

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 1: Grundrechenarten

Brüche

Potenzen

Wurzeln

### Aufgabe 1: Bruchrechnung

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$(a) \quad \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$(b) \quad \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}}$$

$$(c) \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + x^2} + \frac{y^2}{x^2 + xy}$$

$$(d) \quad \frac{n+1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2+1}}}$$

$$(e) \quad \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$(f) \quad \frac{a^2 - 1}{a^2 + a} - a \frac{a+1}{a^3 - a} + \frac{1}{a} + \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2 + 4}{4(a^2 - 1)}$$

$$(g) \quad \frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{ax} - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{\sqrt{2}a^2x^2} \right] \text{ für } x = \frac{1}{a-1}$$

### Aufgabe 2: Potenzgesetze

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$(a) \quad \left( \frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2} \right)^n \left( \frac{x+y}{a-b} \right)^n$$

$$(b) \quad \frac{b^x c^y (ab)^{2z+y} (cb)^{-x}}{(ac)^{y-x} [(abc^{-0.5})^z]^2}$$

$$(c) \quad \frac{(a+b)^{3n-4}}{a^{n-1}b} \cdot \frac{a^{4n-3}(a+b)^{3-2n}}{b^{2n-5}} \cdot \frac{a^{4-3n}b^{3n-6}}{(a+b)^{n-2}}$$

$$(d) \quad (a^{n+2} - a^n) : (a^3 + a^2)$$

$$(e) \quad \left( \frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3} \right)^2 \cdot \left( \frac{a^{-2}x}{b^3y^2} \right)^3$$

### Aufgabe 3: Umformungen mit Wurzelausdrücken

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$(a) \quad \sqrt[6]{a^3} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{8b}}{1 - ab}$$

$$(b) \quad \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}} \quad \text{für } x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \quad \text{mit } |m| < 1$$

$$(c) \quad \left( \sqrt{ab} - \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a - b}$$

### Aufgabe 4: Algebraische Umformungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach  $x$  auf.

$$(a) \quad (a + nx)(b - nx) - (a - mx)(b + mx) = x^2(m - n)(m + n) - 1$$

$$(b) \quad \frac{ax + b}{ab - b^2} - \frac{a - bx}{ab + b^2} = \frac{2(ax + b)}{a^2 - b^2}$$

$$(c) \quad \frac{x-1}{n-1} + \frac{2n^2(1-x)}{n^4-1} = \frac{2x-1}{1-n^4} - \frac{1-x}{1+n}$$

$$(d) \quad a(\sqrt{x} - a) - b(\sqrt{x} - b) + a + b = \sqrt{x}$$

$$(e) \quad \frac{\frac{1}{x - \sqrt{1-4y^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{1-4y^2}}}{\frac{1}{x - \sqrt{1-4y^2}} - \frac{1}{x + \sqrt{1-4y^2}}} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{1+2y}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-2y}}$$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 2: Lineare Gleichungssysteme

### Aufgabe 1: Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für  $x$  und  $y$ .

- |   |  |
|---|--|
| (a) $33x + 12y = 25,$                           | $11x - 3y = 6$   |
| (b) $\frac{2x+3y}{3x-y} = \frac{17}{9},$        | $\frac{3x+4y}{6x-1} = 2$                                   |
| (c) $\frac{x+2}{y+3} = \frac{1}{3},$            | $\frac{y+3}{2y-5x} = \frac{3}{5}$                          |
| (d) $ax + by = 2a,$                             | $\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{2}{a}$                  |
| (e) $x + 14y = \frac{1}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2},$ | $3\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{6}}$ |
| (f) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a + b,$    | $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2b$                           |
| (g) $39x - 38y = 1,$                            | $91x - 57y = 4$  |

### Aufgabe 2: Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

- |   |   |
|---|---|
| (a) $x - y + 5z = 5,$<br>$3x + 7y - 5z = 5,$<br>$x + y - z = 1$ | (b) $3x - 4y + 3z = 4,$<br>$-x + y - z = -2,$<br>$7x + 4y - 5z = 0$   |
| (c) $x + y = b + a,$<br>$x + z = a + c,$<br>$y + z = c + b$     | (d) $6x - 4y + 8z = 0,$<br>$-2x + y - z = 0,$<br>$12x - 7y + 11z = 0$ |

**Aufgabe 3: Parametrisierung von Lösungsmengen**

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung  $13x - 7y = 1$  an für

(a)  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $x, y \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 4: Gleichungssysteme**

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für  $x$  und  $y$ .

