AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Vorbereitung der Übung: Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Aufgabe 1: *Bruchrechnung* Ziel: (a) bis (f)

(a) $$\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = \underline{\underline{b-a}}$$

(b) $$\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a + \cancel{b} + a - \cancel{b}}{\cancel{a} + b - \cancel{a} + b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

(c) $$\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}\left(\frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2 - y^2}{x+y}\right) = \frac{x-y}{\cancel{x}}\underbrace{\left(\frac{x+y}{y} - 1\right)}_{\frac{\cancel{x}}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

(d) $$\frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

(e) $$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

(f) $\frac{a^2-1}{a^2+a} - \cancel{a}\frac{a+1}{a^{\cancel{3}2} - \cancel{a}} + \frac{1}{a} + \frac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$

$= \frac{1}{a}\frac{\cancel{(a+1)}(a-\cancel{1})}{\cancel{a+1}} - \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)} + \cancel{\frac{1}{a}} + \frac{\cancel{4a+4}}{\cancel{4(a+1)}(a-1)} = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \underline{\underline{1}}$

(g) $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\frac{\sqrt{2}}{ax} - \frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]$ für $x = \frac{1}{a-1}$

$$= \frac{a+x+1}{a+x-1}\left[\frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2}\right] = \frac{a+x+1}{\cancel{a+x-1}}\,\frac{\overbrace{(a+x)^2-1}^{(a+x+1)\cancel{(a+x-1)}}}{\sqrt{2}a^2x^2} = \underbrace{\frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2}}_{x+a+1=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}}$$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze* Ziel: (a) bis (c)

(a) $\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n = \frac{(a+b)^n\cancel{(a-b)^n}}{\cancel{(x+y)^n}(x-y)^n}\,\frac{\cancel{(x+y)^n}}{\cancel{(a-b)^n}} = \underline{\underline{\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n}}$

(b) $\frac{b^x c^y (ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0{,}5}\right)^z\right]^2} = a^{2z+y-(y-x+2z)}\,b^{x+2z+y-x-2z}\,c^{y-x-(y-x-z)} = \underline{\underline{a^x b^y c^z}}$

(c) $\frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$
$= a^{1-n+4n-3+4-3n}\,b^{-1-2n+5+3n-6}(a+b)^{3n-4+3-2n-n+2}$
$= \underline{\underline{a^2b^{n-2}(a+b)}}$

(d) $\left(a^{n+2}-a^n\right):(a^3+a^2) = \frac{a^n}{a^2}\,\frac{a^2-1}{a+1} = \underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}}$

(e) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^3 = a^{-8-6}b^{-10-9}x^{2+3}y^{-6-6} = \underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}}}$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken* Ziel: (a) bis (b)

Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} = \sqrt[pq]{a^{mq-np}}$$

Beispiel für "Rationalmachen des Nenners":

$$r + \sqrt{1+r^2} - \frac{1}{r+\sqrt{1+r^2}} = r + \cancel{1+r^2} - \frac{r-\sqrt{1+r^2}}{-1} = \underline{\underline{2r}}.$$

(a) $$\sqrt[6]{a^3}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab} = \frac{1-\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{ab}}{1-ab} = \frac{(1-\sqrt{ab})^2 + 2\sqrt{ab}}{1-ab} = \underline{\underline{\frac{1+ab}{1-ab}}}$$

(b) $$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}} \quad \text{für } x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \quad \text{mit } |m| < 1$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}\right)^2}{2bx} = \frac{\cancel{2}a + \cancel{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}}{\cancel{2}bx} = \frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4a^2m^2}{(1+m^2)^2}}}{2am}(1+m^2)$$

$$= \frac{1+m^2+\sqrt{(1+m^2)^2-4m^2}}{2m} = \frac{1+m^2+1-m^2}{2m} = \underline{\underline{\frac{1}{m}}}$$

(c) $$\left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{a\sqrt{b} + \cancel{b\sqrt{a}} - \cancel{\sqrt{a}b}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\,\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt[4]{b}\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}$$

$$= \underline{\underline{a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}}$$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

(a) $(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$

$$\cancel{(m^2-n^2)x^2}+(bn-an+bm-am)x=\cancel{x^2(m^2-n^2)}-1$$

$$(a-b)(m+n)x=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{(a-b)(m+n)}$$

(b)
$$\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2} \quad \Big| \cdot b(a^2-b^2)$$

$$(ax+b)(a+b)-(a-bx)(a-b)=2b(ax+b)$$

$$(ax+b)\cancel{(a-b)}-(a-bx)\cancel{a-b}=0 \quad (a\neq b)$$

$$(a+b)x=a-b \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{a-b}{a+b}$$

(c)
$$\frac{x-1}{n-1}+\underbrace{\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}}_{n^4-1=(n^2+1)(n+1)(n-1)}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n} \quad \Big| \cdot (n-1)(n+1)$$

$$\left(\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)\right)x=\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)$$

$$4x=3 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{3}{4}.$$

(d) $a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$

$$\cancel{a-b-1}\sqrt{x}=a^2-b^2-(a+b)=(a+b)\cancel{(a-b-1)} \qquad \Rightarrow \qquad x=(a+b)^2$$

(e)
$$\frac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\frac{y^2}{1-2y}}, \quad \text{siehe 1b) mit } a=x, b=\sqrt{1-4y^2}$$

$$\frac{x}{\cancel{\sqrt{1-4y^2}}}=\frac{|y+1|}{\cancel{\sqrt{1+2y}}}\frac{|y-1|}{\cancel{\sqrt{1-2y}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=y^2-1 & \text{für } |y|\geq 1 \\ x=1-y^2 & \text{für } |y|<1. \end{cases}$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Tafelbeispiel: $\dfrac{10(x+y)+3}{x-2y+4} = 1, \quad \dfrac{36x-3y}{7(x-y)+3} = 3$

1. Sortieren nach x und y

$$\begin{aligned} 9x + 12y &= 1 \quad (1) \\ 15x + 18y &= 9 \quad (2) \end{aligned}$$

2. Prüfe auf lineare Unabhängigkeit, d. h. Berechne $a_1 b_2 - a_2 b_1$ (Determinante, vgl. Vorlesung):

$9 \cdot 18 - 15 \cdot 12 = 162 - 180 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ genau ein Lösungspaar (x, y)

3. Lösen, bspw. durch geschickte Linearkombination (Elimination von y)

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2) - 3 \cdot (1): \quad 3x &= \quad 15 \quad \Rightarrow x = 5 \\ \text{in} \quad (1): \quad 12y &= -44 \quad \Rightarrow y = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $\mathbb{L} = \underline{\underline{\left\{ \left(5; -\frac{11}{3} \right) \right\}}}$

Aufgabe 1: *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten* Ziel (a) bis (d)

