

Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours de théorie des anneaux, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.

Chapitre 1

Définition 1. *Un anneau est dit commutatif si la loi de multiplication est commutative.*

Proposition 1. *Soit A un anneau. Alors l'ensemble $A^{n \times n}$ des matrices de tailles $n \times n$ sur A est un anneau.*

Proposition 2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau.

Définition 2. *Un sous-anneau B de l'anneau A est un sous-groupe additif de A tel que :*

1. $\forall a, b \in B, ab \in B$
2. $1 \in B$

Corollaire 1. *L'intersection de tous les sous-anneaux de l'anneau A est l'ensemble $\{n \cdot 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, avec la notation usuelles des groupes additifs.*

Définition 3. *Si A est un anneau, on dit qu'un élément a de A est inversible s'il existe b de A tel que $ab = ba = 1$. Un tel élément b est alors unique et est appelé inverse de a .*

Définition 4. *L'ensembles des éléments inversibles d'un anneau A est noté $U(A)$.*

Proposition 3. $U(A)$ est un groupe sous la multiplication.

Définition 5. *Dans un anneau A un diviseur de 0 est un élément a de A , tel que $a \neq 0$ et :*

1. $ab = 0$ (a est un diviseur de 0 à gauche).
2. $ba = 0$ (a est un diviseur de 0 à droite).

Définition 6. *Un anneau est dit intègre s'il n'a aucun diviseur de 0.*

Proposition 4. *Si $a, b, c \in A$, un anneau intègre. Alors $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$. De plus, si $a \neq 0$ et $ab = ac \Rightarrow b = c$ et $ba = ca \Rightarrow b = c$.*

Proposition 5. *Soient A, B deux anneaux. L'ensemble $A \times B$ muni de l'addition*

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

et de la multiplication

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

est un anneau, avec $0_{A \times B} = (0, 0)$ et l'élément neutre $1_{A \times B} = (1, 1)$. Il est commutatif si et seulement si A et B le sont aussi. L'anneau $A \times B$ n'est pas intègre.

Définition 7. *On appelle $A \times B$ l'anneau produit de A et B .*

Proposition 6. $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$

Définition 8. Un homomorphisme d'anneau $f : A \longrightarrow B$ est une fonction tel que :

1. f est un homomorphisme de groupes additifs.
2. $\forall a, b \in A, f(ab) = f(a)f(b)$.
3. $f(1_A) = 1_B$.

Définition 9. Un idéal dans un anneau A est un sous-ensemble I tel que :

1. I est un sous-groupe additif.
2. $\forall a \in A, \forall x \in I, ax, xa \in I$.

Proposition 7. Le noyau d'un homomorphisme est un idéal.

Proposition 8. Soit I un idéal d'un anneau A , tel que $I \neq A$. On construit le groupe additif A/I , quotient des groupes additifs A et I . Alors A/I est un anneau, tel que l'homomorphisme canonique de groupe $A \longrightarrow A/I$ est aussi un homomorphisme d'anneaux.

Définition 10. On appelle A/I l'anneau quotient de A par l'idéal I .

Théorème 1. Il est à la fin de la page 7(chapitre 1), il n'est pas copiable à cause d'une figure. À lire.

Corollaire 2. Si $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme d'anneau, on a toujours l'isomorphisme d'anneau $A/\ker(f) \simeq f(A)$

Proposition 9. L'image et l'image réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau. L'image réciproque d'un idéal est un idéal. Si l'homomorphisme est surjectif, alors l'image d'un idéal est un idéal.

Proposition 10. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si m est premier.

Proposition 11. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont les n avec $n \perp m$.

Corollaire 3. $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est en bijection avec $\{n | 0 \leq n \leq m-1, n \perp m\}$. En particulier $|U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = \varphi(m)$.

Rappel 1. $\varphi(m) = |\{n | 0 \leq n \leq m-1\}|$. φ est appelé l'indicateur d'Euler, ou fonction d'Euler.

Proposition 12. Si m, p sont premier entre eux, alors $\varphi(mp) = \varphi(m)\varphi(p)$.

