

*Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours d'analyse 3, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.*

## Chapitre 1

### (Cours 2)

**Définition 1.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $A \subset E$ .

1. Un point  $a \in E$  est dit adhérent à  $A$  si tout voisinage de  $a$  rencontre  $A$ .
2. On note  $\bar{A} =$  l'ensemble des points adhérent à  $A$ .
3. Un point  $x \in A$  est dit intérieur à  $A$  s'il existe une boule ouverte centré en  $x$  et contenue dans  $A$ .
4. On note  $\mathring{A} =$  l'ensemble des points intérieurs de  $A$ .

**Définition 2.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $A \subset E$ .  $A$  est dense si tout point de  $E$  est adhérent à  $A$ .

**Théorème 1.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $A \subset E$ .

1.  $\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .
2.  $\mathring{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

Exo :  $x$  est adhérent à  $A$  si et seulement si  $E/A = A^c$  n'est pas un voisinage de  $x$ .

### (Cours 3)

**Théorème 2.** Soit  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  2 espaces métriques et  $f : E \longrightarrow F$  une application. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application  $f$  est continue sur  $E$ .
2. Pour tout ouvert  $U$  de  $F$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $E$ .
3. Pour tout fermé  $B$  de  $F$ ,  $f^{-1}(B)$  est un fermé de  $E$ .

### (Cours 4)

**Définition 3.** Soit  $(E, d)$  et  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouvert de  $E$ . On dit que la famille  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $E$ , si  $E = \bigcup_{i \in I} U_i$ . On appelle un sous-recouvrement une sous-famille  $(U_i)_{i \in J}$ , avec  $J \subset I$  fini et  $E = \bigcup_{i \in J} U_i$ .

**Définition 4.** On dit que  $(E, d)$  est un espace métrique compact si tout recouvrement ouvert de  $E$  contient un sous-recouvrement fini.

**Remarque 1.**  $(E, d)$  compact  $\Leftrightarrow \forall (U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouvert tel que  $E = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $\exists J \subset I$  fini vérifiant  $E = \bigcup_{i \in J} U_i$   
 $\Leftrightarrow$  De tout recouvrement ouvert de  $E$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

**Remarque 2.** On peut définir les espaces métriques compacts en utilisant les fermés.

**Théorème 3.**  $(E, d)$  est un compact si et seulement si toutes familles de fermés non vides, qui est stables par intersection finie, possède une intersection non vide.

**Définition 5.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $K \subset E$  une partie non vide de  $E$ . On dit que  $K$  est compact si et seulement si  $(K, d_K)$  est un espace métrique compact, avec  $d_K$  est la restriction de la distance  $d$  à  $K$ .

**Théorème 4.** Si  $(E, d)$  un espace métrique,  $K \subset E$  compact et  $F \subset K$  un fermé, alors  $F$  est compact.

**Propriétés 1.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

1. Si  $K_1$  et  $K_2$  sont 2 compacts de  $E$ , alors  $K_1 \cup K_2$  est aussi un compact de  $E$ .
2. Si  $(K_i)_{i \in I}$  est une famille de compacts de  $E$  et  $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ , alors  $\bigcap_{i \in I} K_i$  est un compact de  $E$ .

**Théorème 5.** Soit  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques, et  $f : E \longrightarrow F$  une application continue. Si  $K \subset E$  compact, alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ . En particulier, si  $E$  est compact et  $f$  surjective, alors  $F$  est compact.

**Corollaire 1.** Si  $f : E \longrightarrow F$  est une application continue bijective et  $E$  un espace métrique compact, alors  $f$  est un homéomorphisme.

### Théorème Bolzano-Weierstrass

**Théorème 6.** Soit  $E$  un espace métrique. Il y a équivalence entre :

1. L'espace  $E$  est compact.
2. Toute suite de point de  $E$  possède un point adhérent.
3. Toute suite de point de  $E$  possède une sous-suite convergente dans  $E$ .