(a) $$\begin{aligned} 33x + 12y &= 25 \quad (1) \\ 11x - 3y &= 6 \quad (2) \end{aligned}$$

$(1) - 3 \cdot (2): \quad 21y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}, \quad$ in (2): $\quad x = \frac{7}{11} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{7}{11}; \frac{1}{3} \right) \right\}}}$

(b) $$\left. \begin{aligned} \frac{2x+3y}{3x-y} &= \frac{17}{9} \\ \frac{3x+4y}{6x-1} &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \quad (1) \\ 9x - 4y &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$(1) - (2): \quad 6x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

$3 \cdot (1) - (2): \quad 8y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right) \right\}}}$

(c) $\left.\begin{aligned} \frac{x+2}{y+3} &= \frac{1}{3} \\ \frac{y+3}{2y-5x} &= \frac{3}{5} \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} 3x - y &= -3 \quad (1) \\ 15x - y &= -15 \quad (2) \end{aligned}$

$(1)-(2): \quad -12x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$\text{in } (1): \qquad y = 0 \qquad \implies \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-1;0)\}}}$

(d) $ax + by = 2a \quad (1)$

$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{2}{a} \quad (2)$

$(1) - ab \cdot (2): \; \cancel{2}by = \cancel{2}(a-b) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{b} - 1$

$\text{in } (1): \quad ax + \cancel{a} - b = \cancel{2}a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{a} + 1 \qquad \implies \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{b}{a}+1; \frac{a}{b}-1\right)\right\}}}$

(e) $x + 14y = \frac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} \qquad (1)$

$3\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (2)$

$(1) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot (2): \quad \cancel{\left(14 + \frac{1}{3\sqrt{6}}\right)} y = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 7\sqrt{2} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{3\sqrt{12}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{\left(14 + \frac{1}{3\sqrt{6}}\right)} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{in } (1): \quad x - \cancel{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{7\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \implies \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}}$

(f) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a + b \quad (1)$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2b \qquad (2)$

$(a+b) \cdot (1) - a \cdot (2): \quad \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a}{b}\right) y = a^2 + b^2$

$\cancel{\left(ab + b^2 + a^2 - ab\right)} y = b(a-b)(a^2+b^2)$

$\Rightarrow y = b(a-b)$

$\text{in } (1): \quad \frac{x}{a+b} + \cancel{b} = a + \cancel{b} \qquad \Rightarrow x = a(a+b) \quad \implies \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a(a+b); b(a-b))\}}}$

(g) $39x - 38y = 1 \quad (1)$

$91x - 57y = 4 \quad (2)$

$2 \cdot (2) - 3 \cdot (1): \quad (182 - 117)x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{13}$

$\text{in } (1): \quad 38y = 2 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{19} \qquad \implies \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{13}; \frac{1}{19}\right)\right\}}}$

Aufgabe 2: *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten* Ziel: (a) und (b)

Tafelbeispiel:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=9 \quad (1)\\ x+2y+4z&=15 \quad (2)\\ x+3x+9z&=23 \quad (3)\end{aligned}$$

Vorgehen: Wir wollen eine Linearkombination der drei Gleichungen finden, sodass (bspw.) x und y verschwinden; d. h. in $a\cdot(1)+b\cdot(2)+c\cdot(3)$ soll $a+b+c=0$ sein und $a+2b+3c=0$. Wir haben offenbar die Freiheit, $a=1$ zu wählen, also $b=-2$ und $c=1$.

$$\begin{aligned} &(1)-2\cdot(2)+(3): \quad 2z=2 \quad \Rightarrow \quad z=1\\ &\text{in }(1): \quad x+\ \ y=8 \quad (4)\\ &\text{in }(2): \quad x+2y=11 \quad (5)\end{aligned}$$

Die Gleichungen (4),(5) können nun mit den früheren Methoden gelöst werden.
Optionale Kreativlösung: Angenommen $x,y\in\mathbb{N}$. Nach (5) muss x ungerade sein, damit nach (4) auch y. Die einzigen positiven Zerlegungen der Zahl 8 in zwei ungerade Zahlen sind (1,7) und (3,5). Nur letztere löst (4) und (5). Wir erhalten $\underline{\underline{\mathbb{L}=\{(5;3;1)\}}}$.

Lösung:

(a)
$$\begin{aligned} x-\ \ y+5z&=5 \quad (1)\\ 3x+7y-5z&=5 \quad (2)\\ x+\ \ y-\ \ z&=1 \quad (3)\end{aligned}$$
$$2\cdot(1)+(2)-5\cdot(3): \quad 10z=10 \quad \Rightarrow \quad z=1$$
$$\left.\begin{aligned} &\text{in }(1): \quad x-y=0\\ &\text{in }(3): \quad x+y=2\end{aligned}\right\} \quad x=y=1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(1;1;1)\}}}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x-4y+3z&=\ \ 4 \quad (1)\\ -x+\ \ y-\ \ z&=-2 \quad (2)\\ 7x+4y-5z&=\ \ 0 \quad (3)\end{aligned}$$
$$(1)+8\cdot(2)-(3): \quad -12x=-12 \quad \Rightarrow \quad x=1$$
$$\left.\begin{aligned} &\text{in }(1): \quad -4y+3z=\ \ 1\\ &\text{in }(2): \quad \quad\ \ y-z=-1\end{aligned}\right\} \quad y=2,z=3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(1;2;3)\}}}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+y&=b+a \quad (1)\\ x+z&=a+c \quad (2)\\ y+z&=c+b \quad (3)\end{aligned}$$
Lösung durch Draufschauen.
$$\begin{aligned} &(1)+(2)-(3): \quad 2x=2a\\ &(1)-(2)+(3): \quad 2y=2b\\ &(2)+(3)-(1): \quad 2z=2c \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(a;b;c)\}}}\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 6x-4y+8z&=0 \quad (1)\\ -2x+y-z&=0 \quad (2)\\ 12x-7y+11z&=0 \quad (3)\end{aligned}$$ Da $(1)-3\cdot(2)=(3)$, ist das System unterbestimmt.

$(1)+3\cdot(2): \quad -y+5z=0 \quad \Rightarrow y=5z$

$(1)+4\cdot(2): \quad -2x+4z=0 \quad \Rightarrow x=2z \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(2z;5z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}}}$

Aufgabe 3: *Parametrisierung von Lösungsmengen*

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x-7y=1$ an für

(a) $x,y\in\mathbb{R}$;

(b) $x,y\in\mathbb{N}$.

