

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Aufgabe 1: Bruchrechnung

- (a) $b - a$
- (b) $\frac{a}{b}$
- (c) $\frac{x}{y} - 1$
- (d) $\frac{n^2}{n-1}$
- (e) $\frac{x+y}{x-y}$
- (f) 1
- (g) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 2: Potenzgesetze

- (a) $\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n$
- (b) $a^x b^y c^z$
- (c) $(a+b)a^2 b^{n-2}$
- (d) $(a-1)a^{n-2}$
- (e) $\frac{x^5}{a^{14} b^{19} y^{12}}$

Aufgabe 3: Umformungen mit Wurzelausdrücken

- (a) $\frac{1+ab}{1-ab}$
- (b) $\frac{1}{m}$
- (c) $a\left(\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}\right)$

Aufgabe 4: Algebraische Umformungen

- (a) $x = \frac{1}{(a-b)(m+n)}$
- (b) $x = \frac{a-b}{a+b}$
- (c) $x = \frac{3}{4}$
- (d) $x = (a+b)^2$
- (e) $x = |y^2 - 1|$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

- (a) $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{7}{11}; \frac{1}{3}\right)\right\}$
- (b) $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)\right\}$
- (c) $\{(x; y)\} = \{(-1; 0)\}$
- (d) $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{b}{a} + 1; \frac{a}{b} - 1\right)\right\}$
- (e) $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$
- (f) $\{(x; y)\} = \{(a(a+b); b(a-b))\}$
- (g) $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{1}{13}; \frac{1}{19}\right)\right\}$

Aufgabe 2: Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

- (a) $\{(x; y; z)\} = \{(1; 1; 1)\}$
- (b) $\{(x; y; z)\} = \{(1; 2; 3)\}$
- (c) $\{(x; y; z)\} = \{(a; b; c)\}$
- (d) $\{(x; y; z)\} = \{(2z; 5z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3: Parametrisierung von Lösungsmengen

- (a) $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{1+7\lambda}{13}; \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
- (b) $\{(x; y)\} = \{(6+7n; 11+13n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

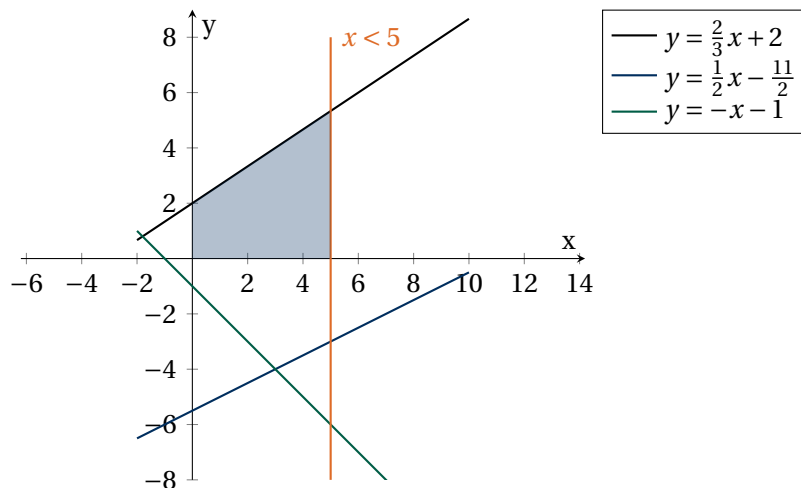
Aufgabe 4: Gleichungssysteme

- (a) $\{(x; y)\} = \{(2; 4), (4; 2)\}$
- (b) $\{(x; y)\} = \{(17; 6)\}$
- (c) $\{(x; y)\} = \{(-3; -3), (-1; 1)\}$

Aufgabe 5: Ungleichungssysteme

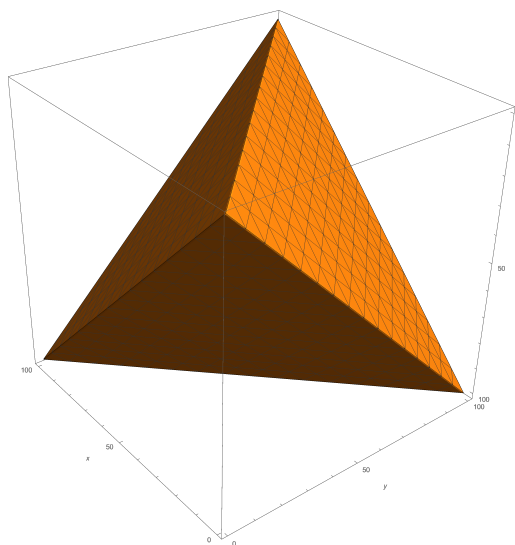
(a)

$$\begin{aligned}2x - 3y &\geq -6, \\ x - 2y &< 11, \\ x &> -y - 1, \\ x &< 5, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0\end{aligned}$$



Offenbar können die zweite und dritte Ungleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am eingefärbten Gebiet ändert.

