AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– AUSFÜHRLICHE LÖSUNGEN FÜR TUTOREN –

WS 2023/24

Thema 1: Grundrechenarten
Brüche
Potenzen
Wurzeln

Vorbereitung der Übung: Wichtige Formeln an die Tafel schreiben!

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Aufgabe 1: *Bruchrechnung* Ziel: (a) bis (f)

(a) $$\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = \underline{\underline{b-a}}$$

(b) $$\frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} = \frac{a + \cancel{b} + a - \cancel{b}}{\cancel{a} + b - \cancel{a} + b} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

(c) $$\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}\left(\frac{(x+y)(x-y)}{y} - \frac{x^2 - y^2}{x+y}\right) = \frac{x-y}{\cancel{x}}\underbrace{\left(\frac{x+y}{y} - 1\right)}_{\frac{\cancel{x}}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{y} - 1}}$$

(d) $$\frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}} = \frac{n+1}{2 - \frac{n^2+1}{n^2}} = n^2 \frac{n+1}{n^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-1}}}$$

(e) $$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$$

(f) $$\frac{a^2-1}{a^2+a}-\cancel{a}\frac{a+1}{a^{\cancel{3}2}-\cancel{a}}+\frac{1}{a}+\frac{(a+1)^2-(a-1)^2+4}{4(a^2-1)}$$
$$=\frac{1}{a}\frac{\cancel{(a+1)}(a-\cancel{1})}{\cancel{a+1}}-\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)}+\cancel{\frac{1}{a}}+\frac{\cancel{4a+4}}{\cancel{4(a+1)}(a-1)}=1-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-1}=\underline{\underline{1}}$$

(g) $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[\frac{\sqrt{2}}{ax}-\frac{1-(a^2+x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2}\right] \text{ für } x=\frac{1}{a-1}$$
$$=\frac{a+x+1}{a+x-1}\left[\frac{2ax-1+a^2+x^2}{\sqrt{2}a^2x^2}\right]=\frac{a+x+1}{\cancel{a+x-1}}\frac{\overbrace{(a+x)^2-1}^{(a+x+1)\cancel{(a+x-1)}}}{\sqrt{2}a^2x^2}=\underbrace{\frac{(a+x+1)^2}{\sqrt{2}a^2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^2(a-1)^2}{(a-1)^2}}_{x+a+1=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}}=\underline{\underline{\frac{a^2}{\sqrt{2}}}}$$

Aufgabe 2: *Potenzgesetze* Ziel: (a) bis (c)

(a) $$\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n=\frac{(a+b)^n\cancel{(a-b)^n}}{\cancel{(x+y)^n}(x-y)^n}\frac{\cancel{(x+y)^n}}{\cancel{(a-b)^n}}=\underline{\underline{\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n}}$$

(b) $$\frac{b^x c^y (ab)^{2z+y}(cb)^{-x}}{(ac)^{y-x}\left[\left(abc^{-0,5}\right)^z\right]^2}=a^{2z+y-(y-x+2z)}b^{x+2z+y-x-2z}c^{y-x-(y-x-z)}=\underline{\underline{a^x b^y c^z}}$$

(c) $$\frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b}\cdot\frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}}\cdot\frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$$
$$=a^{1-n+4n-3+4-3n}b^{-1-2n+5+3n-6}(a+b)^{3n-4+3-2n-n+2}$$
$$=\underline{\underline{a^2b^{n-2}(a+b)}}$$

(d) $$\left(a^{n+2}-a^n\right):(a^3+a^2)=\frac{a^n}{a^2}\frac{a^2-1}{a+1}=\underline{\underline{(a-1)a^{n-2}}}$$

(e) $$\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^3=a^{-8-6}b^{-10-9}x^{2+3}y^{-6-6}=\underline{\underline{\frac{x^5}{a^{14}b^{19}y^{12}}}}$$

Aufgabe 3: *Umformungen mit Wurzelausdrücken* Ziel: (a) bis (b)

Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\quad \sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b},\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n}=\sqrt[pq]{a^{mq+np}},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}}=\sqrt[pq]{a^{mq-np}}$$

