligned} a + 3 &= x^2 - 5 \\ \Leftrightarrow a &= x^2 - 8. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Bei Multiplikation/Division einer Zahl muss jedoch sichergestellt werden, dass diese nicht Null ist

$$\frac{x}{a-b} = z \quad \not\Leftrightarrow x = z(a-b)$$

$$\frac{x}{a-b} = z, a \neq b \Leftrightarrow x = z(a-b). \quad (1.32)$$

Wir müssen ebenfalls beachten, dass die Information über das Vorzeichen einer Zahl beim Quadrieren verloren geht. Es handelt sich deshalb nicht um eine Äquivalenzrelation

$$x - 1 = a \quad \text{hat eine Lösung,} \quad x = 1 + a$$

$$(x - 1)^2 = a^2 \quad \text{hat zwei Lösungen,} \quad x_1 = 1 + a, x_2 = 1 - a. \quad (1.33)$$

Weiterhin ist explizites Auflösen einer Gleichung nach einer Größe nicht immer möglich,

$$\text{beispielsweise} \quad x + \sin(x) = 0. \quad (1.34)$$



## 2 Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Verknüpfung von zwei oder mehreren Gleichungen zu einem Gleichungssystem und diskutieren den Mengenbegriff.

Grundsätzlich können wir Gleichungen in vier Arten unterscheiden:

- *Identische Gleichungen* sind Darstellungen wahrer mathematischer Aussagen, z. B.  $5 + 2 = 7$  oder  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- *Funktionsgleichungen* stellen Zusammenhänge zwischen verschiedenen variablen Größen her; beispielsweise gehorcht der Flächeninhalt  $A$  eines Kreises in Abhängigkeit des Radius  $r$  der Gleichung  $A(r) = \pi r^2$ .
- *Definitionsgleichungen* ordnen mathematischen Ausdrücken eine Bezeichnung durch ein Symbol zu; man schreibt z. B.  $z := 2x^2 + 1$ .
- *Bestimmungsgleichungen* enthalten eine Variable, deren Wert grundsätzlich jede (reelle) Zahl sein kann. Die Menge aller Werte der Variable, für die eine Gleichung den Wahrheitswert "wahr" hat, heißt *Lösungsmenge*  $\mathbb{L}$  dieser Gleichung.

In diesem Abschnitt geht es um lineare Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchstens in erster Potenz auftreten.

### 2.1 Mengen und Intervalle

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten, die Elemente der Menge genannt werden. Ist ein Element  $e$  in einer Menge  $M$  enthalten, so schreibt man  $e \in M$ .

Mengen können mit Hilfe der Mengenklammer  $\{\dots\}$  definiert werden, üblicherweise geschieht dies über eine explizite Auflistung, bspw.  $M = \{a, b, k, s\}$ , oder durch Angabe einer definierenden Eigenschaft ihrer Elemente beispielsweise ist  $M$

$$M = \{n \mid n \text{ ist eine gerade Zahl}\}, \quad (2.1)$$

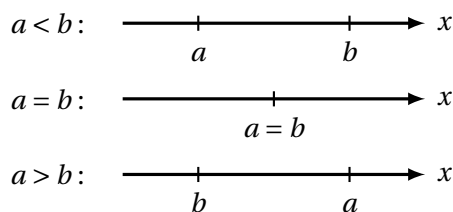
die Menge der geraden Zahlen. Mengen können ebenfalls Mengen als Elemente enthalten. Zum Beispiel enthält die Menge  $N$  als Element die Menge  $\{a, b\}$

$$N = \{1, \{a, b\}, 3\}. \quad (2.2)$$

Wichtige Mengen sind die Zahlenbereiche, insbesondere

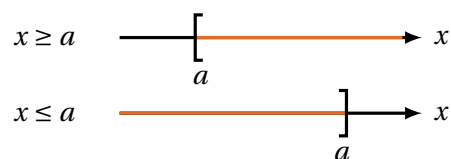
die natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\};$
die ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\};$
die rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\};$
die reellen Zahlen	$\mathbb{R}.$

Diese speziellen Mengen haben die besondere Eigenschaft, einer Ordnungsrelation zu unterliegen, d. h. man kann angeben, ob ein bestimmtes Element kleiner, größer oder gleich einem anderen Element ist. Dadurch ist es möglich, *Intervalle* zu definieren.

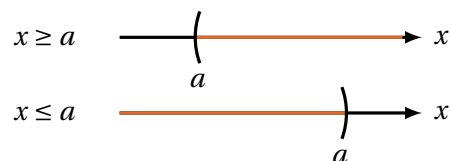


Im Folgenden wollen wir uns speziell auf die reellen Zahlen konzentrieren. Ein Intervall ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , die durch die Angabe begrenzender Elemente gebildet wird. Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Intervallgrenze  $a \in \mathbb{R}$  aufzufassen:

- Die Grenze  $a$  ist Teil des Intervalls,  $x \geq a$  oder  $x \leq a$ .



- Die Grenze  $a$  ist nicht Teil des Intervalls,  $x > a$  oder  $x < a$ .



Damit lassen sich endliche Intervalle definieren als

$$\begin{aligned}
 [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\
 [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
 (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{halboffene Intervalle} \\
 (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

und unendliche Intervalle als

$$\begin{aligned}
 [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} && (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
 (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Weiterhin können wir bestimmte Teilmengen der reellen Zahlen definieren, beispielsweise

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty), \quad \mathbb{R}^- = (-\infty, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = (-\infty, \infty). \tag{2.5}$$

Wir müssen beachten, dass das  $\infty$ -Zeichen nur ein Symbol ist und kein Element der reellen Zahlen. Es gibt demnach keine unendlichen abgeschlossenen Intervalle.

Im Umgang mit Ungleichungen sind folgende Rechenregeln zu beachten:

$$\begin{aligned}
 a < b &\iff b > a, \\
 a < b &\iff a + c < b + c, \\
 a < b \wedge c > 0 &\iff ca < cb, \\
 a < b \wedge c < 0 &\iff ca > cb,
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Es ist “ $\wedge$ ” das Zeichen für ein logisches “und”. Wichtig ist, dass die Multiplikation mit einer negativen Zahl eine Umkehrung des Relationszeichens impliziert, beispielsweise

$$\begin{aligned}
 3 < 5 & \quad | \cdot (-2) \\
 -6 > -10.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Aus diesem Grund müssen bei der Auflösung von Ungleichungen mit einer Unbekannten oft *Fallunterscheidungen* vorgenommen werden. Ein Beispiel ist

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3, \quad x \neq -2.
 \tag{2.8}$$

$  \begin{aligned}  & x > -2 : x+2 \text{ positiv} \\  & \frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad   \cdot (x+2) \\  & 2x-1 > 3x+6 \quad   \cdot -2x-6 \\  & -7 < x \quad \text{Widerspruch zu } x > -2. \\  & \Rightarrow \text{keine Lösung}  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & x < -2 : x+2 \text{ negativ} \\  & \frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad   \cdot (x+2) \\  & 2x-1 < 3x+6 \quad   \cdot -2x-6 \\  & -7 < x \quad \text{Widerspruch zu } x > -2. \\  & \Rightarrow -7 < x < -2  \end{aligned}  $
---	---

Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung  $\mathbb{L} = (-7, -2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -2\}$ .

## 2.2 Lineare Funktionen

Unter einer *Funktion*  $f$  versteht man eine Vorschrift, die jedem Element  $x$  aus einer Menge  $\mathbb{D}$  *genau* ein Element  $y$  aus einer Menge  $\mathbb{W}$  zuordnet. Wir schreiben  $y = f(x)$ . Wir bezeichnen dabei

- $x$  - unabhängige Variable oder Argument
- $y$  - abhängige Variable oder Funktionswert
- $\mathbb{D}$  - Definitionsbereich der Funktion
- $\mathbb{W}$  - Wertebereich der Funktion

Die mathematische Schreibweise zur Definition einer Funktion lautet

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W}, \quad x \mapsto y = f(x). \quad (2.9)$$

In der Physik findet man viele *lineare* Abhängigkeiten, unter anderem

- die Fallgeschwindigkeit  $v$  als Funktion der Zeit  $t$ ,

$$v(t) = g \cdot t + v_0 \quad (g: \text{Erdbeschleunigung}); \quad (2.10)$$

- das Ohmsche Gesetz für die Spannung  $U$  als Funktion des Stromes  $I$

$$U(I) = R \cdot I \quad (R: \text{elektrischer Widerstand}); \quad (2.11)$$

- Beim äußeren photoelektrischen Effekt gilt für die kinetische Energie des Photoelektrons  $E_{\text{kin}}$  als Funktion der Frequenz  $\nu$  des Lichtes

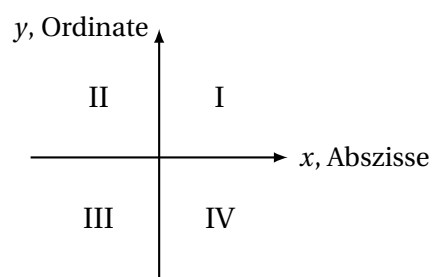
$$E_{\text{kin}}(\nu) = h\nu - W_A \quad (h: \text{Plancksches Wirkungsquantum} \quad (2.12) \\ W_A: \text{Austrittsarbeit}).$$

### Allgemeine Form: lineare Funktion

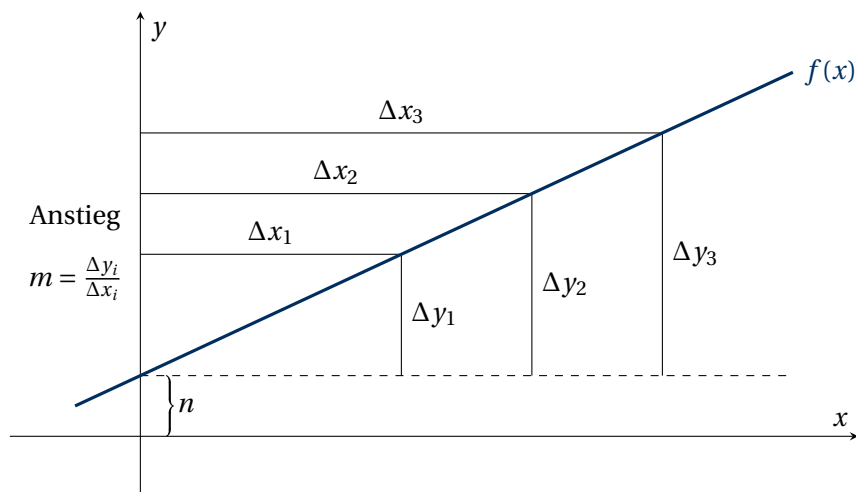
$$f(x) = mx + n, \quad m: \text{Anstieg} \quad (2.13) \\ n: \text{Verschiebung entlang der } y\text{-Achse}$$

Die graphische Darstellung erfolgt mit Hilfe des kartesischen Koordinatensystems. Dieses ist in vier Quadranten eingeteilt:

- I)  $x > 0, y > 0$
- II)  $x < 0, y > 0$
- III)  $x < 0, y < 0$
- IV)  $x > 0, y < 0$



Wir können eine lineare Funktion wie in Abbildung 1 darstellen.



**Abb. 1:** Unter dem Graphen der linearen Funktion befinden sich ähnliche Dreiecke (rechtwinklig, übereinstimmendes Kathetenverhältnis).