**Rappel 1.** Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $E$ . Le nombre  $\rho > 0$  est dit nombre de Lebesgue du recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  si  $\forall x \in E$ ,  $B(x, \rho)$  est contenue dans certain  $U_i$ .

**Lemme 1.** Soit  $E$  un espace métrique. Si toute suite de points de  $E$  possède une valeur d'adhérence, alors tout recouvrement ouvert de  $E$  admet un nombre de Lebesgue

**Rappel 2.** Le diamètre :

$$\delta(E) := \sup_{x \in E, y \in E} d(x, y)$$

**Théorème 7.** Si  $E$  est un espace métrique compact, alors il est de diamètre fini.

**Théorème 8.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact et  $(x_n)_n$  une suite de point de  $(E, d)$ . Si  $(x_n)_n$  possède une seule valeur d'adhérence, alors  $(x_n)_n$  est convergente

**Définition 6.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On dit que  $E$  est précompact si,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un recouvrement de  $E$  par un nombre fini de parties de diamètre inférieur à  $\epsilon$ .

**Remarque 3.** On peut montrer l'équivalence suivante :

1.  $E$  est précompacte.

2.  $\forall \epsilon > 0$ , on peut recouvrir  $E$  par un nombre fini de boules ouvertes de rayon  $\epsilon$ .

**Théorème 9.** *Tout espace métrique compact est précompact.*

**Remarque 4.** *La réciproque est fausse, on verra plus tard qu'un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

**Définition 7.** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On dit qu'il est séparable si et seulement si il existe  $B \subset E$  une partie de  $E$  qui est dénombrable et dense dans  $E$ . C'est-à-dire  $\bar{B} = E$ , avec  $B \subset E$  dénombrable.*

**Théorème 10.** *Tout espace métrique compact est séparable*

**Théorème 11.** *Si  $E$  et  $F$  sont des espaces métriques compacts, alors le produit  $E \times F$  est compact.*

**Théorème 12.** *Le produit d'une famille d'espaces métriques compacts est compact.*

**(Cours 5)**

(Suite de Cauchy)

**Définition 8.** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une suite  $(x_n) \subset E$  est dite de Cauchy si :  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n, m \geq n_0$   $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$ .*

**Remarque 5.**  $(x_n)$  est de Cauchy  $\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  quand  $n, m \rightarrow \infty$   
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(P_n) = 0$  où  $P_n = \{x_k; k \geq n\}$ .

**Proposition 1.** *(Premières propriétés des suites de Cauchy). Soit  $(E, d)$  un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Toute suite extraite  $(y_n)$  d'une suite de Cauchy  $(x_n)$  est de Cauchy.*
4. *Si  $(x_n)$  est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, alors  $(x_n)$  est convergente.*

**Corollaire 2.** *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

**Remarque 6.** *Souvent, pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente, on montre qu'elle possède une valeur d'adhérence.*

**Définition 9.** *Un espace métrique  $(E, d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy de  $(E, d)$  est convergente dans  $(E, d)$ .*

**Remarque 7.** 1. *La notion d'espace complet n'est pas topologique, c'est-à-dire que la notion n'est pas invariante par homéomorphisme. En effet  $\mathbb{R}$  et  $] - 1, 1[$  sont homéomorphe, mais  $\mathbb{R}$  est complet et  $] - 1, 1[$  ne l'est pas.*

2. *Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $F \subset E$ .  $F$  est complet si l'espace métrique  $(F, d_F)$  est complet, où  $d_F$  est la métrique induite par  $d$  sur  $F$ , c'est-à-dire  $d = d|_F$ . Dans la suite, on note  $d$  pour  $d_F$  : la restriction de  $d$  à  $F$ .*

**Théorème 13.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $F \subset E$ . Alors  $(F, d_F)$  est complet si et seulement si  $F$  est fermé de  $E$ .

**Remarque 8.**  $]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  n'est pas complet, car  $]0, 1[$  n'est pas fermé. De même,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  n'est pas complet, donc  $\mathbb{Q}$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $F \subset E$ . Alors si  $F$  est complet, alors  $F$  est fermé.