- (b) Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige, unendlich ausgedehnte Pyramide, deren Spitze im Koordinatenursprung sitzt und deren Seiten jeweils die x - y -, x - z - und y - z -Ebene halbieren.



AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Quadratische Gleichungen

- (a) $x_1 = 9; x_2 = 1$
- (b) $x_1 = 3; x_2 = -4$
- (c) $x_{1/2} = \pm 1 + \sqrt{2}$

Aufgabe 3: Gleichungssysteme

- (a) $\{x; y\} = \{(4; \pm\sqrt{3}), (3; \pm 2)\}$
- (b) $\{(x; y)\} = \{(1; 5), (5; 1), (2; 3), (3; 2)\}$
- (c) $\{(x; y)\} = \{(0; 0), (-2; -4), (4; 2)\}$

Aufgabe 2: Wurzeln quadratischer Gleichungen

- (a) Faktoren $x = \frac{a}{b} - 1$ und $y = \frac{b}{a} + 1$
- (b) $k = \pm 3\sqrt{5}$
- (c) $\{(p; q)\} = \{(0; 0), (1; -2)\}$
- (d)
 - $ax^2 + 2bx + 4c = 0$
 - $cx^2 + bx + a = 0$

Aufgabe 4: Wurzelgleichungen

- (a) $x_1 = 1, x_2 = 5$
- (b) $x = \frac{(a-1)^2}{4}$, wobei $a \geq 1$; falls $a = 0$:
 $x = 0$
- (c) $x = 0$, wobei $a \geq 0, b \geq 0$
- (d) $x = 4$
- (e) $x = \frac{5}{2}$

Aufgabe 5: Nullstellensuche

- (a) $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$
- (b) $4x^2 + 8x - 5 = (2x + 5)(2x - 1)$
- (c) $ax^3 + bx^2 + adx^2 + bdx = x(ax + b)(x + d)$
- (d) $(a - x)^2 + (x - b)^2 - a^2 - b^2 = 2x(x - a - b)$
- (e) $a\sqrt{8}x^2 - 2kax - 3ak + ax\sqrt{18} = a(2x + 3)(\sqrt{2}x - k)$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades Das Summenzeichen

Aufgabe 1: Nullstellensuche

- (a) $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$
- (b) $x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x = (x^2 + 1)(2x^2 + x + 2)$, keine (reellen) Nullstellen
- (c) $x_1 = 0, x_{2/3} = \pm\sqrt{2}, x_{4/5} = \pm 1$
- (d) $x_0 \approx \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 2: Polynomdivision

- (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b) = 3a^2 - 7ab + 5b^2$
- (b) $(9x^3 - 7xy^2 + 2y^3) : (3x - 2y) = 3x^2 + 2xy - y^2$
- (c) $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2) = 5x^2 - 7ax + 5a^2$
- (d) $n = 5$ oder $n = -3$, da $(x^2 + 2x - 15) = (x + 5)(x - 3)$

Aufgabe 3: Kubische Gleichungen

- (a) $m = 12, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{3}{2}$
- (b) $m = -5, n = 30, x_3 = -\frac{5}{2}$

Aufgabe 4: Nullstellenraten

- (a) $x_0 = 1$ oder $x_0 = 2 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$
- (b) $x_0 = -3 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)$
- (c) $x_0 = -2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + x + 1)$
- (d) $x_0 = 1 \Rightarrow x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^4 - 3x^2 + 1)$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung*

$$(a) \quad \frac{x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-3)}$$

$$(b) \quad \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$(c) \quad \frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

$$(d) \quad \frac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3} = 2x^2+1 + \frac{\sqrt{2}}{x-3} - \frac{5}{x+1}$$

Aufgabe 6: *Summen*

$$(a) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 5: Exponentialfunktionen Logarithmen Natürliche Exponentialfunktion