Spezialfälle linearer Funktionen sind

- $y = \pm x$  , Anstieg von  $45^\circ$  ( $m = \pm 1$ )
- $y = 0$  ,  $x$ -Achse ( $m = 0$ )
- $y = n$  , Horizontale im Abstand  $n$  von der  $x$ -Achse ( $m = 0$ )

### Beispiel: Innenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks

Für die Innenwinkelsumme gilt

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ.\end{aligned}\tag{2.14}$$

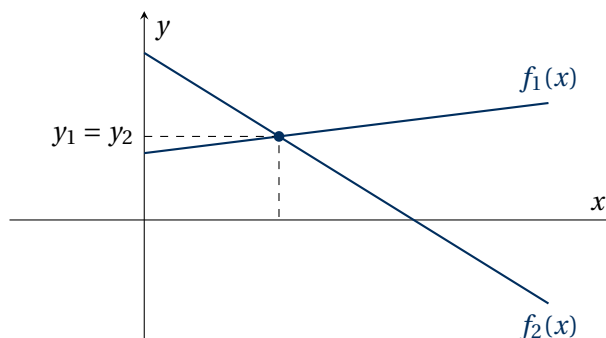
Wir können nun  $\beta$  als lineare Funktion von  $\alpha$  auffassen

$$\beta(\alpha) = -\alpha + 90^\circ, \quad \mathbb{D} = (0^\circ, 90^\circ), \quad \mathbb{W} = (0^\circ, 90^\circ).\tag{2.15}$$

### Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Stellen wir die Graphen zweier linearer Funktionen im selben kartesischen Koordinatensystem dar, so existiert ein *Schnittpunkt* (sofern die beiden Geraden nicht parallel sind).

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x) = m_1x + n \\ y_2 &= f_2(x) = m_2x + n.\end{aligned}\tag{2.16}$$



Am Schnittpunkt ist  $y_1 = y_2 = y$  und wir können schreiben

$$y - m_1 x = n_1 \quad \text{und} \quad y - m_2 x = n_2. \quad (2.17)$$

Es handelt sich also um ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (den Schnittpunktkoordinaten) der Form

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= k_1, \\ a_2 x + b_2 y &= k_2, \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_1 = -m_1, & a_2 = -m_2; \\ b_1 = b_2 = 1; & k_1 = n_1, k_2 = n_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu lösen, bedeutet, den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen (und umgekehrt).

Diskutieren wir abschließend noch den Spezialfall  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ . Dann sind die Geraden parallel und wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a_1 k_2 = a_2 k_1$ : Die Geraden liegen aufeinander (unendlich viele Schnittpunkte).
- $a_1 k_2 \neq a_2 k_1$ : Die Geraden liegen nicht aufeinander (kein Schnittpunkt).

### Schreibweisen und Bezeichnungen

Jede lineare Gleichung mit zwei Unbekannten ist schreibbar als

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{allgemeine Geradengleichung}) \quad . \quad (2.19)$$

Mit der Substitution  $m = -\frac{a}{b}$ ,  $n = -\frac{c}{b}$  kann sie in die Normalform (2.13) überführt werden.

Eine weitere Variante ist

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \quad , \quad A = -\frac{c}{a}, B = -\frac{c}{b}, \quad (2.20)$$

die auch als *Achsenabschnittsform* bezeichnet wird, wobei die Schnittpunkte mit  $x$ - und  $y$ -Achse unmittelbar als  $A$  und  $B$  ablesbar sind.

## 2.3 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

Die allgemeine Form eines solchen Gleichungssystems lautet

$$a_1x + b_1y = k_1, \quad (2.21a)$$

$$a_2x + b_2y = k_2, \quad (2.21b)$$

mit den festen Größen  $a_i, b_i, k_i (i = 1, 2)$  und Unbekannten (Variablen)  $x, y$ .

Die Lösung erfolgt nun im Allgemeinen durch Rückführung auf zwei Gleichungen mit jeweils einer Unbekannten.

### 1.) Additions-/Subtraktionsmethode

Durch Linearkombination der Gleichungen wird zunächst eine Variable eliminiert,  $a_2 \cdot (2.21a) - a_1(2.21b)$ :

$$\begin{aligned} a_2a_1x + a_2b_1y - a_1a_2x - a_1b_2y &= a_2k_1 - a_1k_2 \\ (a_2b_1 - a_1b_2)y &= a_2k_1 - a_1k_2 \\ \Rightarrow y &= \frac{a_2k_1 - a_1k_2}{a_2b_1 - a_1b_2}, \quad \text{sofern } a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Analog erhält man aus  $b_1 \cdot (2.21a) - b_2 \cdot (2.21b)$

$$x = \frac{b_2k_1 - b_1k_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (2.23)$$

### 2.) Lösung durch Einsetzen

Auflösen von (2.21a) nach  $y$  ergibt  $y = \frac{k_1 - a_1x}{b_1}$ , ( $b_1 \neq 0$ ) und Einsetzen in (2.21b) führt auf

$$\begin{aligned} a_2x + \frac{b_2}{b_1}(k_1 - a_1x) &= k_2 \quad | \cdot b_1 \\ a_2b_1x + b_2k_1 - a_1b_2x &= b_1k_2 \quad | - b_2k_1 \\ (a_2b_1 - a_1b_2)x &= b_1k_2 - b_2k_1 \\ \Rightarrow x &= \frac{b_1k_2 - b_2k_1}{a_2b_1 - a_1b_2}, \quad \text{sofern } a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Einsetzen in den Ausdruck für  $y$  ergibt

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{b_1} \left( k_1 - a_1 \frac{b_1k_2 - b_2k_1}{a_2b_1 - a_1b_2} \right) = \frac{1}{b_1} \frac{a_2b_1k_1 - a_1b_2k_1 - a_1b_1k_2 + a_1b_2k_1}{a_2b_1 - a_1b_2} \\ &= \frac{a_2k_1 - a_1k_2}{a_2b_1 - a_1b_2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nach Auffinden der Lösung ist stets die Probe durch Einsetzen in beide Gleichungen durchzuführen.

Schauen wir uns nun ein spezielles Beispiel an:

$$ax + by = 2a \quad (2.26a)$$

$$a^2x - b^2y = a^2 + b^2. \quad (2.26b)$$

Wir addieren nun  $b \cdot (2.26a) + (2.26b)$

$$\begin{aligned} abx + \cancel{b^2y} + a^2x - \cancel{b^2y} &= 2ab + a^2 + b^2 \\ a(\cancel{a+b})x &\stackrel{(1.6)}{=} (a+b)^2, \quad a+b \neq 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{a+b}{a}, \quad a \neq 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen in (1): } \cancel{a} \frac{a+b}{\cancel{a}} + by &= 2a \Rightarrow by = a - b \\ \Rightarrow y &= \frac{a-b}{b}, \quad b \neq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Betrachten wir abschließend noch zwei Spezialfälle:

$$\begin{aligned} 1.) \quad b_1 = 0 \quad a_1x &= k_1 \Rightarrow x = \frac{k_1}{a_1} \\ a_2 \frac{k_1}{a_1} + b_2y &= k_2 \Rightarrow y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad a_2b_1 - a_1b_2 &= 0 \quad a_2 \cdot (2.26a): \quad a_1a_2x + \color{red}{a_2b_1}y = a_2k_1 \\ a_1a_2x + \color{red}{a_1b_2}y &= a_2k_1 \\ a_1 \underbrace{(a_2x + b_2y)}_{(2.21b)=k_2} &= a_2k_1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow a_1k_2 \stackrel{!}{=} a_2k_1.$$

Gilt diese (von  $x$  und  $y$  unabhängige) Bedingung nicht, so hat das Gleichungssystem keine Lösung. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge,  $\mathbb{L} = \emptyset$ .

Gilt die Bedingung hingegen, so gilt  $a_2 \cdot (2.21a) = a_1(2.21b)$ , das heißt die Gleichungen sind *linear abhängig*. Damit ist jedes Paar  $(x, y)$ , das eine der Gleichungen erfüllt, Lösung des gesamten Gleichungssystems und es gibt unendlich viele Lösungen, die im Parameterraum  $(x, y)$  eine Linie aufspannen.



## 2.4 Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten

Die allgemeine Form des Gleichungssystems lautet

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \quad (2.31a)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \quad (2.31b)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = k_3, \quad (2.31c)$$

mit den festen Größen  $a_i, b_i, c_i, k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und Variablen  $x, y, z$ .

Die Lösung erfolgt im Allgemeinen durch Rückführung auf ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$c_2 \cdot (2.31a) - c_1(2.31b): \quad \underbrace{(a_1c_2 - a_2c_1)}_{a'_1}x + \underbrace{(b_1c_2 - b_2c_1)}_{b'_1}y = \underbrace{k_1c_2 - k_2c_1}_{k'_1} \quad (2.32)$$

$$c_3 \cdot (2.31a) - c_1(2.31c): \quad \underbrace{(a_1c_3 - a_3c_1)}_{a'_2}x + \underbrace{(b_1c_3 - b_3c_1)}_{b'_2}y = \underbrace{k_1c_3 - k_3c_1}_{k'_2} \quad (2.33)$$

Unter Zuhilfenahme bereits besprochener Methoden lösen wir nun das neue Gleichungssystem

$$a'_1x + b'_1y = k'_1, \quad (2.34a)$$

$$a'_2x + b'_2y = k'_2, \quad (2.34b)$$

für  $x, y$  und bestimme  $z$  durch Einsetzen in das ursprüngliche Gleichungssystem.

**Beispiel:**

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$x - 3y - 2z = 5, \quad (2.35a)$$

$$-x + y + z = 0, \quad (2.35b)$$

$$5x + y + 4z = 3 \quad (2.35c)$$

Nun eliminieren wir  $z$  aus dem Gleichungssystem

$$(2.35a) + 2 \cdot (2.35b): \quad -x - y = 5 \quad (2.36a)$$

$$2 \cdot (2.35a) + (2.35c): \quad 7x - 5y = 13. \quad (2.36b)$$

Dieses System mit zwei Unbekannten lösen wir durch Elimination von  $x$

$$7 \cdot (2.36a) + (2.36b): \quad -12y = 48 \Rightarrow y = -4$$

$$\text{in (2.36a): } x = -1 \quad (2.37)$$

$$\text{in (2.35b): } z = 3. \quad (2.38)$$

Als letzten Schritt überprüfen wir unsere Rechnung durch Einsetzen in (2.35a) und (2.35c). Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \{(x; y; z)\} = \{(-1; -4; 3)\}. \quad (2.39)$$

Von einem *unterbestimmten* Gleichungssystem spricht man, wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen gibt, bzw. Gleichungen linear abhängig sind. Schauen wir uns hierzu ein Beispiel an:

$$2x - y + z + 2 = 0, \quad (2.40a)$$

$$x + y - z + 1 = 0, \quad (2.40b)$$

$$7x + y - z + 7 = 0 \quad (2.40c)$$

Wir können mittels einer Linearkombination das Gleichungssystem auf lineare Abhängigkeit prüfen:

$$a \cdot (2.40a) + b \cdot (2.40b) \stackrel{!}{=} (2.40c) \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow (2a + b)x + (b - a)y + (a - b)z + (2a + b) \stackrel{!}{=} 7x + y - z + 7.$$

Wir können die Lösungen für  $a$  und  $b$  einfach über einen Koeffizientenvergleich bestimmen

$$\left. \begin{array}{l} x: 2a + b = 7 \\ y: b - a = 1 \\ z: a - b = -1 \\ 1: 2a + b = 7 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2a + b = 7 \\ b - a = 1 \end{array} \right\} \quad a = 2, b = 3. \quad (2.42)$$

Wenn dieses (überbestimmte) System eine Lösung besitzt, dann ist das ursprüngliche Gleichungssystem unterbestimmt. Da wir  $2 \cdot (2.40a) + 3 \cdot (2.40b) = (2.40c)$  enthält die dritte Gleichung keine neuen Informationen und wir können uns bei der Betrachtung auf die ersten beiden Gleichungen betrachten. Substituieren wir  $u \equiv y - z$  dann erhalten wir

$$\begin{array}{l} 2x - u + 2 = 0 \\ x + u + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow x = -1, u = 0 \Rightarrow y = z. \quad (2.43)$$