**Théorème 14.** Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.

**Corollaire 3.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  est complet,  $\forall n \geq 1$ .

**Théorème 15.** Un espace métrique  $(E, d)$  est compact si et seulement si il est précompact et complet.

### Théorème de Cantor

**Théorème 16.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Alors  $(E, d)$  est complet si et seulement si pour toute suite  $(F_n)$  d'ensembles fermés non vides tels que

1.  $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \dots F_n \supset F_{n+1} \supset \dots$  (on dit que  $(F_n)$  est décroissante),
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$  ( $\text{diam}(F_n) = \text{diamètre de } F_n$ )

On a l'intersection des  $(F_n)$  qui contient un et un seul point.

### Théorème de Baire

**Théorème 17.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts dense dans  $E$  ( $\bar{\theta}_n = E, \forall n \in \mathbb{N}$ ). Alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$  est aussi dense dans  $E$ .

**Corollaire 4.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $(F_n)$  une suite de fermés d'intérieur vide ( $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset, \forall n \geq 1$ ). Alors  $\bigcup_{n \geq 1} F_n$  est d'intérieur vide.

**Corollaire 5.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $(F_n)$  une suite de fermés telle que  $E = \bigcup_n F_n$ . Alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$ .

**Théorème 18.** Si  $f$  est une fonction continue du compact  $K$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint sur  $K$  sa borne supérieure et sa borne inférieure.

### Théorème de Heine

**Théorème 19.** Soit  $(E, d_E)$  un espace métrique compact,  $(F, d_F)$  un espace métrique et  $f : E \rightarrow F$  une application continue. Alors  $f$  est uniformément continue.

**Définition 10.** Soit  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques et  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est une contraction (ou une application contractante) s'il existe une constante  $k$  :  $0 < k < 1$  vérifiant :

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y), \forall x, y \in E$$

### Théorème du point fixe de Banach

**Théorème 20.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \longrightarrow E$  une contraction. Alors il existe un unique point fixe de  $f$ , c'est-à-dire il existe un unique  $a \in E$  tel que  $f(a) = a$ .

### (Cours 6)

**Remarque 9.** Soit  $(K, d)$  un espace métrique compact et  $(E, d)$  un espace métrique complet. On note  $C(K, E)$  l'ensemble des fonctions continues de  $K$  dans  $E$ . On définit l'application  $d$  sur  $C(K, E)$  :

$$d(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point de  $K$ .

**Théorème 21.** L'application  $d$  définit une distance sur  $C(K, E)$  appelée distance de la convergence uniforme.

**Théorème 22.** Si  $K$  est compact et  $E$  complet, alors  $C(K, E)$  muni de la distance de convergence uniforme est complet.

**Remarque 10.** Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues ( $f_n \in C(K, E)$ ), et si  $(f_n)_n$  converge vers  $f$  pour la distance de la convergence uniforme, alors la limite de  $f$  est continue. Inversement, si  $(f_n)_n$  converge simplement et si  $f$  est continue, la convergence n'est pas nécessairement uniforme.

**Théorème 23.** Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions continues de l'espace compact  $K$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$ . Alors  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ .

**Théorème 24.** Si  $H \subset C(K, E)$  compact et  $x \in K$ , alors l'ensemble

$$H(x) = \{f(x), f \in H\}$$

est compact dans  $E$ .

**Définition 11.** Une partie  $H$  de  $C(K, E)$  est dite équicontinue au point  $x$  de  $K$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $K$  tel que,

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

$\forall y \in V$  et  $\forall f \in H$ .

**Théorème 25.** Si  $H \subset C(K, E)$  une partie compacte, alors  $H$  est équicontinue en tout point de  $K$ .

**Théorème 26.** Si  $H \subset C(K, E)$  une partie relativement compact, alors l'ensemble  $H(x) = \{f(x), f \in H\}$  est relativement compact dans  $E$  et  $H$  est équicontinue en chaque point de  $K$ .