Beispiel für “Rationalmachen des Nenners”:

$$r+\sqrt{1+r^2}-\frac{1}{r+\sqrt{1+r^2}}=r+\cancel{1+r^2}-\frac{r-\sqrt{1+r^2}}{-1}=\underline{\underline{2r}}.$$

(a) $$\sqrt[6]{a^3}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1-ab}=\frac{1-\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{ab}}{1-ab}=\frac{(1-\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}}{1-ab}=\underline{\underline{\frac{1+ab}{1-ab}}}$$

(b) $$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}\quad \text{für } x=\frac{2am}{b(1+m^2)}\quad \text{mit } |m|<1$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}\right)^2}{2bx}=\frac{\cancel{2}a+\cancel{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}}{\cancel{2}bx}=\frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4a^2m^2}{(1+m^2)^2}}}{2am}(1+m^2)$$

$$=\frac{1+m^2+\sqrt{(1+m^2)^2-4m^2}}{2m}=\frac{1+m^2+1-m^2}{2m}=\underline{\underline{\frac{1}{m}}}$$

(c) $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{a\sqrt{b}+\cancel{b\sqrt{a}}-\cancel{\sqrt{ab}}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\,\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}{\sqrt[4]{b}\cancel{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}}$$

$$=\underline{\underline{a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}}$$

Aufgabe 4: *Algebraische Umformungen* Ziel: (a) bis (c)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf.

(a)
$$(a+nx)(b-nx)-(a-mx)(b+mx)=x^2(m-n)(m+n)-1$$
$$\cancel{(m^2-n^2)x^2}+(bn-an+bm-am)x=\cancel{x^2(m^2-n^2)}-1$$
$$(a-b)(m+n)x=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{(a-b)(m+n)}$$

(b)
$$\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2} \quad |\cdot b(a^2-b^2)$$
$$(ax+b)(a+b)-(a-bx)(a-b)=2b(ax+b)$$
$$(ax+b)\cancel{(a-b)}-(a-bx)\cancel{a-b}=0 \quad (a\neq b)$$
$$(a+b)x=a-b \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{a-b}{a+b}$$

(c)
$$\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{\underbrace{n^4-1}_{n^4-1=(n^2+1)(n+1)(n-1)}}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n} \quad |\cdot(n-1)(n+1)$$
$$\left(\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)\right)x=\cancel{n}+1-\frac{2n^2}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}-(\cancel{n}-1)$$
$$4x=3 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{3}{4}.$$

(d)
$$a\left(\sqrt{x}-a\right)-b\left(\sqrt{x}-b\right)+a+b=\sqrt{x}$$
$$\cancel{a-b-1}\sqrt{x}=a^2-b^2-(a+b)=(a+b)\cancel{(a-b-1)} \qquad \Rightarrow \qquad x=(a+b)^2$$

(e)
$$\frac{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x-\sqrt{1-4y^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{1-4y^2}}}=\sqrt{1+\frac{y^2}{1+2y}}\sqrt{1+\frac{y^2}{1-2y}},$$ siehe 1b) mit $a=x, b=\sqrt{1-4y^2}$
$$\frac{x}{\cancel{\sqrt{1-4y^2}}}=\frac{|y+1|}{\cancel{\sqrt{1+2y}}}\frac{|y-1|}{\cancel{\sqrt{1-2y}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=y^2-1 & \text{für} \quad |y|\geq 1 \\ x=1-y^2 & \text{für} \quad |y|<1. \end{cases}$$

Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

Tafelbeispiel: $\dfrac{10(x+y)+3}{x-2y+4} = 1, \quad \dfrac{36x-3y}{7(x-y)+3} = 3$

1. Sortieren nach x und y

$$\begin{aligned} 9x + 12y &= 1 \quad (1) \\ 15x + 18y &= 9 \quad (2) \end{aligned}$$

2. Prüfe auf lineare Unabhängigkeit, d. h. Berechne $a_1 b_2 - a_2 b_1$ (Determinante, vgl. Vorlesung):

$$9 \cdot 18 - 15 \cdot 12 = 162 - 180 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{genau ein Lösungspaar } (x, y)$$