Das heißt, das alle Punkte  $x = -1, y = z$  (unendlich viele) das Gleichungssystem lösen. Wählen wir eine Parametrisierung  $y(t) = t, z(t) = t$  mit  $t \in \mathbb{R}$ , dann ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(-1, t, t) | t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.44)$$

Zur graphischen Darstellung einer Gleichung mit drei Unbekannten wählen wir die allgemeine Form

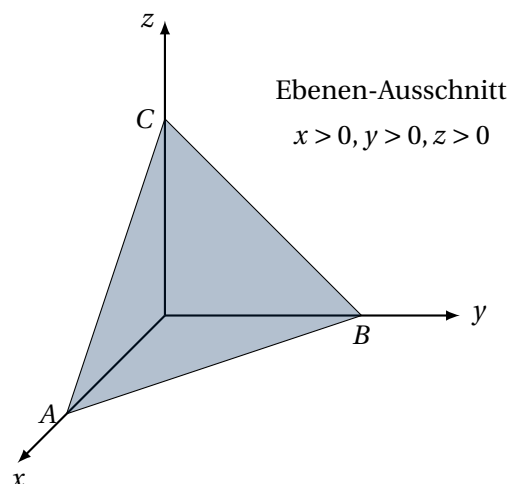
$$ax + by + cz + d = 0 \quad |:d \quad (2.45)$$

und benennen die Koeffizienten um:  $A \equiv -\frac{d}{a}$ ,  $B \equiv -\frac{d}{b}$ ,  $C \equiv -\frac{d}{c}$

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \quad (\text{Achsenabschnittsform}). \quad (2.46)$$

Dabei stellen  $A, B, C$  jeweils die Schnittpunkte mit der  $x$ -  $y$ - und  $z$ -Achse dar. Die lässt sich einfach durch Nullsetzen der jeweils anderen beiden Koordinaten zeigen.

Demnach wird durch Gleichung (2.46) eine Ebene im dreidimensionalen Raum beschrieben, welche die Koordinatenachsen in den Punkten  $(A; 0; 0)$ ,  $(0; B; 0)$  und  $(0; 0; C)$  schneidet.



**Abb. 2:** Grafische Darstellung der Lösung einer Gleichung mit drei Unbekannten.

Jeder der drei Gleichungen entspricht eine Ebene:

- Schneiden sich alle drei Ebenen in einem Schnittpunkt, dann existiert genau eine Lösung.
- Schneiden sich alle drei Ebenen in einer Schnittgeraden, dann ist das Gleichungssystem unterbestimmt.
- Besitzen die drei Ebenen nicht mindestens einen gemeinsamen Punkt, dann existiert auch keine Lösung.

### 3 Quadratische Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt geht es um quadratische Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchsten in zweiter Potenz auftreten, sowie um quadratische Funktionen und Systeme aus quadratischen Gleichungen.

#### 3.1 Die quadratische Gleichung

Wir schauen uns zunächst die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung an

$$Ax^2 + Bx + C = 0. \quad (3.1)$$

$\swarrow$  quadratisches Glied       $\uparrow$  lineares Glied       $\swarrow$  Absolutglied

Wir nehmen im Folgenden o. B. d. A. an, es sei  $A > 0$ . Zudem sind  $A, B$  und  $C$  reelle Konstanten. Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle

$$B = 0 \quad Ax^2 + C = 0 \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \text{für } C \leq 0: \text{ Lösungen } x_1 = \sqrt{-\frac{C}{A}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$$

$$\Rightarrow \text{für } C > 0: \text{ keine (reellen) Lösungen}$$

$$C = 0 \quad Ax^2 + Bx = 0 \quad (3.3)$$

$$x(Ax + B) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Lösungen } x_1 = 0, x_2 = -\frac{B}{A}.$$

Zur Bestimmung einer allgemeinen Lösung verwenden wir die *Methode der quadratischen Ergänzung*:

1. Überführung in die *Normalform* mit Umbenennung  $p \equiv \frac{B}{A}, q \equiv \frac{C}{A}$

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad , \quad x^2 + px + q = 0; \quad (3.4)$$

2. quadratische Ergänzung:  $x^2 + px = -q \quad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \right. \quad (3.5)$

$$\Rightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2. \quad (3.6)$$

3. Auflösen nach  $x$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (3.7)$$

**$p$ - $q$ -Lösungsformel**

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (3.8)$$

Man bezeichnet  $D \equiv \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  als *Diskriminante*. Anhand ihres Vorzeichens können folgende Fälle auftreten:

- $D > 0$ , es existieren zwei reelle Lösungen
- $D = 0$ , beide Lösungen fallen zusammen  $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
- $D < 0$ , es existiert keine (reelle) Lösung.

Betrachten wir für den Fall  $D \geq 0$  die Summe und das Produkt der beiden allgemeinen Lösungen,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -p \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} \frac{p^2}{4} - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q, \end{aligned} \quad (3.10)$$

dann folgt damit der *Vieta'sche Wurzelsatz*<sup>1</sup> für die Lösungen quadratischer Gleichungen,

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q, \quad \text{Vieta'scher Wurzelsatz.} \quad (3.11)$$

Setzen wir dieses Resultat in die Normalform ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \\ &= (x - x_1)(x - x_2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

also die Zerlegung in Linearfaktoren.

<sup>1</sup>Wurzeln sind eine Bezeichnung für die Nullstellen eines Polynoms.

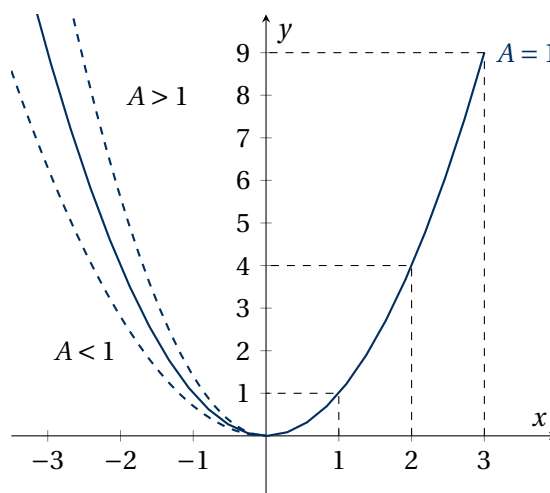
## 3.2 Quadratische Funktionen

Für quadratische Funktionen lautet die allgemeine Form

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad , \quad A, B, C \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Wir nehmen wieder o. B. d. A.  $A > 0$  an. Offenbar entspricht das Lösen einer quadratischen Gleichung der Suche nach den Nullstellen einer quadratischen Funktion (und umgekehrt). Betrachten wir zunächst den Fall  $B = C = 0$ :

- Definitionsbereich  $x \in \mathbb{R}$   
Wertebereich  $y \geq 0$ ;
- $A = 1$ : Normalparabel
- $A > 1$ : gestauchte Normalparabel;
- $A < 1$ : gestreckte Normalparabel;
- doppelte Nullstelle bei  $x_{1/2} = 0$ .



Durch Addition der Konstante  $y_0$  verschiebt sich die Parabel entlang der  $y$ -Achse. Für  $y_0 > 0$  bzw.  $y_0 < 0$  existieren keine bzw. zwei Nullstellen.

Durch die Substitution  $x \mapsto x + x_0$  verschiebt sich die  $y$ -Achse um den Wert  $x_0$ , bzw. die Parabel um  $-x_0$  entlang der  $x$ -Achse. Wir erhalten damit die quadratische Funktion

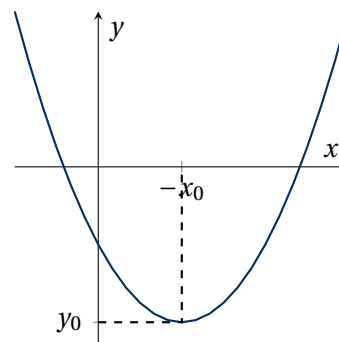
$$f(x) = A(x + x_0)^2 + y_0 \quad \text{Scheitelpunktform,} \quad (3.14)$$

wobei  $x_0 > 0$ : Verschiebung der  $y$ -Achse (Parabel) nach rechts (links)  
 $x_0 < 0$ : Verschiebung der  $y$ -Achse (Parabel) nach links (rechts).

Vergleichen wir mittels quadratischer Ergänzung die Scheitelpunktform mit der Normalform, so ergibt sich

$$x_0 = -\frac{B}{2A} \quad , \quad y_0 = C - \frac{B^2}{4A}. \quad (3.15)$$

Das heißt, dass jede quadratische Funktion durch geeignete Verschiebung des Koordinatensystems auf eine Parabel der Form  $f(x) = Ax^2$  zurückgeführt werden kann.



### 3.3 Quadratische Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Die allgemeine Form eines quadratischen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten Größen  $x, y$  lautet

$$a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + e_i y + f_i = 0. \quad (3.16)$$

Die allgemeine ist jedoch nur umständlich zu diskutieren und es existieren viele Lösungsmöglichkeiten. Daher beschränken wir uns hier auf zwei Beispiele.

#### Beispiel 1

$$x^2 + y^2 - 2x = \frac{11}{2}, \quad (3.17a)$$

$$2xy - 2y = \frac{5}{2} \quad (3.17b)$$

Wir addieren nun (3.17a)  $\pm$  (3.17b) und erhalten

$$\underbrace{2(x^2 + y^2 \pm 2xy)}_{(x \pm y)^2} - 4(x \pm y) = 11 \pm 5. \quad (3.18)$$

Wir substituieren nun  $u \equiv x + y$  und  $v \equiv x - y$ , damit haben wir zwei voneinander unabhängige quadratische Gleichungen

$$\begin{array}{ll} u^2 - 2u - 8 = 0 & \text{mit den Lösungen} \\ v^2 - 2v - 3 = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} & \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = -2 \\ v_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} & \Rightarrow v_1 = 3, v_2 = -1. \end{array} \quad (3.19)$$

Resubstituieren wir jetzt nun  $x = \frac{1}{2}(u + v)$ ,  $y = \frac{1}{2}(u - v)$ , dann existieren vier Lösungspaare für  $(x, y)$ , da vier Paare  $(u_i, v_j)$  gebildet werden können

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{7}{2}, & y_1 &= \frac{1}{2}(u_1 - v_1) = \frac{1}{2}; \\ x_2 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_2) = \frac{3}{2}, & y_2 &= \frac{1}{2}(u_1 - v_2) = \frac{5}{2}; \\ x_3 &= \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2}, & y_3 &= \frac{1}{2}(u_2 - v_1) = -\frac{5}{2}; \\ x_4 &= \frac{1}{2}(u_2 + v_2) = -\frac{3}{2}, & y_4 &= \frac{1}{2}(u_2 - v_2) = -\frac{1}{2}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{7}{2}; \frac{1}{2} \right), \left( \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right), \left( \frac{1}{2}; -\frac{5}{2} \right), \left( -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (3.21)$$

Im Zweifelsfall ("Sind wirklich alle Kombinationen erlaubt?") sollte die Probe durchgeführt werden.

*Bemerkung:* Eine geometrische Interpretation ist auch hier möglich: Gleichung (3.17a) beschreibt einen Kreis des Radius  $\sqrt{\frac{13}{2}}$ , dessen Mittelpunkt um 1 nach rechts verschoben ist,

da die Gleichung in der Form  $(x-1)^2 + y^2 = \frac{13}{2}$ . Dahingegen lässt sich (3.17b) als Funktion  $y = \frac{5}{4} \frac{1}{x-1}$  schreiben. Die Schnittpunktkoordinaten der Hyperbeln mit dem Kreis sind die Lösungspaare.