### Théorème de Ascoli-Arzelà

**Théorème 27.** Soit  $K, d)$  un espace métrique compact,  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $H \subset C(K, E)$  une partie non vide. On suppose que :

1.  $H(x)$  est relativement compact pour tout  $x \in K$  ;
2.  $H$  est équicontinue en chaque point  $x \in K$ .

Alors  $H$  est relativement compact dans  $C(K, E)$

## Chapitre 2 - Analyse linéaire dans les espaces de Banach

### (Cours 7)

**Définition 12.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On appelle une norme sur  $E$  une application  $\|\cdot\|$  de  $E$  dans  $[0, \infty[$  vérifiant :

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in E$ .
3.  $\|\lambda x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x \in E, \forall y \in E$ .

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé. La norme est habituellement noté  $\|\cdot\|$ .

**Proposition 3.** Si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , alors l'application  $(x, y) \in E \mapsto \|x - y\|$  est une distance sur  $E$ .

(remarque incomplète - voir page 2-3 du cours 7 pour les détails)

**Remarque 11.** D'après la proposition précédente, tout espace normé est métrique. Une suite  $(x_n)_n$  de  $E$  est convergente, si  $(x_n)_n$  converge pour la distance associée à  $\|\cdot\|$ . De même, une application  $f : E \longrightarrow F$ , est continu en  $x \in E$ , où  $E$  et  $F$  sont deux espaces normés.

**Théorème 28.** Si  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé, alors les applications

1.  $(x, y) \in E \times E \longmapsto x + y \in E$ , est continue.
2.  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longmapsto \lambda x \in E$ , est continue.
3.  $x \in E \longmapsto \|x\| \in [0, \infty[$ , est continue.

**Définition 13.** On appelle un espace de Banach tout espace vectoriel normé complet pour la distance associée à la norme.

**Rappel 3.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $f : E \longrightarrow F$  une application. Alors  $f$  est linéaire si et seulement si

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

$\forall x, y \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 29.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire de l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans l'espace vectoriel normé  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application linéaire  $f$  est continue sur  $E$  ;
2.  $f$  est continue en 0 ;
3.  $f$  est uniformément continue sur  $E$  ;

4.  $f$  est lipschitzienne ;

5. Il existe une constante  $k > 0$ , telle que  $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E, \forall x \in E$ .

On note  $L(E, F)$  = l'ensemble des applications linéaires continues de l'espace normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans l'espace vectoriel normé  $(F, \|\cdot\|_F)$ .

**Remarque 12.**  $L(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $(R)$  (évident).

**Définition 14.** Soit  $f \in L(E, F)$ . On appelle la norme de  $f$  la constante définie par :

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F$$

**Théorème 30.** Soit  $f \in L(E, F)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \\ &= \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F \\ &= \sup_{x \in E, \|x\|_E \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \min\{k > 0; \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E, \forall x \in E\} \end{aligned}$$

**Théorème 31.** L'application  $f \in L(E, F) \mapsto \|f\|$  est une norme sur  $L(E, F)$ . De plus, si  $F$  est un espace de Banach, alors  $(L(E, F), \|\cdot\|)$  est aussi un espace de Banach.

**Théorème 32.** Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés et  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow G$  deux applications linéaires continues. Alors l'application  $g \circ f : E \longrightarrow G$  est linéaire et continue et

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$$

En particulier, si  $E = F = G$ , alors  $L(E) := L(E, E)$  est une algèbre de Banach.

(Banach)

**Théorème 33.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire continue et bijective de  $E$  sur  $F$ . Alors  $f^{-1}$  est continue de  $F$  sur  $E$ .

**Définition 15.** Une application linéaire  $f : E \longrightarrow F$  est dite isomorphisme si elle est continue, bijective et son inverse  $f^{-1}$  est aussi continue.