(a) Für $x,y\in\mathbb{R}$ ist nichts zu beachten. Wir Lösen die Gleichung nach x auf und erhalten

$$x=\frac{1+7y}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1+7\lambda}{13};\lambda\right)\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}}}.$$

(b) Für $x,y\in\mathbb{N}$ muss $1+7n, n\in\mathbb{N}$, ein Vielfaches von 13 sein. Die kleinste natürliche Zahl, für die das gilt, ist $n=11$ (ausprobieren), d. h. alle übrigen Teiler liegen in 13er-Schritten darüber.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n+1$	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
13-Reihe	13	26	39	52	65	78					

Setzen wir also $\lambda=11+13n$ in $\mathbb{L}$ von oben ein, ergibt sich $\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{(6+7n;11+13n)\mid n\in\mathbb{N}_0\right\}}}$.

Aufgabe 4: *Gleichungssysteme* Ziel (a) und (b)

Tafelbeispiel: In dieser Aufgabe werden nicht linear aussehende Gleichungen auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt.

$$\begin{aligned} (1-x)^2&=5y^2-4(x-2)^2 \quad (1)\\ 2(x^2-y^2)&=6x-5 \quad (2).\end{aligned}$$

Sortieren wir das Gleichungssystem um, ergibt sich

$$\begin{aligned} 5(x^2-y^2)-18x+17&=0 \quad (3)\\ 2(x^2-y^2)-6x+5&=0 \quad (4)\end{aligned}$$

$(3)-\frac{5}{2}\cdot(2): \quad -3x+\frac{9}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$

in $(2): \quad y^2=x^2-3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{4} \qquad y=\pm\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\right)\right\}}}.$

Lösung:

(a) $x^2+y^2=2(xy+2)\quad(1)\quad\Rightarrow\quad(x-y)^2=4\Rightarrow x-y=\pm 2\quad(1a)$

$x\ +y\ =6\qquad\qquad(2)$

$$(1a)+(2):\quad 2x=\begin{cases}8, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases}$$

$$\text{in }(2):\quad y=\begin{cases}2, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{(4;2),(2;4)\right\}}}$$

(b) $$\frac{12}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5\quad(1)$$

$$\frac{8}{\sqrt{x-1}}+\frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6\quad(2)$$

$$2\cdot(1)-(2):\quad 16=4\sqrt{x-1}\quad\Rightarrow\quad x=17$$

$$2\cdot(1)-3\cdot(2):\quad 20=8\sqrt{y+\frac{1}{4}}\quad\Rightarrow\quad y=6\quad\Longrightarrow\quad\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{(17;6)\right\}}}$$

Optionaler Hinweis: nicht immer muss alles mühsam quadriert und aufgelöst werden, sondern man kann auch versuchen draufzuschauen.

- Was ergibt 8 multipliziert mit 20? Antwort: $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
- Die Wurzel woraus ist $\frac{5}{2}$? Antwort: $\frac{25}{4}$.
- Damit ist $y=\dfrac{25}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{24}{4}=6$.

(c) $$\frac{x^2-y^2}{2x+3}+y^2=(x+y)x-xy\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2-y^2}{2x+3}=x^2-y^2\quad(1)$$

$y-2x=3\quad(2)$

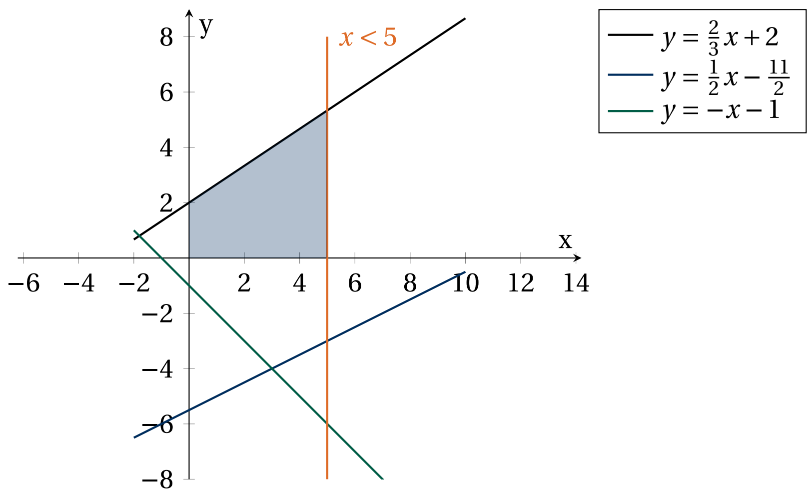
$$\text{Fall } x^2\neq y^2\quad\left.\begin{array}{ll}(1):1=2x+3 & \Rightarrow x=-1\\ \text{in }(2): \quad y=1 & \end{array}\right\}\text{ Widerspruch}$$

$$\text{Fall } x=\pm y\quad(2):\quad y=\begin{cases}-3, & \text{oberes VZ}\\ 1, & \text{unteres VZ}\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{(-3;-3),(-1;1)\right\}}}$$

Aufgabe 5: *Ungleichungssysteme*

(a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x-3y &\geq -6\,, \\ x-2y &< 11\,, \\ x &> -y-1\,, \\ x &< 5\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

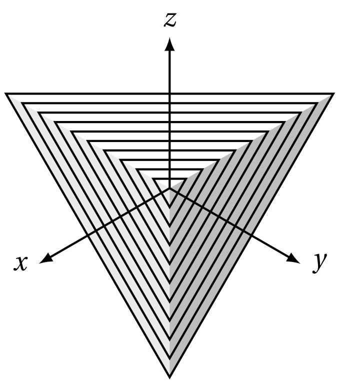


Offenbar können die zweite und dritte Gleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am schraffierten Gebiet ändert.

(b) * Welches Gebiet im ersten Oktanden ($x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x+y &\geq z\,, \\ x+z &\geq y\,, \\ y+z &\geq x \end{aligned}$$

Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige (unendlich große) Pyramide, deren Spitze auf dem Koordinatenursprung liegt und deren Kanten jeweils die $x-y-$, $x-z-$ und $x-z$-Ebene halbieren.



Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Quadratische Gleichungen* Ziel: (a) und (b)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der pq-Formel.

Tafelbeispiel: Ziel ist es, die Ausdrücke in die Form $(x+a)^2$ oder $(ax+b)^2$ zu bekommen.

1. $3x^2+18x+15=0, \quad \Rightarrow \quad x^2+6x+5=0,$

   vgl. mit $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2 \quad \Rightarrow 2a \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow a=3, \Rightarrow a^2=9.$

   $\Rightarrow \underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}-4=0 \quad \stackrel{\text{Wurzel}}{\Longrightarrow} \pm(x+3)=2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=-1, x_2=-5}}$

2. $16x^2-56x-15=0,$

   vgl. mit $(ax+b)^2 = a^2x^2+2abx+b^2 \quad \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4, \Rightarrow a^2=9.$

   $2ab=-56 \quad \Rightarrow \quad b=-7 \Rightarrow b^2=49$

   $\underbrace{16x^2-56x+49}_{(4x-7)^2}-64=0 \quad \Rightarrow \quad \pm(4x-7)=8 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{15}{4}, x_2=-\frac{1}{4}}}$

Lösung:

(a) $x^2-10x+9=0 \quad |+16$

$$(x-5)=16 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_1=9, x_2=1}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=5\pm\sqrt{25-9}=\begin{cases}9\\1\end{cases}$$

(b) $x^2+x-12=0 \quad |+\frac{49}{4}$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_1=3, x_2=-4}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$$

Es ist immer am Vorfaktor von x abzulesen, welches a in $(x\pm a)^2$ steckt; hier offenbar $n=1/2$, wir erzeugen also $1/4$ auf der linken Seite.