3. Lösen, bspw. durch geschickte Linearkombination (Elimination von y)

$$\begin{aligned} 2\cdot(2) - 3\cdot(1): \quad 3x &= 15 \quad \Rightarrow x = 5 \\ \text{in} \quad (1): \quad 12y &= -44 \quad \Rightarrow y = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Lösungsmenge} \quad \mathbb{L} = \underline{\underline{\left\{\left(5; -\frac{11}{3}\right)\right\}}}$$

Aufgabe 1: *Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten* Ziel (a) bis (d)

(a)

$$\begin{aligned} 33x + 12y &= 25 \quad (1) \\ 11x - \ \ 3y &= \ \ 6 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - 3\cdot(2): \quad 21y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}, \quad \text{in (2):} \quad x = \frac{7}{11} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{7}{11}; \frac{1}{3}\right)\right\}}}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3y}{3x-y} &= \frac{17}{9} \\ \frac{3x+4y}{6x-1} &= 2 \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \quad (1) \\ 9x - 4y &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - (2): \quad 6x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$3\cdot(1) - (2): \quad 8y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)\right\}}}$$

(c)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{y+3}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{y+3}{2y-5x}=\dfrac{3}{5}\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\begin{array}{rcll}3x-y&=&-3&(1)\\15x-y&=&-15&(2)\end{array}$$

$$(1)-(2):\quad -12x=12\quad\Rightarrow\quad x=-1$$

$$\text{in }(1):\qquad y=0\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(-1;0)\}}}$$

(d)

$$ax+by=2a\quad(1)$$

$$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=\frac{2}{a}\quad(2)$$

$$(1)-ab\cdot(2):\ \cancel{2}by=\cancel{2}(a-b)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{a}{b}-1$$

$$\text{in }(1):\quad ax+\cancel{a}-b=\cancel{2}a\quad\Rightarrow\quad x=\frac{b}{a}+1\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{b}{a}+1;\frac{a}{b}-1\right)\right\}}}$$

(e)

$$x+14y=\frac{1}{\sqrt{2}}-7\sqrt{2}\quad(1)$$

$$3\sqrt{2}x-\frac{y}{\sqrt{3}}=3+\frac{1}{\sqrt{6}}\quad(2)$$

$$(1)-\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(2):\quad \cancel{\left(14+\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)}y=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-7\sqrt{2}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{3\sqrt{12}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\left(14+\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)}\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{in }(1):\quad x-\cancel{7\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{7\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}}$$

(f)

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=a+b\quad(1)$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2b\quad(2)$$

$$(a+b)\cdot(1)-a\cdot(2):\quad \left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}\right)y=a^2+b^2$$

$$\cancel{\left(\cancel{ab}+b^2+a^2-\cancel{ab}\right)}y=b(a-b)(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow y=b(a-b)$$

$$\text{in }(1):\quad \frac{x}{a+b}+\cancel{b}=a+\cancel{b}\qquad\Rightarrow x=a(a+b)\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{(a(a+b);b(a-b))\}}}$$

(g)

$$39x-38y=1\quad(1)$$

$$91x-57y=4\quad(2)$$

$$2\cdot(2)-3\cdot(1):\quad (182-117)x=5\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{13}$$

$$\text{in }(1):\quad 38y=2\qquad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{19}\qquad\Longrightarrow\qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{13};\frac{1}{19}\right)\right\}}}$$

Aufgabe 2: *Drei Gleichungen mit drei Unbekannten* Ziel: (a) und (b)

Tafelbeispiel:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \quad (1)\\ x + 2y + 4z &= 15 \quad (2)\\ x + 3x + 9z &= 23 \quad (3) \end{aligned}$$

Vorgehen: Wir wollen eine Linearkombination der drei Gleichungen finden, sodass (bspw.) x und y verschwinden; d. h. in $a \cdot (1) + b \cdot (2) + c \cdot (3)$ soll $a + b + c = 0$ sein und $a + 2b + 3c = 0$. Wir haben offenbar die Freiheit, $a = 1$ zu wählen, also $b = -2$ und $c = 1$.