(a) 
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2(xy + 2), \\ x + y &= 6 \end{aligned}$$

(b) 
$$\frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5,$$

(c) 
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2x + 3} + y^2 &= (x + y)x - xy, \\ y - 2x &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6$$

**Aufgabe 5: Ungleichungssysteme**

- (a) Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems an Ungleichungen zu skizzieren. Welche der Ungleichungen können weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -6, \\ x - 2y &< 11, \\ x &> -y - 1, \\ x &< 5, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- (b) \* Welches Gebiet im ersten Oktanten ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) wird durch die folgenden Ungleichungen definiert?

$$\begin{aligned} x + y &\geq z, \\ x + z &\geq y, \\ y + z &\geq x \end{aligned}$$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 3: Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

### Aufgabe 1: Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für  $x$  durch quadratische Ergänzung und kontrollieren Sie das Ergebnis mit der  $pq$ -Formel.

(a)  $x^2 - 10x + 9 = 0$

(b)  $x^2 + x - 12 = 0$

(c)  $x^2 - \sqrt{8}x + 1 = 0$

### Aufgabe 2: Wurzeln quadratischer Gleichungen

- (a) Stellen Sie  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$  als Produkt zweier Faktoren dar, deren Summe gleich  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  ist.
- (b) Bestimmen Sie in der Gleichung  $5x^2 - kx + 1 = 0$  den Koeffizienten  $k$  so, dass die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.
- (c) Wählen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  so, dass die Wurzeln der Gleichung gleich  $p$  und  $q$  sind.
- (d) Gegeben ist die quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$ . Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich
- dem Doppelten der Wurzeln der gegebenen Gleichung,
  - den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung
- sind.

### Aufgabe 3: Gleichungssysteme

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme jeweils für  $x$  und  $y$ .

(a) 
$$\begin{aligned} x + y^2 &= 7, \\ xy^2 &= 12 \end{aligned}$$

(b) 
$$\begin{aligned} x + xy + y &= 11, \\ x^2y + xy^2 &= 30 \end{aligned}$$

(c) 
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{5}{2}xy, \\ x - y &= \frac{1}{4}xy \end{aligned}$$

*Hinweis:* Substitution  $z_1 = xy$ ,  $z_2 = x + y$  in Aufgabe (b).

**Aufgabe 4:**    *Wurzelgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils für  $x$ .

(a)     $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$

(b)     $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$

(c)     $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b$

(d)     $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = 3$

(e)     $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1,5} = \frac{6}{\sqrt{2x-1}}$

**Aufgabe 5:**    *Nullstellensuche*

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen.

(a)     $x^2 + 2x - 15$

(b)     $4x^2 + 8x - 5$

(c)     $ax^3 + bx^2 + adx^2 + bdx$

(d)     $(a-x)^2 + (x-b)^2 - a^2 - b^2$

(e)     $a\sqrt{8}x^2 - 2kax - 3ak + ax\sqrt{18}$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades

### Aufgabe 1: Nullstellensuche

- (a) Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln  $a$ ,  $b$  und  $c$  hat.
- (b) Zerlegen Sie das Polynom  $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$  in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?
- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms  $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ .
- (d) Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms  $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ . Setzen Sie näherungsweise  $\sqrt{3} \approx 3 - \frac{\pi^2}{8}$ .

### Aufgabe 2: Polynomdivision

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Für welche Werte von  $n$  bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

- (a)  $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$
- (b)  $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$
- (c)  $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2)$
- (d)  $(x^2 + 2x - 15) : (x + n)$

### Aufgabe 3: Kubische Gleichungen

- (a) Bestimmen Sie den Wert von  $m$  in der Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0,$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln.