(c) $x^2-\sqrt{8}x+1=0 \quad |+1 \quad (\sqrt{8}=2\sqrt{2})$

$$(x-\sqrt{2})^2=1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2}=\pm1+\sqrt{2}}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}=\sqrt{2}\pm1.$$

Aufgabe 2: *Wurzeln quadratischer Gleichungen*

Tafelbeispiel:

1. Wiederholung Vieta'scher Wurzelsatz:
   Habe die Gleichung $x^2+px+q=0$ die Wurzeln x_1 und x_2, dann lautet die Linearfaktorzerlegung

   $$(x-x_1)(x-x_2)=x^2\underbrace{-(x_1+x_2)}_{p}+\underbrace{x_1x_2}_{q}$$

2. Wann sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung identisch?

   $$x_1=x_2=a \quad \overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad p=-(a+a)=2a, \quad q=a^2$$

   Die Gleichung muss von der Form $0=x^2-2ax+a^2$ sein (vgl. 2. binomische Formel).

3. Von welcher Form ist eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln den Quotienten a und die Differenz b haben?

   $$\frac{x_1}{x_2}=a, \quad x_1-x_2=b \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{ab}{a-1}, \quad x_2=\frac{b}{a-1}$$
   $$\overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad p=-\frac{(a+1)b}{a-1} \quad , \quad q=\frac{ab^2}{(a-1)^2}$$
   $$\Longrightarrow 0=x^2-\frac{(a+1)b}{a-1}x+\frac{ab^2}{(a-1)^2}$$

Lösung:

(a) *Stellen Sie $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ist.*

Vieta: $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=x_1x_2 \quad (1), \qquad \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=x_1+x_2 \quad (2)$

1) Variante 1: raten und konstruieren
   Gleichung (2) legt nahe, dass $x_1=a/b$, $x_2=b/a$, jedoch gilt dann $x_1x_2=1$. Welche ist die einfachste Modifikation dieser Idee, die immer noch (2) erfüllt?

   $$x_1=\frac{a}{b}+n, \quad x_2=\frac{b}{a}-n$$
   $$\Rightarrow x_1x_2=1+n\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)-n^2\overset{!}{=}\frac{a}{b}-\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad n=-1$$
   $$\Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{a}{b}-1, \quad x_2=\frac{b}{a}+1}}$$

   Da es sich bei $x_{1/2}$ um die Wurzeln einer qudratischen Gleichung handelt, ist die Lösung - bis auf Numerierung - eindeutig.

2) Variante 2: Lösen der qudratischen Gleichung. Nach Vieta folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x+\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\\
\Rightarrow x_{1/2} &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}-\frac{a^2-b^2}{ab}}\\
&= \frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4+b^4+2a^2b^2-4a^3b+4ab^3}}{2ab}
\end{aligned}
$$

Versuche den Wurzelterm zu faktorisieren:

$$
\begin{aligned}
(a^2\pm b^2\pm 2ab)^2 &= (a^2\pm b^2)^2+4a^2b^2\pm 4ab(a^2+b^2)\\
&= a^4+b^4+4a^2b^2\pm 2a^2b^2\pm 4a^3b+(\pm 1\cdot\pm 1)4ab^3.
\end{aligned}
$$

Wir sollten also zweimal das untere Vorzeichen wählen, dann folgt:

$$
x_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm(a^2-b^2-2ab)}{2ab}=\begin{cases}\dfrac{a}{b}-1\\[1ex]\dfrac{b}{a}+1\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{a}{b}-1,\quad x_2=\frac{b}{a}+1}}
$$

(b) *Bestimmen Sie in der Gleichung* $5x^2-kx+1=0$ *den Koeffizienten* k *so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.*
Wir berechnen die Wurzeln mit der pq-Formel

$$
x^2-\frac{k}{5}x+\frac{1}{5}=0\quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\frac{k}{10}\pm\sqrt{\frac{k^2}{100}-\frac{1}{5}}
$$

$$
\Rightarrow x_1-x_2=2\sqrt{\frac{k^2-20}{100}}\stackrel{!}{=}1\quad\Rightarrow\quad\frac{k^2-20}{100}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow k^2=45\Rightarrow \underline{\underline{k=\pm 3\sqrt{5}}}.
$$

(c) *Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung* $x^2+px+q=0$ *so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich* p *und* q *sind.*
Mit Satz von Vieta folgt

$$
p=-(x_1+x_2)\stackrel{!}{=}-(p+q)\quad\Rightarrow\quad 2p+q=0(*)
$$

$$
q=x_1x_2\stackrel{!}{=}pq,\quad \text{Fallunterscheidung}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}\text{Fall } q=0: & p=0\quad\text{aus (*)}\\ \text{Fall } q\neq 0: & p=1\stackrel{(*)}{\Rightarrow} q=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{\{(p;q)\}=\{(0;0),(1;-2)\}}}
$$

(d) *Gegeben ist die quadratische Gleichung* $ax^2+bx+c=0$. *Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich*

- *dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.*

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x_1' = 2x_1, x_2' = 2x_2 \text{ folgt } \quad \frac{2b}{a} = -(x_1' + x_2') = p'$$
$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x_1' = 2x_1, x_2' = 2x_2 \text{ folgt } \quad \frac{4c}{a} = x_1' x_2' = q'$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{ax^2 + 2bx + 4c = 0}}$$

- *den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.*

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x_1' = \frac{1}{x_1}, x_2' = \frac{1}{x_2} \text{ folgt } \quad \frac{b}{a} = -\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2}'\right) = -\frac{x_1' + x_2'}{x_1' x_2'} = \frac{p'}{q'}$$
$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x_1' = \frac{1}{x_1}, x_2' = \frac{1}{x_2} \text{ folgt } \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{x_1' x_2'} = \frac{1}{q'}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{cx^2 + bx + a = 0}}$$

Aufgabe 3: *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y.

