# Auffrischungskurs Mathematik

## – Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

**Thema 1:** Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

**Vorbereitung der Übung:** Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

**Binomische Formeln**

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

**Potenzgesetze**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

**Aufgabe 1:** *Bruchrechnung* Ziel: (a) bis (f)

(a) $$\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = \underline{\underline{b-a}}$$

(b) $$\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a + \cancel{b} + a - \cancel{b}}{\cancel{a} + b - \cancel{a} + b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

(c) $$\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}\left(\frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2 - y^2}{x+y}\right) = \frac{x-y}{\cancel{x}} \underbrace{\left(\frac{x+y}{y} - 1\right)}_{\frac{\cancel{x}}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

(d) $$\frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

(e) $$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

(f) $\frac{a^2-1}{a^2+a}-\cancel{a}\frac{a+1}{a^{\cancel{3}2}-\cancel{a}}+\frac{1}{a}+\frac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$

$=\frac{1}{a}\frac{\cancel{(a+1)}(a-\cancel{1})}{\cancel{a+1}}-\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)}+\cancel{\frac{1}{a}}+\frac{\cancel{4a+4}}{\cancel{4(a+1)}(a-1)}=1-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-1}=\underline{\underline{1}}$

(g) $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\frac{\sqrt{2}}{ax}-\frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]$ für $x=\frac{1}{a-1}$

$$=\frac{a+x+1}{a+x-1}\left[\frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]=\frac{a+x+1}{\cancel{a+x-1}}\frac{\overbrace{(a+x)^2-1}^{(a+x+1)(\cancel{a+x-1})}}{\sqrt{2}a^2x^2}=\underbrace{\frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2}}_{x+a+1=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}}=\underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}}$$

**Aufgabe 2:** *Potenzgesetze* Ziel: (a) bis (c)

(a) $\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n=\frac{(a+b)^n\cancel{(a-b)^n}}{\cancel{(x+y)^n}(x-y)^n}\frac{\cancel{(x+y)^n}}{\cancel{(a-b)^n}}=\underline{\underline{\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n}}$

(b) $\frac{b^xc^y(ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0,5}\right)^z\right]^2}=a^{2z+y-(y-x+2z)}b^{x+2z+y-x-2z}c^{y-x-(y-x-z)}=\underline{\underline{a^xb^yc^z}}$

(c) $\frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$
$=a^{1-n+4n-3+4-3n}b^{-1-2n+5+3n-6}(a+b)^{3n-4+3-2n-n+2}$
$=\underline{\underline{a^2b^{n-2}(a+b)}}$

(d) $\left(a^{n+2}-a^n\right):(a^3+a^2)=\frac{a^n}{a^2}\frac{a^2-1}{a+1}=\underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}}$

(e) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^3=a^{-8-6}b^{-10-9}x^{2+3}y^{-6-6}=\underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}}}$

**Aufgabe 3:** *Umformungen mit Wurzelausdrücken* Ziel: (a) bis (b)

**Wurzelgesetze**

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\quad \sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b},\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n}=\sqrt[pq]{a^{mq+np}},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}}=\sqrt[pq]{a^{mq-np}}$$

Beispiel für "Rationalmachen des Nenners":

$$r+\sqrt{1+r^2}-\frac{1}{r+\sqrt{1+r^2}}=r+\cancel{1+r^2}-\frac{r-\sqrt{1+r^2}}{-1}=\underline{\underline{2r}}.$$

(a) $$\sqrt[6]{a^3}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab}=\frac{1-\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{ab}}{1-ab}=\frac{(1-\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}}{1-ab}=\underline{\underline{\frac{1+ab}{1-ab}}}$$

(b) $$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}\quad \text{für } x=\frac{2am}{b(1+m^2)}\quad \text{mit } |m|<1$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}\right)^2}{2bx}=\frac{\cancel{2}a+\cancel{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}}{\cancel{2}bx}=\frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4a^2m^2}{(1+m^2)^2}}}{2am}(1+m^2)$$

$$=\frac{1+m^2+\sqrt{(1+m^2)^2-4m^2}}{2m}=\frac{1+m^2+1-m^2}{2m}=\underline{\underline{\frac{1}{m}}}$$

(c) $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{a\sqrt{b}+\cancel{b\sqrt{a}}-\cancel{\sqrt{ab}}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\,\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt[4]{b}\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}$$

$$=\underline{\underline{a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}}$$

**Aufgabe 4:** *Algebraische Umformungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach $x$ auf.

(a)
$$(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$$
$$\cancel{(m^2-n^2)x^2}+(bn-an+bm-am)x=\cancel{x^2(m^2-n^2)}-1$$
$$(a-b)(m+n)x=1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{1}{(a-b)(m+n)}}}$$

(b)
$$\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2} \qquad |\cdot b(a^2-b^2)$$
$$(ax+b)(a+b)-(a-bx)(a-b)=2b(ax+b)$$
$$(ax+b)\cancel{(a-b)}-(a-bx)\cancel{a-b}=0 \qquad (a\neq b)$$
$$(a+b)x=a-b \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{a-b}{a+b}}}$$

(c)
$$\frac{x-1}{n-1}+\underbrace{\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}}_{n^4-1=(n^2+1)(n+1)(n-1)}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n} \qquad |\cdot(n-1)(n+1)$$
$$\left(\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)\right)x=\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)$$
$$4x=3 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=\frac{3}{4}}}.$$

(d)
$$a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$$
$$\cancel{a-b-1}\sqrt{x}=a^2-b^2-(a+b)=(a+b)\cancel{(a-b-1)} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x=(a+b)^2}}$$

(e)
$$\frac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\frac{y^2}{1-2y}}, \quad \text{siehe 1b) mit } a=x, b=\sqrt{1-4y^2}$$
$$\frac{x}{\cancel{\sqrt{1-4y^2}}}=\frac{|y+1|}{\cancel{\sqrt{1+2y}}}\frac{|y-1|}{\cancel{\sqrt{1-2y}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \underline{\underline{x=y^2-1}} & \text{für} \quad |y|\geq 1 \\ \underline{\underline{x=1-y^2}} & \text{für} \quad |y|<1. \end{cases}$$

# AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

## – AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

**Thema 2:** Lineare Gleichungssysteme

**Tafelbeispiel:** $\dfrac{10(x+y)+3}{x-2y+4} = 1, \quad \dfrac{36x-3y}{7(x-y)+3} = 3$

1. Sortieren nach $x$ und $y$

$$\begin{aligned} 9x + 12y &= 1 \quad (1) \\ 15x + 18y &= 9 \quad (2) \end{aligned}$$

2. Prüfe auf lineare Unabhängigkeit, d. h. Berechne $a_1 b_2 - a_2 b_1$ (Determinante, vgl. Vorlesung):

$$9 \cdot 18 - 15 \cdot 12 = 162 - 180 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{genau ein Lösungspaar } (x, y)$$

3. Lösen, bspw. durch geschickte Linearkombination (Elimination von $y$)

$$\begin{aligned} 2\cdot(2) - 3\cdot(1): \quad & 3x = 15 \quad \Rightarrow x = 5 \\ \text{in } (1): \quad & 12y = -44 \quad \Rightarrow y = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lösungsmenge} \quad \mathbb{L} = \underline{\underline{\left\{\left(5; -\frac{11}{3}\right)\right\}}}$$

**Aufgabe 1:** *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten* Ziel (a) bis (d)

(a)
$$\begin{aligned} 33x + 12y &= 25 \quad (1) \\ 11x - 3y &= 6 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - 3\cdot(2): \quad 21y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}, \quad \text{in (2):} \quad x = \frac{7}{11} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \underline{\underline{\left\{\left(\frac{7}{11}; \frac{1}{3}\right)\right\}}}$$

(b)
$$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3y}{3x-y} &= \frac{17}{9} \\ \frac{3x+4y}{6x-1} &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \quad (1) \\ 9x - 4y &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - (2): \quad 6x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$3\cdot(1) - (2): \quad 8y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \underline{\underline{\left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)\right\}}}$$

(c)
$$\left.\begin{aligned}\frac{x+2}{y+3}&=\frac{1}{3}\\ \frac{y+3}{2y-5x}&=\frac{3}{5}\end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}3x-y&=\phantom{-1}-3 \quad (1)\\ 15x-y&=-15\quad (2)\end{aligned}$$

$$(1)-(2):\quad -12x=12\quad\Rightarrow\quad x=-1$$

$$\text{in }(1):\qquad y=0\quad\Longrightarrow\quad \mathbb{L}=\{(-1;0)\}$$

(d)
$$ax+by=2a\quad (1)$$

$$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=\frac{2}{a}\quad (2)$$

$$(1)-ab\cdot(2):\ \cancel{2}by=\cancel{2}(a-b)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{a}{b}-1$$

$$\text{in }(1):\quad ax+\cancel{a}-b=\cancel{2}a\quad\Rightarrow\quad x=\frac{b}{a}+1\quad\Longrightarrow\quad \mathbb{L}=\left\{\left(\frac{b}{a}+1;\frac{a}{b}-1\right)\right\}$$

(e)
$$x+14y=\frac{1}{\sqrt{2}}-7\sqrt{2}\quad (1)$$

$$3\sqrt{2}x-\frac{y}{\sqrt{3}}=3+\frac{1}{\sqrt{6}}\quad (2)$$

$$(1)-\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(2):\quad \cancel{\left(14+\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)}y=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-7\sqrt{2}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{3\sqrt{12}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\left(14+\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)}\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{in }(1):\quad x-\cancel{7\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{7\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Longrightarrow\quad \mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

(f)
$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=a+b\quad (1)$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2b\quad (2)$$

$$(a+b)\cdot(1)-a\cdot(2):\quad \left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}\right)y=a^2+b^2$$

$$\cancel{(\cancel{ab}+b^2+a^2-\cancel{ab})}y=b(a-b)(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow y=b(a-b)$$

$$\text{in }(1):\quad \frac{x}{a+b}+\cancel{b}=a+\cancel{b}\quad\Rightarrow x=a(a+b)\quad\Longrightarrow\quad \mathbb{L}=\{(a(a+b);b(a-b))\}$$

(g)
$$39x-38y=1\quad (1)$$

$$91x-57y=4\quad (2)$$

$$2\cdot(2)-3\cdot(1):\quad (182-117)x=5\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{13}$$

$$\text{in }(1):\quad 38y=2\quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{19}\quad\Longrightarrow\quad \mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{13};\frac{1}{19}\right)\right\}$$

**Aufgabe 2:** *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten* Ziel: (a) und (b)

*Tafelbeispiel:*

$$\begin{aligned} x + \phantom{2}y + \phantom{4}z &= 9 \quad (1)\\ x + 2y + 4z &= 15 \quad (2)\\ x + 3x + 9z &= 23 \quad (3) \end{aligned}$$

Vorgehen: Wir wollen eine Linearkombination der drei Gleichungen finden, sodass (bspw.) $x$ und $y$ verschwinden; d. h. in $a \cdot (1) + b \cdot (2) + c \cdot (3)$ soll $a + b + c = 0$ sein und $a + 2b + 3c = 0$. Wir haben offenbar die Freiheit, $a = 1$ zu wählen, also $b = -2$ und $c = 1$.

$$\begin{aligned} &(1) - 2 \cdot (2) + (3): \quad 2z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1\\ &\text{in } (1): \quad x + \phantom{2}y = 8 \quad (4)\\ &\text{in } (2): \quad x + 2y = 11 \quad (5) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4),(5) können nun mit den früheren Methoden gelöst werden.
Optionale Kreativlösung: Angenommen $x, y \in \mathbb{N}$. Nach (5) muss $x$ ungerade sein, damit nach (4) auch $y$. Die einzigen positiven Zerlegungen der Zahl 8 in zwei ungerade Zahlen sind (1,7) und (3,5). Nur letztere löst (4) und (5). Wir erhalten $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(5;3;1)\}}}$.