$$\begin{aligned} &(1) - 2 \cdot (2) + (3): \quad 2z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1\\ &\text{in } (1): \quad x + y = 8 \quad (4)\\ &\text{in } (2): \quad x + 2y = 11 \quad (5) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4),(5) können nun mit den früheren Methoden gelöst werden.
Optionale Kreativlösung: Angenommen $x, y \in \mathbb{N}$. Nach (5) muss x ungerade sein, damit nach (4) auch y. Die einzigen positiven Zerlegungen der Zahl 8 in zwei ungerade Zahlen sind (1,7) und (3,5). Nur letztere löst (4) und (5). Wir erhalten $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(5;3;1)\}}}$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 5 \quad (1)\\ 3x + 7y - 5z &= 5 \quad (2)\\ x + y - z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$2 \cdot (1) + (2) - 5 \cdot (3): \quad 10z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in } (1): \quad x - y = 0\\ &\text{in } (3): \quad x + y = 2 \end{aligned}\right\} \quad x = y = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;1;1)\}}}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 3z &= 4 \quad (1)\\ -x + y - z &= -2 \quad (2)\\ 7x + 4y - 5z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(1) + 8 \cdot (2) - (3): \quad -12x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{in } (1): \quad -4y + 3z = 1\\ &\text{in } (2): \quad y - z = -1 \end{aligned}\right\} \quad y = 2, z = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1;2;3)\}}}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + y &= b + a \quad (1)\\ x + z &= a + c \quad (2)\\ y + z &= c + b \quad (3) \end{aligned}$$

Lösung durch Draufschauen.

$$\begin{aligned} &(1) + (2) - (3): \quad 2x = 2a\\ &(1) - (2) + (3): \quad 2y = 2b\\ &(2) + (3) - (1): \quad 2z = 2c \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a;b;c)\}}} \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 6x - 4y + 8z &= 0 \quad (1)\\ -2x + y - z &= 0 \quad (2)\\ 12x - 7y + 11z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$ Da (1) − 3 · (2) = (3), ist das System unterbestimmt.

$$(1) + 3\cdot(2): \quad -\ y + 5z = 0 \quad \Rightarrow y = 5z$$
$$(1) + 4\cdot(2): \quad -2x + 4z = 0 \quad \Rightarrow x = 2z \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2z; 5z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}}}$$

Aufgabe 3: *Parametrisierung von Lösungsmengen*

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $13x - 7y = 1$ an für

(a) $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $x, y \in \mathbb{N}$.

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist nichts zu beachten. Wir Lösen die Gleichung nach x auf und erhalten

$$x = \frac{1+7y}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1+7\lambda}{13}; \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}}}.$$

(b) Für $x, y \in \mathbb{N}$ muss $1 + 7n, n \in \mathbb{N}$, ein Vielfaches von 13 sein. Die kleinste natürliche Zahl, für die das gilt, ist $n = 11$ (ausprobieren), d. h. alle übrigen Teiler liegen in 13er-Schritten darüber.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n+1$	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
13-Reihe	13	26	39	52	65	78					

Setzen wir also $\lambda = 11 + 13n$ in $\mathbb{L}$ von oben ein, ergibt sich $\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{(6 + 7n; 11 + 13n) \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}}}$.

Aufgabe 4: *Gleichungssysteme* Ziel (a) und (b)

Tafelbeispiel: In dieser Aufgabe werden nicht linear aussehende Gleichungen auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt.

$$\begin{aligned} (1-x)^2 &= 5y^2 - 4(x-2)^2 \quad (1)\\ 2(x^2 - y^2) &= 6x - 5 \qquad\qquad (2). \end{aligned}$$

Sortieren wir das Gleichungssystem um, ergibt sich

$$5(x^2 - y^2) - 18x + 17 = 0 \quad (3)$$
$$2(x^2 - y^2) - 6x + 5 = 0 \quad (4)$$
$$(3) - \frac{5}{2}\cdot(2): \quad -3x + \frac{9}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$
$$\text{in } (2): \quad y^2 = x^2 - 3x + \frac{5}{2} = \frac{1}{4} \qquad y = \pm\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}\right)\right\}}}.$$

Lösung:

(a)

$$x^2+y^2=2(xy+2) \quad (1) \quad \Rightarrow \quad (x-y)^2=4 \Rightarrow x-y=\pm 2 \quad (1a)$$

$$x \ \ + y \ \ = 6 \qquad\qquad (2)$$

$$(1a)+(2): \quad 2x=\begin{cases}8, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases}$$

$$\text{in } (2): \qquad y=\begin{cases}2, & \text{oberes VZ}\\ 4, & \text{unteres VZ}\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(4;2),(2;4)\Big\}}}$$

(b)

$$\frac{12}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5 \quad (1)$$

$$\frac{8}{\sqrt{x-1}}+\frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6 \quad (2)$$

$$2\cdot(1)-(2): \qquad 16=4\sqrt{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad x=17$$

$$2\cdot(1)-3\cdot(2): \quad 20=8\sqrt{y+\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad y=6 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(17;6)\Big\}}}$$

Optionaler Hinweis: nicht immer muss alles mühsam quadriert und aufgelöst werden, sondern man kann auch versuchen draufzuschauen.

- Was ergibt 8 multipliziert mit 20? Antwort: $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
- Die Wurzel woraus ist $\frac{5}{2}$? Antwort: $\frac{25}{4}$.
- Damit ist $y=\dfrac{25}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{24}{4}=6$.

(c)

$$\frac{x^2-y^2}{2x+3}+y^2=(x+y)x-xy \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-y^2}{2x+3}=x^2-y^2 \quad (1)$$

$$y-2x=3 \quad (2)$$

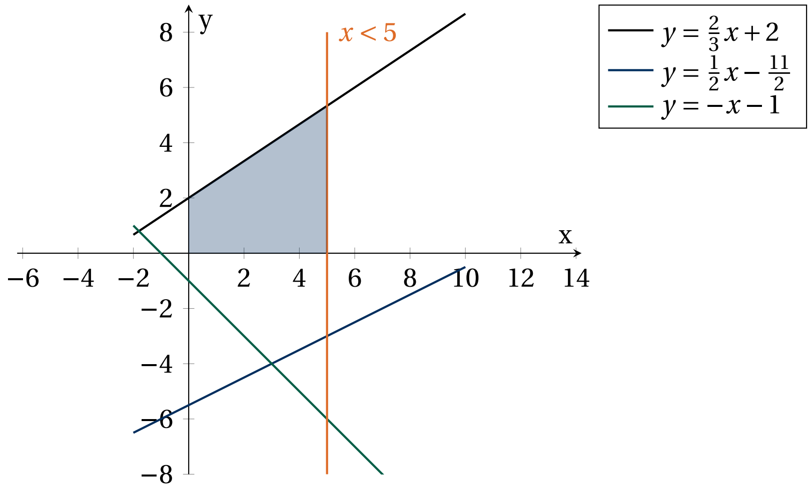
$$\text{Fall } x^2\neq y^2 \quad \left.\begin{array}{ll}(1): 1=2x+3 & \Rightarrow x=-1\\ \text{in } (2): \quad y=1 & \end{array}\right\} \text{Widerspruch}$$

$$\text{Fall } x=\pm y \quad (2): \quad y=\begin{cases}-3, & \text{oberes VZ}\\ 1, & \text{unteres VZ}\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\Big\{(-3;-3),(-1;1)\Big\}}}$$

Aufgabe 5: *Ungleichungssysteme*

(a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6\,, \\ x - 2y &< 11\,, \\ x &> -y - 1\,, \\ x &< 5\,, \\ x &\geq 0\,, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

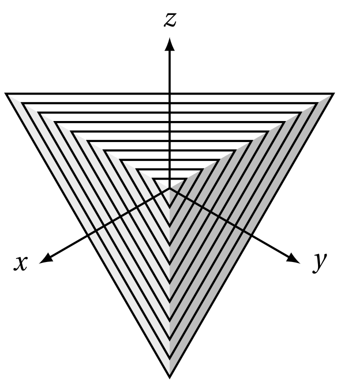


Offenbar können die zweite und dritte Gleichung weggelassen werden, ohne dass sich etwas am schraffierten Gebiet ändert.