Tafelbeispiel:

1. Lösung mit $p - q$-Formel:

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 = 5(y-1) \qquad (2)$$
$$(1) - (2): \quad y^2 = \frac{1}{2}(7 - 5y) \quad \Rightarrow \quad 0 = y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow \quad y_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{7}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -7/2 \end{cases}$$

Fall $y = 1: \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Fall $y = -\frac{7}{2}: \quad x^2 = -\frac{41}{4}$ keine (reelle) Lösung $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;1), (-1;1)\}}}$

2. Lösung mit Satz von Vieta:

$$\begin{matrix} x + y + y^2 = 3 \\ y^2(x+y) = -54 \end{matrix} \quad \text{mit } u \equiv x + y, v \equiv y^2 \text{ folgt } \quad \begin{matrix} u + v = 3 \\ uv = -54 \end{matrix}$$

Vieta: u, v sind Wurzeln der Gleichung $0 = z^2 - 3z - 54$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 54} = \frac{3}{2} \pm \frac{15}{2} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

Fall: $v = 9, u = -6: \quad y = \pm 3, \quad x = -6 - y = \begin{cases} -9, & y = 3 \\ -3, & y = -3 \end{cases}$

Fall: $u = 9, v = -6: \quad y^2 = -6 \quad \Rightarrow$ keine (reelle) Lösung.

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-9;3), (-3,3)\}}}$.

Lösung:

(a)
$$\begin{aligned} x+y^2 &= 7 \\ xy^2 &= 12 \end{aligned} \quad \text{mit } u \equiv x, v \equiv y^2 \text{ folgt} \quad \left.\begin{aligned} u+v &= 7 \\ uv &= 12 \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{\text{Vieta:}}{\Longrightarrow} \quad z^2-7z+12=0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}-12} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Fall 1: } x=4, y=\pm\sqrt{3} \\ &\text{Fall 2: } x=3, y=\pm 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(4;\pm\sqrt{3}),(3;\pm 2)\}}}$$

(b)
$$\begin{aligned} x+xy+y &= 11 \quad (1) \\ x^2y+xy^2 &= 30 \quad (2) \end{aligned} \quad \text{mit } u \equiv xy, v \equiv x+y \quad \begin{aligned} u+v &= 11 \\ u\cdot v &= 30 \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad z^2-11z+30=0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}-30} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$$

$$\text{Fall 1: } \left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x+y &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta} \quad q^2-5q+6=0 \quad \Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-6} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{x=3, y=2}$ oder $\underline{x=2, y=3}$

$$\text{Fall 2: } \left.\begin{aligned} xy &= 5 \\ x+y &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta} \quad q^2-6q+5=0 \quad \Rightarrow \quad q_{1/2} = 3 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{x=5, y=1}$ oder $\underline{x=1, y=5}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(3;2),(2;3),(5;1),(1;5)\}}}$

Man beachte, wie die Symmetrie der Gleichungen unter Vertauschung $x \leftrightarrow y$ und $xy \leftrightarrow x+y$ in der Lösungsmenge wiederzufinden ist.

(c)
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{5}{2}xy \quad (1) \\ x-y &= \frac{1}{4}xy \quad (2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} (x-y)^2 &= \frac{xy}{2} \\ (x-y)^2 &= \frac{x^2y^2}{16} \end{aligned}\right\} \quad 8xy = (xy)^2$$

$$\text{Fall 1: } \left.\begin{aligned} x=0 &\overset{(1)}{\Rightarrow} y=0 \\ \text{oder } y=0 &\overset{(2)}{\Rightarrow} x=0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{x=0, y=0}$$

Fall 2: $\quad x \neq 0 \quad$ und $\quad y \neq 0: \quad 8 = xy$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in (1):} \quad x^2+y^2 = 20 \\ &\text{in (2):} \quad x-y = 2 \end{aligned}\right\} \quad 2x^2-4x = 16$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \quad , \quad y = x-2 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(0;0),(4;2),(-2;4)\}}}$

Da das Quadrieren von Gleichung (2) keine Äquivalenzumformung darstellte, müssen alle Lösungspaare noch durch Probe bestätigt werden.
Beachte außerdem die Aussagenlogik bei der Fallunterscheidung: Das Komplement zu "$x \neq 0$ und $y \neq 0$" ist "$x = 0$ oder $y = 0$"; dass dennoch beide gleichzeitig Null sind, folgt erst einen Schritt später.

Aufgabe 4: *Wurzelgleichungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x.

Tafelbeispiel:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-4} &= 1 \\
\sqrt{3x-5} &= 1-\sqrt{2x-4} \quad |^2 \\
3x-5 &= 1+2x-4-2\sqrt{2x-4} \quad \text{, Wurzel isolieren} \\
\Rightarrow 2\sqrt{2x-4} &= 2-x \quad |^2 \\
4(2x-4) = x^2-4x+4 \quad &\Longrightarrow \quad 0 = x^2-12x+20 \quad , \quad x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36-20} = \begin{cases} 10 \\ 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Da Quadrieren *keine Äquivalenzumformung* ist, können zusätzliche Lösungen entstehen und es muss die Probe gemacht werden!

Probe: $x = 10: \quad \sqrt{25}+\sqrt{16} = 9 \neq 1$ *keine Lösung*

$x = 2: \quad \sqrt{1}+\sqrt{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=2}}$

Beachte außerdem, dass Einschränkungen an die in den Gleichungen auftetenden Konstanten vorliegen können. *Lösung:*

(a)
$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} &= 2 \qquad (\text{offenbar } x \geq 1) \\
\sqrt{3x+1} &= 2+\sqrt{x-1} \quad |^2 \\
3x+1 &= 3+4\sqrt{x-1}+x \\
\Rightarrow x-1 &= 2\sqrt{x-1} \quad |^2 \\
(x-1)^2 = 4(x-1) \qquad &\Longrightarrow x = 1 \quad , \quad \overset{x\neq 1}{\Longrightarrow} x = 5
\end{aligned}$$

$$\text{Probe: } \begin{cases} x = 2: \ \sqrt{4}-\sqrt{0} = 2 \\ x = 5: \ \sqrt{16}-\sqrt{4} = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1, x_2 = 5}}.$$

(b)
$$\begin{aligned}
\sqrt{x+a} &= a-\sqrt{x} \quad |^2 \qquad (a = 0 \Rightarrow x = 0) \\
\cancel{x}+\cancel{a} &= a^{\cancel{2}}+\cancel{x}-2\cancel{a}\sqrt{x} \\
2\sqrt{x} = a-1 \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{(a-1)^2}{4}}}
\end{aligned}$$

$$\text{Probe: } \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}+a} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+1+2a} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2} = \frac{|a+1|}{2}$$

$$a-\sqrt{x} = a-\frac{|a-1|}{2} = \begin{cases} \dfrac{a+1}{2}, & a \geq 1 \\ \dfrac{3a-1}{2}, & a < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Bedingung} \quad a \geq 1$$

(c) $$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b \overset{\text{draufschauen}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{x=0}} \quad \text{für} \quad a\geq 0, b\geq 0$$

$$\cancel{a^2}-\cancel{x}=\underbrace{\cancel{a^2}+b^2+2ab}_{(a+b)^2}+b^2-\cancel{x}-2(a+b)\sqrt{b^2-x}$$

$$\cancel{(a+b)}\sqrt{b^2-x}=b\cancel{(a+b)} \quad \Rightarrow x=0.$$

Schon in der Zeile zuvor zeigt sich: Die Gleichung ist linear in x, d. h. die Lösung durch Draufschauen ist tatsächlich die Einzige.

