

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten

Brüche

Potenzen

Wurzeln

Aufgabe 1: Bruchrechnung

Ziel: (a) bis (f)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$(a) \quad \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$(b) \quad \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}}$$

$$(c) \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy}$$

$$(d) \quad \frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}}$$

$$(e) \quad \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$(f) \quad \frac{a^2 - 1}{a^2 + a} - a \frac{a+1}{a^3 - a} + \frac{1}{a} + \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2 + 4}{4(a^2 - 1)}$$

$$(g) \quad \frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \left[\frac{\sqrt{2}}{ax} - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2} \right] \text{ für } x = \frac{1}{a-1}$$

Aufgabe 2: Potenzgesetze

Ziel: (a) bis (c)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$(a) \quad \left(\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2} \right)^n \left(\frac{x+y}{a-b} \right)^n$$

$$(b) \quad \frac{b^x c^y (ab)^{2z+y} (cb)^{-x}}{(ac)^{y-x} [(abc^{-0.5})^z]^2}$$

$$(c) \quad \frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b} \cdot \frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}} \cdot \frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$$

$$(d) \quad (a^{n+2} - a^n) : (a^3 + a^2)$$

$$(e) \quad \left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2} \right)^3$$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken*

Ziel: (a) und (b)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$(a) \quad \frac{\sqrt[6]{a^3} \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1 - ab}$$

$$(b) \quad \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}} \quad \text{für } x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \quad \text{mit } |m| < 1$$

$$(c) \quad \left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen*

Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

$$(a) \quad (a + nx)(b - nx) - (a - mx)(b + mx) = x^2(m - n)(m + n) - 1$$

$$(b) \quad \frac{ax + b}{ab - b^2} - \frac{a - bx}{ab + b^2} = \frac{2(ax + b)}{a^2 - b^2}$$

$$(c) \quad \frac{x-1}{n-1} + \frac{2n^2(1-x)}{n^4-1} = \frac{2x-1}{1-n^4} - \frac{1-x}{1+n}$$

$$(d) \quad a(\sqrt{x} - a) - b(\sqrt{x} - b) + a + b = \sqrt{x}$$

$$(e) \quad \frac{\frac{1}{x - \sqrt{1-4y^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x - \sqrt{1-4y^2}} - \frac{1}{x + \sqrt{1-4y^2}}} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{1+2y}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-2y}}$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Ziel: (a) bis (d)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x und y .

(a) $33x + 12y = 25,$

$$11x - 3y = 6$$

(b) $\frac{2x+3y}{3x-y} = \frac{17}{9},$

$$\frac{3x+4y}{6x-1} = 2$$

(c) $\frac{x+2}{y+3} = \frac{1}{3},$

$$\frac{y+3}{2y-5x} = \frac{3}{5}$$

(d) $ax + by = 2a,$

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{2}{a}$$

(e) $x + 14y = \frac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2},$

$$3\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(f) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b,$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2b$$

(g) $39x - 38y = 1,$

$$91x - 57y = 4$$

Aufgabe 2: Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

Ziel: (a) und (b)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x , y und z .

(a)
$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 5, \\ 3x + 7y - 5z &= 5, \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - 4y + 3z &= 4, \\ -x + y - z &= -2, \\ 7x + 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y &= b + a, \\ x + z &= a + c, \\ y + z &= c + b \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 6x - 4y + 8z &= 0, \\ -2x + y - z &= 0, \\ 12x - 7y + 11z &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Parametrisierung von Lösungsmengen

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x - 7y = 1$ an für

(a) $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $x, y \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: Gleichungssysteme

Ziel: (a) und (b)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y .

(a)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2(xy + 2), \\ x + y &= 6 \end{aligned}$$

(b)
$$\frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5,$$

(c)
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2x + 3} + y^2 &= (x + y)x - xy, \\ y - 2x &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6$$

Aufgabe 5: Ungleichungssysteme

Ziel: (a)

- (a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6, \\ x - 2y &< 11, \\ x &> -y - 1, \\ x &< 5, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- (b) Welches Gebiet im ersten Oktanten ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z, \\ x + z &\geq y, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Quadratische Gleichungen

Ziel: (a) und (b)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der pq -Formel.

