Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours d'analyse 3, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.

Chapitre 1

(Cours 2)

Définition 1. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *Un point $a \in E$ est dit adhérent à A si tout voisinage de a rencontre A.*
2. *On note $\bar{A} =$ l'ensemble des points adhérent à A.*
3. *Un point $x \in A$ est dit intérieur à A s'il existe une boule ouverte centré en x et contenue dans A.*
4. *On note $\mathring{A} =$ l'ensemble des points intérieurs de A.*

Définition 2. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. A est dense si tout point de E est adhérent à A.*

Théorème 1. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*
2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*

(Cours 3)

Théorème 2. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) 2 espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est continue sur E.*
2. *Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.*
3. *Pour tout fermé B de F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.*

(Cours 4)

Définition 3. *Soit (E, d) et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouvert de E. On dit que la famille $(U_i)_{i\in I}$ est un <u>recouvrement</u> ouvert de E, si $E = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. On appelle un <u>sous-recouvrement</u> une sous-famille $(U_i)_{i\in J}$, avec $J \subset I$ fini et $E = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.*

Définition 4. *On dit que (E, d) est un espace métrique <u>compact</u> si tout recouvrement ouvert de E contient un sous-recouvrement fini.*

Remarque 1. *(E, d) compact $\Leftrightarrow \forall (U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouvert tel que $E = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, $\exists J \subset I$ fini vérifiant $E = \bigcup\limits_{i\in J}$*
$\Leftrightarrow$ De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Remarque 2. *On peut définir les espaces métriques compacts en utilisant les fermés.*

Théorème 3. *(E,d) est un compact si et seulement si toutes familles de fermés non vides, qui est stables par intersection finie, possède une intersection non vide.*

Définition 5. *Soit (E,d) un espace métrique et $K \subset E$ une partie non vide de E. On dit que K est compact si et seulement si (K, d_K) est un espace métrique compact, avec d_K est la restriction de la distance d à K.*

Théorème 4. *Si (E,d) un espace métrique, $K \subset E$ compact et $F \subset K$ un fermé, alors F est compact.*

Propriétés 1. *Soit (E,d) un espace métrique.*

1. *Si K_1 et K_2 sont 2 compacts de E, alors $K_1 \bigcup K_2$ est aussi un compact de E.*
2. *Si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille de compacts de E et $\bigcap\limits_{i\in I} K_i \neq \emptyset$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ est un compact de E.*

Théorème 5. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si $K \subset E$ compact, alors $f(K)$ est un compact de F. En particulier, si E est compact et f surjective, alors F est compact.*

Corollaire 1. *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application continue bijective et E un espace métrique compact, alors f est un homéomorphisme.*

<u>**Théorème Bolzano-Weirstrass**</u>

Théorème 6. *Soit E un espace métrique. Il y a équivalence entre :*

1. *L'espace E est compact.*
2. *Toute suite de point de E possède un point adhérent.*
3. *Toute suite de point de E possède une sous-suite convergente dans E.*

Rappel 1. *Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Le nombre $\rho > 0$ est dit <u>nombre de Lebesgue</u> du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ si $\forall x \in E$, $B(x,\rho)$ est contenue dans certain U_i.*

Lemme 1. *Soit E un espace métrique. Si toute suite de points de E possède une valeur d'adhérence, alors tout recouvrement ouvert de E admet un nombre de Lebesgue*

Rappel 2. *Le diamètre :*

$$\delta(E) := \sup_{x\in E, y\in E} d(x,y)$$

Théorème 7. *Si E est un espace métrique compact, alors il est de diamètre fini.*

Théorème 8. *Soit (E,d) un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite de point de (E,d) . Si $(x_n)_n$ possède une seule valeur d'adhérence, alors $(x_n)_n$ est convergente*

Définition 6. *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est précompact si, $\forall \epsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par un nombre fini de parties de diamètre inférieur à ϵ.*

Remarque 3. *On peut montrer l'équivalence suivante :*

1. *E est précompacte.*

2. $\forall \epsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ.