*Lösung:*

(a)
$$\begin{aligned} x - \phantom{7}y + 5z &= 5 \quad (1)\\ 3x + 7y - 5z &= 5 \quad (2)\\ x + \phantom{7}y - \phantom{5}z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$2 \cdot (1) + (2) - 5 \cdot (3): \quad 10z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in } (1): \quad x - y = 0\\ &\text{in } (3): \quad x + y = 2 \end{aligned}\right\} \quad x = y = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;1;1)\}}}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - 4y + 3z &= \phantom{-}4 \quad (1)\\ -x + \phantom{4}y - \phantom{3}z &= -2 \quad (2)\\ 7x + 4y - 5z &= \phantom{-}0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(1) + 8 \cdot (2) - (3): \quad -12x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in } (1): \quad -4y + 3z = \phantom{-}1\\ &\text{in } (2): \quad \phantom{-4}y - z = -1 \end{aligned}\right\} \quad y = 2, z = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;2;3)\}}}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y &= b + a \quad (1)\\ x + z &= a + c \quad (2)\\ y + z &= c + b \quad (3) \end{aligned}$$

Lösung durch Draufschauen.

$$\begin{aligned} &(1) + (2) - (3): \quad 2x = 2a\\ &(1) - (2) + (3): \quad 2y = 2b\\ &(2) + (3) - (1): \quad 2z = 2c \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a;b;c)\}}} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 6x-4y+\ 8z&=0 \quad (1)\\ -2x+\ y-\ z&=0 \quad (2) \qquad \text{Da } (1)-3\cdot(2)=(3), \text{ ist das System unterbestimmt.}\\ 12x-7y+11z&=0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(1)+3\cdot(2): \quad -\ y+5z=0 \quad \Rightarrow y=5z$$

$$(1)+4\cdot(2): \quad -2x+4z=0 \quad \Rightarrow x=2z \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(2z;5z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}}}$$

**Aufgabe 3:** *Parametrisierung von Lösungsmengen*

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x-7y=1$ an für

(a) $x,y\in\mathbb{R}$;

(b) $x,y\in\mathbb{N}$.

(a) Für $x,y\in\mathbb{R}$ ist nichts zu beachten. Wir Lösen die Gleichung nach $x$ auf und erhalten

$$x=\frac{1+7y}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1+7\lambda}{13};\lambda\right)\mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}}}.$$

(b) Für $x,y\in\mathbb{N}$ muss $1+7n, n\in\mathbb{N}$, ein Vielfaches von 13 sein. Die kleinste natürliche Zahl, für die das gilt, ist $n=11$ (ausprobieren), d. h. alle übrigen Teiler liegen in 13er-Schritten darüber.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $7n+1$ | 8 | 15 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | 64 | 71 | 78 |
| 13-Reihe | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 | | | | | |

Setzen wir also $\lambda=11+13n$ in $\mathbb{L}$ von oben ein, ergibt sich $\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{(6+7n;11+13n)\mid n\in\mathbb{N}_0\right\}}}$.

**Aufgabe 4:** *Gleichungssysteme* Ziel (a) und (b)

*Tafelbeispiel:* In dieser Aufgabe werden nicht linear aussehende Gleichungen auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt.

$$\begin{aligned} (1-x)^2&=5y^2-4(x-2)^2 \quad (1)\\ 2(x^2-y^2)&=6x-5 \qquad\qquad (2). \end{aligned}$$

Sortieren wir das Gleichungssystem um, ergibt sich

$$\begin{aligned} 5(x^2-y^2)-18x+17&=0 \quad (3)\\ 2(x^2-y^2)-\ 6x+\ 5&=0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$(3)-\frac{5}{2}\cdot(2): \quad -3x+\frac{9}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

$$\text{in } (2): \quad y^2=x^2-3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{4} \qquad y=\pm\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\right)\right\}}}.$$

*Lösung:*

(a)
$$x^2+y^2=2(xy+2) \quad (1) \quad \Rightarrow \quad (x-y)^2=4 \Rightarrow x-y=\pm 2 \quad (1a)$$
$$x\ +y\ =6 \qquad (2)$$
$$(1a)+(2): \quad 2x=\begin{cases}8, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases}$$
$$\text{in } (2): \quad y=\begin{cases}2, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(4;2),(2;4)\Big\}}}$$

(b)
$$\frac{12}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5 \quad (1)$$
$$\frac{8}{\sqrt{x-1}}+\frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6 \quad (2)$$
$$2\cdot(1)-(2): \quad 16=4\sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad x=17$$
$$2\cdot(1)-3\cdot(2): \quad 20=8\sqrt{y+\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad y=6 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(17;6)\Big\}}}$$

Optionaler Hinweis: nicht immer muss alles mühsam quadriert und aufgelöst werden, sondern man kann auch versuchen draufzuschauen.

- Was ergibt 8 multipliziert mit 20? Antwort: $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
- Die Wurzel woraus ist $\frac{5}{2}$? Antwort: $\frac{25}{4}$.
- Damit ist $y=\dfrac{25}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{24}{4}=6$.

(c)
$$\frac{x^2-y^2}{2x+3}+y^2=(x+y)x-xy \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-y^2}{2x+3}=x^2-y^2 \quad (1)$$
$$y-2x=3 \quad (2)$$

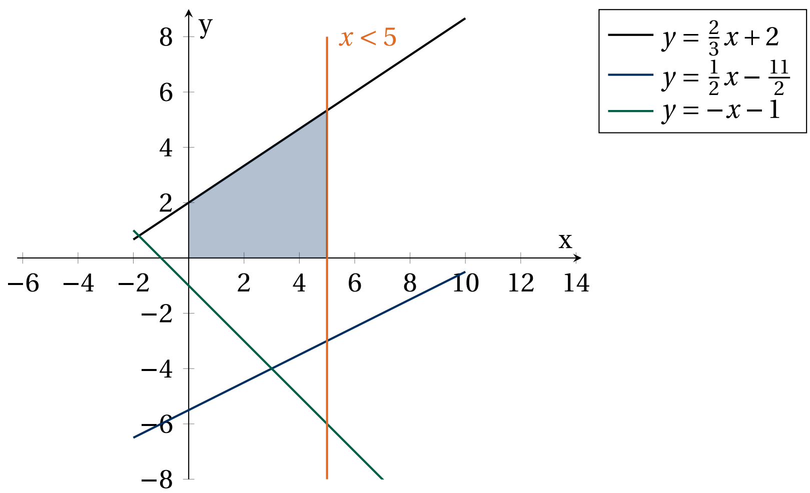
$$\text{Fall } x^2\neq y^2 \quad \left.\begin{array}{ll}(1): 1=2x+3 & \Rightarrow x=-1\\ \text{in } (2): \quad y=1 & \end{array}\right\} \text{Widerspruch}$$

$$\text{Fall } x=\pm y \quad (2): \quad y=\begin{cases}-3, & \text{oberes VZ}\\ 1, & \text{unteres VZ}\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(-3;-3),(-1;1)\Big\}}}$$

**Aufgabe 5:** *Ungleichungssysteme*

(a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6\,, \\ x - 2y &< 11\,, \\ x &> -y - 1\,, \\ x &< 5\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

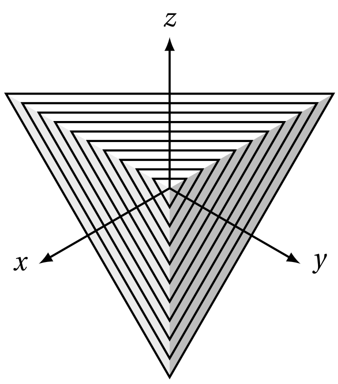



Offenbar können die zweite und dritte Gleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am schraffierten Gebiet ändert.

(b) * Welches Gebiet im ersten Oktanden ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z\,, \\ x + z &\geq y\,, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige (unendlich große) Pyramide, deren Spitze auf dem Koordinatenursprung liegt und deren Kanten jeweils die $x-y-$, $x-z-$ und $x-z$-Ebene halbieren.



# Auffrischungskurs Mathematik

## – Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

**Thema 3:** Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

**Aufgabe 1:** *Quadratische Gleichungen* Ziel: (a) und (b)

*Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für $x$ durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der $pq$-Formel.*

*Tafelbeispiel:* Ziel ist es, die Ausdrücke in die Form $(x+a)^2$ oder $(ax+b)^2$ zu bekommen.

1. $3x^2+18x+15=0, \quad \Rightarrow \quad x^2+6x+5=0,$

   vgl. mit $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2 \quad \Rightarrow 2a \overset{!}{=} 6 \Rightarrow a=3, \Rightarrow a^2=9.$

   $\Rightarrow \underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2} -4=0 \quad \overset{\text{Wurzel}}{\Longrightarrow} \pm(x+3)=2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=-1, x_2=-5}}$

2. $16x^2-56x-15=0,$

   vgl. mit $(ax+b)^2 = a^2x^2+2abx+b^2 \quad \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4, \Rightarrow a^2=9.$

   $2ab=-56 \quad \Rightarrow \quad b=-7 \Rightarrow b^2=49$

   $\underbrace{16x^2-56x+49}_{(4x-7)^2} -64=0 \quad \Rightarrow \quad \pm(4x-7)=8 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{15}{4}, x_2=-\frac{1}{4}}}$

*Lösung*:

(a)
$$x^2-10x+9=0 \quad |+16$$
$$(x-5)=16 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_1=9, x_2=1}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=5\pm\sqrt{25-9}=\begin{cases}9\\1\end{cases}$$

(b)
$$x^2+x-12=0 \quad |+\frac{49}{4}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_1=3, x_2=-4}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$$

Es ist immer am Vorfaktor von $x$ abzulesen, welches $a$ in $(x\pm a)^2$ steckt; hier offenbar $n=1/2$, wir erzeugen also $1/4$ auf der linken Seite.

