

Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours d'analyse 3, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.

(Cours 2)

Définition 1. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

1. Un point $a \in E$ est dit adhérent à A si tout voisinage de a rencontre A .
2. On note \bar{A} = l'ensemble des points adhérent à A .
3. Un point $x \in A$ est dit intérieur à A s'il existe une boule ouverte centré en x et contenue dans A .
4. On note \mathring{A} = l'ensemble des points intérieurs de A .

Définition 2. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. A est dense si tout point de E est adhérent à A .

Théorème 1. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

1. \bar{A} est le plus petit fermé contenant A .
2. \mathring{A} est le plus grand ouvert contenu dans A .

(Cours 3)

Théorème 2. Soit (E, d_E) et (F, d_F) 2 espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est continue sur E .
2. Pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E .
3. Pour tout fermé B de F , $f^{-1}(B)$ est un fermé de E .

(Cours 4)

Théorème Bolzano-Weirstrass

Théorème 3. Soit E un espace métrique. Il y a équivalence entre :

1. L'espace E est compact.
2. Toute suite de point de E possède un point adhérent.
3. Toute suite de point de E possède une sous-suite convergente dans E .

Remarque 1. Vu sur un site internet :

*dans R et plus généralement dans un espace vectoriel norme de dimension finie : A compact $\Leftrightarrow A$ fermé et borné
pour compléter :*

1. dans tout metrique : A compact $\Rightarrow A$ ferme et borné avec reciproque fausse en général

2. dans un espace vectoriel normé E : sphere unite fermée compacte $\Rightarrow E$ de dimension finie (th de Riesz)

(Cours 5)

Proposition 1. *(Premières propriétés des suites de Cauchy). Soit (E, d) un espace métrique.*

- 1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
- 2. Toute suite de Cauchy est bornée.*
- 3. Toute suite extraite (y_n) d'une suite de Cauchy (x_n) est de Cauchy.*
- 4. Si (x_n) est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, alors (x_n) est convergente.*

Corollaire 1. *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*