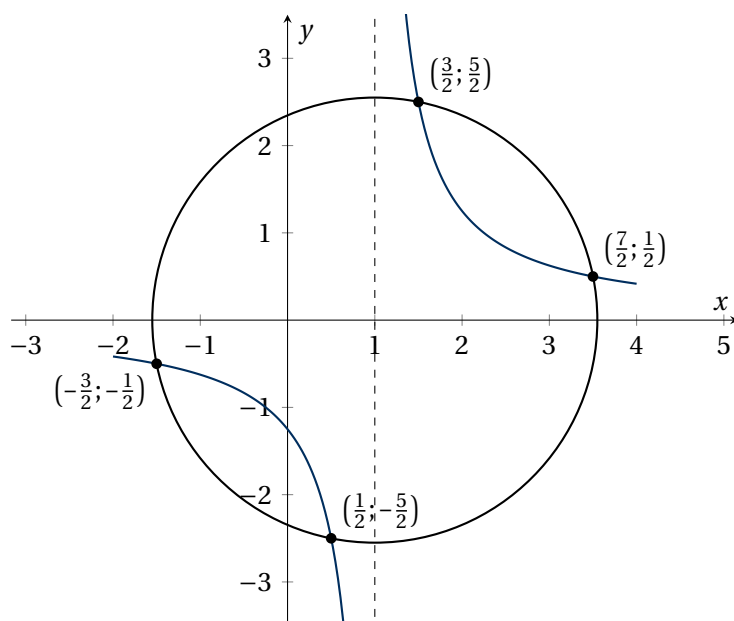


Abb. 3: Grafische Lösung des quadratischen Gleichungssystems.

### Beispiel 2

$$\begin{array}{lll} x + y^2 = 2, & \Rightarrow \text{Substitution } y^2 \equiv z & x + z = 2, \\ xy^2 = -8 & & xz = -8 \end{array} \quad (3.22)$$

Der Satz von Vieta angewandt auf das Gleichungssystem (3.22) zeigt, dass  $x$  und  $z$  Lösungen einer quadratischen Gleichung mit  $p = -2$  und  $q = -8$  sind, also der Gleichung

$$u^2 + pu + q = u^2 - 2u - 8 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} 4 \\ -2. \end{cases} \quad (3.23)$$

Wir könnten nun  $u_1 = x, u_2 = z$  oder  $u_1 = z, u_2 = x$  identifizieren, allerdings muss  $z = y^2$  positiv sein. wir erhalten somit die Lösungen

$$x = -2, y = \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-2; 2), (-2, -2)\}}}. \quad (3.24)$$



## 4 Umgang mit beliebigen Potenzen

Bisher haben wir uns auf Gleichungen/Funktionen beschränkt, deren Variablen höchstens in erster oder zweiter Potenz aufgetreten sind. Nun sollen Methoden zum Umgang mit beliebigen (ganzzahligen) Potenzen behandelt werden.

### 4.1 Polynome und Polynomdivision

Ein *Polynom  $n$ -ten Grades* ist eine Funktion der Form

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (4.1)$$

mit den reellen Konstanten  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Die Nullstellen der Funktion  $f_n(x)$  werden auch *Wurzeln* des Polynoms genannt; ein Polynom  $n$ -ten Grades besitzt höchstens  $n$  reelle Wurzeln.

Besitzt ein Polynom  $f_n(x)$  genau  $n$  reelle Wurzeln, dann kann es als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden (vergleiche den Fall  $n = 2$  mit dem Satz von Vieta),

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n), \quad (4.2)$$

mit Wurzeln  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Demnach kann eine Wurzel gemäß  $f_n(x) = (x - x_n)f_{n-1}(x)$  aus einem Polynom abgespalten werden, wobei  $f_{n-1}(x)$ , bei bekanntem  $x_n$ , mit Hilfe der *Methode der Polynomdivision* zu bestimmen ist,

$$f_{n-1}(x) = f_n(x) : (x - x_n). \quad (4.3)$$

Möchte man einen unbekannten Linearfaktor abspalten, so ist ein  $x_i$  zu erraten.

Wir wollen jetzt das Verfahren der Polynomdivision am Beispiel folgender Funktion diskutieren:

$$f_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \quad x_3 = 2. \quad (4.4)$$

Der Algorithmus für die schriftliche Polynomdivision besteht aus drei Schritten:

1. Division: Man dividiere das Glied der höchsten Potenz des Zählerpolynoms durch das Glied der höchsten Potenz des Nennerpolynoms und schreibt das Ergebnis neben dem Gleichheitszeichen auf.
2. Multiplikation: Man multipliziert das Ergebnis von Schritt 1 mit dem Nennerpolynom und schreibt das Ergebnis unter das Zählerpolynom.
3. Subtraktion: Man subtrahiert das Ergebnis von Schritt 2 vom Zählerpolynom und beginnt wieder von vorne.

$$\begin{array}{rcl}
 & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & : (x-2) = x^2 - 3x + 2 \\
 & -(x^3 - 2x^2) & \\
 \hline
 & -3x^2 + 8x - 4 & \\
 & -(-3x^2 + 6x) & \\
 \hline
 & 2x - 4 & \\
 & -(2x - 4) & \\
 \hline
 & 0 & 
 \end{array}$$

Ergebnis: (4.5)

Die Nullstellen des Restpolynoms  $x^2 - 3x + 2$  erhalten wir mittels  $p$ - $q$ -Formel:

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1. \quad (4.6)$$

Damit lautet die Linearfaktorzerlegung des Polynoms

$$\underline{\underline{f_3(x) = (x-1)(x-2)^2}} = \underbrace{(x-1)(x^2 - 4x + 4)}_{\text{Probe}} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4. \quad (4.7)$$

## 4.2 Partialbruchzerlegung

Oft möchte man in einem Nenner auftretende Polynome zugunsten von Linearfaktoren zerlegen. Dies ist insbesondere bei der Berechnung von Integralen hilfreich. Wir betrachten das Verfahren anhand des Quotienten einer linearen und einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = \frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{mx + n}{(x - x_1)(x - x_2)} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2}. \quad (4.8)$$

Ansatz

Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  sind nun so zu bestimmen, dass die Forderung erfüllt ist. Wir multiplizieren das in Linearfaktoren zerlegte Polynom auf die rechte Seite

$$\begin{aligned}
 mx + n &= \left( \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2} \right) \cdot (x - x_1)(x - x_2) = \alpha(x - x_2) + \beta(x - x_1) \\
 &= (\alpha + \beta)x - (\alpha x_2 + \beta x_1).
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Im zweiten Schritt führen wir einen Koeffizientenvergleich durch nach den Potenzen von  $x$  um ein lineares Gleichungssystem für  $\alpha$  und  $\beta$  zu erhalten

$$x^1: \quad m = \alpha + \beta \quad (4.10a)$$

$$x^0: \quad n = -(\alpha x_2 + \beta x_1). \quad (4.10b)$$

Dieses lösen wir nun mit der Additionsmethode durch Elimination von  $\beta$

$$mx_1 + n = \alpha(x_1 - x_2) \Rightarrow \alpha = \frac{mx_1 + n}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{mx_2 + n}{x_1 - x_2}. \quad (4.12)$$

Offenbar versagt dieser Ansatz für  $x_1 = x_2$ , wenn also der Nenner eine doppelte Nullstelle hat. In diesem Fall jedoch hat  $f(x)$  bereits die gewünschte Form,

$$f(x) = \frac{mx+n}{(x-x_0)^2}, \quad x_0 \equiv x_1 = x_2. \quad (4.13)$$

Im allgemeinen Fall haben wir den Quotienten aus einem Polynom  $p$ -ten Grades und einem Polynom  $q$ -ten Grades ( $p < q$ ) zu zerlegen<sup>2</sup>. Dann sind zunächst die Nullstellen des Nenners  $x_i$  zu bestimmen; der Ansatz enthält für jede einfache Nullstelle einen Summanden

$$\frac{\alpha_i}{x-x_i}, \quad \alpha_i \text{ const.}, \quad (4.14)$$

und für jede  $k$ -fache Nullstelle  $k$  Summanden, einen für jede mögliche Potenz zwischen 1 und  $k$ ,

$$\frac{\alpha_i^{(1)}}{x-x_i} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{\alpha_i^{(k)}}{(x-x_i)^k}, \quad \alpha_i^{(j)} \text{ const.} \quad (4.15)$$

**Beispiel** Betrachten wir nun folgenden Bruch mit Polynomen

$$Q(x) = \frac{3x^2+5}{(x+1)(x-1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x^2+5 &= \alpha(x-1)^2 + \beta(x^2-1) + \gamma(x+1) \\ &= (\alpha+\beta)x^2 + (\gamma-2\alpha)x + \alpha-\beta+\gamma. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Wir führen nun den Koeffizientenvergleich durch

$$\begin{array}{llll} x^2: & 3 = \alpha + \beta & (1) & \gamma = 4 \\ x^1: & 0 = \gamma - 2\alpha & (2) & \Rightarrow (1) + (2) + (3): \quad 2\gamma = 8 \Rightarrow \alpha = 2 \\ x^0: & 5 = \alpha - \beta + \gamma & (3) & \beta = 1. \end{array} \quad (4.18)$$

Damit folgt als Ergebnis

$$\underline{\underline{Q(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}}}. \quad (4.19)$$

**Bemerkung:** Jede rationale Funktion, d. h. eine Funktion, die als Quotient zweier Polynome geschrieben werden kann, lässt sich als Summe von Brüchen der Form  $\frac{\alpha_i}{(x-x_i)^j}$  sowie gegebenenfalls einer “reinen” Polynomfunktion darstellen.

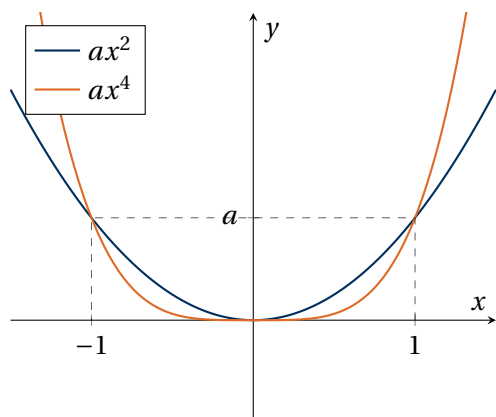
**Bemerkung** Sind Zähler und Nenner vom gleichen Grade, ist dem Ansatz ein konstanter Summand hinzuzufügen. Alternativ kann zunächst auch eine Polynomdivision mit Rest durchgeführt werden; der Rest ist dann ein Bruch mit kleinerem Zähler- als Nennergrad, so dass “normal” weitergerechnet werden kann.

<sup>2</sup>Für  $p \geq q$  kann eine Polynomdivision durchgeführt werden.

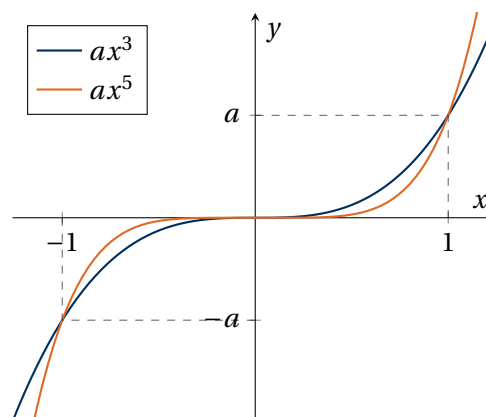
## 4.3 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form  $f(x) = ax^n$ , wobei hier nur die Fälle  $a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{Z}$  betrachtet werden sollen.