Corollaire 4. Si $m = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, p_i premiers distincts, alors

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= \prod_{i=1}^k (p_i^{m_i} - p_i^{m_i-1}) \\ &= m \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\end{aligned}$$

Définition 11. La caractéristique d'un anneau A est l'ordre pour la loi additive de l'élément neutre de la loi multiplicative. Par exemple, la caractéristique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est n , car $n \cdot 1 = 0 \mod n$

Proposition 13. *Si la caractéristique d'un anneau intègre n'est pas nulle, c'est un nombre premier.*

Proposition 14. *Si A est un anneau commutatif de caractéristique p , un nombre premier, alors l'application $F : A \rightarrow A, x \mapsto x^p$, est un homomorphisme d'anneaux. On l'appelle l'homomorphisme de Frobenius.*

Définition 12. *Un corps est un anneau où tout élément non nul est inversible.*

Proposition 15. *Un corps est intègre.*

Définition 13. *Un sous-corps d'un corps est un sous-anneau qui contient l'inverse de chaque éléments non nuls qu'il contient.*

Remarque 1. *Un sous-corps est un corps.*

Proposition 16. *L'anneau commutatif A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et A .*

Proposition 17. *p est premiers si et seulement si $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.*

Définition 14. *Un idéal $I \neq A$ d'un anneau commutatif A est dit maximal si : $\forall J$ idéal de A , $I \subseteq J \subseteq A$, on a $J = I$ ou $J = A$.*

Proposition 18. *Soit A un anneau commutatif et I un idéal. Alors I est maximal si et seulement si A/I est un corps.*

Corollaire 5. *Les idéaux (ou sous-groupes) maximaux de \mathbb{Z} sont les $p\mathbb{Z}$, p premier.*

Proposition 19. *Si un corps K est de caractéristique non nulle, celle-ci étant un nombre premier, et K contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, à savoir son sous-corps premier.*

Proposition 20. *Soit K un corps et A un anneau). Si $f : K \rightarrow A$ est un homomorphisme d'anneaux, alors f est injectif.*

Proposition 21. *L'ensemble $\{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de \mathbb{C} dont les éléments inversibles sont $\{-1, 1, -i, i\}$*

Proposition 22. *Soit E et A un anneau. L'ensemble A^E des fonctions de E dans A est un anneau. La somme et le produit sont défini par :*

1. $(f + g)(e) = f(e) + g(e).$
2. $(f \cdot g)(e) = f(e) \cdot g(e).$

Les éléments neutres pour l'addition et la multiplication sont les fonctions constantes égale, l'une à 0, l'autre à 1.

Chapitre 2

Définition 15. *Dans un anneau, on dit que a divise b , noté $a|b$, s'il existe c tel que $ac = b$. Alors b s'appelle multiple de a et a un diviseur de b . Note, aucun rapport avec diviseur de 0.*

- Remarque 2.** 1. si a est inversible, a divise n'importe quel b , car $b = a(a^{-1}b)$
 2. si a divise b et si u est inversible, alors au divise aussi b , car $b = ac \Rightarrow b = (au)(u^{-1}c)$.

Définition 16. Deux éléments a et b de A , anneau commutatif, sont dits associés, s'il existe $u \in A$, u inversible, tel que $b = au$.

Proposition 23. Si A est intègre, alors a et b associés est une relation d'équivalence. On a

$$Aa = Ab \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ associés.}$$

Définition 17. Un élément non nul et non inversible d'un anneau commutatif intègre A est dit irréductible si et seulement si $\forall b, c \in A, a = bc \Rightarrow b$ ou c inversible.

Définition 18. Deux éléments a et b d'un anneau commutatif intègre A sont dits premiers entre eux si : $\forall x \in A, x$ divise a et x divise $b \Rightarrow x$ inversible.

Définition 19. Soient A un anneau intègre et $\sigma : A^* \rightarrow \mathbb{N}$ une application. L'anneau A est euclidien pour σ si :

1. pour tous $a, b \in A^*$ tel que a divise b , on a $\sigma(a) \leq \sigma(b)$.
2. pour tous $a \in A$ et $b \in A^*$, il existe q et $r \in A$ tel que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $\sigma(r) < \sigma(b)$.

L'application σ s'appelle parfois un stahme (ou une valuation).

Définition 20. Un anneau commutatif est dit principal si tout idéal est principal.

1. Un idéal d'un anneau commutatif A est dit principal s'il est de la forme Aa , $a \in A$.

Remarque 3. $Aa =$ ensemble des multiples de A .

Théorème 2. Tout anneau euclidien est principal.

Définition 21. Soit A un anneau commutatif intègre. Il est dit factoriel si :

1. Tout élément a de A , qui n'est ni nul ni inversible, est un produit d'éléments irréductibles.

$$a = p_1 \dots p_i$$

2. Si pour un élément de a $p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$, alors $m = n$ et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ ainsi que des éléments inversibles u_1, \dots, u_n tel que $p_i = u_i q_{\sigma(i)}$ pour tout i .