(d) $$\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3 \quad |^2$$

$$\sqrt{3x+4}=8-x \quad |^2$$

$$\Rightarrow 0=x^2-19x+60$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}-60}=\begin{cases}15 & \Rightarrow \text{Probe: falsch}\\ 4 & \Rightarrow \text{Probe: wahr}\end{cases} \qquad \underline{\underline{x=4}}$$

(e) $$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-3/2}=\frac{6}{\sqrt{2x-1}} \qquad (\text{offenbar } x\geq\frac{3}{2})$$

$$\sqrt{2x^2-4x+3/2}=7-2x$$

$$0=2x^2-24x+\frac{95}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=6\pm\sqrt{36-\frac{95}{4}}=\begin{cases}\frac{19}{2} & \Rightarrow \text{Probe: falsch}\\ \frac{5}{2} & \Rightarrow \text{Probe: wahr}\end{cases} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{5}{2}}}.$$

Aufgabe 5: *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.

Tafelbeispiel: Beachte zunächst, dass nicht jedes Polynom als Produkt (reeller) Linearfaktoren geschrieben werden kann, bspw.

$$x^2-3x+6 \quad \text{, da} \quad 0=x^2-3x+6 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}}.$$

Oft lässt sich die Zerlegung durch Vergleich mit

$$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$$

erkennen, bspw. $x^2+13x+12 \Rightarrow m+n=13, mn=12$. Dort erkennen wir schnell $m=1, n=12$ und somit

$$x^2+13x+12=(x+1)(x+12)$$

(a) $x^2+2x-15 \quad \Rightarrow m+n=2 \quad \text{und} \quad m\cdot n=-15$

$\Rightarrow$ klappt für $m=5, n=-3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2+2x-15=(x+5)(x-3)}}.$

(b) $4x^2+8x-5$

Konstruktion: $(ax+m)(bx+n)=abx^2+(an+bm)x+mn$

Wir können nun zwei Zahlen $x_1=an, x_2=bm$ suchen, deren Summe gleich dem linearen Faktor $x_1+x_2=(an+bm)=8$ und deren Produkt gleich $x_1\cdot x_2=(ab)\cdot(mn)=4\cdot(-5)=-20$ entspricht. Wir finden durch ausprobieren $x_1=-2, x_2=10$ und können nun den linearen Term in x aufteilen

$$4x^2-2x+10x-5=2x(2x-1)+5(2x-1)=\underline{\underline{(2x-1)(2x+5)}}.$$

(c)
$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+adx^2+bdx &= x(ax^2+(b+ad)x+bd)=x(\underbrace{ax^2+bx}_{x(ax+b)}+(ax+b)d) \\ &= \underline{\underline{x(ax+b)(x+d)}}. \end{aligned}$$

(d) $(a-x)^2+(x-b)^2-a^2-b^2=2x^2-2ax-2bx=\underline{\underline{2x(x-a-b)}}.$

(e)
$$\begin{aligned} a\sqrt{8}x^2-2kax-3ak+ax\sqrt{18} &= a(\sqrt{x}x^2+\sqrt{18}x-k(2x+3)) \\ &= a(\sqrt{2}x(2x+3)-k(2x+3))=\underline{\underline{a(2x+3)(\sqrt{2}x-k)}}. \end{aligned}$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades
Das Summenzeichen

Aufgabe 1: *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

(a) *Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln a, b und c hat.*

$$f_3(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = \underline{\underline{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc}}$$

Bemerkung: Hier kann man versuchen, sich klarzumachen, wie der verallgemeinerte Satz von Vieta aussieht.

(b) *Zerlegen Sie das Polynom $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$ in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?*

$$f_4(x) = x^3 + \underbrace{2x^4 + 4x^2 + 2}_{2x^4+2x^2+2x^2+2=2x^2(x^2+1)+2(x^2+1)} + x = (x^2+1)(2x^2+2) + \underbrace{x^3 + x}_{x(x^2+1)} = \underline{\underline{(x^2+1)(2x^2+x+2)}}$$

Da weder $x^2+1=0$ noch $x^2+\frac{1}{x}x+1=0$ eine (reelle) Lösung hat, besitzt das Polynom keine (reellen) Nullstellen.

(c) *Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$.* Offensichtlicherweise gilt $x_1 = 0$ und wir können das Polynom mit Division durch x vereinfachen. Mit der Substitution $z \equiv x^2$ erhalten wir

$$0 = z^2 - 3z + 2 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{2/3} = \pm\sqrt{2}}}, \quad \underline{\underline{x_{4/5} = \pm 1}}.$$

(d) *Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Setzen Sie näherungsweise $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$.* Wir führen wieder die Substitution $z \equiv x^2$ aus und erhalten

$$0 = z^2 - 12z + 24 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = 6 \pm 2\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}.$$

Wir suchen nun das kleinste positive x, also 1.VZ: "+" und 2.VZ: "−"

$$x_0 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}}{\approx} \sqrt{6 - \left(3 - \frac{\pi^2}{8}\right)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

Bemerkung: Die Funktion $f_4(x)$ ist das dritte Taylorpolynom der Kosinusfunktion. Es gilt $\cos(x) = f_4(x) + \mathcal{O}\left(x^6\right)$.

Aufgabe 2: *Polynomdivision*

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zusatz: Für welche Werte von n bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

(a)

$$
\begin{array}{l}
(21a^3 \quad +34a^2b \qquad\qquad +25b^3) : (7a+5b) = \underline{\underline{3a^2-7ab+5b^2}} \\
\underline{-(21a^3 \quad +15a^2b)} \\
\qquad -49a^2b \qquad\qquad +25b^3 \\
\qquad \underline{-(-49a^2b \ -35ab^2 \qquad)} \\
\qquad\qquad 35ab^2+25b^3 \\
\qquad\qquad \underline{-(35ab^2+25b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{l}
(9x^3 \qquad -7xy^2 \ +2y^3) : (3x-2y) = \underline{\underline{3x^2+2xy-y^2}} \\
\underline{-(9x^3-6x^2y \qquad)} \\
\qquad 6x^2y \ -7xy^2+2y^3 \\
\qquad \underline{-(6x^2y \ -4xy^2 \qquad)} \\
\qquad\qquad -3xy^2+2y^3 \\
\qquad\qquad - \underline{(-3xy^2+2y^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