(a) $x^2 - 10x + 9 = 0$

(b) $x^2 + x - 12 = 0$

(c) $x^2 - \sqrt{8}x + 1 = 0$

Aufgabe 2: Wurzeln quadratischer Gleichungen

- (a) Stellen Sie $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.
- (b) Bestimmen Sie in der Gleichung $5x^2 - kx + 1 = 0$ den Koeffizienten k so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.
- (c) Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich p und q sind.
- (d) Gegeben ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich
- dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung,
 - den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung
- sind.

Aufgabe 3: Gleichungssysteme

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für x und y .

(a) $x + y^2 = 7,$
 $xy^2 = 12$

(b) $x + xy + y = 11,$
 $x^2y + xy^2 = 30$

(c) $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy,$
 $x - y = \frac{1}{4}xy$

Hinweis: Substitution $z_1 = xy$, $z_2 = x + y$ in Aufgabe (b).

Aufgabe 4: *Wurzelgleichungen*

Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für x .

(a) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$

(b) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$

(c) $\sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2-x} = a+b$

(d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = 3$

(e) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1,5} = \frac{6}{\sqrt{2x-1}}$

Aufgabe 5: *Nullstellensuche*

Ziel: (a) bis (c)

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.

(a) $x^2 + 2x - 15$

(b) $4x^2 + 8x - 5$

(c) $ax^3 + bx^2 + adx^2 + bdx$

(d) $(a-x)^2 + (x-b)^2 - a^2 - b^2$

(e) $a\sqrt{8}x^2 - 2kax - 3ak + ax\sqrt{18}$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades Das Summenzeichen

Aufgabe 1: Nullstellensuche

Ziel: (a) bis (c)

- (a) Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln a , b und c hat.
- (b) Zerlegen Sie das Polynom $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$ in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?
- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$.
- (d) Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Setzen Sie näherungsweise $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 2: Polynomdivision

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zusatz: Für welche Werte von n bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

- (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$
- (b) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$
- (c) $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2)$
- (d) $(x^2 + 2x - 15) : (x + n)$

Aufgabe 3: Kubische Gleichungen

Ziel: (a)

- (a) Bestimmen Sie den Wert von m in der Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0,$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln.

- (b) Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von m und n , und geben Sie die dritte Wurzel an.

Aufgabe 4: Nullstellenraten

(Zusatzaufgabe)

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor $(x - x_0)$ vom Polynom ab.

(a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

(c) $x^4 - 3x^2 + 3x + 2$

(b) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9$

(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1$

Aufgabe 5: Partialbruchzerlegung

Ziel: (a) bis (c)

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a) $\frac{x-5}{x^2-2x-3}$

(c) $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

(b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(d) $\frac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3}$

Aufgabe 6: Summen

Ziel: (a) bis (b)

Vereinfachen bzw. berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1}$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

(c) $\sum_{k=0}^n x^k$

Hinweis zu (b): Der Term in der Summe kann mithilfe von Partialbruchzerlegung vereinfacht und die entstehende Summe auseinandergezogen werden.

Hinweis zu (c): Hierfür kann ein expliziter Ausdruck gefunden werden, wenn man die Formel mit $(1-x)$ multipliziert und analog vorgeht wie in (b). Für $n \rightarrow \infty$ erhält man für $|x| < 1$ den Ausdruck der geometrischen Reihe (siehe später):

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 5: Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

Aufgabe 1: *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

Lösen Sie jeweils für x bzw. y . Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

- (a) $a2^x = e^{bx}$
- (b) $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)}$
- (c) $e^{3ax} - 2^{a+1}e^{2ax} + 4^ae^{ax} = \log_b(1)$
- (d) $x^{2-1}\sqrt{a^3} \cdot {}^{2x-2}\sqrt{a} \cdot {}^4\sqrt{a^{-1}} = 1$
- (e) $\log_a x + \log_a y = 2, \quad \log_b x - \log_b y = 4$
- (f) $3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$

Aufgabe 2: *Verdopplungszeit*

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen A sei beschrieben durch

$$W(t) = Ae^{ct}, \quad c > 0,$$

sodass $W(t)$ die „Menge“ an Wissen zur Zeit t gibt.

