FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT

WINTERSEMESTER 2023/24

Mathematik - Ein Vorkurs für Studienanfänger

MARTIN BEYER

Version: 28. September 2023

LaTeX-Satz und Design von Martin Beyer

Inhaltsverzeichnis

13 Grundzüge der Integralrechnung

Wir können die mathematische Operation des Integrierens auffassen als die Umkehrung der Differentiation. Das heißt: Wir suchen zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine sogenannte *Stammfunktion* $F(x)$, sodass

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{und schreiben} \quad F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.1}$$

Wir nennen dies das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$. In symbolischer schreibweise lässt sich das Integral folgendermaßen konstruieren:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \quad \Big| \cdot \mathrm{d}x \\ f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x) \quad \Big| \int \\ \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{d}F(x) = F(x). \end{aligned} \tag{13.2}$$

Ein paar Beispiele wollen wir hier beispielhaft einmal notieren. Kennen wir die Ableitungen verschiedener Funktionen, so können wir das dazugehörige Integral leicht konstruieren:

- $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C,$
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C,$
- $\int e^{cx}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{cx}}{c} + C.$

Hierbei ist $C = \text{const.}$ die sogenannte *Integrationskonstante*. Das unbestimmte Integral beschreibt nämlich die Menge aller Stammfunktionen, deren erste Ableitung $f(x)$ ergibt.

Im Gegensatz zur Differentiation existiert im Allgemeinen kein Algorithmus zur Bestimmung eines Integrals. Außerdem besitzt nicht jede Funktion eine geschlossen analytisch darstellbare Stammfunktion.

Beispiele Stammfunktion von

$$\begin{aligned} f(x) &= 3xy^2 + 2y - 4x + 3 \\ F(x) &= \int (3xy^2 + 2y - 4x + 3)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 2x^2 + 3x + C \\ &= \left(\frac{3y^2}{2} - 2\right)x^2 + (2y-3)x + C \end{aligned} \tag{13.3}$$

Stammfunktion von

$$\begin{aligned} f(y) &= 3xy^2 + 2y - 4x + 3 \\ F(x) &= \int (3xy^2 + 2y - 4x + 3)\,\mathrm{d}y \\ &= xy^3 + y^2 - (4x-3)y + C. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Wir sehen also, dass es wichtig, ist, die korrekte Variable zur Integration auszuwählen.

Bei einem *bestimmten Integral* wird die Stammfunktion an einer oberen und einer unteren Grenze ausgewertet. Das Ergbnis hängt nicht mehr von der Integrationsvariablen ab. Wir können damit den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* formulieren:

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_1) - F(x_1). \tag{13.5}$$

Man schreibt auch $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$.

Als Integrationsgrenze kann ebenfalls $\pm\infty$ auftauchen, was im Sinne eines Grenzwertes zu verstehen ist, also

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.6}$$

Man findet außerdem oft Schreibweisen wie

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.7}$$

Es ist zu beachten, dass sowohl endliche als auch unendliche Integrale nicht immer konvergent sind, bspw.

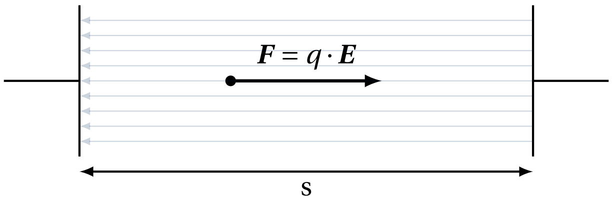
$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^\infty \to \infty, \qquad \int_0^{10} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{r}\Big|_0^{10} \to \infty, \\ \int_0^\infty \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_0^\infty \to \quad ?\,. \end{aligned} \tag{13.8}$$