Définition 22. Un anneau commutatif A satisfait la condition de chaine ascendante si pour toute suite croissante d'idéaux

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

Il existe r tel que $I_s = I_r, \forall s \geq r$.

Lemme 1. Un anneau principal satisfait à la condition de chaine ascendante.

Lemme 2. Soit A un anneau principal intègre. Alors a, b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow \exists x, y \in A$ tel que $ax + by = 1$.

Lemme 3. Soit A un anneau commutatif intègre principal. Si $a \perp b$ et si a divise bc , alors a divise c .

Théorème 3. Soit A un anneau commutatif intègre. Si A est principal, A est factoriel.

Corollaire 6. \mathbb{Z} et $K[x]$ sont factoriels (K corps commutatif).

Théorème 4. Si A est un anneau factoriel, alors $A[x]$ est un anneau factoriel.

Corollaire 7. Si A est un anneau factoriel, alors $A[x_1, \dots, x_n]$ est un anneau factoriel.

Lemme 4. $A[x_1, \dots, x_n] \simeq B[x_n]$ où $B = A[x_1, \dots, x_{n-1}]$

Remarque 4. Le corollaire implique que $\mathbb{Z}[x]$ est factoriel. Les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[x]$ sont les $+p$ ou $-p$, p premier dans \mathbb{N} , et les polynômes $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, de degré ≥ 1 , qui sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$, et qui sont primitifs.

Remarque 5. On dit que $0 \neq P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ est primitif si $\text{pgcd}(a_n, \dots, a_0) = 1$

Définition 23. $A = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}$

$$N(a + bi) = a^2 + b^2.$$

On sait que $z \in A$ est inversible si et seulement si $N(z) = 1 \Leftrightarrow z = 1, -1, i, -i$.

Théorème 5. A est euclidien.

Corollaire 8. $\mathbb{Z}[i]$ est principal et factoriel.

Théorème 6. Soit p un nombre premier, $p \neq 2$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $p \equiv 1 \pmod{4}$
2. -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $p = a^2 + b^2$.
4. p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Corollaire 9. Les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont :

1. $1 + i$
2. les p premiers dans \mathbb{N} avec $p \equiv 3 \pmod{4}$.
3. les $a + bi$, $a - bi$ tel que $a^2 + b^2$ est premier dans \mathbb{N} et leurs associés.

De plus la décomposition $p = a^2 + b^2$ d'un nombre premier est unique.

Corollaire 10. Soit $n = \prod p^{n_p}$, pour p premiers distincts (voir chap 2 bis page 5). Alors n est somme de deux carré si et seulement si $\forall p \equiv 3 \pmod{4}$, on a n_p pair.

Note : À partir de maintenant on prend $A = \mathbb{Z}$ pour $A[x]$. C'est juste pour se simplifier la vie. Donc on parle ici de $\mathbb{Z}[x]$.

Définition 24. Un polynôme $p \in \mathbb{Z}[x]$ est dit primitif si le pgcd de ses coefficient est 1. Il est en particulier non nul.

Lemme de Gauss

Lemme 5. Si P et Q sont primitif, alors PQ aussi.

Définition 25. Le dénominateur commun d'une famille de nombre rationnel r_1, \dots, r_n est un $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $dr_1, \dots, dr_n \in \mathbb{Z}$

Définition 26. Le plus petit commun diviseur, appelé ppdc, est le plus petit d'entre eux.

Remarque 6. Vu que l'ensemble des dénominateurs communs des r_i forme un idéal de \mathbb{Z} , alors le ppdc des r_i les divise tous.

Lemme 6. Soient r_1, \dots, r_n des rationnels non nuls. Il existe un unique rationnel $c > 0$ tel que $r_1/c, \dots, r_n/c$ soient des entiers premiers entre eux. On a

$$c = \frac{1}{d} \text{pgcd}(dr_1, \dots, dr_n)$$

où d est le ppdc(r_1, \dots, r_n).

Remarque 7. $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow d = 1 \Leftrightarrow c \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $\text{pgcd}(r_i) = 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Définition 27. Étant donné $P \in \mathbb{Q}[x]$, non nul, on note $c(p)$ l'unique nombre rationnel > 0 tel que $P/c(p)$ soit dans $\mathbb{Z}[x]$ et soit primitif.