- (a) Nach welcher Zeit τ_2 hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?
- (b) Nach welcher Zeit τ_n hat das Wissen eines Studenten auf das n -Fache zugenommen?
- (c) Drücken Sie τ_n als Vielfaches von τ_2 aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$? Welche Aussage können Sie für $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, treffen?

Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen*

(Zusatzaufgabe)

Es seien die Funktionen

$$f(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$g(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definiert.

- (a) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(2x)$ und $g(2x)$ in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente, $f(x)$ und $g(x)$.
- (b) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(x+y)$ und $g(x+y)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $f(y)$ sowie $g(x)$ und $g(y)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie $x = y$ setzen.
- (c) Schreiben Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Reihendarstellung.
- (d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von $g(x)$.

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 6: Trigonometrische Funktionen Ebene Trigonometrie

Aufgabe 1: Additionstheoreme

- (a) Leiten Sie das Additionstheorem für Kosinusfunktionen aus dem für Sinusfunktionen her.
(b) Leiten Sie das Additionstheorem für Tangensfunktionen her,

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}.$$

- (c) Zeigen Sie, dass für Doppelwinkelfunktionen gilt:

- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$
- $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1.$

Aufgabe 2: Trigonometrische Umformungen I

Ziel: (a) bis (c)

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Identitäten.

- (a) $\frac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$
(b) $\frac{1 + \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$
(c) $2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos(x) + \cos(y)$
(d) $\cot(\alpha) \cot(\beta) + \cot(\alpha) \cot(\gamma) + \cot(\beta) \cot(\gamma) = 1$ für $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Aufgabe 3: Trigonometrische Umformungen II

Ziel: (a) und (b)

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass sie sich einfach logarithmieren lassen. Das heißt, die Terme sollen möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden.

- (a) $1 + \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ Hinweis: Es ist $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$
(b) $\frac{2 \sin(\beta) - \sin(2\beta)}{2 \sin(\beta) + 2 \sin(2\beta)}$
(c) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma),$ für $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Aufgabe 4: *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme*

Ziel: (a) bis (c)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Es reicht aus, die Lösungen in impliziter Form stehenzulassen!

(a) $\sin(x) + \cos(x) = 1$

(b) $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4}$

(c) $\sin(3x) = \cos(2x)$

(d) $a(3\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x)) - b(3\sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)) = 2a - b$

Hinweis: Versuchen Sie in (c) und (d) die Gleichung so umzuformen, dass nur noch eine Funktionsart auftritt. Dann reduziert sich das Problem zu einer Nullstellensuche eines Polynoms.

Aufgabe 5: *Dreiecksfläche*

Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten a und b sowie die Länge w der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind.

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung Kurvendiskussion

Aufgabe 1: Ableitungen I

Ziel: (a) bis (e)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $Q(r) = \frac{3r^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{r_0} \right)$

(b) $f(x) = \cos^4(3tx) - \sin^4(3tx)$

(c) $S(\tau) = (\tau - 1)e^\tau + \frac{\tau^2}{4}(2\ln \tau - 1)$

(d) $y(x) = \frac{\exp(2x)}{25} [(5x - 4)\sin x + (10x - 3)\cos x]$

(e) $F(x) = -\frac{k}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$

(f) $N(z) = \frac{2 \cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{1 + \cos(z)}} \left[\ln \left(\cos \frac{z}{4} + \sin \frac{z}{4} \right) - \ln \left(\cos \frac{z}{4} - \sin \frac{z}{4} \right) \right]$

Aufgabe 2: Ableitungen II

Ziel: (a) bis (d)

Finden Sie die n -te Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = x^n$

(d) $f(x) = a^x$

(b) $f(x) = e^{kx} + e^{-kx}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

(c) $f(x) = x^{n-1}$

(f) $f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion I

Ein zweiatomiges Molekül lässt sich näherungsweise durch das sogenannte “Morse-Potential” beschreiben,

$$U(x) = D(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad D, \alpha = \text{const.}$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(x)$ sowie deren Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$.
- Skizzieren Sie die Funktion $U(x)$ für $D = \alpha = 1$ im Intervall $x \in [-1, 5]$.