Théorème 9. *Tout espace métrique compact est précompact.*

Remarque 4. *La réciproque est fausse, on verra plus tard qu'un espace métrique est compacte si et seulement si il est précompact et complet.*

Définition 7. *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'il est séparable si et seulement si il existe $B \subset E$ une partie de E qui est dénombrable et dense dans E. C'est-à-dire $\bar{B} = E$, avec $B \subset E$ dénombrable.*

Théorème 10. *Tout espace métrique compact est séparable*

Théorème 11. *Si E et F sont des espaces métriques compacts, alors le produit $E \times F$ est compact.*

Théorème 12. *Le produit d'une famille d'espaces métriques compacts est compact.*

(Cours 5)
(Suite de Cauchy)

Définition 8. *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset E$ est dite de Cauchy si :*
$\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n$, $m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$.

Remarque 5. (x_n) *est de cauchy* $\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ *quand* $n, m \longrightarrow \infty$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} diam(P_n) = 0$ *où* $P_n = \{x_k; k \geq n\}$.

Proposition 1. *(Premières propriétés des suites de Cauchy). Soit (E, d) un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Toute suite extraite (y_n) d'une suite de Cauchy (x_n) est de Cauchy.*
4. *Si (x_n) est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, alors (x_n) est convergente.*

Corollaire 2. *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

Remarque 6. *Souvent, pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente, on montre qu'elle possède une valeur d'adhérence.*

Définition 9. *Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de (E, d) est convergente dans (E, d) .*

Remarque 7.

1. *La notion d'espace complet n'est pas topologique, c'est-à-dire que la notion n'est pas invariante par homéomorphisme. En effet $\mathbb{R}$ et $]-1, 1[$ sont homéomorphe, mais $\mathbb{R}$ est complet et $]-1, 1[$ ne l'est pas.*
2. *Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$. F est complet si l'espace métrique (F, d_F) est complet, où d_F est la métrique induite par d sur F, c'est-à-dire $d = d|_F$ .Dans la suite, on note d pour d_F : la restriction de d à F.*

Théorème 13. *Soit* (E, d) *un espace métrique* <u>*complet*</u> *et* $F \subset E$. *Alors* (F, d_F) *est complet si et seulement si* F *est fermé de* E.

Remarque 8. $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ *n'est pas complet, car* $]0, 1[$ *n'est pas fermé. De même,* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *n'est pas complet, donc* $\mathbb{Q}$ *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$

Proposition 2. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $F \subset E$. *Alors si* F *est complet, alors* F *est fermé.*

Théorème 14. *Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

Corollaire 3. $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *est complet,* $\forall n \geq 1$.

Théorème 15. *Un espace métrique* (E, d) *est compact si et seulement si il est précompact et complet*

<u>Théorème de Cantor</u>

Théorème 16. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Alors* (E, d) *est complet si et seulement si pour toute suite* (F_n) *d'ensembles fermés non vides tels que*

1. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \ldots F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ *(on dit que* (F_n) *est décroissante),*
2. $\lim\limits_{n \to \infty} diam(F_n) = 0$ *(*$diam(F_n) =$ *diamètre de* F_n*)*

On a l'intersection des (F_n) *qui contient un et un seul point.*

<u>Théorème de Baire</u>

Théorème 17. *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'ouverts dense dans* E *(*$\bar{\theta_n} = E$, $\forall n \in \mathbb{N}$*). Alors* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$ *est aussi dense dans* E.