(c)

$$
\begin{array}{l}
(25x^4 \qquad -a^2x^2 \qquad +25a^4) : (5x^2+7ax+5a^2) = \underline{\underline{5x^2-7ax+5a^2}} \\
\underline{-(-25x^4 \ +35ax^3+25a^2x^2)} \\
\qquad -35ax^3 \ -24a^2x^2 \qquad +25a^4 \\
\qquad \underline{-(-35ax^3 \ -49a^2x^2-35a^3x \qquad)} \\
\qquad\qquad 25a^2x^2+35a^3x+25a^4 \\
\qquad\qquad \underline{-(25a^2x^2+35a^3x+25a^4)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

(d)

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \qquad +2x \qquad -15) \qquad : (x+n) = \underline{\underline{x+2-n+\dfrac{n(n-2)-15}{x+n}}} \\
\underline{-(x^2 \qquad +nx)} \\
\qquad (2-n)x \qquad -15 \\
\qquad \underline{-((2-n)x \ +n(2-n))} \\
\qquad\qquad -15 \ +n(n-2) \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} n^2-2n-15 \quad \Rightarrow \quad n_{1/2} = 1 \pm \sqrt{16}
\end{array}
$$

Wir erhalten damit die beiden Werte $n_{1/2}$ die den Wurzeln des quadratischen Gleichungssystems entsprechen

$x^2+2x-15 = (x+5)(x-3)$.

Aufgabe 3: *Kubische Gleichungen* Ziel: (a)

(a) *Bestimmen Sie den Wert von m in der Gleichung*

$$6x^3-7x^2-16x+m=0\,,\quad \stackrel{x=2}{\Rightarrow}\quad -12+m\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{m=12}}.$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln. Wir bestimmen die restlichen Wurzeln per Polynomdivision und pq-Formel:

$$\begin{array}{l}
(6x^3\ -7x^2\ -16x\ +12):(x-2)=\underline{6x^2+5x-6}\\
\underline{-(6x^3-12x^2\qquad\qquad)}\\
\qquad\quad 5x^2\ -16x+12\\
\qquad\ \underline{-(5x^2\ -10x\qquad)}\\
\qquad\qquad\qquad -6x+12\\
\qquad\qquad\ \underline{-\ \ (-6x+12)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad 0\stackrel{!}{=}x^2+\frac{5}{6}x-1\quad\Rightarrow x_{1/2}=-\frac{5}{12}\pm\sqrt{\frac{25}{144}+1}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{3}{2}}}.$$

(b) *Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung*

$$2x^3+mx^2-13x+n=0\,.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von m und n, und geben Sie die dritte Wurzel an. Zu Bestimmung der Lösung setzen wir die beiden Wurzeln in die Gleichung ein:

$$\begin{array}{lll}
x_1=2: & 4m+n=\ \ 10 & (1)\\
x_2=3: & 9m+n=-15 & (2)\\
\Rightarrow\quad (1)-(2): & -5m=25\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{m=-5}},\quad \underline{\underline{n=30}}. &
\end{array}$$

Die dritte Wurzel ermitteln wir durch Polynomdivision mit $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

$$\begin{array}{l}
(2x^3\ -5x^2\ -13x\ +30):(x^2-5x+6)=2x+5\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_3=-\frac{5}{2}}}\\
\underline{-(2x^3-10x^2+12x)}\\
\qquad\quad 5x^2\ -25x+30\\
\qquad\ \underline{-(5x^2\ -25x+30)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Aufgabe 4: *Nullstellenraten* (Zusatzaufgabe)

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor $(x-x_0)$ vom Polynom ab.

(a) $x^3-5x^2+8x-4, \quad \underline{\underline{x_0=1}}$ oder $\underline{\underline{x_0=2}}$

$=(x-1)(x^2-4x+4)=(x-1)(x-2)^2$ (stückweises konstruieren ohne Polynomdivision)

(b) $x^4-2x^3-13x^2+9x+9, \quad \underline{\underline{x_0=3}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$=(x+3)(x^3-5x^2+2x+3)$

(c) $x^4-3x^2+3x+2, \quad \underline{\underline{x_0=-2}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$=(x+2)(x^3-2x^2+x+1)$

(d) $x^5-x^4-3x^3+3x^2+x-1, \quad \underline{\underline{x_0=1}}$

$=(x-1)(x^4-3x^2+1)$ die andere Nullstellen sind: $x_{2/3/4/5}=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2}$

$=(x-1)(x^2-x-1)(x^2+x-1)$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung* Ziel: (a) bis (c)

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a) $$\frac{x-5}{x^2-2x-3} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}=\frac{(x-3)\alpha+(x+1)\beta}{x^2-2x-3}=\frac{(\alpha+\beta)x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^1: & \alpha+\beta=1 \\ x^0: & 3\alpha-\beta=5 \end{array}\right\}$ Addition: $\underline{\alpha=\frac{3}{2}}, \quad \underline{\beta=-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x-5}{x^2-2x-3}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-3)}}}$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-1} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-1}+\gamma=\frac{(x-1)\alpha+(x+1)\beta+(x^2-1)\gamma}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^2: & \underline{\gamma=1} \\ x^1: & \alpha+\beta=0 \\ x^0: & 1=\beta-\alpha-\gamma \end{array}\right\}$ $\underline{\beta=1}, \underline{\alpha=-1}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2-1}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}}$$

Alternativ kann auch eine Poylnomdivision mit Rest durchgeführt werden mit anschließender Partialbruchzerlegung des Restglieds: $\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$.

(c) $$\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\gamma}{(x-2)^2}=\frac{(x^2-4x+4)\alpha+(x^2-3x+2)\beta+(x-1)\gamma}{(x-1)(x-2)^2}$$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{lll} x^2: & \alpha+\beta=2 & \\ x^1: & -4\alpha-3\beta+\gamma=-3 & (2) \\ x^0: & 4\alpha+2\beta-\gamma=\ \ 1 & (3) \end{array}\right\}$ $(2)+(3): \quad \beta=2 \Rightarrow \underline{\alpha=0}, \underline{\gamma=3}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}}}$$

Die Faktorisierung des Nenners haben wir in Aufgabe 4a bereits gesehen. Wir müssen die

Vielfachheit der Nullstelle in unserem Ansatz berücksichtigen. Durch $\alpha = 0$ sehen wir, dass die rechte Seite bei $x = 1$ keine Pollstelle hat. Die Partialbruchzerlegung hat uns also den Limes $x \to 1$ der linken Seite verschafft.