(c)
$$x^2-\sqrt{8}x+1=0 \quad |+1 \quad (\sqrt{8}=2\sqrt{2})$$
$$(x-\sqrt{2})^2=1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2}=\pm1+\sqrt{2}}}, \quad \text{Probe: } x_{1/2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}=\sqrt{2}\pm1.$$

**Aufgabe 2:** *Wurzeln quadratischer Gleichungen*

*Tafelbeispiel:*

1. Wiederholung Vieta'scher Wurzelsatz:
   Habe die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Wurzeln $x_1$ und $x_2$, dann lautet die Linearfaktorzerlegung

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 \underbrace{-(x_1 + x_2)}_{p} + \underbrace{x_1 x_2}_{q}$$

2. Wann sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung identisch?

$$x_1 = x_2 = a \quad \overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad p = -(a + a) = 2a, \quad q = a^2$$

   Die Gleichung muss von der Form $0 = x^2 - 2ax + a^2$ sein (vgl. 2. binomische Formel).

3. Von welcher Form ist eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln den Quotienten $a$ und die Differenz $b$ haben?

$$\frac{x_1}{x_2} = a, \quad x_1 - x_2 = b \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{ab}{a-1}, \quad x_2 = \frac{b}{a-1}$$
$$\overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad p = -\frac{(a+1)b}{a-1} \quad , \quad q = \frac{ab^2}{(a-1)^2}$$
$$\Longrightarrow 0 = x^2 - \frac{(a+1)b}{a-1}x + \frac{ab^2}{(a-1)^2}$$

*Lösung*:

(a) *Stellen Sie $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.*

$$\text{Vieta: } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = x_1 x_2 \quad (1), \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad (2)$$

1) Variante 1: raten und konstruieren
   Gleichung (2) legt nahe, dass $x_1 = a/b$, $x_2 = b/a$, jedoch gilt dann $x_1 x_2 = 1$. Welche ist die einfachste Modifikation dieser Idee, die immer noch (2) erfüllt?

$$x_1 = \frac{a}{b} + n, \quad x_2 = \frac{b}{a} - n$$
$$\Rightarrow x_1 x_2 = 1 + n\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) - n^2 \stackrel{!}{=} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad n = -1$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{a}{b} - 1, \quad x_2 = \frac{b}{a} + 1}}$$

   Da es sich bei $x_{1/2}$ um die Wurzeln einer qudratischen Gleichung handelt, ist die Lösung - bis auf Numerierung - eindeutig.

2) Variante 2: Lösen der qudratischen Gleichung. Nach Vieta folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x + \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \\
\Rightarrow x_{1/2} &= \frac{a^2+b^2}{2ab} \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} - \frac{a^2-b^2}{ab}} \\
&= \frac{a^2+b^2 \pm \sqrt{a^4+b^4+2a^2b^2-4a^3b+4ab^3}}{2ab}
\end{aligned}
$$

Versuche den Wurzelterm zu faktorisieren:

$$
\begin{aligned}
(a^2 \pm b^2 \pm 2ab)^2 &= (a^2 \pm b^2)^2 + 4a^2b^2 \pm 4ab(a^2+b^2) \\
&= a^4 + b^4 + 4a^2b^2 \pm 2a^2b^2 \pm 4a^3b + (\pm 1 \cdot \pm 1)4ab^3.
\end{aligned}
$$

Wir sollten also zweimal das untere Vorzeichen wählen, dann folgt:

$$
\begin{aligned}
x_{1/2} &= \frac{a^2+b^2 \pm (a^2-b^2-2ab)}{2ab} = \begin{cases} \frac{a}{b} - 1 \\ \frac{b}{a} + 1 \end{cases} \\
\Rightarrow & \underline{\underline{x_1 = \frac{a}{b} - 1, \quad x_2 = \frac{b}{a} + 1}}
\end{aligned}
$$

(b) *Bestimmen Sie in der Gleichung* $5x^2 - kx + 1 = 0$ *den Koeffizienten* $k$ *so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.*
Wir berechnen die Wurzeln mit der $pq$-Formel

$$
x^2 - \frac{k}{5}x + \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{k}{10} \pm \sqrt{\frac{k^2}{100} - \frac{1}{5}}
$$

$$
\Rightarrow x_1 - x_2 = 2\sqrt{\frac{k^2-20}{100}} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k^2-20}{100} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow k^2 = 45 \Rightarrow \underline{\underline{k = \pm 3\sqrt{5}}}.
$$

(c) *Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ *so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich* $p$ *und* $q$ *sind.*
Mit Satz von Vieta folgt

$$
\begin{aligned}
& p = -(x_1 + x_2) \overset{!}{=} -(p+q) \quad \Rightarrow \quad 2p + q = 0 (*) \\
& q = x_1 x_2 \overset{!}{=} pq, \quad \text{Fallunterscheidung} \\
& \left.\begin{array}{ll} \text{Fall } q = 0: & p = 0 \quad \text{aus (*)} \\ \text{Fall } q \neq 0: & p = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} q = -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\{(p;q)\} = \{(0;0),(1;-2)\}}}
\end{aligned}
$$

(d) *Gegeben ist die quadratische Gleichung* $ax^2 + bx + c = 0$*. Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich*

- *dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.*

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x_1' = 2x_1, x_2' = 2x_2 \text{ folgt } \quad \frac{2b}{a} = -(x_1' + x_2') = p'$$
$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x_1' = 2x_1, x_2' = 2x_2 \text{ folgt } \quad \frac{4c}{a} = x_1' x_2' = q'$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{ax^2 + 2bx + 4c = 0}}$$

- *den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.*

$$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \text{mit } x_1' = \frac{1}{x_1}, x_2' = \frac{1}{x_2} \text{ folgt } \quad \frac{b}{a} = -\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2}'\right) = -\frac{x_1' + x_2'}{x_1' x_2'} = \frac{p'}{q'}$$
$$q = \frac{c}{a} = x_1 x_2, \quad \text{mit } x_1' = \frac{1}{x_1}, x_2' = \frac{1}{x_2} \text{ folgt } \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{x_1' x_2'} = \frac{1}{q'}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{cx^2 + bx + a = 0}}$$

**Aufgabe 3:** *Gleichungssysteme*

*Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für $x$ und $y$.*

*Tafelbeispiel:*

1. Lösung mit $p - q$-Formel:

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 = 5(y-1) \qquad (2)$$
$$(1)-(2): \quad y^2 = \frac{1}{2}(7 - 5y) \quad \Rightarrow \quad 0 = y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow \quad y_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{7}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -7/2 \end{cases}$$
$$\text{Fall } y = 1: \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$\text{Fall } y = -\frac{7}{2}: \quad x^2 = -\frac{41}{4} \quad \text{keine (reelle) Lösung} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;1), (-1;1)\}}}$$

2. Lösung mit Satz von Vieta:

$$\begin{matrix} x + y + y^2 = 3 \\ y^2(x+y) = -54 \end{matrix} \quad \text{mit } u \equiv x + y, v \equiv y^2 \text{ folgt} \quad \begin{matrix} u + v = 3 \\ uv = -54 \end{matrix}$$

Vieta: $u, v$ sind Wurzeln der Gleichung $0 = z^2 - 3z - 54$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 54} = \frac{3}{2} \pm \frac{15}{2} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

$$\text{Fall: } v = 9, u = -6: \quad y = \pm 3, \quad x = -6 - y = \begin{cases} -9, & y = 3 \\ -3, & y = -3 \end{cases}$$

Fall:$u = 9, v = -6: \quad y^2 = -6 \quad \Rightarrow$ keine (reelle) Lösung.

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-9;3), (-3,3)\}}}$.

*Lösung:*

(a)

$$\begin{aligned} x+y^2 &= 7 \\ xy^2 &= 12 \end{aligned} \quad \text{mit } u \equiv x, v \equiv y^2 \text{ folgt} \quad \left.\begin{aligned} u+v &= 7 \\ uv &= 12 \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{\text{Vieta:}}{\Longrightarrow} \quad z^2-7z+12=0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}-12} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Fall 1: } x=4, y=\pm\sqrt{3} \\ &\text{Fall 2: } x=3, y=\pm 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(4;\pm\sqrt{3}), (3;\pm 2)\}}}$$

(b)

$$\begin{aligned} x+xy+y &= 11 \quad (1) \\ x^2y+xy^2 &= 30 \quad (2) \end{aligned} \quad \text{mit } u \equiv xy, v \equiv x+y \quad \begin{aligned} u+v &= 11 \\ u \cdot v &= 30 \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Vieta}}{\Longrightarrow} \quad z^2-11z+30=0 \quad , \quad z_{1/2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}-30} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$$

$$\text{Fall 1: } \left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x+y &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta} \quad q^2-5q+6=0 \quad \Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-6} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x=3, y=2} \quad \text{oder} \quad \underline{x=2, y=3}$$

$$\text{Fall 2: } \left.\begin{aligned} xy &= 5 \\ x+y &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta} \quad q^2-6q+5=0 \quad \Rightarrow \quad q_{1/2} = 3 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x=5, y=1} \quad \text{oder} \quad \underline{x=1, y=5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(3;2), (2;3), (5;1), (1;5)\}}}$$

Man beachte, wie die Symmetrie der Gleichungen unter Vertauschung $x \leftrightarrow y$ und $xy \leftrightarrow x+y$ in der Lösungsmenge wiederzufinden ist.

(c)

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{5}{2}xy \quad (1) \\ x-y &= \frac{1}{4}xy \quad (2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} (x-y)^2 &= \frac{xy}{2} \\ (x-y)^2 &= \frac{x^2y^2}{16} \end{aligned}\right\} \quad 8xy = (xy)^2$$

$$\text{Fall 1: } \quad \left.\begin{aligned} x=0 &\overset{(1)}{\Rightarrow} y=0 \\ \text{oder } y=0 &\overset{(2)}{\Rightarrow} x=0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{x=0, y=0}$$

$$\text{Fall 2: } \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad y \neq 0: \quad 8 = xy$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in (1):} \quad x^2+y^2 = 20 \\ &\text{in (2):} \quad x-y = 2 \end{aligned}\right\} \quad 2x^2-4x = 16$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \quad , \quad y = x-2 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{(x;y)\} = \{(0;0), (4;2), (-2;4)\}}}$$

Da das Quadrieren von Gleichung (2) keine Äquivalenzumformung darstellte, müssen alle Lösungspaare noch durch Probe bestätigt werden.
Beachte außerdem die Aussagenlogik bei der Fallunterscheidung: Das Komplement zu "$x \neq 0$ und $y \neq 0$" ist "$x = 0$ oder $y = 0$"; dass dennoch beide gleichzeitig Null sind, folgt erst einen Schritt später.

