



Solución del problema 4.22 - Classical Dynamics of Particles and Systems

Gustavo Barboza Blanco - C10870*
Escuela de Física, Universidad de Costa Rica
(Dated: 16 de noviembre de 2024)

1. Introducción

En este proyecto, se modela un circuito de inductor no lineal mediante ecuaciones diferenciales que describen oscilaciones caóticas en sistemas no lineales. La simulación fue implementada en JavaScript para crear una interfaz dinámica que permite al usuario variar los parámetros clave del sistema, específicamente k y B , que afectan la estabilidad y el comportamiento del circuito. La representación gráfica de la trayectoria en el espacio de fase (x, y) nos ayuda a estudiar las propiedades caóticas de este circuito mediante la visualización de su sección de Poincaré.

Para resolver este problema, se usó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) debido a su precisión y estabilidad para ecuaciones diferenciales. Esta implementación es interactiva, lo que permite analizar cómo diferentes valores de k y B afectan el sistema. [1]

Esta es una oportunidad ideal para implementar conocimientos adquiridos en los cursos de métodos numéricos I y Física Computacional a problemas de física.

2. Metodología

2.0.1. Enunciado

Se pide modelar el comportamiento caótico de un circuito de inductor no lineal, representado por las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + B \cos(t) \quad (2)$$

donde se exploran valores de $k = 0,1$ y B entre 9,8 y 13,4, con el objetivo de analizar su gráfica de sección de Poincaré. [2]

2.0.2. Lenguaje de programación y bibliotecas

El código fue desarrollado en JavaScript, utilizando:

- HTML y CSS para la interfaz del usuario.
- Canvas API para la visualización gráfica del espacio de fase.

2.0.3. Instrucciones de uso

1. Abrir el archivo HTML en un navegador web.
2. Ajustar los valores de k y B en los campos proporcionados y presionar el botón de simulación para generar la gráfica de la trayectoria del sistema en el espacio de fase.
3. Observar el gráfico resultante y ajustar los valores según sea necesario para explorar diferentes comportamientos.

3. Resultados

3.0.1. Solución del problema

La simulación muestra que la trayectoria en el espacio de fase del circuito exhibe patrones caóticos, reflejando la naturaleza sensible del sistema no lineal a las variaciones en los parámetros. La interfaz gráfica proporciona una visualización de cómo el sistema se comporta en el plano (x, y) .

*Electronic address: gustavo.barbozablanco@ucr.ac.cr

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Este método calcula la solución aproximada de un sistema de ecuaciones diferenciales evaluando el comportamiento del sistema en puntos estratégicos dentro de cada intervalo temporal.

El sistema a resolver es:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + B \cos(t).$$

Las condiciones iniciales utilizadas en la simulación son $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ y $t(0) = 0$. Estas condiciones fueron elegidas por simplicidad, permitiendo observar cómo el sistema evoluciona desde un estado inicial sin desplazamiento ni velocidad.

Además, se utilizó un intervalo de tiempo $h = 0,0005$, que ofrece un balance adecuado entre precisión y eficiencia computacional, asegurando la estabilidad del método numérico.

En RK4, los valores futuros de las variables x e y se calculan a partir de las pendientes intermedias. Estas pendientes (k) se definen como sigue:

$$k_{x,1} = h \cdot y_i, \quad (3)$$

$$k_{y,1} = h \cdot (-ky_i - x_i^3 + B \cos(t_i)), \quad (4)$$

$$k_{x,2} = h \cdot \left(y_i + \frac{k_{y,1}}{2} \right), \quad (5)$$

$$k_{y,2} = h \cdot \left(-k \left(y_i + \frac{k_{y,1}}{2} \right) - \left(x_i + \frac{k_{x,1}}{2} \right)^3 + B \cos \left(t_i + \frac{h}{2} \right) \right), \quad (6)$$

$$k_{x,3} = h \cdot \left(y_i + \frac{k_{y,2}}{2} \right), \quad (7)$$

$$k_{y,3} = h \cdot \left(-k \left(y_i + \frac{k_{y,2}}{2} \right) - \left(x_i + \frac{k_{x,2}}{2} \right)^3 + B \cos \left(t_i + \frac{h}{2} \right) \right), \quad (8)$$

$$k_{x,4} = h \cdot (y_i + k_{y,3}), \quad (9)$$

$$k_{y,4} = h \cdot \left(-k (y_i + k_{y,3}) - (x_i + k_{x,3})^3 + B \cos(t_i + h) \right). \quad (10)$$

Finalmente, las variables x e y se actualizan combinando las pendientes:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6} (k_{x,1} + 2k_{x,2} + 2k_{x,3} + k_{x,4}),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_{y,1} + 2k_{y,2} + 2k_{y,3} + k_{y,4}).$$

Este esquema asegura precisión y estabilidad al avanzar el sistema en pasos uniformes h , permitiendo explorar su naturaleza caótica.