13.1 Das Wegintegral

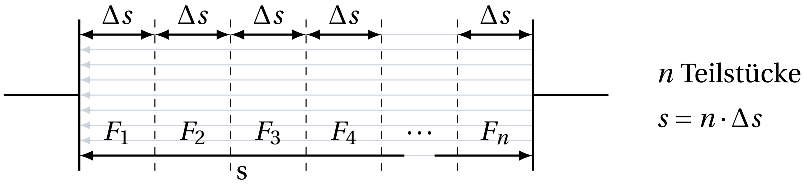
Wir führen das Wegintegral ein am Beispiel der Frage "*Was ist die Arbeit?*". Bewegt sich ein Teilchen (Massepunkt) unter dem Einfluss einer konstanten Kraft F entlang eines Weges der Länge s, dann lautet die Antwort

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft mal Weg}, \quad \text{bzw.} \quad W = F \cdot s. \tag{13.9}$$

Betrachten wir das konkrete Beispiel eines Elektrons (Ladung $q = -e$) im Kondensator mit elektrischer Feldstärke $\boldsymbol{F}$, das sich unter Einfluss einer Coulomb-Kraft $\boldsymbol{F} = q \cdot \boldsymbol{E}$ bewegt.



Würden wir das elektrische Feld immer dann neu einstellen, wenn das Elektron ein bestimmtes Wegintervall Δs zurückgelegt hat, so ergäbe sich die gesamte Arbeit als Summe der Arbeiten innerhalb der einzelnen Teilstrecken. Für n Teilstücke ergibt sich die Gesamt-



Arbeit zu

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + \ldots + W_n \\ &= qE_1\Delta s + qE_1\Delta s + \ldots + eE_n\Delta s = q\sum_{i=1}^{s/\Delta s} E_i\Delta s. \end{aligned} \tag{13.10}$$

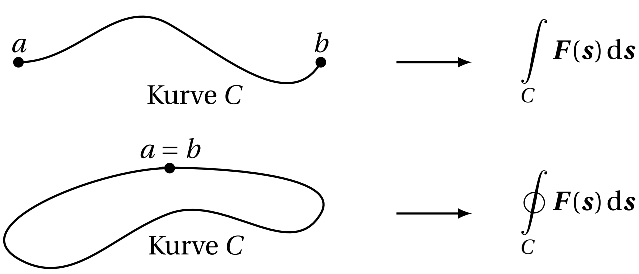
Wollen wir nun die Gesamtarbeit bestimmen für den Fall, dass das E-Feld *kontinuierlich* verändert wird, so habne wir den Weg in unendlich viele Intervalle einzuteilen, sodass das Feld in diesen unendlich kleinen (infinitesimalen) Intervallen konstant ist; das führt auf die Definition des Integrals:

$$W = q \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\left(\sum_{i=1}^{s/\Delta s} E_i \Delta s\right) =: \int_0^s E(s')\,\mathrm{d}s'. \tag{13.11}$$

Dabei ist das elektrische Feld nun als eine (kontinuierliche) Funktion $E = E(s)$ aufzufassen. Bildlich gesprochen heißt das: Mit Hilfe des Integrals "bewegen" wir uns entlang eines Weges und "sammeln" an allen Punkten die Beiträge der Kraft zur Gesamtarbeit ein.

Arbiet ist das Integral über eine Kraft entlang eines Weges.

Der Weg muss hierbei nicht notwendigerweise gerade sein. Insbesondere können wir die



Länge einer Kurve bestimmen als das Integral über die konstante Funktion $f(s) = 1$. Bildlich heißt das: Wir “sammeln” den Beitrag eines jeden infinitesimalen Streckenabschnitts zur Gesamtlänge ein.