**Aufgabe 4:** *Wurzelgleichungen* Ziel: (a) bis (c)

*Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für $x$.*

*Tafelbeispiel:*

$$\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-4}=1$$
$$\sqrt{3x-5}=1-\sqrt{2x-4} \quad |^2$$
$$3x-5=1+2x-4-2\sqrt{2x-4} \quad \text{, Wurzel isolieren}$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2x-4}=2-x \quad |^2$$
$$4(2x-4)=x^2-4x+4 \quad \Longrightarrow \quad 0=x^2-12x+20 \quad , \quad x_{1/2}=6\pm\sqrt{36-20}=\begin{cases}10\\2\end{cases}$$

Da Quadrieren *keine Äquivalenzumformung* ist, können zusätzliche Lösungen entstehen und es muss die Probe gemacht werden!

Probe: $x=10: \quad \sqrt{25}+\sqrt{16}=9\neq 1$ *keine Lösung*

$x=2: \quad \sqrt{1}+\sqrt{0}=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=2}}$

Beachte außerdem, dass Einschränkungen an die in den Gleichungen auftetenden Konstanten vorliegen können. *Lösung:*

(a)

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2 \qquad (\text{offenbar } x\geq 1)$$
$$\sqrt{3x+1}=2+\sqrt{x-1} \quad |^2$$
$$3x+1=3+4\sqrt{x-1}+x$$
$$\Rightarrow x-1=2\sqrt{x-1} \quad |^2$$
$$(x-1)^2=4(x-1) \quad \Longrightarrow x=1 \quad , \quad \stackrel{x\neq 1}{\Longrightarrow} x=5$$
$$\text{Probe: } \begin{cases} x=2: \ \sqrt{4}-\sqrt{0}=2 \\ x=5: \ \sqrt{16}-\sqrt{4}=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=1, x_2=5}}.$$

(b)

$$\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x} \quad |^2 \qquad (a=0\Rightarrow x=0)$$
$$\cancel{x}+\cancel{a}=a^{\cancel{2}}+\cancel{x}-2\cancel{a}\sqrt{x}$$
$$2\sqrt{x}=a-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{(a-1)^2}{4}}}$$
$$\text{Probe: } \sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}+a}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+1+2a}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2}=\frac{|a+1|}{2}$$
$$a-\sqrt{x}=a-\frac{|a-1|}{2}=\begin{cases}\frac{a+1}{2}, & a\geq 1\\ \frac{3a-1}{2}, & a<1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Bedingung} \quad a\geq 1$$

(c)

$$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b \overset{\text{draufschauen}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{x=0}} \quad \text{für} \quad a\geq 0, b\geq 0$$

$$\cancel{a^2}-\cancel{x}=\underbrace{\cancel{a^2}+b^2+2ab}_{(a+b)^2}+b^2-\cancel{x}-2(a+b)\sqrt{b^2-x}$$

$$\cancel{(a+b)}\sqrt{b^2-x}=b\cancel{(a+b)} \quad \Rightarrow x=0.$$

Schon in der Zeile zuvor zeigt sich: Die Gleichung ist linear in $x$, d. h. die Lösung durch Draufschauen ist tatsächlich die Einzige.

(d)

$$\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3 \quad |^2$$

$$\sqrt{3x+4}=8-x \quad |^2$$

$$\Rightarrow 0=x^2-19x+60$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}-60}=\begin{cases}15 & \Rightarrow \text{Probe: falsch}\\ 4 & \Rightarrow \text{Probe: wahr}\end{cases} \qquad \underline{\underline{x=4}}$$

(e)

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-3/2}=\frac{6}{\sqrt{2x-1}} \qquad (\text{offenbar } x\geq \frac{3}{2})$$

$$\sqrt{2x^2-4x+3/2}=7-2x$$

$$0=2x^2-24x+\frac{95}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=6\pm\sqrt{36-\frac{95}{4}}=\begin{cases}\frac{19}{2} & \Rightarrow \text{Probe: falsch}\\ \frac{5}{2} & \Rightarrow \text{Probe: wahr}\end{cases} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{5}{2}}}.$$

**Aufgabe 5:** *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

*Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.*

*Tafelbeispiel:* Beachte zunächst, dass nicht jedes Polynom als Produkt (reeller) Linearfaktoren geschrieben werden kann, bspw.

$$x^2-3x+6 \quad \text{, da} \quad 0=x^2-3x+6 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}}.$$

Oft lässt sich die Zerlegung durch Vergleich mit

$$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$$

erkennen, bspw. $x^2+13x+12 \Rightarrow m+n=13, mn=12$. Dort erkennen wir schnell $m=1, n=12$ und somit

$$x^2+13x+12=(x+1)(x+12)$$

(a) $x^2+2x-15 \quad \Rightarrow m+n=2 \quad \text{und} \quad m\cdot n=-15$

$\Rightarrow$ klappt für $m=5, n=-3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2+2x-15=(x+5)(x-3)}}$.

(b) $4x^2+8x-5$

Konstruktion: $(ax+m)(bx+n)=abx^2+(an+bm)x+mn$

Wir können nun zwei Zahlen $x_1=an, x_2=bm$ suchen, deren Summe gleich dem linearen Faktor $x_1+x_2=(an+bm)=8$ und deren Produkt gleich $x_1\cdot x_2=(ab)\cdot(mn)=4\cdot(-5)=-20$ entspricht. Wir finden durch ausprobieren $x_1=-2, x_2=10$ und können nun den linearen Term in $x$ aufteilen

$$4x^2-2x+10x-5=2x(2x-1)+5(2x-1)=\underline{\underline{(2x-1)(2x+5)}}.$$

(c) 
$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+adx^2+bdx &= x(ax^2+(b+ad)x+bd)=x(\underbrace{ax^2+bx}_{x(ax+b)}+(ax+b)d) \\ &= \underline{\underline{x(ax+b)(x+d)}}. \end{aligned}$$

(d) 
$$(a-x)^2+(x-b)^2-a^2-b^2=2x^2-2ax-2bx=\underline{\underline{2x(x-a-b)}}.$$

(e) 
$$\begin{aligned} a\sqrt{8}x^2-2kax-3ak+ax\sqrt{18} &= a(\sqrt{x}x^2+\sqrt{18}x-k(2x+3)) \\ &= a(\sqrt{2}x(2x+3)-k(2x+3))=\underline{\underline{a(2x+3)(\sqrt{2}x-k)}}. \end{aligned}$$

# Auffrischungskurs Mathematik

## – Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

**Thema 4:** Umgang mit Polynomen höheren Grades
Das Summenzeichen

**Aufgabe 1:** *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

(a) *Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln a, b und c hat.*

$$f_3(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = \underline{\underline{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc}}$$

*Bemerkung*: Hier kann man versuchen, sich klarzumachen, wie der verallgemeinerte Satz von Vieta aussieht.

(b) *Zerlegen Sie das Polynom $f_4(x) = x^3+2x^4+4x^2+2+x$ in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?*

$$f_4(x) = x^3+\underbrace{2x^4+4x^2+2}_{2x^4+2x^2+2x^2+2=2x^2(x^2+1)+2(x^2+1)}+x = (x^2+1)(2x^2+2)+\underbrace{x^3+x}_{x(x^2+1)} = \underline{\underline{(x^2+1)(2x^2+x+2)}}$$

Da weder $x^2+1=0$ noch $x^2+\frac{1}{x}x+1=0$ eine (reelle) Lösung hat, besitzt das Polynom keine (reellen) Nullstellen.

(c) *Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f_5(x) = x^5-3x^3+2x$.* Offensichtlicherweise gilt $x_1 = 0$ und wir können das Polynom mit Division durch $x$ vereinfachen. Mit der Substitution $z \equiv x^2$ erhalten wir

$$0 = z^2-3z+2 \quad\Rightarrow\quad z_{1/2} = \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2} = \begin{cases}2\\1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_{2/3}=\pm\sqrt{2}}},\quad \underline{\underline{x_{4/5}=\pm 1}}.$$

(d) *Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms $f_4(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. Setzen Sie näherungsweise $\sqrt{3}\approx 3-\frac{\pi^2}{8}$.* Wir führen wieder die Substitution $z\equiv x^2$ aus und erhalten

$$0 = z^2-12z+24 \quad\Rightarrow\quad z_{1/2} = 6\pm 2\sqrt{3} \quad\text{bzw.}\quad x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{6\pm 2\sqrt{3}}.$$

Wir suchen nun das kleinste positive $x$, also 1.VZ: "+" und 2.VZ: "−"

$$x_0 = \sqrt{6-2\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3}\approx 3-\frac{\pi^2}{8}}{\approx} \sqrt{6-\left(3-\frac{\pi^2}{8}\right)} = \frac{\pi}{\underline{\underline{2}}}.$$

*Bemerkung*: Die Funktion $f_4(x)$ ist das dritte Taylorpolynom der Kosinusfunktion. Es gilt $\cos(x) = f_4(x)+\mathcal{O}\left(x^6\right)$.

**Aufgabe 2:** *Polynomdivision*

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zusatz: Für welche Werte von $n$ bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

(a)

$$
\begin{array}{llll}
(21a^3 & +34a^2b & & +25b^3) : (7a+5b) = \underline{\underline{3a^2-7ab+5b^2}} \\
-(21a^3 & +15a^2b) & & \\
\hline
 & -49a^2b & & +25b^3 \\
 & -(-49a^2b & -35ab^2 & ) \\
\hline
 & & 35ab^2 & +25b^3 \\
 & & -(35ab^2 & +25b^3) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{lllll}
(9x^3 & & -7xy^2 & +2y^3) : (3x-2y) = \underline{\underline{3x^2+2xy-y^2}} \\
-(9x^3 & -6x^2y & ) & \\
\hline
 & 6x^2y & -7xy^2 & +2y^3 \\
 & -(6x^2y & -4xy^2 & ) \\
\hline
 & & -3xy^2 & +2y^3 \\
 & & -\ (-3xy^2 & +2y^3) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

(c)

$$
\begin{array}{lllll}
(25x^4 & & -a^2x^2 & & +25a^4) : (5x^2+7ax+5a^2) = \underline{\underline{5x^2-7ax+5a^2}} \\
-(-25x^4 & +35ax^3 & +25a^2x^2) & & \\
\hline
 & -35ax^3 & -24a^2x^2 & & +25a^4 \\
 & -(-35ax^3 & -49a^2x^2 & -35a^3x & ) \\
\hline
 & & 25a^2x^2 & +35a^3x & +25a^4 \\
 & & -(25a^2x^2 & +35a^3x & +25a^4) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

(d)

$$
\begin{array}{llll}
(x^2 & +2x & -15) & : (x+n) = \underline{\underline{x+2-n+\dfrac{n(n-2)-15}{x+n}}} \\
-(x^2 & +nx) & & \\
\hline
 & (2-n)x & -15 & \\
 & -((2-n)x & +n(2-n)) & \\
\hline
 & & -15 \quad +n(n-2) & \Rightarrow 0 \overset{!}{=} n^2-2n-15 \quad \Rightarrow \quad n_{1/2} = 1 \pm \sqrt{16}
\end{array}
$$