Aufgabe 4: Kurvendiskussion II

Die Bewegung eines Teilchens mit Drehimpuls L und Energie E in der gekrümmten Raumzeit eines Schwarzen Loches der Masse m wird beschrieben durch das Potential

$$U(r) = \frac{E}{2} - \frac{Em}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{mL^2}{r^3}, \quad r > 0.$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(r)$ sowie deren Verhalten für $r \rightarrow \infty$ und $r \rightarrow 0$.
- Setzen Sie $m = \frac{1}{2}$. Welche Bedingungen an E und L müssen erfüllt sein, damit $U(r)$ zwei, ein oder keine lokalen Extrema besitzt?
- Skizzieren Sie die Funktion $U(r)$ für $E = 1$ und $L = 2$ (nicht maßstabsgerecht).

Aufgabe 5: Gewöhnliche Differentialgleichungen

(Zusatzaufgabe)

- (a) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f''(x) = a^2 f(x) + bx.$$

- (b) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f'(x) = (1 + \ln(x))f(x).$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

Aufgabe 1: Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift

Eine Reihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_0 = 0.$$

Finden Sie einen expliziten Ausdruck für a_n und beweisen Sie ihn per vollständiger Induktion.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion I

Beweisen Sie $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

Aufgabe 3: Vollständige Induktion II

Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ ist.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion III

Zeigen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 5: Die Suche nach der richtigen Summenformel

Stellen Sie eine Summenformel für das Polynom

$$S_n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

auf und beweisen Sie deren Richtigkeit durch vollständige Induktion.

Aufgabe 6: Fibonacci-Zahlen

(Zusatzaufgabe)

Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$ und die Startwerte $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Beweisen Sie, dass der explizite Ausdruck für die n -te Fibonacci-Zahl gegeben ist durch

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (x_+^n - x_-^n), \quad \text{mit} \quad x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

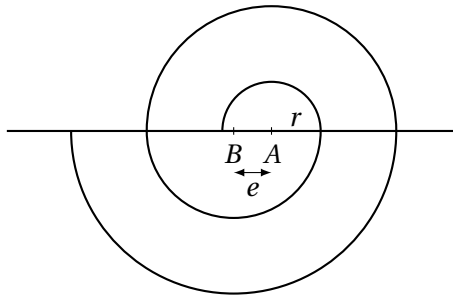
WS 2023/24

Thema 9: Arithmetische & geometrische Reihen Der binomische Satz

Aufgabe 1: *Arithmetische Reihe*

Eine Spirale bestehe aus zwei Scharen konzentrischer Halbkreise um die Punkte A und B . Es sei r der Radius des innersten Halbkreises und die Strecke $\overline{AB} = e$.

- (a) Wie lang ist der n -te Halbbogen?
- (b) Wie lang ist der Gesamtbogen der Spirale bis dahin?



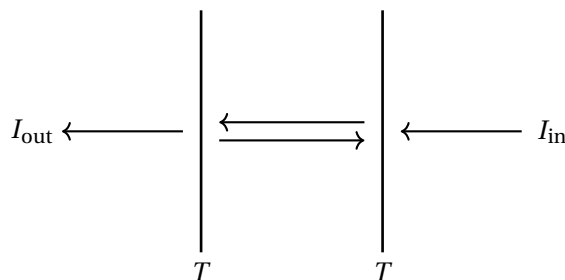
Aufgabe 2: *Geometrische Folge*

Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliert ein Lichtstrahl $\frac{1}{12}$ seiner Lichtstärke. Wie viele Platten muss er durchdringen, wenn er nur noch die Hälfte der ursprünglichen Lichtstärke besitzen soll?