- (b) Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von  $m$  und  $n$ , und geben Sie die dritte Wurzel an.

**Aufgabe 4:** *Nullstellenraten*

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor  $(x - x_0)$  vom Polynom ab.

(a)  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

(c)  $x^4 - 3x^2 + 3x + 2$

(b)  $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9$

(d)  $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1$

**Aufgabe 5:** *Partialbruchzerlegung*

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a)  $\frac{x-5}{x^2-2x-3}$

(c)  $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

(b)  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(d)  $\frac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3}$

**Aufgabe 6:** *Polynome in Ungleichungen*

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a)  $(1+a+a^2)^2 < 3(1+a^2+a^4), \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b)  $x^4 - x^2 - 6x + 10 > 0, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$



# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

**Thema 5:** Exponentialfunktionen  
Logarithmen  
Natürliche Exponentialfunktion

## Aufgabe 1: *Logarithmische und Exponentialgleichungen*

Lösen Sie jeweils für  $x$  bzw.  $y$ . Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

- (a)  $a2^x = e^{bx}$
- (b)  $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)}$
- (c)  $e^{3ax} - 2^{a+1}e^{2ax} + 4^ae^{ax} = \log_b(1)$
- (d)  $x^{2-1}\sqrt{a^3} \cdot {}^{2x-2}\sqrt{a} \cdot {}^4\sqrt{a^{-1}} = 1$
- (e)  $\log_a x + \log_a y = 2, \quad \log_b x - \log_b y = 4$
- (f)  $3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$

## Aufgabe 2: *Verdopplungszeit*

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen  $A$  sei beschrieben durch

$$W(t) = Ae^{ct}, \quad c > 0,$$

sodass  $W(t)$  die „Menge“ an Wissen zur Zeit  $t$  gibt.

- (a) Nach welcher Zeit  $\tau_2$  hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?
- (b) Nach welcher Zeit  $\tau_n$  hat das Wissen eines Studenten auf das  $n$ -Fache zugenommen?
- (c) Drücken Sie  $\tau_n$  als Vielfaches von  $\tau_2$  aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen  $n = 3$  und  $n = 4$ ? Welche Aussage können Sie für  $n = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , treffen?

### Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen*

Es seien die Funktionen

$$\begin{aligned}f(x) &:= e^x + e^{-x}, \\g(x) &:= e^x - e^{-x}\end{aligned}$$

definiert.

- (a) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für  $f(2x)$  und  $g(2x)$  in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente,  $f(x)$  und  $g(x)$ .
- (b) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für  $f(x+y)$  und  $g(x+y)$  in Abhängigkeit von  $f(x)$  und  $f(y)$  sowie  $g(x)$  und  $g(y)$ . Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie  $x = y$  setzen.
- (c) Schreiben Sie die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in Reihendarstellung.
- (d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  von  $g(x)$ .

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 6: Trigonometrische Funktionen Ebene Trigonometrie

### Aufgabe 1: Additionstheoreme

- (a) Leiten Sie das Additionstheorem für Kosinusfunktionen aus dem für Sinusfunktionen her.  
(b) Leiten Sie das Additionstheorem für Tangensfunktionen her,

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}.$$

- (c) Zeigen Sie, dass für Doppelwinkelfunktionen gilt:
- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$
  - $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1.$

### Aufgabe 2: Trigonometrische Umformungen I

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Identitäten.

- (a)  $\frac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$   
(b)  $\frac{1 + \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$   
(c)  $2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos(x) + \cos(y)$   
(d)  $\cot(\alpha) \cot(\beta) + \cot(\alpha) \cot(\gamma) + \cot(\beta) \cot(\gamma) = 1$  für  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

### Aufgabe 3: Trigonometrische Umformungen II

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass sie sich einfach logarithmieren lassen.

- (a)  $1 + \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),$  Hinweis: Es ist  $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$   
(b)  $\frac{2 \sin(\beta) - \sin(2\beta)}{2 \sin(\beta) + 2 \sin(2\beta)}$   
(c)  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma),$  für  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

**Aufgabe 4:** *Goniometrische Gleichungen und Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und machen Sie jeweils die Probe.