Corollaire 4. *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* (F_n) *une suite de fermés d'intérieur vide (*$\mathring{F_n} = \emptyset$, $\forall n \geq 1$*). Alors* $\bigcup\limits_{n \geq 1} F_n$ *est d'intérieur vide.*

Corollaire 5. *Soit* (E, d) *un espacae métrique complet et* (F_n) *une suite de fermés telle que* $E = \bigcup\limits_{n} F_n$. *Alors il existe* $n_0 \in (N)$ *tel que* $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

Théorème 18. *Si* f *est une fonction continue du compact* K *dans* $\mathbb{R}$*, alors* f *est bornée sur* K *et atteint sur* K *sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

<u>Théorème de Heine</u>

Théorème 19. *Soit* (E, d_E) *un espace métrique compact,* (F, d_F) *un espace métrique et* $f : E \longrightarrow F$ *une application continue. ALors* f *est* <u>*uniformément*</u> *continue.*

Définition 10. *Soit* (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métrique et* $f : E \longrightarrow F$ *une application. On dit que* F *est une*<u>*contraction*</u> *(ou une application contractante) s'il existe une constante* k *:* $0 < k < 1$ *vérifiant :*

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y), \forall x, y \in E$$

<u>Théorème du point fixe de Banach</u>

Théorème 20. *Soit (E,d) un espace métrique <u>complet</u> et $f : E \longrightarrow E$ une <u>contraction</u>. Alors il existe un unique point fixe de f, c'est-à-dire il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$.*

(Cours 6)

Remarque 9. *Soit (K,d) un espace métrique compact et (E,d) un espace métrique complet. On note $C(K,E)$ l'ensemble des fonctions continues de K dans E. On définit l'application d sur $C(K,E)$:*

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point de K.

Théorème 21. *L'application d définit une distance sur $C(K,E)$ appelée distance de la convergence uniforme.*

Théorème 22. *Si K est compact et E complet, alors $C(K,E)$ muni de la distance de convergence uniforme est <u>complet</u>.*

Remarque 10. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues ($f_n \in C(K,E)$), et si $(f_n)_n$ converge vers f pour la distance de la convergence uniforme, alors la limite de f est continue. Inversement, si $(f_n)_n$ converge simplement et si f est continue, la convergence n'est pas nécessairement uniforme.*

Théorème 23. *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues de l'espace compact K dans $\mathbb{R}$, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.*

Théorème 24. *Si $H \subset C(K,E)$ compact et $x \in K$, alors l'ensemble*

$$H(x) = \{f(x), f \in H\}$$

est compact dans E.

Définition 11. *Une partie H de $C(K,E)$ est dite <u>équicontinue</u> au point x de K si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans K tel que,*

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

$\forall y \in V$ et $\forall f \in H$.

Théorème 25. *Si $H \subset C(K,E)$ une partie compacte, alors H est équicontinue en tout point de K.*

Théorème 26. *Si $H \subset C(K,E)$ une partie relativement compact, alors l'ensemble $H(x) = \{f(x), f \in H\}$ est relativement compact dans E et H est équicontinue en chaque point de K.*

<u>Théorème de Ascoli-Arzela</u>

Théorème 27. *Soit $K,d)$ un espace métrique compact, (E,d) un espace métrique complet et $H \subset C(K,E)$ une partie non vide. On suppose que :*

1. $H(x)$ est relativement compact pour tout $x \in K$;
2. H est équicontinue en chaque point $x \in K$.

Alors H est relativement compact dans $C(K, E)$

Chapitre 2 - Analyse linéaire dans les espaces de Banach

(Cours 7)

Définition 12. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle une norme sur E une application $\|.\|$ de E dans $[0, \infty[$ vérifiant :*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et tout* $x \in E$.
3. $\|\lambda x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x \in E, \forall y \in E$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé. La norme est habituellement noté $\|.\|$.

Proposition 3. *Si $\|.\|$ est une norme sur E, alors l'application $(x, y) \in E \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E.*

(remarque incomplète - voir page 2-3 du cours 7 pour les détails)

Remarque 11. *D'après la proposition précédente, tout espace normé est métrique. Une suite $(x_n)_n$ de E est convergente, si $(x_n)_n$ converge pour la distance associée à $\|.\|$. De même, une application $f : E \longrightarrow F$, est continu en $x \in E$, où E et F sont deux espaces normés.*

Théorème 28. *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, alors les applications*