(Cours 8)

**Corollaire 6.** Toutes les normes sur un espace vectoriel normé (pas nécessairement de dimension finie) sont équivalentes. Et elles sont topologiquement équivalentes. (Voir théorème 3.1 et corollaire 3.3).

**Théorème 34.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . Alors l'application

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

est une homéomorphisme.

**Corollaire 7.** Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé

**Théorème 35.** Si  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors la boule unité fermée  $\bar{B}(0, 1)$  est compacte.

**Théorème 36.** Si  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors  $K \subset E$  est compact de  $E$  si et seulement si  $K$  est fermé borné.

### (Théorème de Riez)

**Théorème 37.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Si la boule unité fermée  $\bar{B}(0, 1)$  est compacte, alors  $E$  est de dimension finie.

**Remarque 13.** En fait, s'il existe une boule fermée et compacte, alors l'espace  $E$  est de dimension finie. Suite de la remarque cours 8 page 3 du pdf.

**Théorème 38.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de dimension finie et  $x \in E$ . Alors il existe un point  $v \in F$  tel que :

$$d(x, F) = \|x - v\|$$

**Théorème 39.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Alors Si  $F$  est de dimension finie, alors  $F$  est fermé.

Notation : Si  $\bar{x} \in E/F$ , alors  $\|\bar{x}\| := \inf\|y\|$ , pour  $y \in \bar{x}$  (pour  $y$  est en dessous du inf..., voir page 5 cours 8)

**Théorème 40.** L'application  $\bar{x} \in E/F \mapsto \|\bar{x}\| = \inf\|y\|$  définit une norme sur  $E/F$  pour laquelle l'application

$$\begin{aligned} \Pi : E &\longrightarrow E/F \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

est continue, de plus,  $\forall x \in E$ ,

$$\|\bar{x}\| = \|\Pi(x)\| = d(x, F)$$

La norme définie sur  $E/F$  est dite la norme quotient.

**Théorème 41.** Soit  $E$  et  $F$  2 espace vectoriel normé et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire de rang fini. Alors  $f$  est continue sur  $E$  si et seulement si son noyau est fermé dans  $E$ .

### Forme analytique du théorème de Hahn - Banach

Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire définie sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le théorème de Hahn-Banach concerne le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de  $E$  en une forme linéaire définie sur  $E$  tout entier.

### Théorème de Hahn-Banach



**Théorème 42.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ ,  $H \subset E$  un sous-espace vectoriel et  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors il existe une forme linéaire continue  $F$  définie sur  $E$  qui prolonge  $f$  et de même norme c-a-d  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in H$$

$$\|F\| = \|f\|$$

### Lemme de Zorn

**Lemme 2.** Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.

(Cours 9)

**Corollaire 8.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $E^1 \neq \emptyset$ . De plus si  $x_0 \in E$  non nul, alors il existe une forme linéaire continue  $f_0$  tel que  $f_0(x_0) = \|x_0\|$  et  $\|f_0\| = 1$

**Corollaire 9.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Alors l'application ... dur a écrire voir coro 4.7 page 3 cours 9.

**Définition 16.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

1. Un hyperplan de  $E$  est un ensemble de la forme :

$$H = \{x \in E | f(x) = \alpha\}$$

où  $f \in E^*$  non nulle et  $\alpha \in \mathbb{R}$  ( $f$  n'est pas nécessairement continue). On dit que  $H$  est d'équation  $f(x) = \alpha$ .