Wir erhalten damit die beiden Werte $n_{1/2}$ die den Wurzeln des quadratischen Gleichungssystems entsprechen

$$x^2+2x-15 = (x+5)(x-3).$$

**Aufgabe 3:** *Kubische Gleichungen* Ziel: (a)

(a) *Bestimmen Sie den Wert von $m$ in der Gleichung*

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0\,, \quad \overset{x=2}{\Rightarrow} \quad -12 + m \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m = 12}}.$$

*wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln.* Wir bestimmen die restlichen Wurzeln per Polynomdivision und $pq$-Formel:

$$\begin{array}{l}
(6x^3 \ -7x^2 \ -16x \ +12) : (x-2) = \underline{6x^2 + 5x - 6} \\
\underline{-(6x^3 - 12x^2 \qquad\quad )} \\
\qquad\quad 5x^2 \ -16x + 12 \\
\qquad \underline{-(5x^2 \ -10x \qquad )} \\
\qquad\qquad\quad -6x + 12 \\
\qquad\qquad \underline{- \ \ (-6x + 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} x^2 + \frac{5}{6}x - 1 \quad \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{3}{2}}}.$$

(b) *Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung*

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0\,.$$

*Bestimmen Sie die Zahlenwerte von $m$ und $n$, und geben Sie die dritte Wurzel an.* Zu Bestimmung der Lösung setzen wir die beiden Wurzeln in die Gleichung ein:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = 2: & 4m + n = \ \ 10 & (1) \\
x_2 = 3: & 9m + n = -15 & (2) \\
\Rightarrow \quad (1) - (2): & -5m = 25 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m = -5}}, \quad \underline{\underline{n = 30}}. &
\end{array}$$

Die dritte Wurzel ermitteln wir durch Polynomdivision mit $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 \ -5x^2 \ -13x \ +30) : (x^2 - 5x + 6) = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = -\frac{5}{2}}} \\
\underline{-(2x^3 - 10x^2 + 12x)} \\
\qquad\quad 5x^2 \ -25x + 30 \\
\qquad \underline{-(5x^2 \ -25x + 30)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

**Aufgabe 4:** *Nullstellenraten* (Zusatzaufgabe)

*Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor $(x-x_0)$ vom Polynom ab.*

(a) $x^3-5x^2+8x-4, \quad \underline{\underline{x_0=1}}$ oder $\underline{\underline{x_0=2}}$

$=(x-1)(x^2-4x+4)=(x-1)(x-2)^2$ (stückweises konstruieren ohne Polynomdivision)

(b) $x^4-2x^3-13x^2+9x+9, \quad \underline{\underline{x_0=3}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$=(x+3)(x^3-5x^2+2x+3)$

(c) $x^4-3x^2+3x+2, \quad \underline{\underline{x_0=-2}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$=(x+2)(x^3-2x^2+x+1)$

(d) $x^5-x^4-3x^3+3x^2+x-1, \quad \underline{\underline{x_0=1}}$

$=(x-1)(x^4-3x^2+1)$ die andere Nullstellen sind: $x_{2/3/4/5}=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2}$

$=(x-1)(x^2-x-1)(x^2+x-1)$

**Aufgabe 5:** *Partialbruchzerlegung* Ziel: (a) bis (c)

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a) $$\frac{x-5}{x^2-2x-3} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}=\frac{(x-3)\alpha+(x+1)\beta}{x^2-2x-3}=\frac{(\alpha+\beta)x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^1: & \alpha+\beta=1 \\ x^0: & 3\alpha-\beta=5 \end{array}\right\}$ Addition: $\underline{\alpha=\frac{3}{2}}, \quad \underline{\beta=-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x-5}{x^2-2x-3}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-3)}}}$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-1} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-1}+\gamma=\frac{(x-1)\alpha+(x+1)\beta+(x^2-1)\gamma}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^2: & \underline{\gamma=1} \\ x^1: & \alpha+\beta=0 \\ x^0: & 1=\beta-\alpha-\gamma \end{array}\right\}$ $\underline{\beta=1}, \underline{\alpha=-1}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2-1}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}}$$

Alternativ kann auch eine Poylnomdivision mit Rest durchgeführt werden mit anschließender Partialbruchzerlegung des Restglieds: $\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$.

(c) $$\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\gamma}{(x-2)^2}=\frac{(x^2-4x+4)\alpha+(x^2-3x+2)\beta+(x-1)\gamma}{(x-1)(x-2)^2}$$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{lll} x^2: & \alpha+\beta=2 & \\ x^1: & -4\alpha-3\beta+\gamma=-3 & (2) \\ x^0: & 4\alpha+2\beta-\gamma=\ \ 1 & (3) \end{array}\right\}$ $(2)+(3):\quad \beta=2\Rightarrow \underline{\alpha=0}, \underline{\gamma=3}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}}}$$

Die Faktorisierung des Nenners haben wir in Aufgabe 4a bereits gesehen. Wir müssen die

Vielfachheit der Nullstelle in unserem Ansatz berücksichtigen. Durch $\alpha = 0$ sehen wir, dass die rechte Seite bei $x = 1$ keine Pollstelle hat. Die Partialbruchzerlegung hat uns also den Limes $x \to 1$ der linken Seite verschafft.

(d) $\dfrac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3}$

Da der Zähler von höherem Grade ist als das Nennerpolynom, wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 4x^3 - 5x^2 \; + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12) : (x^2 - 2x - 3) = \underline{2x^2 + 1 + \dfrac{(\sqrt{2}-5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3}} \\
\underline{-(-2x^4 - 4x^3 - 6x^2)} \\
\qquad x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12 \\
\qquad \underline{-(x^2 \quad -2x \quad -3)} \\
\qquad\qquad (\sqrt{2}-5)x \; + \sqrt{2} + 15
\end{array}$$

Die Nullstellen des Nenners lauten: $x_1 = 3, x_2 = -1$. Damit folgt

$$\frac{(\sqrt{2}-5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{(x+1)\alpha + (x-3)\beta}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich:} \quad \left.\begin{array}{l} x^1 : \alpha + \beta = \sqrt{2} - 5 \\ x^0 : \alpha - 3\beta = \sqrt{2} + 15 \end{array}\right\} \quad \text{Differenz:} \quad \underline{\beta = -5}, \quad \Rightarrow \underline{\alpha = \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2}-7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3} = 2x^2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{x-3} - \frac{5}{x+1}}}$$

**Aufgabe 6:** *Summen* Ziel: (a) bis (b)

Vereinfachen bzw. berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1}}_{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2n} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}}}$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$

*Hinweis zu (b)*: Der Term in der Summe kann mithilfe von Partialbruchzerlegung vereinfacht und die entstehende Summe auseinandergezogen werden.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(k+1) + Bk = (A+B)k + A.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A = 1, B = -1$ und wir können weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad k+1 = l \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = \left(1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n}}\right) - \left(\cancel{\sum_{l=2}^{n}} + \frac{1}{n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}}}.\end{aligned}$$

*Hinweis zu (c)*: Hierfür kann ein expliziter Ausdruck gefunden werden, wenn man die Formel mit $(1-x)$ multipliziert und analog vorgeht wie in (b)

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad l = k+1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{l=1}^{n+1} x^l = 1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x^k} - \left(\cancel{\sum_{l=1}^{n} x^l} + x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \underline{\underline{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}}.$$

# AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

**Thema 5:** Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

**Logarithmengesetze, Basiswechsel**

$$\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v), \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$$
$$\log_b(u^m) = m\log_b(u), \quad \log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)}\log_b(x).$$

**Aufgabe 1:** *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

*Lösen Sie jeweils für $x$ bzw. $y$. Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.*

*Tafelbeispiele:*

1.
$$\begin{aligned} 3\ln\left[\frac{\sqrt[3]{e^x}}{\exp\left(3\log_2(\sqrt{2})\right)}\right] + 2x &= 0 \\ 3\ln\left(\frac{e^{x/3}}{e^{3/2}}\right) + 2x &= 0 \\ 3\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\right) + 2x &= 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2\log_{\sqrt[5]{9}}(3x) - 5\ln(x) &= \log_3(e^5) \\ \text{Basiswechsel: } \log_a(\xi) &= \frac{\ln(\xi)}{\ln(a)} \\ 2\cdot\frac{\ln(3x)}{\ln\left(3^{2/5}\right)} - 5\ln(x) &= \frac{5}{\ln(3)} \\ \cancel{5}\frac{\ln(3)+\ln(x)}{\ln(3)} - \cancel{5}\ln(x) &= \frac{\cancel{5}}{\ln(3)} \\ \Rightarrow \ln(x) = \frac{1-\ln(3)}{1-\ln(3)} &= 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = e}}. \end{aligned}$$

*Lösung:*

(a) $a2^x = e^{bx} \quad \Rightarrow \quad \ln(a) + x\ln(2) = bx \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(a)}{b-\ln(2)}}}, \quad$ offenbar $a > 0$

(b) $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)} = \dfrac{49}{(7\cdot 7)^{\log_7(2\sqrt{x})}} + \dfrac{1}{4x} = \dfrac{25}{2x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}}},$ (nur positive Lsg.)

(c) $e^{3ax} - 2^{a+1}e^{2ax} + 4^a e^{ax} = \log_b(1) \quad |\cdot e^{-ax}$

$$e^{2ax} - 2\cdot 2^a e^{ax} + (2^a)^2 = 0$$

$$(e^{ax} + 2^a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln(2)}}.$$

(d) $\sqrt[x^2-1]{a^3}\cdot \sqrt[2x-2]{a}\cdot \sqrt[4]{a^{-1}} = 1 \qquad$ offenbar $a > 0$

$$a^{\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}} = 1.$$

Fall $a = 1$: $\quad \underline{\underline{x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}}}$

Fall $a \neq 1$: $\quad 0 = \dfrac{3}{x^2-1} + \dfrac{1}{2x-2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{15+2x-x^2}{x^2-1}$

$$0 = x^2 - 2x - 15 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 5, x_2 = -3}}$$

(e) $\log_a(x) + \log_a(y) = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_a(xy) = 2 \quad \Rightarrow \quad xy = a^2$

$\log_b(x) - \log_b(y) = 4 \quad \Rightarrow \quad \log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{y} = b^4$

$\Rightarrow x^2 = a^2 b^4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm ab^2, y = \pm\dfrac{a}{b^2}$

Die Argumente der Logarithmen müssen positiv sein:

$$\underline{\underline{x = \begin{cases} ab^2, & a > 0 \\ -ab^2, & a < 0 \end{cases}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y = \begin{cases} \dfrac{a}{b^2}, & a > 0 \\ -\dfrac{a}{b^2}, & a < 0 \end{cases}}}, \quad (a = 0 \text{ nicht zulässig})$$

(f) $3\log_{xa^2} x + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2 \overset{\text{Basiswechsel}}{\Longrightarrow} \dfrac{3\ln(x)}{\ln(xa^2)} + \dfrac{\ln(x)}{2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} = 2$