(a)  $\sin(x) + \cos(x) = 1$

(b)  $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4}$

(c)  $\sin(3x) = \cos(2x)$

(d)  $a(3\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x)) - b(3\sin^2(x) - \sin(x)\cos(x)) = 2a - b$

*Hinweis:* Formen Sie die Gleichungen so um, dass nach Möglichkeit nur noch eine Funktionsart auftritt.

**Aufgabe 5:** *Dreiecksfläche*

Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten  $a$  und  $b$  sowie die Länge  $w$  der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind.

**Aufgabe 6:** *Sehnen im Kreis*

Durch einen Punkt auf einem Kreis vom Radius  $r$  seien zwei Sehnen der Längen  $a$  und  $b$  gelegt. Wenn man die Schnittpunkte der Sehnen mit der Peripherie untereinander geradlinig verbindet, erhält man ein Dreieck. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt  $A$ .

# AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung Kurvendiskussion

### Aufgabe 1: Ableitungen I

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a)  $Q(r) = \frac{3r^2}{2} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{r}{r_0} \right)$

(b)  $f(x) = \cos^4(3tx) - \sin^4(3tx)$

(c)  $S(\tau) = (\tau - 1)e\tau + \frac{\tau^2}{4}(2\ln \tau - 1)$

(d)  $y(x) = \frac{\exp(2x)}{25} [(5x - 4)\sin x + (10x - 3)\cos x]$

(e)  $F(x) = -\frac{k}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$

(f)  $N(z) = \frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{1+\cos(z)}} \left[ \ln\left(\cos\frac{z}{4} + \sin\frac{z}{4}\right) - \ln\left(\cos\frac{z}{4} - \sin\frac{z}{4}\right) \right]$

### Aufgabe 2: Ableitungen II

Finden Sie die  $n$ -te Ableitung der folgenden Funktionen.

(a)  $f(x) = x^n$

(d)  $f(x) = a^x$

(b)  $f(x) = e k x + e - k x$

(e)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(c)  $f(x) = x^{n-1}$

(f)\*  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

### Aufgabe 3: Kurvendiskussion I

Ein zweiatomiges Molekül lässt sich näherungsweise durch das sogenannte “Morse-Potential” beschreiben,

$$U(x) = D(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad D, \alpha = \text{const.}$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion  $U(x)$  sowie deren Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ .
- Skizzieren Sie die Funktion  $U(x)$  für  $D = \alpha = 1$  im Intervall  $x \in [-1, 5]$ .

#### Aufgabe 4: Kurvendiskussion II

Die Bewegung eines Teilchens mit Drehimpuls  $L$  und Energie  $E$  in der gekrümmten Raumzeit eines Schwarzen Loches der Masse  $m$  wird beschrieben durch das Potential

$$U(r) = \frac{E}{2} - \frac{Em}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{mL^2}{r^3}, \quad r > 0.$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion  $U(r)$  sowie deren Verhalten für  $r \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow 0$ .
- Setzen Sie  $m = \frac{1}{2}$ . Welche Bedingungen an  $E$  und  $L$  müssen erfüllt sein, damit  $U(r)$  zwei, ein oder keine lokalen Extrema besitzt?
- Skizzieren Sie die Funktion  $U(r)$  für  $E = 1$  und  $L = 2$  (nicht maßstabsgerecht).

#### Aufgabe 5\*: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- (a) Finden Sie eine Funktion  $f(x)$ , welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f''(x) = a^2 f(x) + bx.$$

- (b) Finden Sie eine Funktion  $f(x)$ , welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f'(x) = (1 + \ln(x))f(x).$$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

### Aufgabe 1: Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift

Eine Reihe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_0 = 0.$$

Finden Sie einen expliziten Ausdruck für  $a_n$  und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion.

### Aufgabe 2: Vollständige Induktion I

Beweisen Sie

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

### Aufgabe 3: Vollständige Induktion II

Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben der ersten  $n$  natürlichen Zahlen gleich  $\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$  ist.