2. L'hyperplan  $H$  est fermé si et seulement si  $f$  est continue.
3. Une partie  $C \subset E$  est dite convexe si et seulement si  $\forall x, y \in C$  et  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ( $\lambda + \mu = 1$ ), on a  $\lambda x + \mu y \in C$  avec  $\lambda + \mu = 1$  où  $\lambda \geq 1$  et  $\mu \geq 0$ .
4. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On dit que l'hyperplan  $H = \{f = \alpha\}$  sépare  $A$  et  $B$  au sens large si on a  $A \subset \{x \in E | f(x) \leq \alpha\}$  et  $B \subset \{x \in E | f(x) \geq \alpha\}$
5. On dit que  $H = \{f = \alpha\}$  sépare  $A$  et  $B$  au sens strict si on a qu'il  $\exists \epsilon > 0$  tel que  $A \subset \{x \in E | f(x) \leq \alpha - \epsilon\}$  et  $B \subset \{x \in E | f(x) \geq \alpha + \epsilon\}$

### Hahn-Banach, première forme géométrique

**Théorème 43.** Soit  $E$  un espace vectoriel normal et  $A$  et  $B$  deux parties convexes, non vides et disjointes. Si  $A$  est un ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $A$  et  $B$  au sens large.

### Hahn-Banach, deuxième forme géométrique

**Théorème 44.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  et  $B$  deux parties convexes non vides et disjointes. Si  $A$  est fermé et  $B$  compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $A$  et  $B$  au sens stricte

**Corollaire 10.** Soit  $F \subsetneq E$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  ( $F \neq E$ ). Alors il existe une forme  $f \in E'$  non nulle telle que  $f|_F = 0$  (c'est-à-dire  $f(x) = 0, \forall x \in F$ )

### Chapitre 3 - Calcul différentiel dans les espaces de Banach

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $U \subset E$  un ouvert non vide et  $f : U \longrightarrow F$  une application.

**Définition 17.** Soit  $x_0 \in U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $x_0$  s'il existe une application linéaire continue  $l \in L(E, F)$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

**Remarque 14.** Autrement dit,  $f$  est différentiable en  $x_0$ , s'il existe une application linéaire continue  $l \in L(E, F)$ ,  $R > 0$  et  $\varepsilon : B_E(0_E, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ , où la fonction  $\varepsilon$  vérifie :  $\lim_{h \rightarrow 0_E} \varepsilon(h) = 0$ , telle que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)\|_F = \varepsilon(h)\|h\|_E$$

Il suffit en effet de poser  $\varepsilon(0_E) = 0$  et si  $R > 0$  est choisi de sorte que la boule  $B(x_0, R)$  de centre  $x_0$  et de rayon  $R > 0$  soit incluse dans  $U$  et

$$\varepsilon(h) := \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)\|_F}{\|h\|_E}$$

si  $h \in B(0_E, R)$

**Proposition 4.** Si  $f$  est différentiable en  $x_0$ , alors  $f$  est nécessairement continue en  $x_0$ .

Notation :

L'application  $l$  dans la définition précédente (avant la remarque et la proposition) dépend du point  $x_0$ . Il faut donc adopter une notation faisant apparaître le point  $x_0$ . On utilise la notation  $l = df(x_0)$ . Donc  $df(x_0)$  est elle-même une application. On l'appelle la différentielle de  $f$  en  $x_0$ .

**Définition 18.** On dit que  $f$  est différentielle sur  $U$  si elle est différentiable en tout point  $x \in U$ . On appelle la différentielle de  $f$  la fonction

$$\begin{aligned} df : U &\longrightarrow L(E, F) \\ x &\longmapsto df(x) \end{aligned}$$

Si de plus cette application est continue, on dit que  $f$  est de classe  $C^1$  (ou continument différentiable).

**Remarque 15.** Il ne faut pas confondre  $df$  et sa valeur en  $x$ ,  $df(x)$ . La continuité de  $df$  n'a rien à voir avec la continuité de  $df(x)$  (cette dernière est toujours continue, mais  $df$  ne l'est pas en général). Aussi  $df(x)$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ , mais  $df$  n'est pas linéaire en général de  $U$  dans  $L(E, F)$ .

(à voir exemples pages 7-8 cours 9)

**Théorème 45.** Si  $f : U \longrightarrow F$  et  $g : U \longrightarrow F$  sont différentiables, alors  $f + g$  est différentiable et  $d(f + g) = df + dg$ , c'est-à-dire  $d(f + g)(x)(h) = df(x)(h) + dg(x)(h)$ .