Substitution: $z \equiv \ln(x), b \equiv \ln(a)$

$$\Rightarrow \quad \frac{3z}{z+2b} + \frac{z}{2z-b} = 2 \quad |\cdot(z+2b)(2z-b)$$

$$7z^2 - z = 4z^2 + 6bz - 4b^2$$

$$\Rightarrow 0 = z^2 - \frac{7b}{3}z + \frac{4b^2}{3} \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{7b}{6} \pm \sqrt{\frac{49b^2}{36} - \frac{4b^2}{3}} = \begin{cases} \dfrac{4b}{3} \\ b \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = a^{4/3}, x_2 = a}}$

**Aufgabe 2:** *Verdopplungszeit*

*Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen A sei beschrieben durch*

$$W(t) = Ae^{ct}, \qquad c > 0,$$

*sodass $W(t)$ die „Menge“ an Wissen zur Zeit $t$ gibt.*

(a) *Nach welcher Zeit $\tau_2$ hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?*

$$W(t_0+\tau_2) \stackrel{!}{=} 2W(t_0) \quad \Rightarrow \quad \cancel{A}e^{c(\cancel{t_0}+\tau_2)} = 2\cancel{A}\cancel{e^{ct_0}}$$
$$\Rightarrow \quad \tau_2 = \underline{\underline{\frac{\ln(2)}{c}}}.$$

(b) *Nach welcher Zeit $\tau_n$ hat das Wissen eines Studenten auf das $n$-Fache zugenommen?*

$$W(t_0+\tau_n) \stackrel{!}{=} nW(t_0) \quad \Rightarrow \quad e^{c\tau_n} = n$$
$$\Rightarrow \quad \tau_n = \underline{\underline{\frac{\ln(n)}{c}}}.$$

(c) *Drücken Sie $\tau_n$ als Vielfaches von $\tau_2$ aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen $n=3$ und $n=4$? Welche Aussage können Sie für $n=2^m$, $m \in \mathbb{N}$, treffen?*

$$\tau_n \stackrel{!}{=} x\tau_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(n)}{\cancel{c}} = x\frac{\ln(2)}{\cancel{c}}$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_n = \log_2(n)\tau_2}}$$
$$n=3: \quad \tau_3 = \log_2(3)\tau_2 \approx 1.6\tau_2$$
$$n=4: \quad \tau_4 = \log_2(4)\tau_2 = 2\tau_2$$
$$n=2^m \quad \tau_{2^m} = \log_2(2^m)\tau_2 = m\tau_2.$$

**Aufgabe 3:** *Hyperbelfunktionen* (Zusatzaufgabe)

*Es seien die Funktionen*

$$f(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}),$$
$$g(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

*definiert.*

(a) *Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(2x)$ und $g(2x)$ in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente, $f(x)$ und $g(x)$.*

$$f(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + (\mathrm{e}^{-x})^2}{2} = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - 2\cancel{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}}{2}$$
$$= 2\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \underline{\underline{2f(x)^2 - 1}}.$$
$$g(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{2} = 2\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = \underline{\underline{2f(x)g(x)}}.$$

(b) *Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(x+y)$ und $g(x+y)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $f(y)$ sowie $g(x)$ und $g(y)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie $x = y$ setzen.*
Wir stellen zunächst fest: $\mathrm{e}^x = f(x) + g(x)$ und $\mathrm{e}^{-x} = f(x) - g(x)$

$$f(x+y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}\big[(f(x)+g(x))\cdot(f(y)+g(x)) + (f(x)-g(x))\cdot(f(y)-g(y))\big]$$
$$= \underline{\underline{f(x)f(y) + g(x)g(y)}}$$
$$g(x+y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}\big[(f(x)-g(x))\cdot(f(y)+g(x)) + (f(x)-g(x))\cdot(f(y)-g(y))\big]$$
$$= \underline{\underline{f(x)g(y) + g(y)f(x)}}$$

Ein Vergleich mit (a) zeigt

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2 + g(x)^2 \overset{!}{=} f(x)^2 - 1$$
$$\Rightarrow \quad \text{Es gilt} \quad f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$
$$g(2x) = g(x+x) = f(x)g(x) + g(x)f(x) = 2f(x)g(x).$$

Bemerkung: DAs sind die Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen sowie die hyperbolische Variante des trigonometrischen Pythagoras, $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

(c) *Schreiben Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Reihendarstellung.*

$$\text{Vorlesung:} \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0,\text{gerade}}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}}$$
$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0,\text{ungerade}}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}}.$$

(d) *Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}$ von $g(x)$.*

Wir schreiben $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und versuchen nach $x$ aufzulösen. Dafür wenden wir zunächst die Substitution $z \equiv \mathrm{e}^x$ an:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad &\Rightarrow \quad 0 = z^2 - 2yz - 1 \\ &\phantom{\Rightarrow} \quad z_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \ln(z) = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2+1}\right). \end{aligned}$$

Da $\sqrt{y^2+1} > y$, muss das "+" gewählt werden, um ein positives Argument im Logarithmus zu erhalten. Es folgt

$$\underline{\underline{g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}}.$$

Bemerkung: Wir erhalten hiermit die Umkehrfunktion des $g(x) = \sinh(x)$, den $\operatorname{arsinh}(x)$.

# Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

**Thema 6:** Trigonometrische Funktionen
Ebene Trigonometrie

## Wiederholung Trigonometrische Funktionen

**Additionstheoreme**

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y).$$

Weitere wichtige Relationen, die nützlich sein können:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin(0) = 0 \quad \cos(0) = 1$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

## Aufgabe 1: *Additionstheoreme*

(a) Leiten Sie das Additionstheorem für Kosinusfunktionen aus dem für Sinusfunktionen her.

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \sin\left(x \pm y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x \pm z^{\pm}), \qquad z^{\pm} \equiv y \pm \frac{\pi}{2}\\ &= \sin(x)\cos(z^{\pm}) \pm \cos(x)\sin(z^{\pm})\\ &= \sin(x)\underbrace{\cos\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\mp\sin(y)} \pm \cos(x)\underbrace{\sin\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\pm\cos(y)}\\ &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

(b) Leiten Sie das Additionstheorem für Tangensfunktionen her,

$$\begin{aligned}\tan(x \pm y) &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)} = \frac{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \pm \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\left(1 \mp \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)}\\ &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}\end{aligned}$$

(c) *Zeigen Sie, dass für Doppelwinkelfunktionen gilt:*

- $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} = 2\cos^2(x) - 1$

**Aufgabe 2:** *Trigonometrische Umformungen I* Ziel: (a) bis (c)

*Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Identitäten.*

*Tafelbeispiel:*

1. Identität: $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha) + 1. \qquad \square$$

2. $\sin(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

$$\Rightarrow \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\tan(x)\cos^2(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \qquad \square$$

*Lösung:*

(a) $$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \qquad \square$$

(b) $$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{(\cos\alpha + \sin\alpha)}(\cos\alpha - \sin\alpha)} \overset{(a)}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$
$$= \frac{\cancel{\cos(\alpha)}}{\cancel{\cos(\alpha)}}\frac{1+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)}$$

(c) $$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2} - \underbrace{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}_{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{y}{2}\right)}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 1\right)$$
$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{y}{2} - 1 \overset{(1c)}{=} \cos(x) + \cos(y)$$

(d) $$\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = \frac{\overbrace{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta}^{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)} + \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{\cos\alpha\sin(\beta+\gamma) + \sin\alpha[\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma]}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} + 1 = 1 \qquad \square$$

**Aufgabe 3:** *Trigonometrische Umformungen II* Ziel (a) und (b)

*Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass sie sich einfach logarithmieren lassen. Das heißt, die Terme sollen möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden.*

*Tafelbeispiel:*
Es ist mit "einfach logarithmierbar" gemeint, dass möglichst in Produkte, Quotienten und Potenzen umgeformt werden soll.

$$\cot(\alpha)+\cot(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \quad \longrightarrow \quad \text{Ziel erreicht.}$$

*Lösung:*

(a)
$$1+\cos(\alpha)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \textit{Hinweis:} \text{ Es ist } \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$1+\cos(\alpha)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$$
$$\overset{(2c)}{=} \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}}$$

(b)
$$\frac{2\sin(\beta)-\sin(2\beta)}{2\sin(\beta)+2\sin(2\beta)} = \frac{2\cancel{\sin(\beta)}-2\cancel{\sin(\beta)}\cos(\beta)}{2\cancel{\sin(\beta)}+4\cancel{\sin(\beta)}\cos(\beta)} = \frac{1-\cos(\beta)}{1+2\cos(\beta)}$$
$$= \frac{2-2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\cos(\beta)\right)\right)} \overset{(2c)}{=} \underline{\underline{\frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}}.$$

(c)
$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma), \quad \text{für} \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi$$
$$= \sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$
$$= \sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$= \sin(\alpha)(1+\cos(\beta))+\sin(\beta)(1+\cos(\alpha))$$
$$= 2\sin(\alpha)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\sin(\beta)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+4\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$
$$= \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}$$

**Aufgabe 4:** *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme* Ziel: (a) bis (c)

*Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und machen Sie jeweils die Probe.*

*Tafelbeispiel:*

$$\begin{aligned} \cos(x)\sin(y) &= 1 \\ \cos(x) - \sin(y) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \overset{z \equiv -y}{\Longrightarrow} \quad \left.\begin{aligned} \cos(x)\sin(z) &= -\frac{1}{2} \\ \cos(x) + \sin(z) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{Vieta!}$$

$\cos(x)$ und $\sin(z)$ sind Wurzeln des Polynoms

$$\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Fall 1: $\cos(x) = 1, \sin(y) = 1/2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2\pi k}}, \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fall 2: $\cos(x) = 1/2, \sin(y) = -1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Natürlich kann auch die implizite Form stehen gelassen werden!