(b) * Welches Gebiet im ersten Oktanden ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z\,, \\ x + z &\geq y\,, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

Die Ungleichungen beschreiben eine dreiseitige (unendlich große) Pyramide, deren Spitze auf dem Koordinatenursprung liegt und deren Kanten jeweils die $x-y-$, $x-z-$ und $x-z$-Ebene halbieren.



Auffrischungskurs Mathematik

– Ausführliche Lösungen für Tutoren –

WS 2023/24

Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades
Das Summenzeichen

Aufgabe 1: *Nullstellensuche* Ziel: (a) bis (c)

(a) *Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln a, b und c hat.*

$$f_3(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = \underline{\underline{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc}}$$

Bemerkung: Hier kann man versuchen, sich klarzumachen, wie der verallgemeinerte Satz von Vieta aussieht.

(b) *Zerlegen Sie das Polynom $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$ in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?*

$$f_4(x) = x^3 + \underbrace{2x^4 + 4x^2 + 2}_{2x^4+2x^2+2x^2+2=2x^2(x^2+1)+2(x^2+1)} + x = (x^2+1)(2x^2+2) + \underbrace{x^3 + x}_{x(x^2+1)} = \underline{\underline{(x^2+1)(2x^2+x+2)}}$$

Da weder $x^2+1=0$ noch $x^2+\frac{1}{x}x+1=0$ eine (reelle) Lösung hat, besitzt das Polynom keine (reellen) Nullstellen.

(c) *Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$.* Offensichtlicherweise gilt $x_1 = 0$ und wir können das Polynom mit Division durch x vereinfachen. Mit der Substitution $z \equiv x^2$ erhalten wir

$$0 = z^2 - 3z + 2 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{2/3} = \pm\sqrt{2}}}, \quad \underline{\underline{x_{4/5} = \pm 1}}.$$

(d) *Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Setzen Sie näherungsweise $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$.* Wir führen wieder die Substitution $z \equiv x^2$ aus und erhalten

$$0 = z^2 - 12z + 24 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = 6 \pm 2\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}.$$

Wir suchen nun das kleinste positive x, also 1.VZ: "+" und 2.VZ: "−"

$$x_0 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3}\approx 3-\frac{\pi^2}{8}}{\approx} \sqrt{6 - \left(3 - \frac{\pi^2}{8}\right)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

Bemerkung: Die Funktion $f_4(x)$ ist das dritte Taylorpolynom der Kosinusfunktion. Es gilt $\cos(x) = f_4(x) + \mathcal{O}\left(x^6\right)$.

Aufgabe 2: *Polynomdivision*

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zusatz: Für welche Werte von n bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

(a)

$$\begin{array}{lllll}
(21a^3 & +34a^2b & & +25b^3) : (7a+5b) = \underline{\underline{3a^2-7ab+5b^2}} \\
-(21a^3 & +15a^2b) & & \\ \hline
 & -49a^2b & & +25b^3 \\
 & -(-49a^2b & -35ab^2 &) \\ \hline
 & & 35ab^2 & +25b^3 \\
 & & -(35ab^2 & +25b^3) \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{llll}
(9x^3 & & -7xy^2 & +2y^3) : (3x-2y) = \underline{\underline{3x^2+2xy-y^2}} \\
-(9x^3 & -6x^2y &) & \\ \hline
 & 6x^2y & -7xy^2 & +2y^3 \\
 & -(6x^2y & -4xy^2 &) \\ \hline
 & & -3xy^2 & +2y^3 \\
 & & -\ (-3xy^2 & +2y^3) \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{lllll}
(25x^4 & & -a^2x^2 & & +25a^4) : (5x^2+7ax+5a^2) = \underline{\underline{5x^2-7ax+5a^2}} \\
-(-25x^4 & +35ax^3 & +25a^2x^2) & & \\ \hline
 & -35ax^3 & -24a^2x^2 & & +25a^4 \\
 & -(-35ax^3 & -49a^2x^2 & -35a^3x &) \\ \hline
 & & 25a^2x^2 & +35a^3x & +25a^4 \\
 & & -(25a^2x^2 & +35a^3x & +25a^4) \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & +2x & -15) & : (x+n) = \underline{\underline{x+2-n+\dfrac{n(n-2)-15}{x+n}}} \\
-(x^2 & +nx) & & \\ \hline
 & (2-n)x & -15 & \\
 & -((2-n)x & +n(2-n)) & \\ \hline
 & & -15 \quad +n(n-2) & \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} n^2-2n-15 \quad \Rightarrow \quad n_{1/2} = 1 \pm \sqrt{16}
\end{array}$$