### 1.) Parabeln $n$ -ter Ordnung: $n > 0$

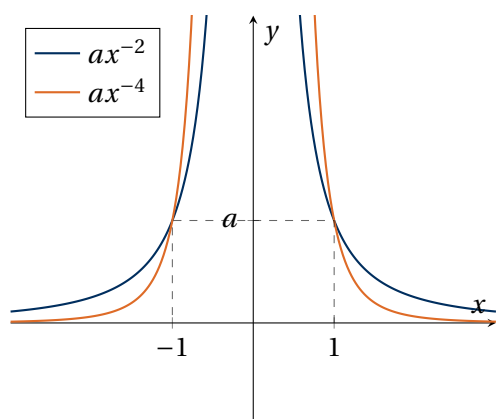


- Definitionsbereich:  $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich:  $y \in [0, \infty)$
- gerade Funktion:  $f(-x) = f(x)$
- Axialsymmetrie zur y-Achse

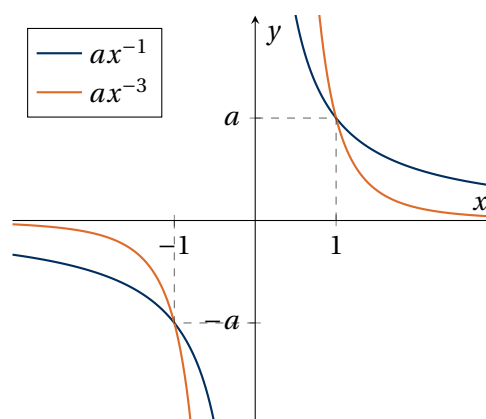


- Definitionsbereich:  $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich:  $y \in \mathbb{R}$
- ungerade Funktion:  $f(-x) = -f(x)$
- Punktsymmetrie zum Ursprung

### 2.) Hyperbeln $n$ -ter Ordnung: $n < 0$



- Definitionsbereich:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Wertebereich:  $y \in (0, \infty)$
- gerade Funktion:  $f(-x) = f(x)$
- Axialsymmetrie zur y-Achse



- Definitionsbereich:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Wertebereich:  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ungerade Funktion:  $f(-x) = -f(x)$
- Punktsymmetrie zum Ursprung

## 5 Das Summenzeichen

Für viele Anwendungen erweist es sich als praktisch, sehr lange (oder auch unendliche) Summen kompakt aufzuschreiben. Betrachten wir eine Summe  $S$  aus  $n$  Summanden,

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n, \quad (5.1)$$

wobei jeder Summand mit einem *Index* gekennzeichnet ist,

$$s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Die Indizes dienen zunächst nur dazu, die Summanden zu unterscheiden und sind im Allgemeinen willkürlich gesetzt - schließlich hängt der Wert der Summe nicht von der Summationsreihenfolge ab. Als Kurzschreibweise für Summen verwendet man den großen griechischen Buchstaben Sigma:

$$S = \sum_{i=1}^n s_i, \quad \text{mit Startwert } i = 1 \text{ und Endwert } i = n. \quad (5.3)$$

### Beispiel: Polynome

Hier sind die Summanden die jeweiligen Potenzen von  $x$  mit ihren Vorfaktoren und es bietet sich an, die Potenzen als Indizes zu benutzen:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (5.4)$$

### Beispiel: Summe der ersten $n$ Zahlen

Hier bietet sich an, die Zahlen selbst als Indizes zu benutzen:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n. \quad (5.5)$$

### Eigenschaften:

- Die Benennung des Summationsindex ist irrelevant,

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{k=1}^n s_k. \quad (5.6)$$

- Summen von Summen/Differenzen sind Summen/Differenzen von Summen,

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i. \quad (5.7)$$

- Gleiche (vom Index unabhängige) Faktoren können ausgeklammert werden,

$$\sum_{i=1}^n (as_i) = a \sum_{i=1}^n s_i.$$

$$\Rightarrow \text{speziell: } \sum_{i=1}^n a = a \sum_{i=1}^n 1 = a \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{n\text{-mal}} = n \cdot a.$$

- Summen können aufgeteilt werden,

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{i=m+1}^n s_i. \quad (5.8)$$

- Startwerte können verändert werden,

$$\sum_{k=m}^n s_k = \sum_{k=1}^n s_k - \sum_{k=1}^{m-1} s_k \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow \text{speziell: } \sum_{k=m}^n 1 = \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^{m-1} 1 = n - (m-1) = 1 + n - m.$$

**Bemerkung** Es gibt einige weitere Möglichkeiten, Summen zu schreiben, bspw. kann der Index Werte einer (abzählbaren) Menge  $M$  annehmen,

$$\sum_{i \in M} s_i, \quad (5.10)$$

oder man lässt die Summationsgrenzen weg, wenn in irgendeiner Weise “klar” ist, wie summiert wird,

$$\sum_i s_i. \quad (5.11)$$

Mehrfache Summen können mit einem Summenzeichen geschrieben werden, sofern sie unabhängig voneinander laufen:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^n s_{ij} = s_{11} + s_{12} + \dots + s_{21} + s_{22} + \dots + s_{nn}. \quad (5.12)$$

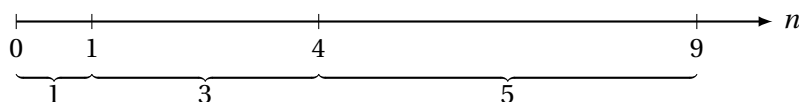
Dabei ist es egal, welche Summe zuerst ausgeführt wird. Letzteres gilt nicht in Fällen wie beispielsweise

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i s_{ij}, \quad (5.13)$$

da hier der Endwert der zweiten Summe vom Index der ersten Summe abhängt.

**Beispiel: Differenzen benachbarter Quadratzahlen**

Wenn wir untersuchen wollen, was die Summe aus den Differenzen benachbarter Quadratzahlen ist, so können wir das zunächst für die ersten paar Glieder aufschreiben: Dies legt die



Vermutung nahe, dass es sich um die Summe aller ungeraden Zahlen handelt. Rechnen wir dies nach, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n [(k+1)^2 - k^2] &= \sum_{k=0}^n (k+1)^2 - \sum_{k=0}^n k^2 \\ &= \sum_{k=0}^n (\cancel{k^2} + 2k + 1) - \sum_{k=0}^n \cancel{k^2} = \sum_{k=0}^n (2k + 1). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Das ist in der Tat die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis  $2n + 1$ .

**Indexverschiebung**

Da die Indizierung einzelner Summanden willkürlich ist, ist es möglich, eine *Indexverschiebung* vorzunehmen:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n s_i, \text{ Substitution } i = j + a \\ &\Rightarrow \text{Startwert: aus } i = 1 \text{ folgt } j = 1 - a \\ &\Rightarrow \text{Endwert: aus } i = n \text{ folgt } j = n - a \\ &= \sum_{j=1-a}^{n-a} s_{j+a}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Schauen wir uns dazu das vorherige Beispiel nochmal an:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1)^2 - \sum_{k=0}^n k^2 &\stackrel{k=i+1}{=} \sum_{k=0}^n (k+1)^2 - \sum_{i=-1}^{n-1} (i+1)^2 \stackrel{i=k}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^n (k+1)^2}_{(1)} - \underbrace{\sum_{k=-1}^{n-1} (k+1)^2}_{(2)} \\ &= \underbrace{(n+1)^2}_{\text{letztes Glied (1)}} + \sum_{k=0}^{n-1} \cancel{(k+1)^2} + \underbrace{(-1+1)^2}_{\text{erstes Glied (2)}} - \sum_{k=-1}^{n-1} \cancel{(k+1)^2} \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

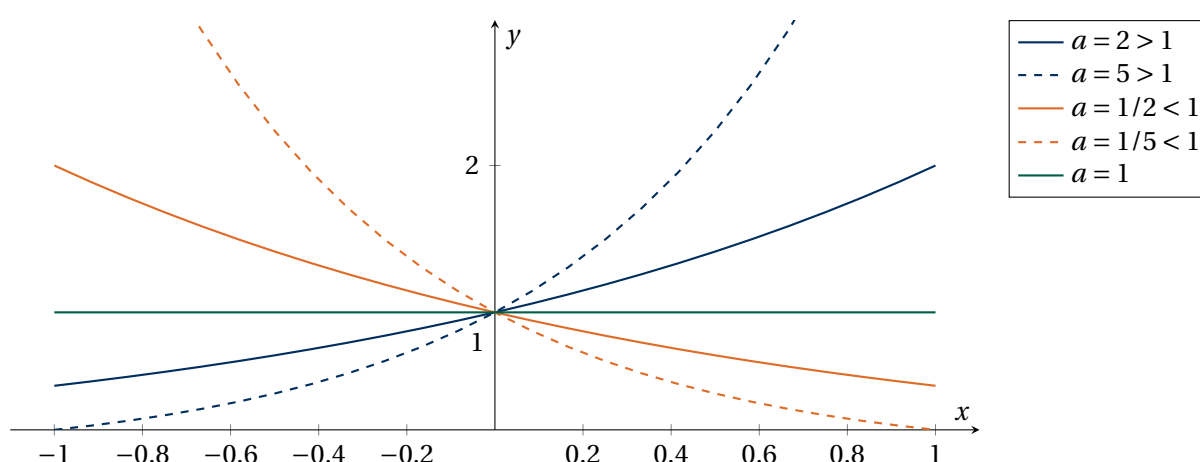
Die Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen ist gleich der  $(n+1)$ -ten Quadratzahl.

## 6 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Wir wollen uns nun mit Funktionen beschäftigen, die exponentielles Wachstum beschreiben. *Exponentialfunktionen* sind Funktionen, deren Variable im Exponenten steht  $f(x) = a^x$ . Hierbei muss die Basis  $a > 0$  sein. Unabhängig von  $a$  gilt dann  $a^0 = 1$ , d. h. alle Exponentialfunktionen schneiden die  $y$ -Achse im Punkt  $(0, 1)$ .

Wir können, abhängig von  $a$ , drei Fälle unterscheiden

- $a > 1$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ , asymptotische Annäherung an  $x$ -Achse von rechts
- $a < 1$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ , asymptotische Annäherung an  $x$ -Achse von links
- $a = 1$ :  $y = 1$  für alle  $x$



**Abb. 4:** Darstellung von Exponentialfunktionen für verschiedene Werte von  $a$ .

Die Funktionen sind spiegelbildlich zur  $x$ -Achse, denn

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) = a^x \\ f_2(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f_1(-x) \end{array} \right\} \text{ wenn } a > 1, \text{ dann } \frac{1}{a} < 1. \quad (6.1)$$

Das heißt, zu jeder **blauen** Funktion mit Basis  $a$ , findet man eine spiegelsymmetrische **orange** Funktion mit Basis  $\frac{1}{a}$ .

### 6.1 Logarithmen

Wir wollen uns nun die Frage stellen, welchen Wert  $n$  ein Exponent zu einer gegebenen Basis  $b$  haben muss, damit der Potenzwert  $a$  herauskommt. Also es gelte  $a = b^n$  für ein bekanntes  $a$  und  $b$ , was ist dann  $n$ ?