Aufgabe 1: Logarithmische und Exponentialgleichungen

(a) $x = \frac{\ln(a)}{b - \ln(2)}$ für $b \neq \ln(2)$ und $a > 0$;

falls $b = \ln(2)$: $a \neq 1$: keine Lsg.
 $a = 1$: $x \in \mathbb{R}$

(b) $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$

(c) $x = \ln(2)$, wobei $b \neq 0$ und $b \neq 1$

(d) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ für $a \neq 1$ und $a > 0$;
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ für $a = 1$

(e) $(x, y) = (ab^2, \frac{a}{b^2})$ für $a > 0$;

$(x, y) = (-ab^2, -\frac{a}{b^2})$ für $a < 0$
in beiden Fällen $a, b \neq 1$ und $b \neq 0$

(f) $x_1 = a^{\frac{4}{3}}$, $x_2 = a$, wobei $a > 0$

Aufgabe 2: Verdopplungszeit

(a) $\tau_2 = \frac{\ln(2)}{c}$

(b) $\tau_n = \frac{\ln(n)}{c}$

(c) $\tau_n = \log_2(n) \cdot \tau_2$,

$\tau_3 \approx 1,58 \cdot \tau_2$,

$\tau_4 = 2 \cdot \tau_2$,

$\tau_{2^m} = m \cdot \tau_2$

Aufgabe 3: Hyperbelfunktionen

(a) $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$,
 $g(2x) = 2f(x)g(x)$

(b) $f(x+y) = (f(x)f(y) + g(x)g(y))$,
 $g(x+y) = (f(x)g(y) + g(x)f(y))$

Für den Vergleich mit (a): $y = x$, und verwende $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$

(c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,
 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(d) $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 6: Trigonometrische Funktionen Ebene Trigonometrie

Aufgabe 1: Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \cos(x \pm y) &= \sin\left(x \pm y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x \pm z^\pm), & z^\pm &\equiv y \pm \frac{\pi}{2} \\ &= \sin(x) \cos(z^\pm) \pm \cos(x) \sin(z^\pm) \\ &= \sin(x) \underbrace{\cos\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\mp \sin(y)} \pm \cos(x) \underbrace{\sin\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)}_{\pm \cos(y)} \\ &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \tan(x \pm y) &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)} = \frac{\cancel{\cos(x)} \cancel{\cos(y)} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \pm \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right)}{\cancel{\cos(x)} \cancel{\cos(y)} \left(1 \mp \frac{\sin(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y)} \right)} \\ &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad &\bullet \sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \\ &\bullet \cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} = 2 \cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Trigonometrische Umformungen I

$$\text{(a)} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos \alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha - \sin \alpha} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\underbrace{(\cos \alpha + \sin \alpha)}_{\cancel{\cos \alpha + \sin \alpha}} (\cos \alpha - \sin \alpha)} \stackrel{(a)}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \frac{\cancel{\cos(\alpha)} 1 + \tan(\alpha)}{\cancel{\cos(\alpha)} 1 - \tan(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) &= 2 \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{y}{2} - \underbrace{\sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{y}{2}}_{(1-\cos^2 \frac{x}{2})(1-\cos^2 \frac{y}{2})} \right) = 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} - 1 \right) \\ &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 + 2 \cos^2 \frac{y}{2} - 1 \stackrel{(1c)}{=} \cos(x) + \cos(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \cot \alpha \cot \beta + \cot \alpha \cot \gamma + \cot \beta \cot \gamma &= \frac{\overbrace{\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta + \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha}^{\cos \alpha \sin(\beta+\gamma)}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\
 &= \frac{\cos \alpha \sin(\beta + \gamma) + \sin \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma]}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} + 1 = 1 \quad \square
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: *Trigonometrische Umformungen II*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad 1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 (b) \quad \frac{2 \sin \beta - \sin(2\beta)}{2 \sin \beta + 2 \sin(2\beta)} &= \frac{\sin^2(\beta/2)}{2 \cos(\beta/2 + \pi/6) \cos(\beta/2 - \pi/6)} \\
 (c) \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad x_1 &= 2\pi k, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
 (b) \quad \cos x &= \cos y = \frac{1}{2} \\
 (c) \quad \sin(x_1) &= 1 \quad \text{und} \quad \sin(x_{2/3}) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \\
 (d) \quad a + b &\neq 0: \tan(x_1) = 1 \quad \text{und} \quad \tan(x_2) = -\frac{1}{2} \\
 a + b &= 0: x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: *Dreiecksfläche*

$$A = \frac{w(a+b)}{4ab} \sqrt{4a^2b^2 - w^2(a+b)^2}$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung Kurvendiskussion