L'application  $(\lambda f)$  est différentiable  $\forall \lambda \in (R)$  et  $d(\lambda f) = \lambda df$ .

**Remarque 16.** *L'ensemble des applications différentiables sur  $U$  est un espace vectoriel et la différentiation  $d$  est une application linéaire de cet espace vectoriel dans l'ensemble des applications de  $U$  dans  $L(E, F)$ .*

**(Cours 10)**

**Théorème 46.** *Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés,  $U \subset E$  un ouvert et  $V \subset F$  un ouvert. Si  $f : U \longrightarrow F$  est différentiable en un point  $x \in U$  et si  $g : V \subset F \longrightarrow G$  est différentiable en  $f(x) \in V$ , alors la fonction composée  $g \circ f : U \longrightarrow G$  est différentiable en  $x$  et*

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \cdot (df(x).h)$$

$\forall x \in U$  et  $\forall h \in E$ .

**Remarque 17.** *C'est un résultat très important, c'est la "dérivation en chaîne" ou "règle de dérivation des fonctions composées". Voir exemple page 1 cours 10.*

## 2. Fonctions définies sur un espace produit

Si

$$\begin{aligned} f : U \subset E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est différentiable. Alors les applications partielles

$$y_i \longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

sont différentiables et si on note  $d_i f(x_1, \cdots, x_n)$  leur différentielles en  $x_i$ , alors

$$df(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_i f(x_1, \cdots, x_n).h_i$$

avec  $h \in E_1 \times \cdots \times E_n$  et  $h = (h_1, \cdots, h_n)$ .

### Différentielles en dimension finie

On suppose que  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^k$ . Soit  $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ , la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ . Alors si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$  est différentiable, alors les applications partielles :

$$\begin{aligned} g_i : \Theta_i(x) &\longrightarrow F \\ t &\longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ g_i(t) &= f(x + (t - x_i)e_i) \end{aligned}$$

où

$$\Theta_i(x) = \{t \in \mathbb{R} | (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}.$$

On note  $\frac{df}{dx_i}(x)$  la dérivée de  $g_i$  en  $x_i$ . Alors on a : (...) texte à lire page 4.

**Théorème 47.**  $f : u \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$  est de classe  $C^1$  (continument différentiable) si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur  $U$ .

(à lire, texte du théorème des accroissements fini page 4)

**Théorème 48.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert,  $F$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose qu'il existe  $k > 0$  tel que  $\|f'(t)\|_F \leq k, \forall t \in I$ . Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k|x - y|$$

$\forall x \in I$  et  $\forall y \in I$ .

**Théorème 49.** Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$  une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert  $I$  et à valeurs dans l'espace de Banach  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe une fonction  $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\|\varphi'(t)\|_F \leq \varphi'(t), \forall t \in I$$

$$\text{Alors } \|f(x) - f(y)\|_F \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|, \forall x \in I, \forall y \in I$$

**Théorème 50.** Soit  $f : U \subset E \longrightarrow F$  une fonction différentiable sur l'ouvert convexe  $U$ . On suppose qu'il existe une constante  $k > 0$  tel que  $\|df(x)\| \leq k, \forall x \in U$

$$\text{Alors } \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E, \forall x \in U, \forall y \in U$$

**Remarque 18.** En fait on peut montrer l'inégalité plus fine suivante :

$$\text{Alors } \|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|df(y + (1-t)x)\| \cdot \|x - y\|_E$$

(Cours 11)

**Définition 19.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $U \subset E$  un ouvert.  $U$  est dit connexe s'il n'admet pas de sous-ensemble à la fois ouvert et fermé autre que l'ensemble vide et lui-même.

**Remarque 19.**  $U$  est connexe  $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2$  ouvert,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Si  $U = U_1 \cup U_2$  alors  $U_1 = \emptyset$  ou  $U_2 = \emptyset$ .