3.0.2. Capturas de pantalla

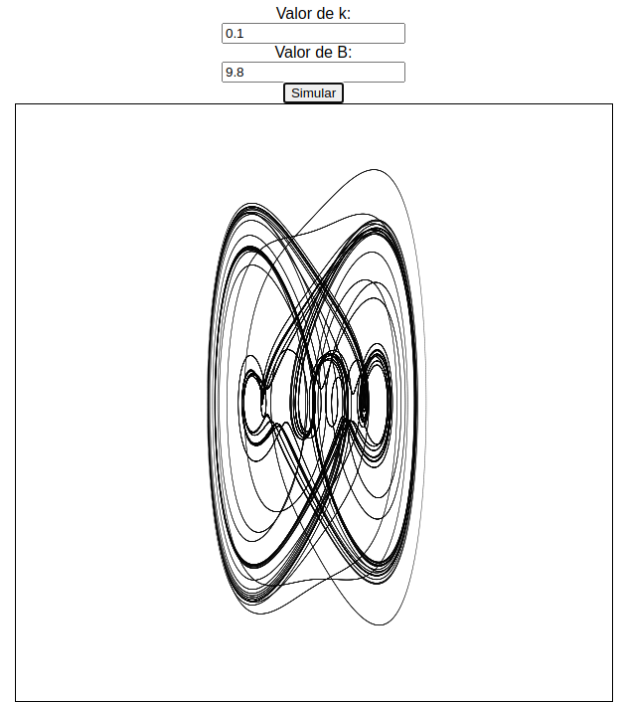


Figura 1: Gráfico de la sección de Poincaré para $k = 0,1$ y $B = 9,8$.

4. Discusión

La solución implementada demuestra que el sistema presenta propiedades caóticas típicas, como lo predice la teoría del caos en sistemas no lineales. En particular, el sistema se vuelve extremadamente sensible a los valores de k y B , presentando trayectorias complejas. En este

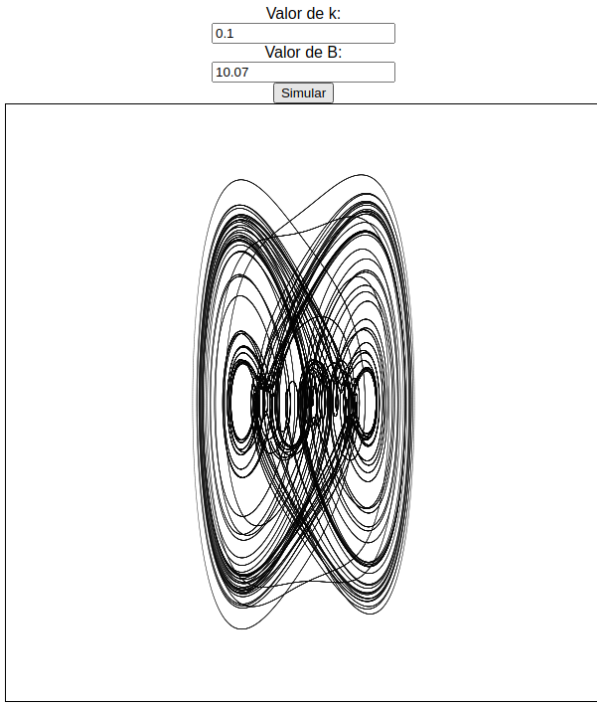


Figura 2: Gráfico de la sección de Poincaré para $k = 0,1$ y $B = 10,07$.

caso, la gráfica de la sección de Poincaré nos ayuda a identificar áreas de comportamiento caótico, en las cuales el sistema no sigue trayectorias periódicas sino que se mueve en patrones impredecibles en el plano (x, y) , note que hay zonas donde hay “ruido” y no se logra ver bien las trayectorias.

Además, el método RK4 ha sido efectivo en resolver las ecuaciones diferenciales dadas, mostrando estabilidad en la simulación, lo que es crucial en el análisis de sistemas caóticos, donde la precisión en cada paso es fundamental para evitar errores acumulativos significativos.

5. Conclusiones

La implementación del modelo de un circuito de inductor no lineal con el método RK4 permite observar el comportamiento caótico en un sistema eléctrico no lineal. Al variar los parámetros k y B , se evidencian cambios complejos en las trayectorias del sistema, lo cual es característico de la teoría del caos. La representación gráfica en el plano de fase es una herramienta eficaz para visualizar estos fenómenos caóticos y comprender la relación entre las ecuaciones diferenciales y la dinámica no lineal.

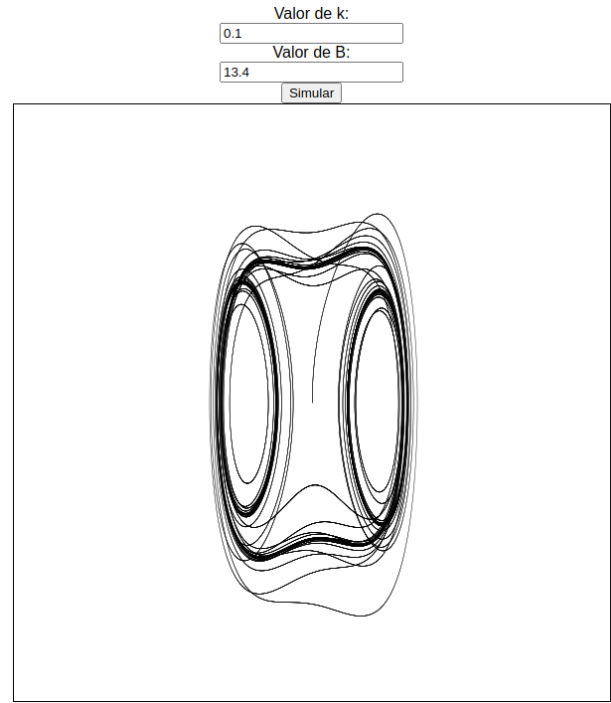


Figura 3: Gráfico de la sección de Poincaré para $k = 0,1$ y $B = 13,4$.

Referencias

- [1] M. Newman, *Computational Physics* (CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012).
- [2] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Cengage Learning, 2003).