(d) $\dfrac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3}$

Da der Zähler von höherem Grade ist als das Nennerpolynom, wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt:

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12) : (x^2 - 2x - 3) = \underline{2x^2 + 1 + \dfrac{(\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3}} \\
\underline{-(-2x^4 - 4x^3 - 6x^2)} \\
\qquad x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12 \\
\qquad \underline{-(x^2 \quad - 2x \quad - 3)} \\
\qquad\qquad (\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15
\end{array}
$$

Die Nullstellen des Nenners lauten: $x_1 = 3, x_2 = -1$. Damit folgt

$$\frac{(\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x - 3} + \frac{\beta}{x + 1} = \frac{(x + 1)\alpha + (x - 3)\beta}{x^2 - 2x - 3}$$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{l} x^1 : \alpha + \beta = \sqrt{2} - 5 \\ x^0 : \alpha - 3\beta = \sqrt{2} + 15 \end{array}\right\}$ Differenz: $\underline{\beta = -5}$, $\Rightarrow \underline{\alpha = \sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3} = 2x^2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{x - 3} - \frac{5}{x + 1}}}$$

Aufgabe 6: *Summen* Ziel: (a) bis (b)

Vereinfachen bzw. berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l + 1}}_{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n - 1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2n} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$

Hinweis zu (b): Der Term in der Summe kann mithilfe von Partialbruchzerlegung vereinfacht und die entstehende Summe auseinandergezogen werden.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(k+1) + Bk = (A + B)k + A.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A = 1, B = -1$ und wir können weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad k+1 = l \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = \left(1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n}}\right) - \left(\cancel{\sum_{l=2}^{n}} + \frac{1}{n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}}}.
\end{aligned}$$

Hinweis zu (c): Hierfür kann ein expliziter Ausdruck gefunden werden, wenn man die Formel mit $(1-x)$ multipliziert und analog vorgeht wie in (b)

$$\begin{aligned}
(1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad l = k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{l=1}^{n+1} x^l = 1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x^k} - \left(\cancel{\sum_{l=1}^{n} x^l} + x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1} \\
\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} x^k &= \underline{\underline{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}}.
\end{aligned}$$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 5: Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

Logarithmengesetze, Basiswechsel

$$\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v), \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$$
$$\log_b(u^m) = m\log_b(u), \quad \log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)}\log_b(x).$$

Aufgabe 1: *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

Lösen Sie jeweils für x bzw. y. Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

Tafelbeispiele:

1. $$3\ln\left[\frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}}{\exp\left(3\log_2(\sqrt{2})\right)}\right] + 2x = 0$$
$$3\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x/3}}{\mathrm{e}^{3/2}}\right) + 2x = 0$$
$$3\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\right) + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}.$$

2. $$2\log_{\sqrt[5]{9}}(3x) - 5\ln(x) = \log_3(\mathrm{e}^5)$$
Basiswechsel: $\log_a(\xi) = \dfrac{\ln(\xi)}{\ln(a)}$
$$2 \cdot \frac{\ln(3x)}{\ln\left(3^{2/5}\right)} - 5\ln(x) = \frac{5}{\ln(3)}$$
$$\cancel{5}\frac{\ln(3) + \ln(x)}{\ln(3)} - \cancel{5}\ln(x) = \frac{\cancel{5}}{\ln(3)}$$
$$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1 - \ln(3)}{1 - \ln(3)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \mathrm{e}}}.$$

Lösung:

(a) $a2^x = \mathrm{e}^{bx} \quad \Rightarrow \quad \ln(a) + x\ln(2) = bx \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(a)}{b - \ln(2)}}},$ offenbar $a > 0$

(b) $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)} = \dfrac{49}{(7\cdot 7)^{\log_7(2\sqrt{x})}} + \dfrac{1}{4x} = \dfrac{25}{2x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}}},$ (nur positive Lsg.)

(c)
$$\begin{aligned} e^{3ax} - 2^{a+1}e^{2ax} + 4^a e^{ax} &= \log_b(1) \quad |\cdot e^{-ax} \\ e^{2ax} - 2\cdot 2^a e^{ax} + (2^a)^2 &= 0 \\ (e^{ax} + 2^a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 2 \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln(2)}}. \end{aligned}$$

(d) $\sqrt[x^2-1]{a^3}\cdot\sqrt[2x-2]{a}\cdot\sqrt[4]{a^{-1}} = 1 \qquad$ offenbar $a > 0$

$$a^{\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}} = 1.$$

Fall $a = 1$: $\quad \underline{\underline{x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}}}$

Fall $a \neq 1$: $\quad 0 = \dfrac{3}{x^2-1} + \dfrac{1}{2x-2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{15+2x-x^2}{x^2-1}$

$$0 = x^2 - 2x - 15 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 5, x_2 = -3}}$$

(e)
$$\log_a(x) + \log_a(y) = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_a(xy) = 2 \quad \Rightarrow \quad xy = a^2$$
$$\log_b(x) - \log_b(y) = 4 \quad \Rightarrow \quad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = b^4$$
$$\Rightarrow x^2 = a^2 b^4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm ab^2, y = \pm\frac{a}{b^2}$$

Die Argumente der Logarithmen müssen positiv sein:

$$\underline{\underline{x = \begin{cases} ab^2, & a > 0 \\ -ab^2, & a < 0 \end{cases}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y = \begin{cases} \frac{a}{b^2}, & a > 0 \\ -\frac{a}{b^2}, & a < 0 \end{cases}}}, \quad (a = 0 \text{ nicht zulässig})$$

(f) $3\log_{xa^2} x + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2 \overset{\text{Basiswechsel}}{\Longrightarrow} \dfrac{3\ln(x)}{\ln(xa^2)} + \dfrac{\ln(x)}{2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} = 2$

Substitution: $z \equiv \ln(x), b \equiv \ln(a)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{3z}{z+2b} + \frac{z}{2z-b} &= 2 \quad |\cdot(z+2b)(2z-b) \\ 7z^2 - z &= 4z^2 + 6bz - 4b^2 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow 0 = z^2 - \frac{7b}{3}z + \frac{4b^2}{3} \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{7b}{6} \pm \sqrt{\frac{49b^2}{36} - \frac{4b^2}{3}} = \begin{cases} \frac{4b}{3} \\ b \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = a^{4/3}, x_2 = a}}$$

Aufgabe 2: *Verdopplungszeit*

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen A sei beschrieben durch

$W(t) = Ae^{ct}, \qquad c > 0,$

sodass $W(t)$ die „Menge“ an Wissen zur Zeit t gibt.

(a) Nach welcher Zeit τ_2 hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?

(b) Nach welcher Zeit τ_n hat das Wissen eines Studenten auf das n-Fache zugenommen?

(c) Drücken Sie τ_n als Vielfaches von τ_2 aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$? Welche Aussage können Sie für $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, treffen?

Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen* (Zusatzaufgabe)

Es seien die Funktionen

$$f(x) := \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x},$$
$$g(x) := \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$$

definiert.

(a) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(2x)$ und $g(2x)$ in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente, $f(x)$ und $g(x)$.

(b) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(x+y)$ und $g(x+y)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $f(y)$ sowie $g(x)$ und $g(y)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie $x = y$ setzen.

(c) Schreiben Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Reihendarstellung.

(d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von $g(x)$.