**Théorème 51.** Soit  $f : U \subset E \longrightarrow F$  une fonction différentiable sur un ouvert connexe  $U$ , telle que  $df(u) = 0, \forall x \in U$ . Alors  $f$  est une application constante.

**Théorème 52.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et  $f : I \longrightarrow F$  de classe  $C^1$ . Alors  $f$  est localement lipshitzienne. C'est-à-dire  $\forall J \subset I$  compact,  $\exists K_J > 0$  telle que

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq K_J|x - y|, \forall x, y \in J$$

**Théorème 53.** *théorème 2.7 des notes de cours (11), je ne comprends pas...*

---

---

À partir d'ici  
 $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces de Banach

**Définition 20.** *Soit  $U \subset E$  et  $V \subset F$  deux ouverts. On dit qu'une application  $f : U \longrightarrow V$  est un  $C^1$ -difféomorphisme si et seulement si :*

1.  $f$  est une bijection ;
2.  $f$  est de classe  $C^1$  ;
3.  $f^{-1}$  est de classe  $C^1$ .

(exemple page 3 - cours 11)

**Théorème 54.** *Si  $f : U \longrightarrow V$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, alors sa différentielle  $df(x)$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ ,  $\forall x \in U$ . De plus la différentielle de  $f^{-1}$  est donnée par :*

$$df^{-1}(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}, \forall y \in V$$

**Corollaire 11.** *Si  $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, alors  $E$  et  $F$  sont isomorphe. De plus, si  $\dim(E) < \infty$ , alors  $\dim(F) < \infty$  et  $\dim(E) = \dim(F)$ .*

### Théorème d'inversion locale

**Théorème 55.** *Si  $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$  est de classe  $C^1$ ,  $a \in U$  est tel que  $df(a)$  soit un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , alors il existe un voisinage ouvert  $U_a$  de  $a$  dans  $U$  et un voisinage ouvert  $V_b$  de  $b = f(a)$  dans  $V$  tel que la restriction de  $f$  à  $U_a$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U_a$  sur  $V_b$*

(le prochain théorème sert pour prouver le thm d'inversion local)

### Théorème de Banach-Picard

**Théorème 56.** *Soit  $E$  un espace de Banach et  $B \subset E$  un fermé. Si  $f : B \longrightarrow B$  est contractante, c'est-à-dire  $\exists k \in ]0, 1[$  tel que*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in B,$$

*Alors il existe un unique point fixe  $x \in B : f(x) = x$ .*

### Théorème d'inversion globale

**Théorème 57.** *Soit  $f : U \subset E \longrightarrow F$  de classe  $C^1$ .  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $f(U)$  si et seulement si  $f$  est injective et  $df(x)$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , pour tout  $x \in U$ .*

**Corollaire 12.** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$   $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$  injective et de classe  $C^1$ . Alors  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $f(U)$  si et seulement si  $\det(Jf(x)) \neq 0, \forall x \in U$ , où  $Jf(x)$  est la matrice jacobienne de  $f$  (voir notation page 5 cours 11, corollaire 3.7)*

## Théorème des fonctions implicites

**Théorème 58.** Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces de Banach,  $U \subset E \times F$  un ouvert et  $f : U \longrightarrow G$  de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U$  tel que  $f(a, b) = 0_G$  et la différentielle partielle de  $f$  par rapport à  $y$ ,  $d_2 f(a, b)$  soit un isomorphisme de  $F$  dans  $G$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $U_{a,b}$  de  $(a, b)$  dans  $U$ , un voisinage ouvert  $W_a$  de  $a$  dans  $E$  et une fonction  $\varphi : W_a \longrightarrow F$  de classe  $C^1$  telle que  $(x, y) \in U_{a,b}$  et  $f(x, y) = 0_G \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ .

De plus :

$$d\varphi(x).h = -(d_2 f(a, b))^{-1}.d_1 f(x, \varphi(x)).h, \forall x \in W_a \text{ et } \forall h \in E$$

**(Cours 12)**

(voir exemple page 1 - cours 12)