Lemme 7. $c(PQ) = c(P)c(Q)$

Remarque 8. Notons \overline{P} l'unique polynôme primitif tel que $P = c(P)\overline{P}$, où $P \in \mathbb{Q}[x]$ et $P \neq 0$. Nous avons donc $\forall P, Q \in \mathbb{Q}^*[x], \overline{P \cdot Q} = \overline{P} \cdot \overline{Q}$

Théorème 7. $\mathbb{Z}[x]$ est factoriel. Ses éléments irréductibles sont les polynômes de la forme

1. $P \in \mathbb{Z}[x]$ primitif irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.
2. $\pm \in \mathbb{Z}$, p nombre premier.

Théorème de Wedderburn

Théorème 8. Tout corps fini est commutatif.

Chapitre 3

Proposition 24. La caractéristique d'un corps fini est un nombre premier.

Proposition 25. Le centre d'un corps est un sous-corps.

Corollaire 11. Un corps fini contient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ son centre, où p est sa caractéristique.

Proposition 26. Soit K un corps et F un sous-corps commutatif. Alors K est un espace vectoriel sur F , de manière naturelle.

Corollaire 12. Soit K un corps fini de caractéristique p . Il existe alors n tel que $|K| = p^n$.

Théorème 9. Soit K un corps commutatif et $P(x) \in K[x]$. Il existe un sous-corps L de K tel que

$$1. \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L, P(x) = \lambda \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i), \lambda \in K.$$

2. L est engendré par K et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. De plus L est unique à isomorphisme près.

On appelle L le corps de rupture de $P(x)$.

Proposition 27. Si A est un anneau commutatif de caractéristique p première, et si $n \in \mathbb{N}$, alors $a \mapsto a^{p^n}$, $A \rightarrow A$, est un endomorphisme d'anneaux.

Corollaire 13. Si K est un corps commutatif fini à p^n éléments, alors $F : K \rightarrow K$, $a \mapsto a^p$ est un automorphisme de Frobenius. On a $F^n = \text{id}$, ou de manière équivalente, $a^{p^n} = a$, $\forall a \in K$.

Remarque 9. Si on prend $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on trouve que $a^p = a$: c'est le petit théorème de Fermat.

Corollaire 14. Soit K un corps commutatif à p^n éléments. Alors on a l'égalité des polynômes (à coefficients dans K)

$$x^{p^n} - x = \prod_{a \in K} (x - a)$$

(note voir exemple page 5 du chapitre 3).

Proposition 28. Soit K un corps commutatif et G un endomorphisme de K . Alors $L = \{a \in K \mid G(a) = a\}$ est un sous-corps de K .

Théorème 10. Pour tout nombre premier p , et tout entier $n \geq 1$, il existe un corps à p^n éléments, unique à isomorphisme près.

Théorème 11. Soit K un corps commutatif et U un sous-groupe fini de K^* . Alors U est cyclique.

Corollaire 15. Si K est un corps fini, K^* est cyclique. Un générateur de K^* s'appelle une racine primitive de K .

Corollaire 16. Un corps K est fini de cardinalité p^n si et seulement s'il existe un polynôme $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ de degré n , irréductible tel que $K \simeq \mathbb{F}_p[x]/(P(x))$, où $(P(x))$ désigne l'idéal de $\mathbb{F}_p[x]$ engendré par $P(x)$.

Proposition 29. $A = K[x]/(P(x))$ est un espace vectoriel sur K de dimension $n = \deg(P)$, avec base $1, x, \dots, x^{n-1} \bmod P$ (on suppose que K est un corps commutatif). L'anneau A est un corps $\Leftrightarrow P$ est irréductible.

Chapitre 4

Remarque 10. Soit $q = p^n$. On sait que \mathbb{F}_p est un sous-corps de \mathbb{F}_q . L'automorphisme de Frobenius $F : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ est défini par $F(a) = a^p$. On sait que $F^n = \text{id}$ dans \mathbb{F}_q ; c'est-à-dire

$$\forall a \in \mathbb{F}_q, a^{p^n} = a$$

On sait aussi que la dimension de \mathbb{F}_q sur \mathbb{F}_p est n .

Théorème 12. Soit $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, polynôme irréductible de degré n . Soit K un surcorps de \mathbb{F}_p , et $\alpha \in K$ tel que $P(\alpha) = 0$. Alors P a les n racines distinctes $\alpha^{(P^i)}$, $i = 0, \dots, n-1$.