1. $(x, y) \in E \times E \longmapsto x + y \in E$, *est continue.*
2. $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longmapsto \lambda x \in E$, *est continue.*
3. $x \in E \longmapsto \|x\| \in [0, \infty[$, *est continue.*

Définition 13. *On appelle un espace de Banach tout espace vectoriel normé complet pour la distance associée à la norme.*

Rappel 3. *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est linéaire si et seulement si*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

$\forall x, y \in E$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Théorème 29. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|.\|_F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application linéaire f est continue sur E ;*
2. *f est continue en 0 ;*
3. *f est uniformément continue sur E ;*

4. f est lipschitzienne ;

5. Il existe une constante $k > 0$, telle que $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, $\forall x \in E$.

On note $L(E,F) =$ l'ensemble des applications linéaires continues de l'espace normé $(E, \|.\|_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|.\|_F)$.

Remarque 12. *$L(E,F)$ est un espace vectoriel sur (R) (évident).*

Définition 14. *Soit $f \in L(E,F)$. On appelle la norme de f la constante définie par :*

$$|||f||| = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F$$

Théorème 30. *Soit $f \in L(E,F)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} |||f||| := & \sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \\ = & \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F \\ = & \sup_{x\in E, \|x\|_E \neq 0} frac\|f(x)\|_F \|x\|_E \\ = & \min\{k > 0; \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E, \forall x \in E\} \end{aligned}$$

Théorème 31. *L'application $f \in L(E,F) \mapsto |||f|||$ est une norme sur $L(E,F)$. De plus, si F est un espace de Banach, alors $(L(E,F), |||.|||)$ est aussi un espace de Banach.*

Théorème 32. *Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires continues. Alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est linéaire et continue et*

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||$$

En particulier, si $E = F = G$, alors $L(E) := L(E,E)$ est une algèbre de Banach.

(Banach)

Théorème 33. *Soit E et F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et bjective de E sur F. Alors f^{-1} est continue de F sur E.*

Définition 15. *Une application <u>linéaire</u> $f : E \longrightarrow F$ est dite isomorphisme si elle est continue, bijective et son inverse f^{-1} est aussi continue.*

(Cours 8)

Corollaire 6. *Toutes les normes sur un espace vectoriel normé (pas nécessairement de dimension fini) sont équivalentes. Et elles sont topologiquement équivalentes. (Voir théorème 3.1 et corollaire 3.3).*

Théorème 34. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E. Alors l'application*

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

est une homéomorphisme.

Corollaire 7. *Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé*

Théorème 35. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors la boule unité fermé $\bar{B}(0,1)$ est compacte.*

Théorème 36. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $K \subset E$ est compact de E si et seulement si K est fermé borné.*

(Théorème de Riez)

Théorème 37. *Soit E un espace vectoriel normé . Si la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.*

Remarque 13. *En fait, s'il existe une boule fermée et compacte, alors l'espace E est de dimension finie. Suite de la remarque cours 8 page 3 du pdf.*

Théorème 38. *Soit E un espace vectoriel normé , $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. Alors il existe un point $v \in F$ tel que :*

$$d(x, F) = \|x - v\|$$

Théorème 39. *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors Si F est de dimension finie, alors F est fermé.*

Notation : Si $\bar{x} \in E/F$, alors $\|\bar{x}\| := inf\|y\|$, pour $y \in \bar{x}$ (pour y est en dessous du inf..., voir page 5 cours 8)

Théorème 40. *L'application $\bar{x} \in E/F \mapsto \|\bar{x}\| = inf\|y\|$ définit une norme sur E/F pour laquelle l'application*

$$\Pi : E \longrightarrow E/F$$
$$x \mapsto \bar{x}$$

est continue, de plus, $\forall x \in E$,

$$\|\bar{x}\| = \|\Pi(x)\| = d(x, F)$$

La norme définie sur E/F est dite la norme quotient.

Théorème 41. *Soit E et F 2 espace vectoriel normé et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de rang fini. Alors f est continue sur E si et seulement si son noyau est fermé dans E.*

Forme analytique du théorème de Hahn - Banach

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Hahn-Banach concerne le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de E en une forme linéaire définie sur E tout entier.