Die Antwort auf diese Frage liefert die Logarithmusfunktion:  $(a, b > 0; b \neq 1)$

$$\text{Exponent} \rightarrow n = \log_b(a). \leftarrow \text{Numerus (Potenzwert)} \quad (6.2)$$

Radikand



Beispielsweise  $n = \log_5(625)$  heißt, dass gilt:  $5^n = 625$ . Wir finden damit als Ergebnis  $n = 4$ . Spezielle Werte des Logarithmus sind

$$\begin{aligned} \log_b(1) &= 0 & \text{da } b^n &= 1 \Rightarrow n = 0 \\ \log_b(b) &= 1 & \text{da } b^n &= b \Rightarrow n = 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Es gilt demzufolge

$$b^{\log_b(a)} = b^n = a \quad \text{und} \quad \log_b(b^n) = \log_b(a) = n. \quad (6.4)$$

Beachte: Der Logarithmus von Null ist nicht definiert, da  $10^b = 0$  keine reelle Lösung für  $b$  hat. Ebenso ist der Logarithmus negativer Zahlen (hier) nicht definiert, da  $10^b = x$  für  $x < 0$  keine reelle Lösung für  $b$  hat.

### Logarithmengesetze

Wir wollen im Folgenden die Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen herleiten:

$$\begin{array}{ccc} u = b^p, v = b^q & \longrightarrow & uv = b^{p+q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p = \log_b(u), q = \log_b(v) & & \log_b(uv) = p + q \end{array} \quad \Rightarrow \quad \log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v). \quad (6.5)$$

$$\begin{array}{ccc} u = b^p, v = b^q & \longrightarrow & \frac{u}{v} = b^{p-q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p = \log_b(u), q = \log_b(v) & & \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = p - q \end{array} \quad \Rightarrow \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v). \quad (6.6)$$

$$\begin{array}{ccc} b^x = u^m & \longrightarrow & u = b^{\frac{x}{m}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x = \log_b(u^m) & & \log_b(u) = \frac{x}{m} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \log_b(u^m) = m \log_b(u). \quad (6.7)$$

Die Logarithmus-Funktion wandelt Potenzen und Wurzeln in Produkte und Brüche und diese wiederum in Summen und Differenzen um.

### Wechsel der Basis

Alle Logarithmen können bezüglich der gleichen Basis ausgedrückt werden.

$$\begin{array}{ccc} x = a^u & \longrightarrow & u = \log_a(x) \\ \downarrow \log_b & & \downarrow \\ \log_b(x) = \log_b(a^u) = u \log_b(a) = \log_a(x) \log_b(a) & \Rightarrow & \log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x). \end{array} \quad (6.8)$$

Dabei heißt  $\frac{1}{\log_b(a)}$  der *Modul* von  $a$  bezüglich der Basis  $b$ . Für  $x = b$  gilt speziell

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \underbrace{\log_b(b)}_1. \quad (6.9)$$

Gebräuchliche Logarithmensysteme sind

- der *dekadische* Logarithmus:  $\log_{10}(x) \equiv \lg(x)$ ,
- der *natürliche* Logarithmus:  $\log_e(x) \equiv \ln(x)$

Hierbei ist  $e$  die *Eulersche Zahl* (später mehr dazu)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2.71828182845945... \quad (6.10)$$

Häufig wird ein Basiswechsel zum natürlichen Logarithmus durchgeführt:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \quad (6.11)$$

Fassen wir abschließend die Logarithmengesetze und den Basiswechsel nochmal zusammen:

#### Logarithmengesetze, Basiswechsel

$$\begin{aligned} \log_b(uv) &= \log_b(u) + \log_b(v), & \log_b\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_b(u) - \log_b(v) \\ \log_b(u^m) &= m \log_b(u), & \log_a(x) &= \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x). \end{aligned} \quad (6.12)$$

**Der dekadische Logarithmus**  $\log_{10}(x) = \lg(x)$

Der dekadische Logarithmus ist zur Basis 10 definiert und wird beispielsweise in der Chemie verwendet, um den pH-Wert zu definieren:

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+], \quad [\text{H}^+] \text{ - molare Konzentration von } \text{H}^+ \text{ in der Lösung.} \quad (6.13)$$

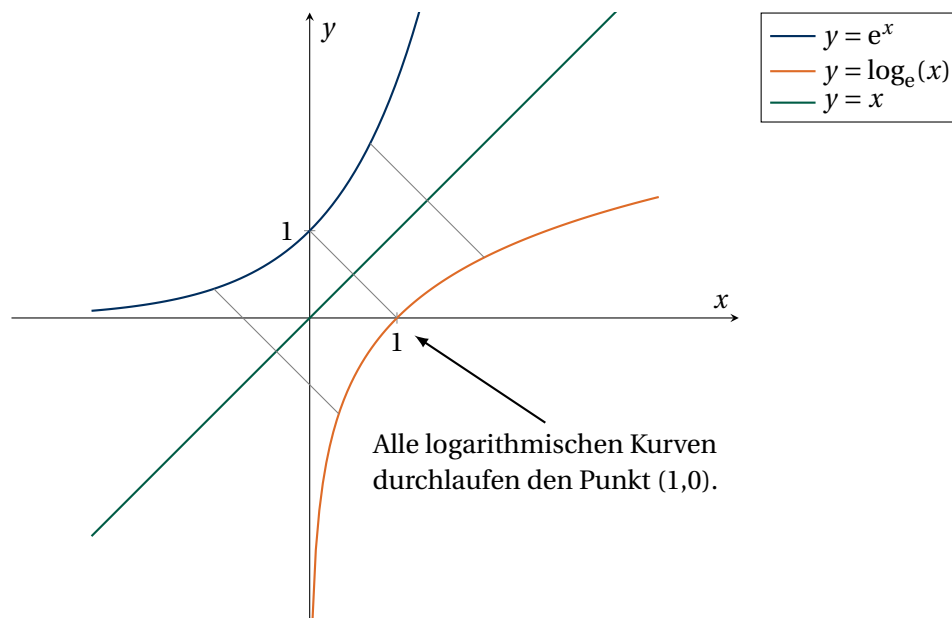
Das Minuszeichen ist begründet dadurch, dass der Logarithmus für Zahlen zwischen 0 und 1 negative Werte annimmt, z. B.

$$\lg(0,00213) = \lg(2,13 \cdot 10^{-3}) = \lg(2,13) + \underbrace{\lg(10^{-3})}_{\lg(10^n)=n} = \underbrace{\lg(2,13)}_{\lg 1=0 < 1=\lg 10} - 3 < 0. \quad (6.14)$$

Dabei wird der erste Term  $\lg(2,13)$  *Mantisse* und der zweite Term  $(-3)$  *Kernzahl* genannt.

### Grafische Darstellung

Die der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, erhält man sie durch Spiegellung an der Geraden  $y = x$ . Für reelle  $y$  ist der Definitionsbereich  $0 < x < \infty$ . Wir betrachten den Fall  $a > 1$ .



**Abb. 5:** Darstellung von Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion für  $a = e$ .

## 6.2 Die Exponentialfunktion

Bisher haben wir Exponentialfunktionen im Allgemeinen behandelt. Als *die Exponentialfunktion* wird gemeinhin eine Exponentialfunktion zur Basis  $e$  (Eulersche Zahl) bezeichnet - kurz:  $e$ -Funktion.

Sie dient der Beschreibung von Wachstum und Zerfall (z. B. Radioaktivität) und als Lösung von Differentialgleichungen (siehe Mathematische Methoden der Physik I).

Die allgemeine Form der Exponentialfunktion ist

$$f(x) = Ae^{cx} \equiv A \exp(cx) \quad , \quad A = \text{const}, c = \text{const}. \quad (6.15)$$

Abhängig vom Vorzeichen von  $c$  wird entweder exponentielles Wachstum ( $c > 0$ ) oder exponentieller Zerfall ( $c < 0$ ) beschrieben.

Das besondere der  $e$ -Funktion ist, dass sie proportional zu ihrem eigenen Anstieg ist. Dieses Verhalten ist typisch für viele Phänomene in der Physik, weshalb die  $e$ -Funktion dort sehr häufig auftritt.

**Beispiel: Halbwertszeit**

Wir betrachten einen exponentiellen Zerfall mit der Zeit  $t$ . Wir stellen uns nun die Frage wann ein Anfangswert auf seine Hälfte zerfallen ist und nennen diesen Zeitraum  $\tau$ . Mathematisch lässt sich dieser Zerfallsprozess formulieren als

$$f(x) = Ae^{-ct}, \quad c > 0. \quad (6.16)$$

Es soll nun also  $f(t_0 + \tau)$  halb so groß sein wie  $f(t_0)$ , wobei  $t_0$  ein willkürlicher Zeitpunkt ist:

$$\begin{aligned} f(t_0 + \tau) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} f(t_0) \\ Ae^{-c(t_0 + \tau)} &= \frac{A}{2} e^{-ct_0} \quad (A \neq 0) \\ e^{-ct_0} e^{-c\tau} &= \frac{1}{2} e^{-ct_0} \quad (e^x \neq 0 \text{ für alle } x) \\ \Rightarrow -c\tau &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\ln(2)}{c}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

**Definitionen der Eulerschen Zahl:**

Es gibt verschiedene (zueinander äquivalente) Möglichkeiten die Eulersche Zahl zu definieren:

1. Die e-Funktion lässt sich über ihre Reihendarstellung beschreiben:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Man kann zeigen, dass die Reihenglieder für jeden Wert von  $x$  ab einer hinreichend hohen Ordnung immer kleiner werden. Man sagt, die Reihe *konvergiert* (siehe Analysis I).

$$\Rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (6.18)$$

Hierbei ist die *Fakultät*  $n!$  einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  definiert als  $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ , wobei zusätzlich noch  $0! := 1$  gilt.

2. Definition als Grenzwert:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (6.19)$$

Diese Darstellung geht auf das Problem der stetigen Verzinsung nach Jakob Bernoulli (1654-1705) zurück:

“Eine Summe Geldes sei auf Zinsen angelegt, dass in den einzelnen Augenblicken ein proportionaler Teil der Jahreszinsen zum Kapital geschlagen wird.”

Betrachten wir also ein Anfangsguthaben  $A$  und einen Zinssatz von 100 %:

$$\text{Verzinsung nach 1 Jahr: Guth.} = A + A = (1 + 1)A$$

$$\text{Verzinsung nach } \frac{1}{2} \text{ Jahr: Guth.} = \underbrace{A + \frac{1}{2}A}_{\text{1. Halbjahr}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{2}A\right)}_{\text{2. Halbjahr}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 A$$

$$\text{Verzinsung nach } \frac{1}{3} \text{ Jahr: Guth.} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 A$$

$$\text{Verzinsung nach } \frac{1}{n} \text{ Jahr: Guth.} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n A. \quad (6.20)$$

Für eine Verzinsung in einzelnen Augenblicken gilt nun:

$$\text{Guth.} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n A = e \cdot A. \quad (6.21)$$

## 7 Trigonometrische Funktionen

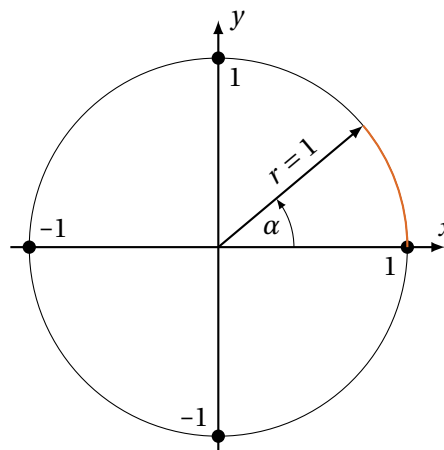
Dieser Abschnitt widmet sich der Definition von Sinus- und Kosinusfunktionen sowie deren Eigenschaften.