*Lösung:*

(a) $\sin(x) + \cos(x) = 1 \quad |()^2$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(x)\cos(x) = 0$$

Fall 1: $\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

allerdings muss $\cos(x) = 1 \quad \Rightarrow$ nur für $k$ gerade

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\pi k}}, k \in \mathbb{Z}$

Fall 2: $\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

allerdings muss $\sin(x) = 1 \quad \Rightarrow$ nur für $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}}$

(b) $\underbrace{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{2\cos(x)\cos(y)} = \frac{1}{2}, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4}$

$$\text{Vieta: } \xi^2 - \xi + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos(x) = \frac{1}{2} = \cos(y)}} \quad \text{bzw.} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

(c) $\sin(3x) = \cos(2x)$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x) - 1)\sin(x)\\ &= 4\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)\end{aligned}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\begin{aligned}0 &= 2\cos^2(x)(1 - 2\sin(x)) + \sin(x) - 1\\ &= 2(1 - \sin^2(x))(1 - 2\sin(x)) + \sin(x) - 1.\end{aligned}$$

Wir substituieren nun $u \equiv \sin(x)$:

$$0 = 4u^3 - 2u^2 - 3u + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{draufschauen} \quad u = 1$$

Die restlichen Lösungen erhalten wir durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(4u^3 - 2u^2 \quad - 3u + 1) : (u - 1) = 4u^2 + 2u - 1\\ \underline{-(4u^3 + 4u^2)}\\ \qquad 2u^2 - 3u\\ \qquad \underline{-(2u^2 - 2u)}\\ \qquad\qquad -u + 1\\ \qquad\qquad \underline{-(-u + 1)}\\ \qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

$$\Longrightarrow 0 = u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\sin(x_1) = 1, \quad \sin(x_{2/3}) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}}}$$

aufgelöst nach $x$: $\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{10} + 2\pi k, \frac{9\pi}{10} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{10} + 2\pi k, -\frac{7\pi}{10} + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $a\big(3\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x)\big) - b\big(3\sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)\big) = 2a - b$

$$3a\cos^2(x) - 3b\sin^2(x) + (a + b)\sin(x)\cos(x) = 2a - b \quad | : \cos^2(x)$$

$$3a - 3b\tan^2(x) + (a + b)\tan(x) = \frac{2a - b}{\cos^2(x)} = (2a - b)(1 + \tan^2(x)).$$

Wir substituieren jetzt $z \equiv \tan(x)$

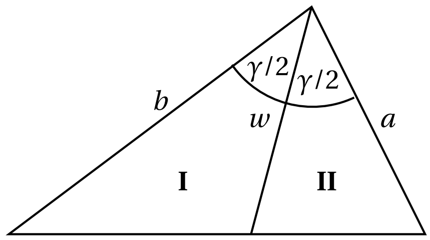
$$0 = 2(a + b)z^2 - (a + b)z - (a + b)$$

$$0 = z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \begin{cases}1\\ -1/2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tan(x_1) = 1, \tan(x_2) = -\frac{1}{2}}}$$

**Aufgabe 5:** *Dreiecksfläche*

*Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten $a$ und $b$ sowie die Länge $w$ der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind.*




Fläche in I: $A_1 = \dfrac{bw}{2}\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$

Fläche in II: $A_2 = \dfrac{aw}{2}\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$

Gesamtfläche: $A = \dfrac{ab}{2}\sin(\gamma)$

andererseits: $A = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ab}{2}\cancel{\sin\gamma} = \dfrac{(a+b)\,w}{2}\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) = \dfrac{(a+b)\,w}{4}\,\dfrac{\cancel{\sin\gamma}}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)\,w}{2ab}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(a+b)\,w}{2}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(a+b)\,w}{2}\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{(a+b)\,w}{2}\sqrt{1-\frac{(a+b)^2\,w^2}{4a^2b^2}}}}.$$

# Auffrischungskurs Mathematik

## – Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

**Thema 7:** Grundlagen der Differentialrechnung
Kurvendiskussion

### Wiederholung Ableitungsregeln

- Linearität: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(af(x)+bg(x)\big) = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- Produktregel (Leibniz-Regel): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- Kettenregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right)(g(x))\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.
- Potenzregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^n\big) = n\,x^{n-1}$.

*Ableitungen spezieller Funktionen:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = +\cos(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x) = \exp(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln(a)a^x.$$

*Beispiel:* $f(x) = x^2\ln\big(\underbrace{3x^2-5x+2}_{g(x)}\big)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x\ln\big(g(x)\big) + x^2\frac{1}{g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = 2x\ln\big(3x^2-5x+2\big) + \frac{x^2(6x-5)}{3x^2-5x+2}.$$

**Aufgabe 1:** *Ableitungen I* Ziel: (a) bis (e)

*Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.*

(a) $Q(r) = \frac{3r^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{r_0}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}Q(r)}{\mathrm{d}r} = 3r\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) + \frac{3r^2}{2}\frac{r_0}{r}\frac{1}{r_0} = \underline{\underline{3r\left(1 + \ln\frac{r}{r_0}\right)}}.$$

(b) $f(x) = \cos^4(3tx) - \sin^4(3tx) = \underbrace{(\cos^2(3tx) + \sin^2(3tx))}_{1}(\cos^2(3tx) - \sin^2(3tx))$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -6t\sin(3tx)\cos(3tx) - 6t\sin(3tx)\cos(3tx) = \underline{\underline{-12t\sin(3tx)\cos(3tx)}}.$$

(c) $S(\tau) = (\tau - 1)\mathrm{e}^\tau + \frac{\tau^2}{4}(2\ln\tau - 1)$

$$\frac{\mathrm{d}S(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \cancel{\mathrm{e}^\tau} + (\tau - \cancel{1})\mathrm{e}^\tau + \frac{\tau}{2}\left(2\ln(\tau) - \cancel{1}\right) + \frac{\tau^{\cancel{2}}}{4}\frac{2}{\cancel{\tau}} = \underline{\underline{\tau(\mathrm{e}^\tau + \ln(\tau))}}.$$

(d) $y(x) = \frac{\exp(2x)}{25}[(5x-4)\sin x + (10x-3)\cos x]$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{2}{25}\mathrm{e}^{2x}\Big[\dots\Big] + \frac{1}{25}\mathrm{e}^{2x}[5\sin(x) + (5x-4)\cos(x) + 10\cos(x) - (10x-3)\sin(x)] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{25}\left[\cancel{(10x-8)\sin(x)} + (20x-\cancel{6})\cos(x) + (5x+\cancel{6})\cos(x) - \cancel{(10x-8)\sin(x)}\right] \\ &= \underline{\underline{x\cos(x)\mathrm{e}^{2x}}}\end{aligned}$$

(e) $F(x) = -\frac{k}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{k}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x-x_0)}{\sqrt{\dots}^3} = \underline{\underline{\frac{k(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^3}}}$$

(f)

$$N(z) = \underbrace{\frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{1+\cos(z)}}}_{1+\cos(z)=2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)}\left[\ln\left(\cos\frac{z}{4} + \sin\frac{z}{4}\right) - \ln\left(\cos\frac{z}{4} - \sin\frac{z}{4}\right)\right] \qquad \sigma_\pm = \cos\left(\frac{z}{4}\right) \pm \sin\left(\frac{z}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}(\ln(\sigma_+) - \ln(\sigma_-))$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}N(z)}{\mathrm{d}z} = \sqrt{2}\left(\frac{(\sigma^+)'}{\sigma^+} - \frac{(\sigma^-)'}{\sigma^-}\right) = \sqrt{2}\frac{(\sigma^+)'\sigma^- - (\sigma^-)'\sigma^+}{\sigma^+\sigma^-} \quad \text{mit} \quad (\sigma^\pm)' = \pm\frac{1}{4}\sigma^\mp$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(\sigma^+)^2 + (\sigma^-)^2}{\sigma^+\sigma^-} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}\frac{\cancel{2}}{\cos^2\left(\frac{z}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{z}{4} - 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cos\left(\frac{z}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+\cos(z)}}}}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2:** *Ableitungen II* Ziel: (a) bis (d)

*Finden Sie die $n$-te Ableitung der folgenden Funktionen.*

(a) $f(x) = x^n$

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = n!$$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{-kx}$

$$f'(x) = k\left(\mathrm{e}^{kx} - \mathrm{e}^{-kx}\right), \quad f''(x) = k^2\left(\mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{-kx}\right) \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = k^n\left(\mathrm{e}^{kx} + (-1)^n\mathrm{e}^{kx}\right)$$

(c) $f(x) = x^{n-1}$

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}} \overset{(a)}{=} (n-1)! \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = 0.$$

(d) $f(x) = a^x$

$$f'(x) = (\ln a)a^x, \quad f''(x) = (\ln a)^2 a^x, \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = (\ln a)^n a^x$$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ , Nullstellen des Nenners $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{-x}{1-x-x^2} \overset{!}{=} \dfrac{\alpha}{x-x_1} + \dfrac{\beta}{x-x_2} = \dfrac{\alpha(x-x_2)+\beta(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$

Koeffizientenvergleich: $1 = \alpha + \beta$ und $0 = \alpha x_1 + \beta x_2$

$$\Rightarrow x_1 = \alpha(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{x_1}{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 - \alpha = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x_1 - x_2}\left(\frac{x_1}{x - x_1} - \frac{x_2}{x - x_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\overset{(e)}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} &= \frac{(-1)^n n!}{x_1 - x_2}\left(\frac{x_1}{(x-x_1)^{n+1}} - \frac{x_2}{(x-x_2)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x_1 - x_2}\left(\frac{x_2^{n+1}}{x_2^{n+1}}\frac{x_1}{(x-x_1)^{n+1}} - \frac{x_1^{n+1}}{x_1^{n+1}}\frac{x_2}{(x-x_2)^{n+1}}\right), \quad x_1 - x_2 = \sqrt{5} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1 x_2^{n+1}}{(x_2 x - x_1 x_2)^{n+1}} - \frac{x_2 x_1^{n+1}}{(x x_1 - x_1 x_2)^{n+1}}\right), \quad x_1 x_2 = -1 \\
&= \frac{(-1)^n n!}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1^n}{(x_2 x + 1)^{n+1}} - \frac{x_2^n}{(x x_1 + 1)^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Es ergibt $\dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=0} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n)$ die $n$-te Fibonacci-Zahl.

**Aufgabe 3:** *Kurvendiskussion I*

*Ein zweiatomiges Molekül lässt sich näherungsweise durch das sogenannte "Morse-Potential" beschreiben,*

$$U(x) = D\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right), \qquad D, \alpha = \text{const}.$$

- *Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(x)$ sowie deren Verhalten für $x \to \pm\infty$.*

$$\text{Nullstellen: } e^{-2\alpha x_0} \stackrel{!}{=} 2e^{-\alpha x_0} \quad \Rightarrow \quad -2\alpha x_0 = \ln(2) - \alpha x_0$$

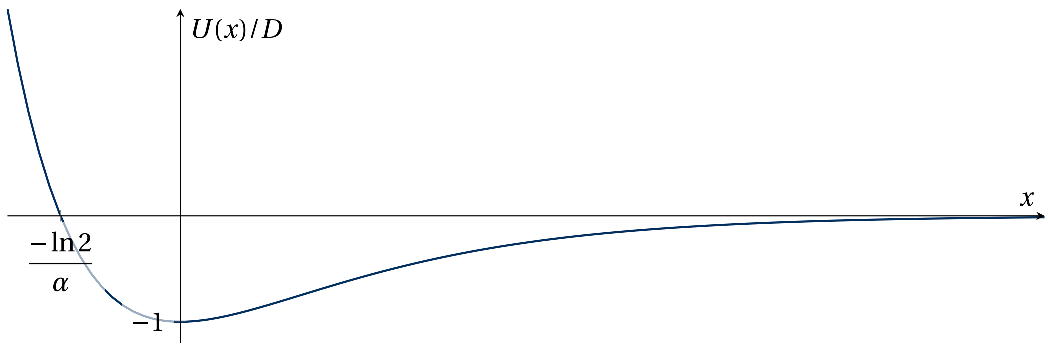
$$\Rightarrow x_0 = \underline{\underline{-\frac{\ln(2)}{\alpha}}}$$

$$\text{Extrema: } \frac{dU(x)}{dx} = D\left(-2\cancel{\alpha} e^{-2\alpha x} + 2\cancel{\alpha} e^{-\alpha x}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\alpha x = -\alpha x \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0, \quad U(x=0) = -D}}.$$

$$\text{Grenzwerte: } \lim_{x\to\infty} U(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} U(x) = \infty$$