Théorème de Hahn-Banach

Théorème 42. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $H \subset E$ un sous-espace vectoriel et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe une forme linéaire continue F définie sur E qui prolonge f et de même norme c-a-d $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue*

$$F(x) = f(x), \ \ \forall x \in H$$

$$\|F\| = \|f\|$$

Lemme de Zorn

Lemme 2. *Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.*

(Cours 9)

Corollaire 8. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. ALors $E^1 \neq \emptyset$. De plus si $x_0 \in E$ non nul, alors il existe une forme linéaire continue f_0 tel que $f_0(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f_0\| = 1$*

Corollaire 9. *Soit E un espace vectoriel normé . Alors l'application ... dur a écrire voir coro 4.7 page 3 cours 9.*

Définition 16. *Soit E un espace vectoriel normé .*

1. *Un hyperplan de E est un ensemble de la forme :*

$$H = \{x \in E | f(x) = \alpha\}$$

   où $f \in E^*$ non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ (f n'est pas nécessairement continue). On dit que H est d'équation $f(x) = \alpha$.

2. *L'hyperplan H est fermé si et seulement si f est continue.*
3. *Une partie $C \subset E$ est dite convexe si et seulement si $\forall x, y \in C$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda + \mu = 1)$, on a $\lambda x + \mu y \in C$ avec $\lambda + \mu = 1$ où $\lambda \geq 1$ et $\mu \geq 0$.*
4. *Soit A et B deux parties de E. On dit que l'hyperplan $H = \{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large si on a $A \subset \{x \in E | f(x) \leq \alpha\}$ et $B \subset \{x \in E | f(x) \geq \alpha\}$*
5. *On dit que $H = \{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens strict si on a qu'il $\exists \epsilon > 0$ tel que $A \subset \{x \in E | f(x) \leq \alpha - \epsilon\}$ et $B \subset \{x \in E | f(x) \geq \alpha + \epsilon\}$*

Hahn-Banach, première forme géométrique

Théorème 43. *Soit E un espace vectoriel normal et A et B deux parties convexes, non vides et disjointes. Si A est un ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

Hahn-Banach, deuxième forme géométrique

Théorème 44. *Soit E un espace vectoriel normé et A et B deux parties convexes non vides et disjointes. Si A est fermé et B compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens stricte*

Corollaire 10. *Soit $F \nsubseteq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E $(F \neq E)$. Alors il existe une forme $f \in E'$ non nulle telle que $f_{|_F} = 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0, \forall x \in F$)*

Chapitre 3 - Calcul différentiel dans les espaces de Banach

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert non vide et $f : U \longrightarrow F$ une application.

Définition 17. *Soit $x_0 \in U$. On dit que f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire continue $l \in L(E,F)$ tel que*

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - l(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

Remarque 14. *Autrement dit, f est différentiable en x_0 , s'il existe une application linéaire continue $l \in L(E,F)$, $R > 0$ et $\varepsilon : B_E(0_E, R) \longrightarrow \mathbb{R}$, où la fonction ε vérifie : $\lim\limits_{h \to 0_E} \varepsilon(h) = 0$, telle que*

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - l(h)\|_F = \varepsilon(h)\|h\|_E$$

Il suffit en effet de poser $\varepsilon(0_E) = 0$ et si $R > 0$ est choisi de sorte que la boule $B(x_0, R)$ de centre x_0 et de rayon $R > 0$ soit incluse dans U et

$$\varepsilon(h) := \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - l(h)\|_F}{\|h\|_E}$$

si $h \in B(0_E, R)$

Proposition 4. *Si f est différentiable en x_0, alors f est nécessairement continue en x_0.*

Notation :
L'application l dans la définition précédente (avant la remarque et la proposition) dépend du point x_0. Il faut donc adopter une notation faisant apparaître le point x_0. On utilise la notation $l = df(x_0)$. Donc $df(x_0)$ est elle-même une application. On l'appelle la différentielle de f en x_0.