Aufgabe 1: Ableitungen I

- (a) $Q'(r) = 3r \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right)$
- (b) $f'(x) = -12t \sin(3tx) \cos(3tx)$
- (c) $S'(\tau) = \tau (e^\tau + \ln \tau)$
- (d) $y'(x) = x \cos(x) e^{2x}$
- (e) $F'(x) = \frac{k(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^3}$
- (f) $N'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(z)}}$

Aufgabe 2: Ableitungen II

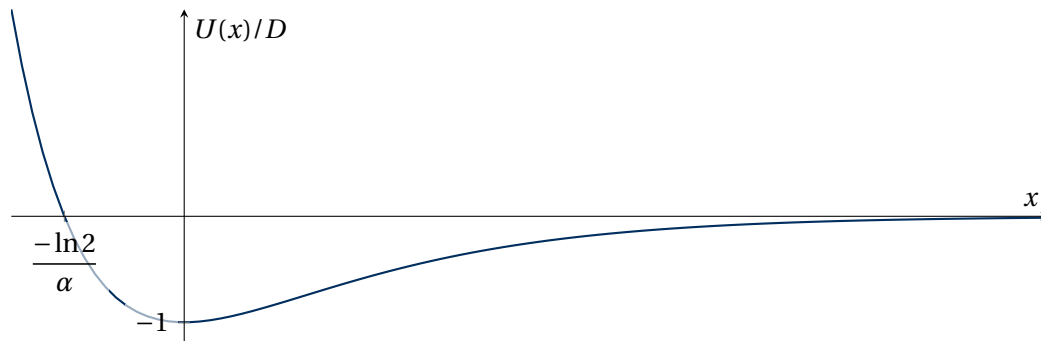
- (a) $f^{(n)}(x) = n!$
- (b) $f^{(n)}(x) = k^n \left(e^{kx} + (-1)^n e^{-kx} \right)$
- (c) $f^{(n)}(x) = 0$
- (d) $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$
- (e) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$
- (f) * $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{\sqrt{5}} \left(\frac{x_1^n}{(1 + x_1 x)^{n+1}} - \frac{x_2^n}{(1 + x_2 x)^{n+1}} \right)$, wobei $x_{1/2}$ die Nullstellen des Nenners bezeichnen.

Aufgabe 3: Kurvendiskussion I

- Nullstelle: $x_0 = -\frac{\ln 2}{\alpha}$

Extremum: $x = 0, U(x=0) = -D$

Asymptotik: $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$

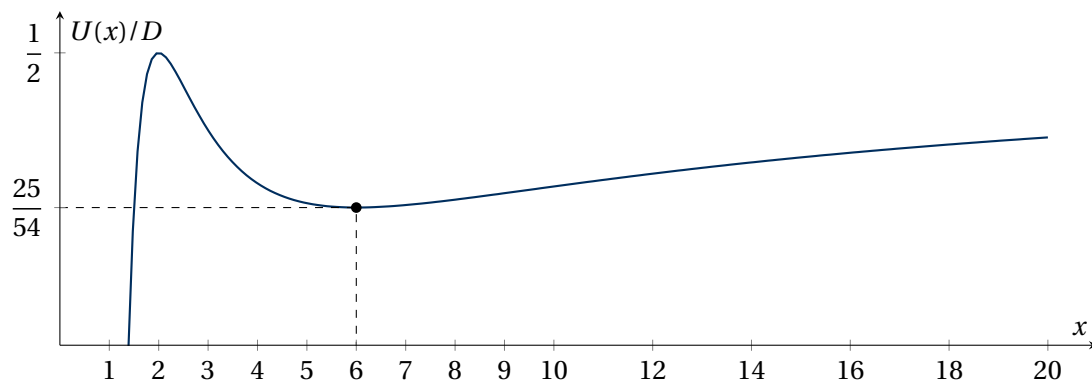


Aufgabe 4: Kurvendiskussion II

- Nullstelle: $r_0 = 2m$

Extrema: $r_{1/2} = \frac{L^2}{2Em} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12Em^2}{L^2}} \right)$