- *Skizzieren Sie die Funktion $U(x)$ für $D = \alpha = 1$ im Intervall $x \in [-1, 5]$.*



**Aufgabe 4:** *Kurvendiskussion II*

*Die Bewegung eines Teilchens mit Drehimpuls L und Energie E in der gekrümmten Raumzeit eines Schwarzen Loches der Masse m wird beschrieben durch das Potential*

$$U(r) = \frac{E}{2} - \frac{Em}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{mL^2}{r^3}, \qquad r > 0.$$

- *Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(r)$ sowie deren Verhalten für $\to\infty$ und $\to 0$.*

$$\text{Nullstellen: } 0 \stackrel{!}{=} \frac{E}{2} - Emu + \frac{L^2}{2}u^2 - mL^2u^3 \quad , \quad u = \frac{1}{r}$$
$$0 = 1 - 2mu + \frac{L^2}{E}u^2 - \frac{2mL^2}{E}u^3$$
$$= 1 - 2mu + \frac{L^2}{E}(1-2mu)u^2 = (1-2mu)\left(1 + \frac{L^2}{E}u^2\right)$$
$$\Rightarrow u_0 = \frac{1}{2m} \quad , \quad \underline{\underline{r_0 = 2m}}.$$

$$\text{Extrema: } \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{Em}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3mL^2}{r^4} \stackrel{!}{=} 0 \quad |\cdot r^4$$
$$\Rightarrow \quad 0 = r^2 - \frac{L^2}{Em}r + \frac{3L^2}{E}$$
$$\Rightarrow \quad r_{1/2} = \frac{L^2}{2Em} \pm \sqrt{\frac{L^4}{4E^2m^2} - \frac{3L^2}{E}} = \underline{\underline{\frac{L^2}{2Em}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12Em^2}{L^2}}\right)}}$$

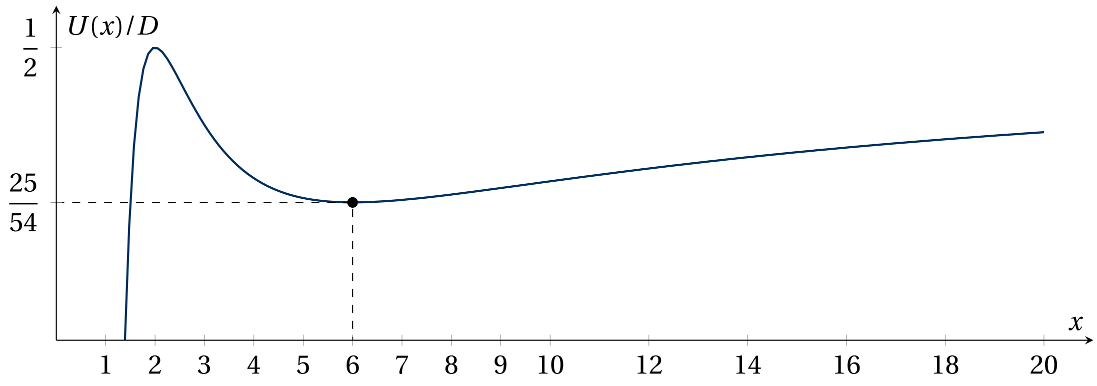
$$\text{Grenzwerte: } \lim_{r\to\infty} U(r) = \frac{E}{2} \quad , \quad \lim_{r\to 0} U(r) = -\infty.$$

- *Setzen Sie $m = \frac{1}{2}$. Welche Bedingungen an E und L müssen erfüllt sein, damit $U(r)$ zwei, ein oder keine lokalen Extrema besitzt?* Für $m = 1/2$ nimmt die Diskriminante den Wert $1 - \frac{3E}{L^2}$ an. Damit können wir zwischen drei Lösungen unterscheiden:

| | |
|---|---|
| $3E < L^2$: | zwei Extrema. |
| $3E = L^2$: | ein Extremum. |
| $3E > L^2$: | keine Extrema. |

- *Skizzieren Sie die Funktion $U(r)$ für $E = 1$ und $L = 2$ (nicht maßstabsgerecht).* Für diesen Fall finden wir zwei Extrema. Es ergibt sich

$$r_{1/2} = 4\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \begin{cases} 6 \quad , \quad U(r_1) = \frac{25}{54} = \frac{1}{2} - \frac{1}{27} \\ 2 \quad , \quad U(r_2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$




**Aufgabe 5:** *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Zusatzaufgabe)

(a) *Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:*

$$f''(x) = a^2 f(x) + bx\,.$$

Wir suchen eine Funktion, die sich selbst (teilweise) reproduziert

Versuch 1: $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda^2 f(x)$

Versuch 2: $f(x) = \mathrm{e}^{ax} + mx$

$$\Rightarrow f''(x) = a^2 \mathrm{e}^{ax} \overset{!}{=} a^2 f(x) + bx = a^2 \mathrm{e}^{ax} + a^2 mx + bx$$

offenbar: $m = -\dfrac{b}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a^2} x}}$

$$\left(\text{allgemeine Lösung: } f(x) = c_1 \mathrm{e}^{ax} + c_2 \mathrm{e}^{-ax} - \frac{b}{a^2} x\right)$$

(b) *Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:*

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) f(x)\,.$$

Überlegung: Ableitung von $\mathrm{e}^{g(x)}$ ergibt $g'(x)\mathrm{e}^{g(x)}$

$\Rightarrow$ Welche Funktion ergibt abgeleitet $1 + \ln(x)$? Keine Funktion ergibt abgeleitet $\ln(x)$.

$\Rightarrow$ Es kann $\ln(x)$ durch die Produktregel entstehen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln(x)) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(x)} = x^x}}.$$

# Auffrischungskurs Mathematik

## – Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

**Thema 8:** Die Methode der vollständigen Induktion

### Wiederholung des Beweisverfahrens

- Zeige Richtigkeit einer Aussage für einen Startwert
- Zeige: “Aussage richtig für $k$” impliziert “Aussage richtig für $k+1$”

*Beispiel 1:*
rekursive Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_n + 2(n+1), \quad a_1 = 1$. Wir wollen nun folgende explizite Darstellung beweisen:[1]

$$a_n = n^2 + n - 1$$

(IA) Induktionsanfang $n = 1 : a_1 = 1^2 + 1 - 1 = 1 \quad \checkmark$

(IV) Induktionsvoraussetzung $n = k : \quad a_k = k^2 + k - 1$

(IB) Induktionsbehauptung $n = k+1 : \quad a_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1) - 1$

*Beweis.* $a_{k+1} = a_k + 2(k+1) = k^2 + k - 1 + 2(k+1) = (k+1)^2 + k.$

$\square$

*Beispiel 2:*
Reihe $S_n = 1 \cdot \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + (n-1) \cdot \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Vermutung: $S_n = n \cdot \ln(n) - \ln(n!)$

(IA) $n = 2 : S_n = 2 \cdot \ln(2) - \ln(2!) = \ln(2) \quad \checkmark$

(IV) $n = k : \quad S_k = k \ln(k) - \ln(k!)$

(IB) $n = k+1 : \quad S_{k+1} = (k+1)\ln(k+1) - \ln((k+1)!)$

*Beweis.*
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \cancel{k \ln(k)} - \ln(k!) + k \ln(k+1) - \cancel{k \ln(k)} \\ &= (k+1)\ln(k+1) \underbrace{- \ln(k+1) - \ln(k!)}_{-\ln((k+1)!)}. \end{aligned}$$

$\square$

[1] Solche Ausdrücke kann Mathematica mit Hilfe des Befehls “FindSequenceFunction[...]” erraten.

**Aufgabe 1:** *Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift*

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15 \quad \Rightarrow \quad$ Vermutung: $\quad a_n = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) = 2^{k+1} - 1.$

$\square$

**Aufgabe 2:** *Vollständige Induktion I* $\quad S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = (-1)^{k-1} \dfrac{k(k+1)}{2}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = (-1)^k \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

*Beweis.*
$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2$$
$$= (-1)^k (k+1) \left[ \frac{(-1)^{-1} k}{2} + (k+1) \right] = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.$$

$\square$

**Aufgabe 3:** *Vollständige Induktion II* $\quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[ \dfrac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = \left[ \dfrac{k(k+1)}{2} \right]^2$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = \left[ \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$

*Beweis.*
$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left( \frac{k+1}{2} \right)^2 \left[ k^2 + 4(k+1) \right] = \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

$\square$

**Aufgabe 4:** *Vollständige Induktion III* $\quad S_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3, \quad S_n = 9m \quad$ mit $\quad m \in \mathbb{N}$

(IA) $\quad n = 1: \quad S_1 = 0 + 1^3 + 2^3 = 9. \quad \checkmark$

(IV) $\quad n = k: \quad S_k = (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3, \quad S_k = 9m \quad$ mit $\quad m \in \mathbb{N}$

(IB) $\quad n = k+1: \quad S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3, \quad S_k = 9m' \quad$ mit $\quad m' \in \mathbb{N}$

*Beweis.*
$$S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{S_n} + (k+2)^3 - (k-1)^3$$
$$= 9m + (k+2)^3 - (k-1)^3 = 9m + 9(k^2 + k + 1) = 9m' \text{ mit } m' = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{N}$$

$\square$

**Aufgabe 5:** *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Vermutung: $S_n = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!}$

(IA) $n=1: \quad S_1 = 1-x. \quad \checkmark$

(IV) $n=k: \quad S_k = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!}$

(IB) $n=k+1: \quad S_{k+1} = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots((k-x)(k+1-x)}{(k+1)!}$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!}\\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!} + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!}\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\Big[(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k+1) + (-1)^{k+1}(-1)^k x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)\Big]\\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}\underbrace{\left[\frac{k+1}{k-x+1} + (-1)^{2k+1}\frac{x}{k-x+1}\right]}_{1}\\
&= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 6:** *Fibonacci-Zahlen* $\quad a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n\right) \quad$ mit $\quad x_\pm = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (Zusatzaufgabe)

(IA) $n=0: \quad a_0 = 0, a_1 = 1. \quad \checkmark$

(IV) $n=k: \quad a_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^k - x_-^k\right)$

(IB) $n=k+1: \quad a_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{k+1} - x_-^{k+1}\right)$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = a_n + a_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n + x_+^{n-1} - x_-^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)}_{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}_{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{n+1} - x_-^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

□