Définition 18. *On dit que f est différentielle sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$. On appelle la différentielle de f la fonction*

$$\begin{aligned} df : U &\longrightarrow L(E,F) \\ x &\longmapsto df(x) \end{aligned}$$

Si de plus cette application est ocntinue, on dit que f est de classe C^1 (ou continument différentiable).

Remarque 15. *Il ne faut pas confondre df et sa valeur en x, $df(x)$. La continuité de df n'a rien à voir avec la continuité de $df(x)$ (cette dernière est toujours continue, mais df ne l'est pas en général). Aussi $df(x)$ est linéaire de E dans F, mais df n'est pas linéaire en général de U dans $L(E,F)$.*

(à voir exemples pages 7-8 cours 9)

Théorème 45. *Si $f : U \longrightarrow F$ et $g : U \longrightarrow F$ sont différentiables, alors $f + g$ est différentiable et $d(f+g) = df + dg$, c'est-à-dire $d(f+g)(x)(h) = df(x)(h) + dg(x)(h)$.*
L'application (λf) est différentiable $\forall \lambda \in (R)$ et $d(\lambda f) = \lambda df$.

Remarque 16. *L'ensemble des applications différentiables sur U est un espace vectoriel et la différentiation d est une application linéaire de cet espace vectoriel dans l'ensemble des applications de U dans $L(E, F)$.*

(Cours 10)

Théorème 46. *Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert et $V \subset F$ un ouvert. Si $f : U \longrightarrow F$ est différentiable en un point $x \in U$ et si $g : V \subset F \longrightarrow G$ est différentiable en $f(x) \in V$, alors la fonction composée $g \circ f : U \longrightarrow G$ est différentiable en x et*

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)).(df(x).h)$$

$\forall x \in U$ et $\forall h \in E$.

Remarque 17. *C'est un résultat très important, c'est la "dérivation en chaine" ou "règle de dérivation des fonctions composées. Voir exemple page 1 cours 10.*

2. Fonctions définies sur un espace produit

Si

$$\begin{aligned} f : U \subset E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est différentiable. Alors les applications partielles

$$y_i \longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

sont différentiables et si on note $d_i f(x_1, \cdots, x_n)$ leur différentielles en x_i, alors

$$df(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i f(x_1, \cdots, x_n).h_i$$

avec $h \in E_1 \times \cdots \times E_n$ et $h = (h_1, \cdots, h_n)$.
Différentielles en dimension finie

On suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^k$. Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Alors si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est différentiable, alors les applications partielles :

$$\begin{aligned} g_i : \Theta_i(x) &\longrightarrow F \\ t &\longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

$$g_i(t) = f(x + (t - x_i)e_i$$

où

$$\Theta_i(x) = \{t \in \mathbb{R} | (x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in U\}.$$

On note $\dfrac{df}{dx_i}(x)$ la dérivée de g_i en x_i. Alors on a : (...) texte à lire page 4.

Théorème 47. *$f : u \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est de classe C^1 (continument différentiable) si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

(à lire, texte du théorème des accroissements fini page 4)

Théorème 48. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f'(t)\|_F \leq k$, $\forall t \in I$. Alors*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k|x - y|$$

$\forall x \in I$ et $\forall y \in I$.

Théorème 49. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I et à valeures dans l'espace de Banach F sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que*

$$\|\varphi'(t)\|_F \leq \varphi'(t), \forall t \in I$$

$$\text{Alors } \|f(x) - f(y)\|_F \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I$$

Théorème 50. *Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une fonction différentiable sur l'ouvert convexe U. On suppose qu'il existe une constate $k > 0$ tel que $|||df(x)||| \leq k$, $\forall x \in U$*

$$\text{Alors } \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E,\ \forall x \in U,\ \forall y \in U$$

Remarque 18. *En fait on peut montrer l'inégalité plus fine suivante :*

$$\text{Alors } \|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} |||df(y + (1-t)x|||.\|x - y\|_E$$