Asymptotik: $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = \frac{E}{2}, \lim_{r \rightarrow 0} U(r) = -\infty$



Aufgabe 5: Gewöhnliche Differentialgleichung

(Zusatzaufgabe)

- (a) allgemeinste Lösung: $f(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} - \frac{b}{a^2} x$ mit Konstanten $c_{1/2}$
- (b) allgemeinste Lösung: $f(x) = c x^x$ mit Konstante c

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

Aufgabe 1: Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15 \Rightarrow \text{Vermutung: } a_n = 2^n - 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$
$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

□

Aufgabe 2: Vollständige Induktion I $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

(IA) $n = 1$: $S_1 = 1$. ✓

(IV) $n = k$: $S_k = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$

(IB) $n = k + 1$: $S_{k+1} = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } S_{k+1} &= S_k + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 \\ &= (-1)^k (k+1) \left[\frac{(-1)^{-1} k}{2} + (k+1) \right] = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3: Vollständige Induktion II $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(IA) $n = 1$: $S_1 = 1$. ✓

(IV) $n = k$: $S_k = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$

(IB) $n = k + 1$: $S_{k+1} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$

$$\text{Beweis. } S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 [k^2 + 4(k+1)] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

□

Aufgabe 4: Vollständige Induktion III $S_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$, $S_n = 9m$ mit $m \in \mathbb{N}$

(IA) $n = 1$: $S_1 = 0 + 1^3 + 2^3 = 9$. ✓

(IV) $n = k$: $S_k = (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3$, $S_k = 9m$ mit $m \in \mathbb{N}$

(IB) $n = k+1$: $S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$, $S_k = 9m'$ mit $m' \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } S_{k+1} &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{S_n} + (k+2)^3 - (k-1)^3 \\ &= 9m + (k+2)^3 - (k-1)^3 = 9m + 9(k^2 + k + 1) = 9m' \text{ mit } m' = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5: Die Suche nach der richtigen Summenformel

Vermutung: $S_n = \frac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!}$

(IA) $n = 1$: $S_1 = 1 - x$. ✓

(IV) $n = k$: $S_k = \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!}$

(IB) $n = k+1$: $S_{k+1} = \frac{(1-x)(2-x)\dots((k-x)(k+1-x))}{(k+1)!}$

Beweis.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k+1) + (-1)^{k+1} (-1)^k x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k) \right] \\ &= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!} \underbrace{\left[\frac{k+1}{k-x+1} + (-1)^{2k+1} \frac{x}{k-x+1} \right]}_1 \\ &= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6: Fibonacci-Zahlen $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^n - x_-^n)$ mit $x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Zusatzaufgabe)

(IA) $n = 0$: $a_0 = 0, a_1 = 1$. ✓

(IV) $n = k$: $a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^k - x_-^k)$

(IB) $n = k + 1$: $a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^{k+1} - x_-^{k+1})$

Beweis.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^n - x_-^n + x_+^{n-1} - x_-^{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right)}_{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right)}_{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_+^{n+1} - x_-^{n+1}) \end{aligned}$$

□

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 9: Arithmetische & geometrische Reihen Der binomische Satz

Aufgabe 1: *Arithmetische Reihe*

$$L_n = \pi r + \pi e(n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow S_n = n\pi r + \pi e \sum_{k=1}^n (k-1) = \pi n \left(r + e \frac{n-1}{2} \right)$$

Aufgabe 2: *Geometrische Folge*

$$L_n = \left(\frac{11}{12} \right)^n L_0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} L_0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln(1/2)}{\ln(11/12)} \approx 7,97$$

Der Lichtstrahl muss 8 Platten durchdringen.

Aufgabe 3: *Geometrische Reihe*

$$I_{\text{out}} = \frac{T}{2-T} I_{\text{in}}$$

Aufgabe 4: *Der binomische Satz*

(a) $2a^6 + 30a^4 + 30a^2 + 2$

(b) $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ und $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ für $n \geq 1$

(c) $f(nx) + g(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(x)^k g(x)^{n-k}$

Aufgabe 5: *Erzeugende Funktion*

1. $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$

2. $a_n = 2^n - 1$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 10: Integralrechnung