### Bogenmaß und Gradmaß

Wir betrachten die (reelle) Zahlenebene, in der alle Abstände in Einheit 1 gemessen werden, also *dimensionslos* sind. Der Umfang des Einheitskreises beträgt definitionsgemäß

$$u = 2\pi r = 2\pi. \quad (7.1)$$

Wir können nun zwischen den beiden Maßsystemen *Gradmaß* und *Bogenmaß* unterscheiden. Für das Gradmaß ist der Vollkreis in 360 Abschnitte eingeteilt, während im Bogenmaß der Winkel in Bruchteilen des Kreisumfangs gemessen wird:



$$\begin{aligned} \text{Gradmaß: } [\alpha] &= ^\circ \text{ (deg) , } \text{Vollkreis: } 360^\circ \\ \text{Bogenmaß: } [\alpha] &= 1 \text{ (rad) , } \text{Vollkreis: } 2\pi. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Wir können beide Maßsysteme mittels einer Verhältnisgleichung ineinander überführen:

$$\frac{\alpha[\text{rad}]}{2\pi} = \frac{\alpha[\text{deg}]}{360^\circ}. \quad (7.3)$$

Einige Werte zur Umrechnung sind in folgender Tabelle aufgelistet:

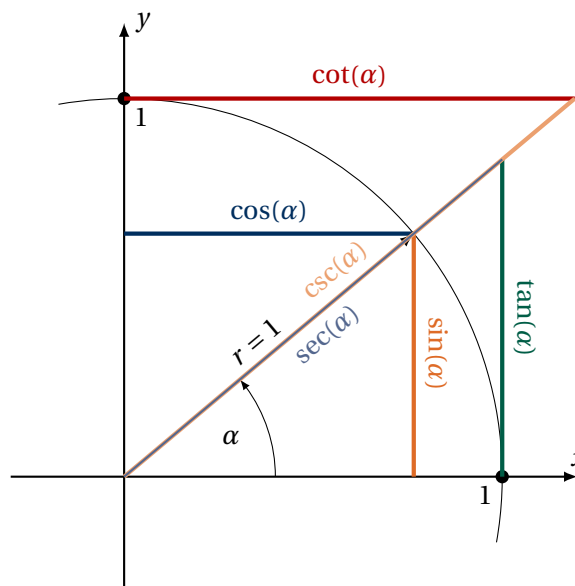
**Tabelle 1:** Umrechnungstabelle für Bogen- und Gradmaß

$\alpha$ [deg]	30	45	60	90	120	150	180	270	360
$\alpha$ [rad]	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

## 7.1 Winkelfunktionen

Alle Winkelfunktionen sind dimensionslos definiert. Die  $x$ -Koordinate eines Punktes des Einheitskreises ist der Kosinus des Winkels zwischen seinem Ortsvektor und der Abszisse, während die  $y$ -Koordinate der Sinus dieses Winkels ist. Weitere trigonometrische Funktionen sind wie folgt definiert:

- Tangens:  $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- Kotangens:  $\cot(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$
- Sekans:  $\sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)}$
- Kosekans:  $\csc(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)}$



Aus der Abbildung können wir mithilfe des Satzes des Pythagoras folgende Relation ablesen

### Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \quad (7.4)$$

Durch weitere rechtwinklige Dreiecke können wir ebenfalls folgende Relationen ablesen:

$$\begin{aligned} \sec^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha) \\ \csc^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Beide Relationen lassen sich auch direkt mithilfe der Definitionen und des trigonometrischen Pythagoras herleiten. Anhand der Konstruktion können wir auch folgende Eigenschaften der Funktionen ablesen, wie z. B. die Wertebereiche

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &\in [-1, 1] & \tan(\alpha) &\in (-\infty, \infty) \\ \cos(\alpha) &\in [-1, 1] & \cot(\alpha) &\in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Vorzeichen der Funktionen in den einzelnen Quadranten lauten:

**Tabelle 2:** Vorzeichen/Signum (sgn) der Funktionen

Quadrant	$\text{sgn}(\sin \alpha)$	$\text{sgn}(\cos \alpha)$	$\text{sgn}(\tan \alpha)$	$\text{sgn}(\cot \alpha)$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Spezielle Werte der Funktionen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

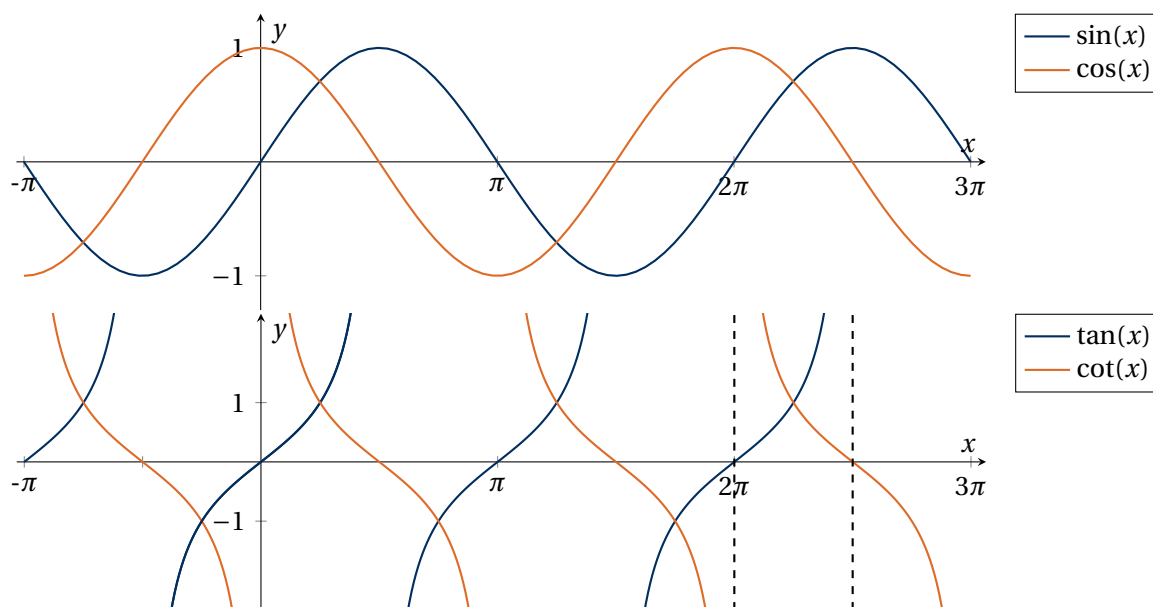
**Tabelle 3:** Vorzeichen/Signum (sgn) der Funktionen

$\alpha$ [deg]	0	30	45	60	90	120	150	180	270	360
$\alpha$ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\pm\infty$	0
$\cot \alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

## 7.2 Graphische Darstellung der Winkelfunktionen

Wir erlauben alle reellen Zahlen  $x$  als Argumente in den Winkelfunktionen, d. h. der Definitionsbereich ist ganz  $\mathbb{R}$  (für  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ ). Dabei sind die Funktionen periodisch

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(x + 2\pi n), & \tan(x) &= \tan(x + \pi n) \\ \cos(x) &= \cos(x + 2\pi n), & \cot(x) &= \cot(x + \pi n) \end{aligned} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.7)$$



**Abb. 6:** Grafische Darstellung von Sinus bzw. Kosinus (oben) und Tangens bzw. Kotangens (unten).

Symmetrie-Eigenschaften der Funktionen lauten

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ , ungerade
- $\cos(-x) = +\cos(x)$ , gerade



- $\tan(-x) = -\tan(x)$ , ungerade
- $\cot(-x) = -\cot(x)$ , ungerade

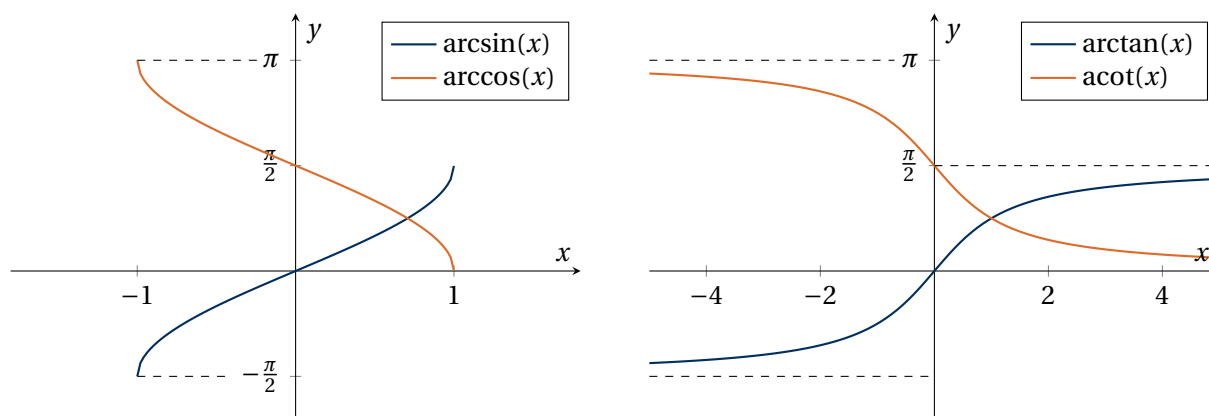
### Umkehrfunktionen

Wir erhalten die Umkehrfunktionen durch Auflösen nach dem Argument  $x$ . Dabei definieren wir die folgendermaßen

- Arkussinus:  $\arcsin(\sin x) = x$ ,
- Arkuskosinus:  $\arccos(\cos x) = x$ ,
- Arkustangens:  $\arctan(\tan x) = x$ ,
- Arkuskotangens:  $\operatorname{acot}(\cot x) = x$ .

Wir müssen beachten, dass der Definitionsbereich der periodischen Winkelfunktionen eingeschränkt werden muss, damit die Umkehrfunktionen eindeutig sind. Wir beschränken die Argumente (bzw. die Funktionswerte der Umkehrfunktionen) wie folgt:

- $\sin(x)$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,
- $\cos(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,
- $\tan(x)$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,
- $\operatorname{acot}(x)$   $x \in (0, \pi)$ .



**Abb. 7:** Grafische Darstellung der Umkehrfunktionen von Sinus bzw. Kosinus (links) und Tangens bzw. Kotangens (rechts).

Wir können aus der graphischen Darstellung die folgenden analytischen Eigenschaften ablesen:

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x), \quad \operatorname{atan}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan}(x) \quad (7.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\operatorname{arctan}(x)) = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{acot}(x)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{acot}(x)) = \pi. \quad (7.9)$$

## 7.3 Definition durch Reihen

Ebenso wie die Exponentialfunktion lassen sich auch die trigonometrischen Funktionen als Reihen darstellen bzw. definieren. Der Zusammenhang der Winkelfunktionen mit der e-Funktion wird im Vorkurs (mit Einführung der komplexen Zahlen) klar werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Wir können weiterhin auch die Symmetrieeigenschaften von Sinus und Kosinus in den Reihenentwicklungen erkennen. Da die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, tauchen hier nur ungerade Potenzen von  $x$  auf. Weiterhin gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{2n+1}.\quad (7.11)$$

Die übrigen Reihen sehen etwas komplizierter aus und werden hier nicht aufgeführt.

## 7.4 Additionstheoreme

Für die Winkelfunktionen gelten die folgenden Additionstheoreme:

Additionstheoreme	
$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y).\end{aligned}$	(7.12)

Das zweite Theorem folgt aus dem Ersten (siehe Übung). Ebenfalls folgen Regeln für Tangens und Cotangens

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}.\quad (7.13)$$

Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet.

Die Additionstheoreme können genutzt werden, um die Relationen für die Doppelwinkelfunktionen herzuleiten:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad (7.14)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1. \quad (7.15)$$

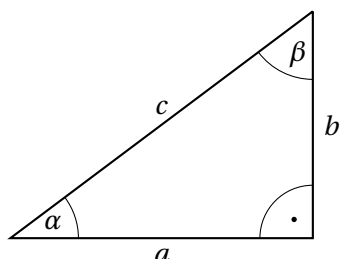
Des weiteren lässt sich die Summe zweier Kosinusfunktionen auch als Produkt schreiben:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (7.16)$$

## 7.5 Ebene Trigonometrie

### Das rechtwinklige Dreieck

Sinus, Kosinus und Tangens können auch über Winkel und Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck definiert werden.



