

Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours de théorie des anneaux, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.

Chapitre 1

Proposition 1. *Soit A un anneau. Alors l'ensemble $A^{n \times n}$ des matrices de tailles $n \times n$ sur A est un anneau.*

Proposition 2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau.

Définition 1. *Un sous-anneau B de l'anneau A est un sous-groupe additif de A tel que :*

1. $\forall a, b \in B, ab \in B$
2. $1 \in B$

Corollaire 1. *L'intersection de tous les sous-anneaux de l'anneau A est l'ensemble $\{n \cdot 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, avec la notation usuelles des groupes additifs.*

Définition 2. *Si A est un anneau, on dit qu'un élément a de A est inversible s'il existe b de A tel que $ab = ba = 1$. Un tel élément b est alors unique et est appelé inverse de a .*

Définition 3. *L'ensembles des éléments inversibles d'un anneau A est noté $U(A)$.*

Proposition 3. $U(A)$ est un groupe sous la multiplication.

Définition 4. *Dans un anneau A un diviseur de 0 est un élément de a de A , tel que $a \neq 0$ et :*

1. $ab = 0$ (a est un diviseur de 0 à gauche).
2. $ba = 0$ (a est un diviseur de 0 à droite).

Définition 5. *Un anneau est dit intègre s'il n'a aucun diviseur de 0.*

Proposition 4. *Si $a, b, c \in A$, un anneau intègre. Alors $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$. De plus, si $a \neq 0$ et $ab = ac \Rightarrow b = c$ et $ba = ca \Rightarrow b = c$.*

Proposition 5. *Soient A, B deux anneaux. L'ensemble $A \times B$ muni de l'addition*

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

et de la multiplication

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

est un anneau, avec $0_{A \times B} = (0, 0)$ et l'élément neutre $1_{A \times B} = (1, 1)$. Il est commutatif si et seulement si A et B le sont aussi. L'anneau $A \times B$ n'est pas intègre.

Définition 6. *On appelle $A \times B$ l'anneau produit de A et B .*

Proposition 6. $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$

Définition 7. *Un homomorphisme d'anneau $f : A \longrightarrow B$ est une fonction tel que :*

1. f est un homomorphisme de groupes additifs.
2. $\forall a, b \in A, f(ab) = f(a)f(b)$.
3. $f(1_A) = 1_B$.

Définition 8. Un idéal dans un anneau A est un sous-ensemble I tel que :

1. I est un sous-groupe additif.
2. $\forall a \in A, \forall x \in I, ax, xa \in I$.

Proposition 7. Le noyau d'un homomorphisme est un idéal.

Proposition 8. Soit I un idéal d'un anneau A , tel que $I \neq A$. On construit le groupe additif A/I , quotient des groupes additifs A et I . Alors A/I est un anneau, tel que l'homomorphisme canonique de groupe $A \longrightarrow A/I$ est aussi un homomorphisme d'anneaux.

Définition 9. On appelle A/I l'anneau quotient de A par l'idéal I .

Théorème 1. Il est à la fin de la page 7(chapitre 1), il n'est pas copiable à cause d'une figure. À lire.