Aufgabe 1: Stammfunktionen

$$(a) \quad F(x) = -\frac{\cos(2x+5)}{2} + C$$

$$(b) \quad F(x) = \ln(kx+1) + C$$

$$(c) \quad F(x) = \ln(\sin x) + C$$

$$(d) \quad F(x) = \frac{a \ln(\sin x) + bx}{c} + C$$

$$(e) \quad F(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C$$

$$(f) \quad F(x) = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

Aufgabe 2: Partielle Integration

$$(a) \quad \pi$$

$$(b) \quad 6 - 2e$$

$$(c) \quad \left(\frac{3}{4} + 2\ln 2\right)r_0^2$$

$$(d) \quad \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

Aufgabe 3: Substitutionen

$$(a) \quad \frac{\pi}{4}$$

$$(b) \quad \sqrt{\pi}$$

Aufgabe 4: Vollständige Induktion

$$(IA) \quad n=0: \quad 0! = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \quad \checkmark$$

$$(IV) \quad n=k: \quad k! = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx$$

$$(IB) \quad n = k + 1: \quad (k + 1)! = \int_0^{\infty} x^{k+1} e^{-x} dx$$

$$Beweis. \quad \int_0^{\infty} x^{(k+1)} e^{-x} dx \stackrel{P.I.}{=} \underbrace{\left(-x^{k+1} e^{-x} \right) \Big|_0^{\infty}}_{=0} + (k+1) \underbrace{\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx}_{k!} = (k+1)k! = (k+1)!$$

□

Aufgabe 4: Flächenintegral

$$\frac{A}{4} = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y \, dy = R \int_0^R x \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \, dx \stackrel{(z=x/R)}{=} R^2 \int_0^1 z \sqrt{1 - z^2} \, dz \stackrel{\text{Aufg. 3}}{=} \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \pi R^2}}$$

Aufgabe 5: Volumenintegral

$$V = ab \left(h_0 + y_0 - \frac{b^2}{12} \right) + a \sin(b)$$

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– KURZLÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2023/24

Thema 10: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1: Linear (un)abhängige Vektoren

- (a) linear unabhängig
- (b) $t = 6$

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Kreuzprodukt

- (a) 59, 2, 0

(b)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$|\vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} \Rightarrow \underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}}$$

- (d) Die drei Vektoren der Seiten eines Dreiecks spannen jeweils paarweise dasselbe Parallelogramm auf.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{b} \times \vec{c}| \Rightarrow ab \sin \gamma = ac \sin \beta = bc \sin \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}}}$$

Aufgabe 3: Matrizen

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \det C = 0 \rightarrow \text{nicht invertierbar}$

(b) $3 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

- (c) nette Parametrisierung: $m_{1/4} = \cos \phi, m_{2/3} = \mp \sin \phi$

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_3^2 &= 1 \\ m_1 m_2 + m_3 m_4 &= 0 \\ m_2^2 + m_4^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Laplace'scher Entwicklungssatz

$$\det A = 8a^2 + 24a + 18, \quad \text{nicht invertierbar f\"ur } a = -\frac{3}{2}$$

Aufgabe 5: Kreuzprodukt

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \Omega = 0, \quad \text{tr}(\Omega) = 0, \quad \text{antisymmetrisch: } \Omega^\top = -\Omega$$

Aufgabe 6*: Höhere Dimensionen

In d Dimensionen gibt es d kartesische Achsen x_1, x_2, \dots, x_d . Um jede Achse kann in Richtung der verbleibenden $d-1$ Achsen gedreht werden, sodass $d(d-1)$ Möglichkeiten vorliegen. Allerdings wurde doppelt gezählt, da die Drehung um eine Achse x_i in Richtung einer Achse x_j dasselbe ist wie die Drehung um eine Achse x_j in Richtung einer Achse x_i . Damit verbleiben $\frac{d(d-1)}{2}$ unabhängige Drehungen.

Aufgabe 7*: Diskreter Laplace-Operator

1. Rekursionsrelation: $\det(\Delta_n) = -2 \det(\Delta_{n-1}) - \det(\Delta_{n-2})$
2. $\det(\Delta_1) = -2, \det(\Delta_2) = 3, \det(\Delta_3) = -4 \Rightarrow$ Vermutung: $\det(\Delta_n) = (-1)^n(n+1)$

Induktion:

$$\begin{aligned} \det(\Delta_{n+1}) &= -2 \det(\Delta_n) - \det(\Delta_{n-1}) \\ &= -2(-1)^n(n+1) - (-1)^{n-1}n \\ &= (-1)^{n+1}(2(n+1) - n) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2) \end{aligned}$$

□