

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 11: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

### Aufgabe 1: Linear (un)abhängige Vektoren

- (a) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?      (b) Für welche Werte von  $t$  befinden sich die folgenden Vektoren in einer Ebene?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 2: Skalarprodukt und Vektorprodukt

- (a) Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5a+6 \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (c) Nutzen Sie das Skalarprodukt, um den Kosinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.  
(d) Nutzen Sie das Vektorprodukt, um den Sinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

### Aufgabe 3: Matrizen

- (a) Bilden Sie – falls möglich – die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

- (b) Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Berechnen Sie  $A \cdot B - B \cdot A$ .

- (c) Welche Bedingungen müssen die Einträge  $m_i$  einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

erfüllen, damit  $|M \cdot \vec{v}| = |\vec{v}|$  für einen beliebigen zweikomponentigen Vektor  $\vec{v}$  gilt?

#### Aufgabe 4: Laplace'scher Entwicklungssatz

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix. Für welche Werte von  $a$  ist die Matrix nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ -a & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 5: Vektorprodukt

Das Vektorprodukt  $\vec{\omega} \times \vec{u}$  zweier Vektoren  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

lässt sich auch als Matrixmultiplikation  $\Omega \cdot \vec{u}$  mit einer  $(3 \times 3)$ -Matrix  $\Omega$  mit den Einträgen  $\pm\omega_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  schreiben. Wie sieht  $\Omega$  aus? Welche Eigenschaften hat es (Determinante, Spur, Symmetrie)?

#### Aufgabe 6\*: Höhere Dimensionen

Im dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  kann jede beliebige Drehung in Drehungen um die  $x$ -, die  $y$ - und die  $z$ -Achse zerlegt werden, d.h. man benötigt genau drei linear unabhängige Drehmatrizen für eine solche Zerlegung. Wie viele linear unabhängige Drehmatrizen benötigt man im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$ ?

#### Aufgabe 7\*: Diskreter Laplace-Operator

Gegeben sei die  $(n \times n)$ -Matrix  $\Delta_n$ , welche die Einträge -2 auf der Haupt- und 1 auf den beiden Nebendiagonalen hat,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante von  $\Delta_n$ , indem Sie wie folgt vorgehen:

- Finden Sie eine Rekursionsrelation, die  $\det(\Delta_n)$  auf  $\det(\Delta_{n-1})$  und  $\det(\Delta_{n-2})$  zurückführt.
- Raten Sie einen allgemeinen Ausdruck für  $\det(\Delta_n)$  und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion. Alternativ kann der Versuch unternommen werden, das Verfahren aus Thema 9, Aufgabe 5 anzuwenden.