Hinweis: Es genügt die Angabe des Ergebnisses in impliziter Form.

Aufgabe 3: *Geometrische Reihe*

Es sei eine Anordnung aus zwei Glasplatten gegeben, in die ein Laserstrahl der Intensität I_{in} eingeschossen werde. Jede Platte besitze einen Transmissionskoeffizienten T ($0 < T < 1$), d.h. dass an jeder Platte von einem Lichtstrahl der Intensität I ein Anteil TI transmittiert und ein Anteil $(1 - T)I$ reflektiert wird. Bestimmen Sie die Intensität I_{out} , mit der das Licht auf der anderen Seite der Anordnung austritt.



Aufgabe 4: *Der binomische Satz*

- (a) Berechnen Sie $(1 + a)^6 + (1 - a)^6$.
- (b) Schreiben Sie die allgemeine Binomialformel für $(1 + x)^n$ und $(1 - x)^n$ auf und setzen Sie anschließend $x = 1$. In letzterem Falle sei $n \geq 1$.
- (c) Es seien die Funktionen $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$ definiert. Finden Sie einen Ausdruck, der $f(nx) + g(nx)$, mit $n \in \mathbb{N}$, auf (Potenzen von) $f(x)$ und $g(x)$ zurückführt.

Aufgabe 5: *Erzeugende Funktion*

(Zusatzaufgabe)

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = 2a_n + 1$ mit Anfangswert $a_0 = 0$ aus Aufgabe 1, Thema 8. Es sei eine (unbekannte) Funktion definiert als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- (a) Multiplizieren Sie beide Seiten der Rekursionsgleichung mit x^n , summieren Sie über n (von Null bis Unendlich) ab und versuchen Sie alle auftretenden Terme durch $f(x)$ auszudrücken. Lösen Sie für $f(x)$.
- (b) Nutzen Sie Ihr Wissen über geometrische Reihen, um $f(x)$ wieder in Reihendarstellung zu überführen und lesen Sie die Koeffizienten vor x^n ab.

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 10: Integralrechnung

Aufgabe 1: Stammfunktionen

Ziel: (a) bis (d)

Bestimmen Sie jeweils die Stammfunktion $F(x)$ der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \sin(2x + 5)$

(b) $f(x) = \frac{k}{kx + 1}$

(c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(d) $f(x) = \frac{a \cos(x) + b \sin(x)}{c \sin(x)}$

(e) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(f) $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$

Hinweis: Partialbruchzerlegung in (e).

Aufgabe 2: Partielle Integration

Ziel: (a) bis (c)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung partieller Integration.

(a) $\int_0^{\pi} x \sin(x) \, dx$

(b) $\int_0^1 x^3 e^x \, dx$

(c) $\int_{r_0}^{2r_0} r \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right) dr$

(d) $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

Aufgabe 3: Substitutionen

Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils unter Verwendung der angegebenen Substitution.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx,$

mit $x = \sin \phi$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\arctan(x)}},$

mit $u = \arctan(x)$

Aufgabe 4: Vollständige Induktion

(Zusatzaufgabe)

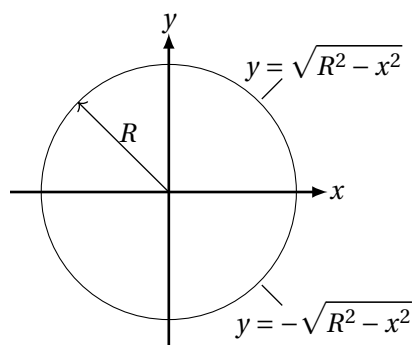
Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für die Fakultät

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx,$$

gilt. *Hinweis:* Es gilt $0! = 1$.