Wir erhalten damit die beiden Werte $n_{1/2}$ die den Wurzeln des quadratischen Gleichungssystems entsprechen

$$x^2+2x-15 = (x+5)(x-3).$$

Aufgabe 3: *Kubische Gleichungen* Ziel: (a)

(a) *Bestimmen Sie den Wert von m in der Gleichung*

$$6x^3-7x^2-16x+m=0\,,\quad \stackrel{x=2}{\Rightarrow}\quad -12+m\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{m=12}}.$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln. Wir bestimmen die restlichen Wurzeln per Polynomdivision und pq-Formel:

$$\begin{array}{l}
(6x^3\;-7x^2\;-16x\;+12):(x-2)=\underline{6x^2+5x-6}\\
\underline{-(6x^3-12x^2\qquad)}\\
\qquad\quad 5x^2\;-16x+12\\
\qquad\;\;\underline{-(5x^2\;-10x\qquad)}\\
\qquad\qquad\quad -6x+12\\
\qquad\qquad -\;\underline{(-6x+12)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad 0\stackrel{!}{=}x^2+\frac{5}{6}x-1\quad\Rightarrow x_{1/2}=-\frac{5}{12}\pm\sqrt{\frac{25}{144}+1}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{3}{2}}}.$$

(b) *Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung*

$$2x^3+mx^2-13x+n=0\,.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von m und n, und geben Sie die dritte Wurzel an. Zu Bestimmung der Lösung setzen wir die beiden Wurzeln in die Gleichung ein:

$$\begin{array}{ll}
x_1=2: & 4m+n=\;\;10\quad(1)\\
x_2=3: & 9m+n=-15\quad(2)\\
\Rightarrow & (1)-(2):\quad -5m=25\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{m=-5}},\quad \underline{\underline{n=30}}.
\end{array}$$

Die dritte Wurzel ermitteln wir durch Polynomdivision mit $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

$$\begin{array}{l}
(2x^3\;-5x^2\;-13x\;+30):(x^2-5x+6)=2x+5\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_3=-\frac{5}{2}}}\\
\underline{-(2x^3-10x^2+12x)}\\
\qquad\quad 5x^2\;-25x+30\\
\qquad\;\;\underline{-(5x^2\;-25x+30)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Aufgabe 4: *Nullstellenraten* (Zusatzaufgabe)

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor $(x - x_0)$ vom Polynom ab.

(a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \quad \underline{\underline{x_0 = 1}}$ oder $\underline{\underline{x_0 = 2}}$

$= (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$ (stückweises konstruieren ohne Polynomdivision)

(b) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9, \quad \underline{\underline{x_0 = 3}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$= (x+3)(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)$

(c) $x^4 - 3x^2 + 3x + 2, \quad \underline{\underline{x_0 = -2}}$ (einzige reelle Nullstelle)

$= (x+2)(x^3 - 2x^2 + x + 1)$

(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1, \quad \underline{\underline{x_0 = 1}}$

$= (x-1)(x^4 - 3x^2 + 1)$ die anderen Nullstellen sind: $x_{2/3/4/5} = \dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$= (x-1)(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung* Ziel: (a) bis (c)