### Aufgabe 4: Vollständige Induktion III

Zeigen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

### Aufgabe 5: Die Suche nach der richtigen Summenformel

Stellen Sie eine Summenformel für das Polynom

$$S_n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

auf und beweisen Sie deren Richtigkeit durch vollständige Induktion.

### Aufgabe 6\*: Fibonacci-Zahlen I

Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  für  $n \geq 1$  und die Startwerte  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$ . Beweisen Sie, dass ein expliziter Ausdruck für die  $n$ -te Fibonacci-Zahl gegeben ist durch

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (x_+^n - x_-^n), \quad \text{mit} \quad x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

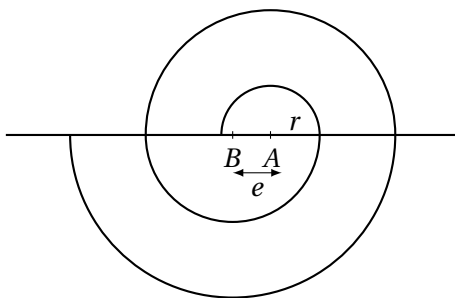
WS 2023/24

## Thema 9: Arithmetische & geometrische Reihen Der binomische Satz

### Aufgabe 1: *Arithmetische Reihe*

Eine Spirale bestehe aus zwei Scharen konzentrischer Halbkreise um die Punkte  $A$  und  $B$ . Es sei  $r$  der Radius des innersten Halbkreises und die Strecke  $\overline{AB} = e$ .

- (a) Wie lang ist der  $n$ -te Halbbogen?
- (b) Wie lang ist der Gesamtbogen der Spirale bis dahin?



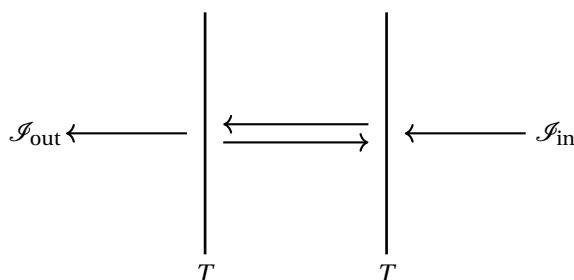
### Aufgabe 2: *Geometrische Folge*

Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliert ein Lichtstrahl  $\frac{1}{12}$  seiner Lichtstärke. Wie viele Platten muss er durchdringen, wenn er nur noch die Hälfte der ursprünglichen Lichtstärke besitzen soll?

*Hinweis:* Es genügt die Angabe des Ergebnisses in impliziter Form.

### Aufgabe 3: *Geometrische Reihe*

Es sei eine Anordnung aus zwei Glasplatten gegeben, in die ein Laserstrahl der Intensität  $\mathcal{I}_{\text{in}}$  eingeschossen werde. Jede Platte besitze einen Transmissionskoeffizienten  $T$  ( $0 < T < 1$ ), d.h. dass an jeder Platte von einem Lichtstrahl der Intensität  $\mathcal{I}$  ein Anteil  $T\mathcal{I}$  transmittiert und ein Anteil  $(1 - T)\mathcal{I}$  reflektiert wird. Bestimmen Sie die Intensität  $\mathcal{I}_{\text{out}}$ , mit der das Licht auf der anderen Seite der Anordnung austritt.





**Aufgabe 4:** *Der binomische Satz*

- (a) Berechnen Sie  $(1 + a)^6 + (1 - a)^6$ .
- (b) Schreiben Sie die allgemeine Binomialformel für  $(1 + x)^n$  und  $(1 - x)^n$  auf und setzen Sie anschließend  $x = 1$ . In letzterem Falle sei  $n \geq 1$ .
- (c) Es seien die Funktionen  $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$  und  $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$  definiert. Finden Sie einen Ausdruck, der  $f(nx) + g(nx)$ , mit  $n \in \mathbb{N}$ , auf (Potenzen von)  $f(x)$  und  $g(x)$  zurückführt.