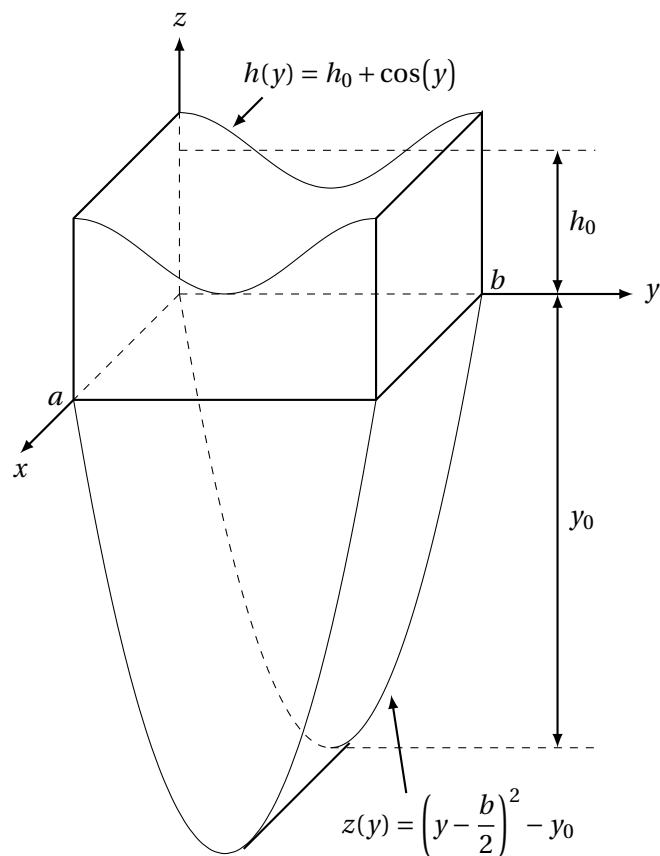
Aufgabe 5: Flächenintegral

Leiten Sie die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius R her.

**Aufgabe 6: Volumenintegral**

(Zusatzaufgabe)

Berechnen Sie das Volumen des in der Abbildung gezeigten Körpers.



AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 11: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1: Linear (un)abhängige Vektoren

- (a) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? (b) Für welche Werte von t befinden sich die folgenden Vektoren in einer Ebene?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Vektorprodukt

- (a) Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5a+6 \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (c) Nutzen Sie das Skalarprodukt, um den Kosinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.
(d) Nutzen Sie das Vektorprodukt, um den Sinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

Aufgabe 3: Matrizen

- (a) Bilden Sie – falls möglich – die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

- (b) Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Berechnen Sie $A \cdot B - B \cdot A$.

- (c) Welche Bedingungen müssen die Einträge m_i einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

erfüllen, damit $|M \cdot \vec{v}| = |\vec{v}|$ für einen beliebigen zweikomponentigen Vektor \vec{v} gilt?

Aufgabe 4: Laplace'scher Entwicklungssatz

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix. Für welche Werte von a ist die Matrix nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ -a & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Vektorprodukt

Das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{u}$ zweier Vektoren $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

lässt sich auch als Matrixmultiplikation $\Omega \cdot \vec{u}$ mit einer (3×3) -Matrix Ω mit den Einträgen $\pm\omega_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ schreiben. Wie sieht Ω aus? Welche Eigenschaften hat es (Determinante, Spur, Symmetrie)?

Aufgabe 6*: Höhere Dimensionen

Im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 kann jede beliebige Drehung in Drehungen um die x -, die y - und die z -Achse zerlegt werden, d.h. man benötigt genau drei linear unabhängige Drehmatrizen für eine solche Zerlegung. Wie viele linear unabhängige Drehmatrizen benötigt man im d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d ?

Aufgabe 7*: Diskreter Laplace-Operator

Gegeben sei die $(n \times n)$ -Matrix Δ_n , welche die Einträge -2 auf der Haupt- und 1 auf den beiden Nebendiagonalen hat,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante von Δ_n , indem Sie wie folgt vorgehen:

- Finden Sie eine Rekursionsrelation, die $\det(\Delta_n)$ auf $\det(\Delta_{n-1})$ und $\det(\Delta_{n-2})$ zurückführt.
- Raten Sie einen allgemeinen Ausdruck für $\det(\Delta_n)$ und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion. Alternativ kann der Versuch unternommen werden, das Verfahren aus Thema 9, Aufgabe 5 anzuwenden.