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a) $$\frac{x-5}{x^2-2x-3} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{(x-3)\alpha + (x+1)\beta}{x^2-2x-3} = \frac{(\alpha+\beta)x + \beta - 3\alpha}{x^2-2x-3}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^1: & \alpha + \beta = 1 \\ x^0: & 3\alpha - \beta = 5 \end{array}\right\}$ Addition: $\underline{\alpha = \frac{3}{2}}, \quad \underline{\beta = -\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-3)}}}$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-1} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} + \gamma = \frac{(x-1)\alpha + (x+1)\beta + (x^2-1)\gamma}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler: $\left.\begin{array}{ll} x^2: & \underline{\gamma = 1} \\ x^1: & \alpha + \beta = 0 \\ x^0: & 1 = \beta - \alpha - \gamma \end{array}\right\}$ $\underline{\beta = 1}, \underline{\alpha = -1}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}}$$

Alternativ kann auch eine Poylnomdivision mit Rest durchgeführt werden mit anschließender Partialbruchzerlegung des Restglieds: $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$.

(c) $$\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{(x-2)^2} = \frac{(x^2-4x+4)\alpha + (x^2-3x+2)\beta + (x-1)\gamma}{(x-1)(x-2)^2}$$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{lll} x^2: & \alpha + \beta = 2 & \\ x^1: & -4\alpha - 3\beta + \gamma = -3 & (2) \\ x^0: & 4\alpha + 2\beta - \gamma = \;\; 1 & (3) \end{array}\right\}$ $(2)+(3): \quad \beta = 2 \Rightarrow \underline{\alpha = 0}, \underline{\gamma = 3}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}}}$$

Die Faktorisierung des Nenners haben wir in Aufgabe 4a bereits gesehen. Wir müssen die

Vielfachheit der Nullstelle in unserem Ansatz berücksichtigen. Durch $\alpha = 0$ sehen wir, dass die rechte Seite bei $x = 1$ keine Pollstelle hat. Die Partialbruchzerlegung hat uns also den Limes $x \to 1$ der linken Seite verschafft.

(d) $\dfrac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3}$

Da der Zähler von höherem Grade ist als das Nennerpolynom, wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt:

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 - 4x^3 - 5x^2 \;+ (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12) : (x^2 - 2x - 3) = \underline{2x^2 + 1 + \dfrac{(\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3}} \\
\underline{-(-2x^4 - 4x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\qquad x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12 \\
\qquad\quad \underline{-\,(x^2 \qquad -2x \qquad -3)} \\
\qquad\qquad\quad (\sqrt{2} - 5)x \; + \sqrt{2} + 15
\end{array}
$$

Die Nullstellen des Nenners lauten: $x_1 = 3, x_2 = -1$. Damit folgt

$$\frac{(\sqrt{2} - 5)x + \sqrt{2} + 15}{x^2 - 2x - 3} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x - 3} + \frac{\beta}{x + 1} = \frac{(x + 1)\alpha + (x - 3)\beta}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich:} \quad \left.\begin{array}{l} x^1 : \alpha + \beta = \sqrt{2} - 5 \\ x^0 : \alpha - 3\beta = \sqrt{2} + 15 \end{array}\right\} \quad \text{Differenz:} \quad \underline{\beta = -5}, \quad \Rightarrow \underline{\alpha = \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + (\sqrt{2} - 7)x + \sqrt{2} + 12}{x^2 - 2x - 3} = 2x^2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{x - 3} - \frac{5}{x + 1}}}$$

Aufgabe 6: *Summen* Ziel: (a) bis (b)

Vereinfachen bzw. berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l + 1}}_{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2n} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}}}$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$

Hinweis zu (b): Der Term in der Summe kann mithilfe von Partialbruchzerlegung vereinfacht und die entstehende Summe auseinandergezogen werden.

$$\frac{1}{k(k + 1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k + 1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(k + 1) + Bk = (A + B)k + A.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A = 1, B = -1$ und wir können weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad k+1 = l \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = \left(1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n}}\right) - \left(\cancel{\sum_{l=2}^{n}} + \frac{1}{n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}}}.
\end{aligned}$$

Hinweis zu (c): Hierfür kann ein expliziter Ausdruck gefunden werden, wenn man die Formel mit $(1-x)$ multipliziert und analog vorgeht wie in (b)

$$\begin{aligned}
(1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad l = k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{l=1}^{n+1} x^l = 1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x^k} - \left(\cancel{\sum_{l=1}^{n} x^l} + x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \underline{\underline{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}}.$$