**Aufgabe 5:** *Erzeugende Funktion*

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  mit Anfangswert  $a_0 = 0$  aus Aufgabe 1, Thema 8. Es sei eine (unbekannte) Funktion definiert als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- (a) Multiplizieren Sie beide Seiten der Rekursionsgleichung mit  $x^n$ , summieren Sie über  $n$  (von Null bis Unendlich) ab und versuchen Sie alle auftretenden Terme durch  $f(x)$  auszudrücken. Lösen Sie für  $f(x)$ .
- (b) Nutzen Sie Ihr Wissen über geometrische Reihen, um  $f(x)$  wieder in Reihendarstellung zu überführen und lesen Sie die Koeffizienten vor  $x^n$  ab.

**Aufgabe 6\*:** *Zustandssumme*

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\Omega_N = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \sum_{n_3=0}^N \cdots \sum_{n_k=0}^N f(n_1)f(n_2)f(n_3)\dots f(n_k), \quad \text{wobei} \quad f(n) = e^{-n}.$$

Bestimmen Sie anschließend den Grenzwert  $\Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} (\Omega_N)$ .

**Aufgabe 7\*:** *Fibonacci-Zahlen II*

Wenden Sie das Verfahren aus Aufgabe 5 auf die Folge  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  der Fibonacci-Zahlen mit Startwerten  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  an. Beachten Sie, dass hier  $n \geq 1$  gelten muss.

# AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2023/24

## Thema 10: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

### Aufgabe 1: *Linear (un)abhängige Vektoren*

- (a) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Für welche Werte von  $t$  befinden sich die folgenden Vektoren in einer Ebene?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 2: *Skalarprodukt und Vektorprodukt*

- (a) Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5a+6 \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (c) Nutzen Sie das Skalarprodukt, um den Kosinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.  
(d) Nutzen Sie das Vektorprodukt, um den Sinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

### Aufgabe 3: *Matrizen*

- (a) Bilden Sie – falls möglich – die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

- (b) Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Berechnen Sie  $A \cdot B - B \cdot A$ .
- (c) Welche Bedingungen müssen die Einträge  $m_i$  einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

erfüllen, damit  $|M \cdot \vec{v}| = |\vec{v}|$  für einen beliebigen zweikomponentigen Vektor  $\vec{v}$  gilt?

#### Aufgabe 4: Laplace'scher Entwicklungssatz

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix. Für welche Werte von  $a$  ist die Matrix nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ -a & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 5: Vektorprodukt

Das Vektorprodukt  $\vec{\omega} \times \vec{u}$  zweier Vektoren  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

lässt sich auch als Matrixmultiplikation  $\Omega \cdot \vec{u}$  mit einer  $(3 \times 3)$ -Matrix  $\Omega$  mit den Einträgen  $\pm\omega_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  schreiben. Wie sieht  $\Omega$  aus? Welche Eigenschaften hat es (Determinante, Spur, Symmetrie)?

#### Aufgabe 6\*: Höhere Dimensionen

Im dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  kann jede beliebige Drehung in Drehungen um die  $x$ -, die  $y$ - und die  $z$ -Achse zerlegt werden, d.h. man benötigt genau drei linear unabhängige Drehmatrizen für eine solche Zerlegung. Wie viele linear unabhängige Drehmatrizen benötigt man im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$ ?

#### Aufgabe 7\*: Diskreter Laplace-Operator

Gegeben sei die  $(n \times n)$ -Matrix  $\Delta_n$ , welche die Einträge -2 auf der Haupt- und 1 auf den beiden Nebendiagonalen hat,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante von  $\Delta_n$ , indem Sie wie folgt vorgehen:

- Finden Sie eine Rekursionsrelation, die  $\det(\Delta_n)$  auf  $\det(\Delta_{n-1})$  und  $\det(\Delta_{n-2})$  zurückführt.
- Raten Sie einen allgemeinen Ausdruck für  $\det(\Delta_n)$  und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion. Alternativ kann der Versuch unternommen werden, das Verfahren aus Thema 9, Aufgabe 5 anzuwenden.