

问题：需要对 mnist 数据集中其中一个数字的所有图片用 SVD 和非负矩阵分解的方法压缩，我选择了数字 8 的图片进行压缩

### 1. SVD

首先，对每张图片对应的矩阵做 SVD，然后用前 k 个奇异值及其对应的左右奇异向量构造一个低秩矩阵，该矩阵对应的图片即为压缩后图片。

关于 k 的选取，我采用了两种方法：

第一种，通过计算逼近矩阵与原矩阵 F 范数之比确定 k，首先计算原图象矩阵的 F 范数 M，然后从第一个奇异值开始，计算平方和 N，直到  $N/M > 0.95$ ，令 k 等于此时奇异值标号；

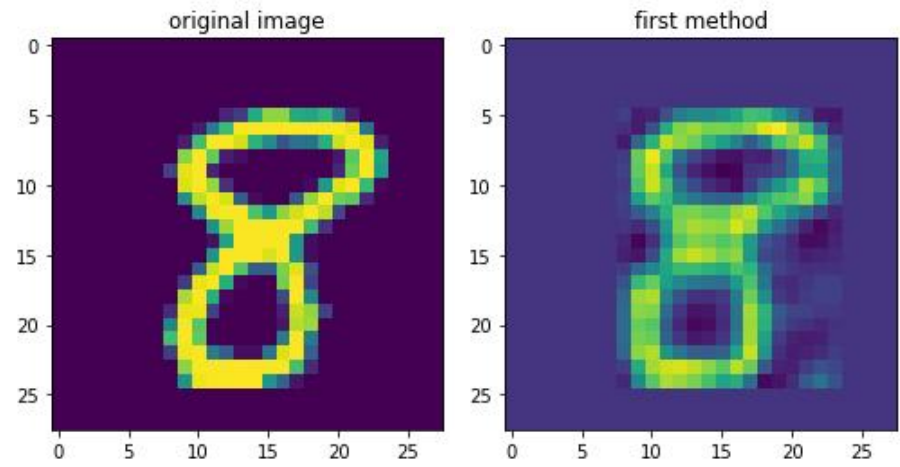
第二种，通过寻找奇异值 gap 确定 k，计算当前奇异值前面的所有相邻奇异值比值的平均值，再计算当前奇异值与它的上一个奇异值的比值，若该比值超出平均值的 100 倍，则停止，令 k 为当前奇异值标号减 1。

通过程序运行结果发现，第二种方法得到的 k 过大，比如第二张得到的 k 为 18，第四、五张得到的 k 为 17，已经超过一半（mnist 图片大小为 28\*28），没有起到节约存储空间的效果，即便将临界值适当减小，依然存在超出一半的 k，而第一种方法得到的 k 均较小，因此选择第一种方法确定 k。

（下图为前 100 张图片用第一种方法得到的 k 值）

1	5	21	5	41	4	61	3	81	4
2	4	22	3	42	3	62	5	82	4
3	4	23	4	43	4	63	3	83	4
4	5	24	4	44	4	64	2	84	5
5	4	25	5	45	4	65	4	85	5
6	5	26	3	46	5	66	4	86	3
7	4	27	3	47	4	67	3	87	4
8	5	28	5	48	6	68	4	88	6
9	4	29	5	49	3	69	4	89	5
10	4	30	5	50	4	70	4	90	4
11	5	31	4	51	6	71	4	91	6
12	5	32	5	52	5	72	5	92	3
13	4	33	7	53	6	73	6	93	4
14	2	34	5	54	5	74	4	94	5
15	6	35	4	55	4	75	4	95	4
16	5	36	4	56	5	76	4	96	5
17	4	37	5	57	3	77	6	97	4
18	4	38	5	58	2	78	4	98	4
19	3	39	4	59	5	79	5	99	5
20	4	40	5	60	4	80	4	100	4

（下图为第 100 张图用第一种方法的压缩结果，此时 k 为 4）



2. 非负矩阵分解

需要利用梯度下降法，寻找非负矩阵  $W(28*k)$ 、 $H(k*28)$ ，使得  $\|X - WH\|_F^2$  尽可能小，可以得到迭代式：

$$h_{ij}^1 = h_{ij}^0 \frac{(W^{0T} X)_{ij}}{(W^{0T} W^0 H^0)_{ij}}, \quad w_{ij}^1 = w_{ij}^0 \frac{(X H^{0T})_{ij}}{(W^0 H^0 H^{0T})_{ij}}$$

将其中的  $k$  设为 5，然后产生两个每个数都独立服从 01 分布的随机矩阵作为初始矩阵  $W_0$ 、 $H_0$ ，用上述公式对  $W_0$ 、 $H_0$  进行迭代。由于原图矩阵中有许多全 0 行和列，会有分母为 0 的问题，因此，如果  $h_{ij}$  或  $w_{ij}$  在某次迭代后的结果为 0，则停止对这个数进行迭代，就可以避免在下一轮迭代中遇到分母为 0 的问题。 $W$ 、 $H$  每次迭代结束，得到新的矩阵  $W_1$ 、 $H_1$  后，计算  $\|H_1 - H_0\|_F^2$  及  $\|W_1 - W_0\|_F^2$ ，当

$\frac{\|H_1 - H_0\|_F^2}{\|H_0\|_F^2}$  及  $\frac{\|W_1 - W_0\|_F^2}{\|W_0\|_F^2}$  小于一个临界值时，停止迭代。运行后发现，由于  $X$  中有许多 0，导致用随机产生的 0、1 之间的矩阵做初始矩阵时，产生的  $W$ 、 $H$  矩阵太小，因此新一轮迭代中分母过小导致数值稳定性很差，运行时间长并且压缩后产生图象与原图像差距过大。

由于原图像矩阵中 0 基本分布在四周，因此可以将中间非零部分提取出来作为  $X(m\_n\_)$ ，此时，因为新的矩阵  $X$  中没有全为 0 的行或列，所以可以用

$$H^1 = \frac{H^0 * (W^{0T} @ X)}{W^{0T} @ W^0 @ H^0}, \quad W^1 = \frac{W^0 * (X @ H^{1T})}{W^0 @ H^1 @ H^{1T}} \quad (W:m\_k, H:k*n\_)$$
 进行迭代。

依然将  $k$  设为 5，用每个数都独立服从 01 分布的随机矩阵，并且依然采用上述方法判断何时停止迭代，并将上述中比值的临界值设为 0.005。平均每张图象迭代 7 次左右后就可以得到  $W$ 、 $H$ ，再将得到的  $W$ 、 $H$  两端添加 0，扩充成  $28*k$  和  $k*28$  的矩阵，将扩充好的  $W$ 、 $H$  相乘得到压缩后矩阵。

（ 下 图 为 第 100 张 图 的 压 缩 结 果 ）