$a$  : Ankathete (von  $\alpha$ )

$b$  : Gegenkathete (von  $\alpha$ )

$c$  : Hypotenuse

Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

Innenwinkel:  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

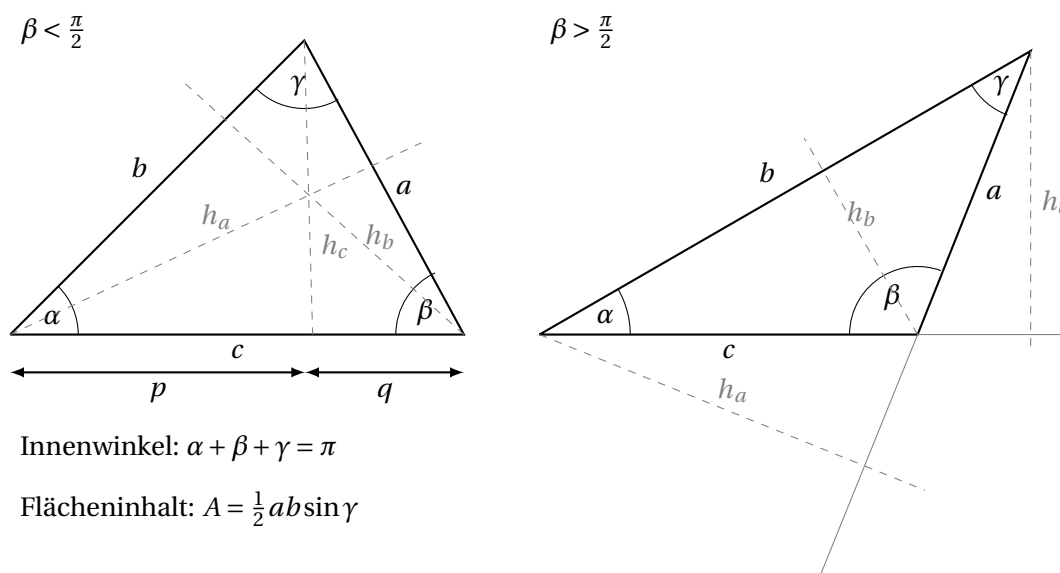
Wir können nun die Winkelfunktionen definieren als

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a}. \quad (7.17)$$

Setzen wir  $c = 1$  so erhalten wir wieder die Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ergibt sich zu  $A = \frac{1}{2}ab$ .

### Schiefwinkliges Dreieck

Für ein allgemeines, schiefwinkliges Dreieck können wir o. B. d. A. für  $\alpha < \frac{\pi}{2}, \gamma < \frac{\pi}{2}$  zwei Fälle unterscheiden:



**Abb. 8:** Geometrie eines allgemeinen schiefwinkligen Dreiecks für die beiden Fälle  $\beta < \frac{\pi}{2}$  und  $\beta > \frac{\pi}{2}$ . Die Höhen der einzelnen Seiten sind jeweils auch grau gestrichelt eingezeichnet.

In beiden Varianten lässt sich folgendes ablesen:

$$\left. \begin{aligned} h_a &= c \sin(\beta) = b \sin(\gamma) \\ h_b &= c \sin(\alpha) = a \sin(\gamma) \\ h_c &= a \sin(\beta) = b \sin(\alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}. \quad (7.18)$$

Dieses Ergebnis wird *Sinussatz* genannt. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich also zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

### Kosinussatz

Wir wollen uns nun noch einmal o. B. d. A. mit dem Fall  $\beta < \frac{\pi}{2}$  beschäftigen und das Dreieck (siehe Abb. ?? links) entlang der Höhe  $h_c$  in zwei Teildreiecke aufteilen. Dann gilt nach Pythagoras

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + q^2 \\ b^2 &= h_c^2 + p^2 \end{aligned} \right\} \quad a^2 = (b^2 - p^2) + q^2 \stackrel{q=c-p}{=} b^2 + c^2 - 2cp. \quad (7.19)$$

Nutzen wir außerdem noch  $p = b \cos(\alpha)$ , so folgt daraus

Kosinussatz
$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (7.20)$

Die anderen Gleichungen erhalten wir durch zyklische Vertauschung der Variablen  $a, b, c$  und  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Formulieren wir den Kosinussatz noch einmal in Worten: Das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, verringert um das doppelte Produkt dieser beiden Seiten mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Wir wollen abschließend noch anmerken, dass der Kosinussatz ebenfalls auch für den Fall  $\beta > \frac{\pi}{2}$  gilt. Er stellt eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für allgemeine Dreiecke dar.

**Beispiel: Heron'sche Inhaltsformel (Heron von Alexandria)**

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks angeben, welches nur durch seine Seitenlängen bestimmt ist. Beginnen wir beim Kosinussatz und formen dies etwas um, so folgt

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \Leftrightarrow 1 + \cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \stackrel{(1.6)}{=} \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \\ 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.\end{aligned}\quad (7.21)$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus den Formeln für die Doppelwinkelfunktionen (7.15). Führen wir nun die Variable

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (7.22)$$

als halben Umfang des Dreiecks ein, so erhalten wir mit

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}, \quad s-b = \frac{a+c-b}{2}, \quad s-c = \frac{a+b-c}{2} \quad (7.23)$$

durch zyklisches Durchtauschen folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{2s(s-a)}{2bc} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s(s-a)}{bc} \\ &\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{s(s-b)}{ac} \\ &\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{s(s-c)}{ab}.\end{aligned}\quad (7.24)$$

Auf dem selben Weg folgen aus der Relation

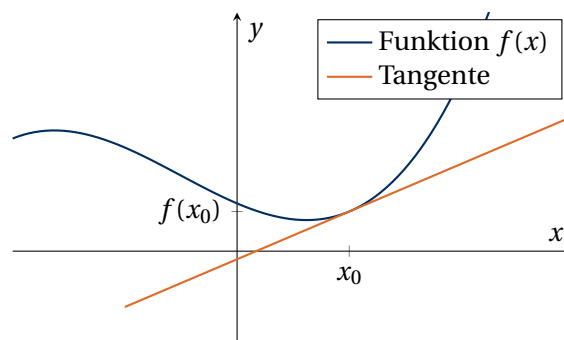
$$\begin{aligned}1 - \cos(\alpha) &= \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc} \\ \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}, \quad \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{(s-a)(s-c)}{ac}, \quad \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}.\end{aligned}\quad (7.25)$$

Damit ergibt sich insgesamt für den Flächeninhalt des Dreiecks

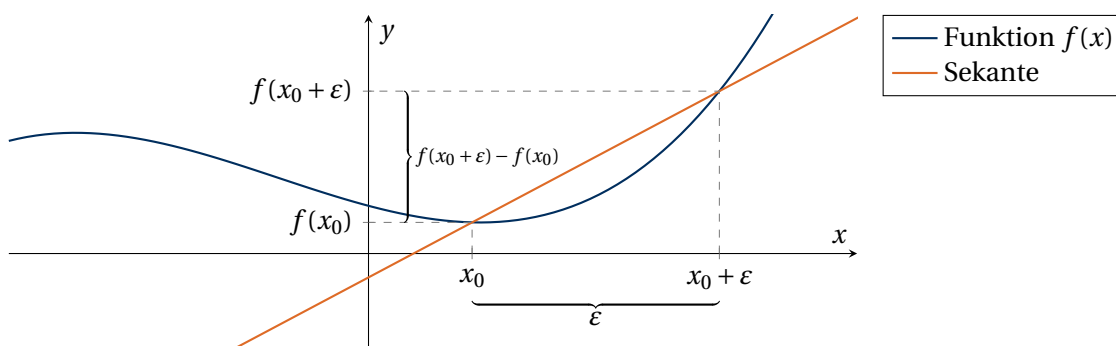
$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) \stackrel{(7.14)}{=} ab\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cancel{ab}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{\cancel{ab}}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{\cancel{ab}}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{aligned}\quad (7.26)$$

## 8 Grundlagen der Differentialrechnung (Ableiten)

Wir möchten in diesem Kapitel die Frage stellen, wie man den Anstieg einer beliebigen Funktion  $f(x)$  an einem Punkt  $x = x_0$  bestimmen kann. Dabei meinen wir den Anstieg der Geraden, die am Punkt  $x_0$  als Tangente angelegt wird. Da das in jedem beliebigen Punkt  $x = x_0$  möglich ist, ist der Anstieg selbst wieder eine Funktion von  $x$  die wir Ableitung  $f'(x)$  nennen wollen.



### Konstruktion der Ableitung



**Abb. 9:** Für die Konstruktion der Ableitung am Punkt  $x_0$  legen wir zunächst eine Sekante des Graphen durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  und einen Punkt  $(x_0 + \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon))$  und bilden anschließend den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Wir definieren die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}. \quad (8.1)$$

Wir können die erhaltene Ableitungsfunktion erneut ableiten und erhalten damit die zweite Ableitung. Für Ableitungen  $n$ -ter Ordnung schreiben wir schließlich

$$\begin{aligned} \text{1. Ableitung:} \quad & f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \equiv \left( \frac{df}{dx} \right) (x) \\ \text{2. Ableitung:} \quad & f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \text{n. Ableitung:} \quad & f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ableitungen spezieller Funktionen sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) = a = \text{const.} & \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(a) = 0, \\ f(x) = x & \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon) - x}{\varepsilon} = 1. \end{aligned} \quad (8.3)$$

## 8.1 Allgemeine Eigenschaften

Der Operator  $\frac{d}{dx}$  weist bestimmte Eigenschaften auf, die wir als Ableitungsregeln bezeichnen:

- Linearität: ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx} \quad (8.4)$$

- Produktregel (Leibniz-Regel):

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}. \quad (8.5)$$

- Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \underbrace{\left(\frac{df}{dg}\right)(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \overbrace{\frac{dg}{dx}}^{\text{innere Ableitung}}. \quad (8.6)$$

- Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x)^2} \left( \frac{df}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg}{dx} \right). \quad (8.7)$$

- Potenzregel:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \text{insbesondere: } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}. \quad (8.8)$$

Wenden wir einige dieser Regeln mal an einem praktischen Beispiel an:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot g(x) + 7h(y(x)) + \frac{x^2}{j(x)} \quad \text{mit } y(x) = ax + b \\ \frac{df}{dx} &= \underbrace{\frac{dx}{dx} \cdot g(x) + x \cdot \frac{dg}{dx}}_{\text{Produktregel}} + \underbrace{7 \left( \frac{dh}{dy} \right)(y) \cdot \frac{dy}{dx}}_{\text{Kettenregel}} + \underbrace{\frac{2xj(x) - x^2 \frac{dj}{dx}}{j(x)^2}}_{\text{Quotientenregel}} \\ &= g(x) + x \cdot \frac{dg}{dx} + 7a \left( \frac{dh}{dy} \right)(y) + \frac{2xj(x) - x^2 \frac{dj}{dx}}{j(x)^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Wichtig ist es, bei der Kettenregel nach der richtigen Variable abzuleiten, d. h. wir müssen  $h(y)$  nach dem Argument  $y = ax + b$  ableiten und nicht nach  $x$ .

## 8.2 Ableitungen spezieller Funktionen

Wir wollen im Folgenden eine Liste von häufig verwendeten Funktionen und deren Ableitungen angeben.

**Tabelle 4**

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$nx^n$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$