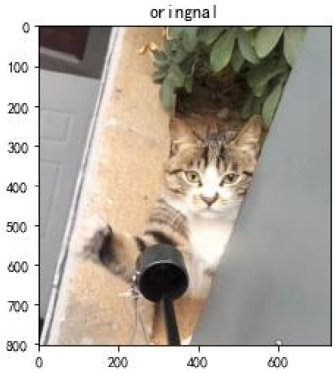
频率域滤波



1. 预处理

填充

由于该图象行数为奇数，而 FFT 需分别计算奇数项与偶数项 Fourier 在前面一半的取值，因此在该图象最后一行填充 0，将行数变为偶数。

平移

Fourier 变换后，由于频率为$\sqrt{(u^2+v^2)}$，频率较低出现在图象边界，而频率较低处频谱较高，为便于显示和滤波，需将边界平移至中心。由于

$\mathscr{F}[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}]=F(u-u_0,v-v_0)$，当$u_0=\frac{M}{2}, v_0=\frac{N}{2}$时，$e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}=(-1)^{x+y}$，

因此将图象矩阵*(-1)^(x+y)，再进行 Fourier 变换，可将频谱较高处平移至中心。

2. 快速 Fourier 变换

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k)e^{-2\pi j\cdot\frac{u(2k)}{N}} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)e^{-2\pi j\cdot\frac{u(2k+1)}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_e(k)e^{-2\pi j\cdot\frac{uk}{\frac{N}{2}}} + (e^{\frac{-2\pi j}{N}})^u \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_o(k)e^{-2\pi j\cdot\frac{uk}{\frac{N}{2}}} \\
&= F_e(u) + (e^{\frac{-2\pi j}{N}})^u F_o(u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(u+\frac{N}{2}) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k)e^{-2\pi j(\frac{u(2k)}{N}+k)} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)e^{-2\pi j(\frac{u(2k+1)}{N}+\frac{2k+1}{2})} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k)e^{-2\pi j\cdot\frac{u(2k)}{N}} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)e^{-2\pi j(\frac{u(2k+1)}{N}+\frac{1}{2})} \\
&= F_e(u) - \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)e^{-2\pi j\cdot\frac{u(2k+1)}{N}} \\
&= F_e(u) - (e^{\frac{-2\pi j}{N}})^u F_o(u)
\end{aligned}
$$

因此，

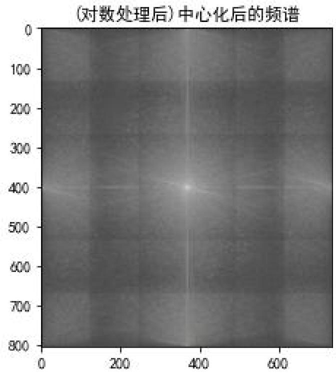
$$
F^N(u) = \begin{cases} F_e^N(u) + (e^{\frac{-2\pi j}{N}})^u F_o^N(u), & u = 0,1,...,\frac{N}{2}-1 \\ F_e^N(u-\frac{N}{2}) - (e^{\frac{-2\pi j}{N}})^{u-\frac{N}{2}} F_o^N(u-\frac{N}{2}), & u = \frac{N}{2},\frac{N}{2}+1,...,N-1 \end{cases}
$$

因此，对于 N 个取样点的 Fourier 变换，FF 需计算

$$
\begin{cases} F_e^N(0), F_e^N(1), ..., F_e^N(\frac{N}{2}-1) \\ F_o^N(0), F_o^N(1), ..., F_o^N(\frac{N}{2}-1) \end{cases}
$$

，将原本N^2的计算量变为$\frac{N^2}{2}+N$.

对于二维 RGB 图像 G(x, y)的离散 Fourier 变换即，对于每一个颜色通道，对于 y 的每一个取值y_0，对向量 G(x, y_0)做 FFT，得到 F_1(u, y)；再对于 u 的每一个取值u_0，对向量 F(u_0, y)做 FFT，得到 F(u, v).



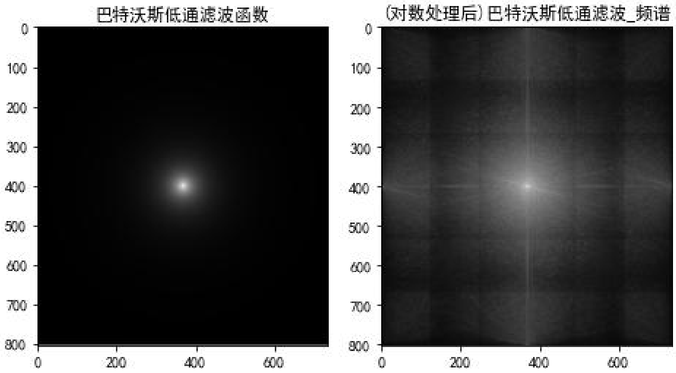
3. 滤波

构建以(M/2,N/2)为中心的滤波器传递函数 H(u,v)，采用对应像素相乘得到 GF(u, v) = H(u, v)F(u, v).

低通滤波（平滑化）

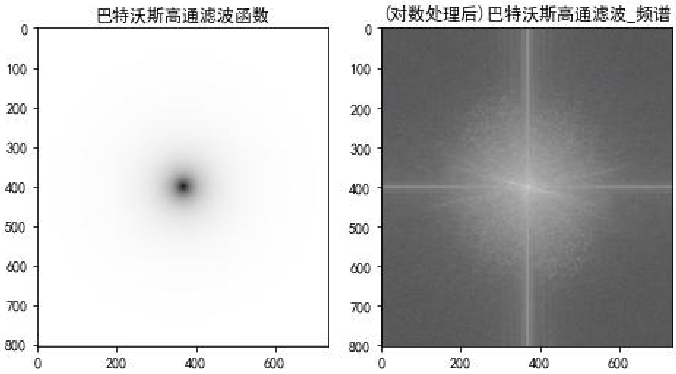
低通滤波器需将图象平滑化，需保留关键信息并去除噪声，因此在频谱最大处（即中心点）的 H(u,v)应较大，而距离边界点越远，H(u,v)应越小。

采用巴特沃斯滤波器：$H_{low}(u,v)=\frac{1}{1+[\frac{D(u,v)}{D_0}]^{2n}}$，其中 D(u,v)为点(u,v)距离中心(M/2,N/2)的距离，D_0为截止频率半径。将D_0设置为 N/10，其中 N 为短边,n 设为 1.5.



高通滤波（锐化）

高通滤波器需将图象锐化，需增强“噪声”，因此在频谱最大处（即中心点）的 H(u,v)应较小，而距离边界点越远，H(u,v)应越大。因此$H_{high}(u,v)=1-H_{low}(u,v)$



4. IFFT

将滤波后的频谱做 IFFT 得到 G_，由于可能存在计算误差，导致复部不为 0，因此取 G_的实部，再*(-1)^(x+y)，最后将最后一行的填充删除，得到还原图象。