AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Vorbereitung der Übung: Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Aufgabe 1: *Bruchrechnung* Ziel: (a) bis (f)

(a) $$\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = \underline{\underline{b-a}}$$

(b) $$\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a+\cancel{b}+a-\cancel{b}}{\cancel{a}+b-\cancel{a}+b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

(c) $$\frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy+x^2} + \frac{y^2}{x^2+xy} = \frac{1}{x}\left(\frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2-y^2}{x+y}\right) = \frac{x-y}{\cancel{x}}\underbrace{\left(\frac{x+y}{y} - 1\right)}_{\frac{\cancel{x}}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

(d) $$\frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2-1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

(e) $$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

(f) $$\frac{a^2-1}{a^2+a}-\cancel{a}\frac{a+1}{a^{\cancel{3}2}-\cancel{a}}+\frac{1}{a}+\frac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$$
$$=\frac{1}{a}\frac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{\cancel{a+1}}-\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)}+\frac{\cancel{1}}{a}+\frac{\cancel{4a+4}}{\cancel{4(a+1)}(a-1)}=1-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-1}=\underline{\underline{1}}$$

(g) $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\frac{\sqrt{2}}{ax}-\frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]\text{ für } x=\frac{1}{a-1}$$
$$=\frac{a+x+1}{a+x-1}\left[\frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]=\frac{a+x+1}{\cancel{a+x-1}}\frac{\overbrace{(a+x)^2-1}^{(a+x+1)(\cancel{a+x-1})}}{\sqrt{2}a^2x^2}=\underbrace{\frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2}}_{x+a+1=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2}=\underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}}$$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze* Ziel: (a) bis (c)

(a) $$\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n=\frac{(a+b)^n\cancel{(a-b)^n}}{\cancel{(x+y)^n}(x-y)^n}\frac{\cancel{(x+y)^n}}{\cancel{(a-b)^n}}=\underline{\underline{\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n}}$$

(b) $$\frac{b^xc^y(ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0,5}\right)^z\right]^2}=a^{2z+y-(y-x+2z)}b^{x+2z+y-x-2z}c^{y-x-(y-x-z)}=\underline{\underline{a^xb^yc^z}}$$

(c) $$\frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}=a^{1-n+4n-3+4-3n}b^{-1-2n+5+3n-6}(a+b)^{3n-4+3-2n-n+2}$$
$$=\underline{\underline{a^2b^{n-2}(a+b)}}$$

(d) $$\left(a^{n+2}-a^n\right):\left(a^3+a^2\right)=\frac{a^n}{a^2}\frac{a^2-1}{a+1}=\underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}}$$

(e) $$\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^3=a^{-8-6}b^{-10-9}x^{2+3}y^{-6-6}=\underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}}}$$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken*

Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\quad \sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b},\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$
$$\sqrt[p]{a^m}\sqrt[q]{a^n}=\sqrt[pq]{a^{mq+np}},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}}=\sqrt[pq]{a^{mq-np}} \tag{0.1}$$

(a) $$\sqrt[6]{a^3}\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab}$$

(b) $$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}\quad\text{für } x=\frac{2am}{b(1+m^2)}\text{ mit } |m|<1$$

(c) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

(a) $(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$

(b) $\dfrac{ax+b}{ab-b^2}-\dfrac{a-bx}{ab+b^2}=\dfrac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

(c) $\dfrac{x-1}{n-1}+\dfrac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\dfrac{2x-1}{1-n^4}-\dfrac{1-x}{1+n}$

(d) $a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$

(e) $\dfrac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\dfrac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\dfrac{y^2}{1-2y}}$