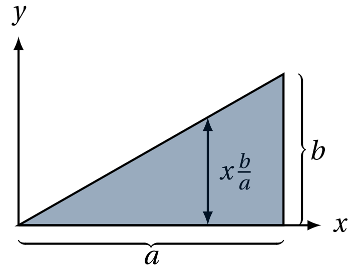
13.2 Flächen- und Volumenintegrale

So wie wir Längen mit Hilfe des Wegintegrales berechnen können, lassen sich Flächen mit Hilfe von Flächenintegralen berechnen,

$$\text{Doppelintegral:} \quad A = \iint\limits_{\text{Fläche}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{13.12}$$

Beispiel: Das rechtwinklige Dreieck

Wir legen zunächst die Integrationsgrenzen fest:



$$x \quad \text{von} \quad 0 \quad \text{bis} \quad a,$$

$$y \quad \text{von} \quad 0 \quad \text{bis} \quad \frac{b}{a}x$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= \int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^{\frac{b}{a}x} \mathrm{d}y = \int\limits_0^a \mathrm{d}x\, y\Big|_0^{\frac{b}{a}x} = \int\limits_0^a \frac{b}{a}x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b}{a}\int\limits_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2a}x^2\Big|_0^a = \underline{\underline{\frac{ab}{2}}}.\end{aligned} \tag{13.13}$$

In der Schule wird das Integral über eine Funktion $f(x)$ oft eingeführt als die Fläche, die diese Funktion mit der x-Achse einschließt:

$$A = \int\limits_0^{x_0} \mathrm{d}x \int\limits_0^{f(x)} \mathrm{d}y = \int\limits_0^{x_0} \mathrm{d}x\, y\Big|_0^{f(x)} = \int\limits_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13.14}$$

Beachte, dass auch unendliche Flächenintegrale konvergieren können, wie bspw.

$$A = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{r}\Big|_1^{\infty} = 1. \tag{13.15}$$

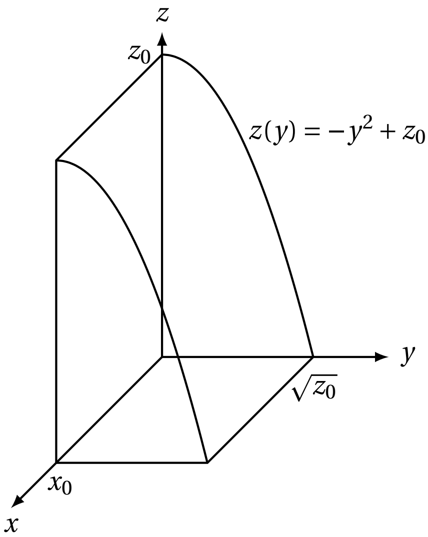
Es wird an dieser Stelle kaum verwunderlich sein, dass auch Volumen durch Integration bestimmt werden. Wir führen dafür das *Volumenintegral* bzw. *Dreifachintegral* ein

$$V = \iiint\limits_{\text{Volumen}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{13.16}$$

Beispiel: Prisma mit Parabelausschnitt

Das Volumen des Prismas ergibt sich zu

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_0} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{z_0}} \mathrm{d}y \int_0^{-y^2+z_0} \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{x_0} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{z_0}} \mathrm{d}y\,(-y^2+z_0) \\ &= \int_0^{x_0} \mathrm{d}x \left(-\frac{y^3}{3} + z_0 y\right|_0^{\sqrt{z_0}} \\ &= x_0\left(-\frac{\sqrt{z_0}^3}{3} + z_0\sqrt{z_0}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}x_0\sqrt{z_0}^3}}. \end{aligned} \tag{13.17}$$



Hierbei "laufen" die Integrale über x und y die Grundfläche ab, während das z-Integral mit der (von y abhängigen) Höhe multipliziert wird.

Bemerkung: Man schreibt auch $A = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}A$ und $V = \iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}V$, sodass eine bildliche Vorstellung ähnlich dem Wegintegral möglich ist: Wir schreiten das Gebiet innerhalb der Integrationsgrenzen ab und "sammeln" infinitesimale Flächenstücke dA bzw. Volumenstücke dV ein.

Natürlich können auch Flächen- und Volumenintegrale über Funktionen betrachtet werden. Dafür betrachten wir beispielhaft die Masse eines Quaders der Kantenlängen a, b, c, dessen Dichte ϱ ortsabhängig ist:

$$M = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z\,\varrho(x,y,z) = \int_V \varrho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V\,. \tag{13.18}$$

13.3 Eigenschaften und Rechenregeln

- Linearität: $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$