*Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours d'analyse 3, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.*

**(Cours 2)**

**Définition 1.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *Un point $a \in E$ est dit adhérent à $A$ si tout voisinage de $a$ rencontre $A$.*
2. *On note $\bar{A}$ = l'ensemble des points adhérent à $A$.*
3. *Un point $x \in A$ est dit intérieur à $A$ s'il existe une boule ouverte centré en $x$ et contenue dans $A$.*
4. *On note $\mathring{A}$ = l'ensemble des points intérieurs de $A$.*

**Définition 2.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. $A$ est dense si tout point de $E$ est adhérent à $A$.*

**Théorème 1.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$.*
2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$.*

**(Cours 3)**

**Théorème 2.** *Soit $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ 2 espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application $f$ est continue sur $E$.*
2. *Pour tout ouvert $U$ de $F$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $E$.*
3. *Pour tout fermé $B$ de $F$, $f^{-1}(B)$ est un fermé de $E$.*

**(Cours 4)**
**<u>Théorème Bolzano-Weirstrass</u>**

**Théorème 3.** *Soit $E$ un espace métrique. Il y a équivalence entre :*

1. *L'espace $E$ est compact.*
2. *Toute suite de point de $E$ possède un point adhérent.*
3. *Toute suite de point de $E$ possède une sous-suite convergente dans $E$.*

**Remarque 1.** *Vu sur un site internet :*

*dans R et plus generalement dans un espace vectoriel norme de dimension finie : A compact <=>A fermé et borné*
*pour completer :*

*1.dans tout metrique : A compact => A ferme et borné avec reciproque fausse en général*

*2.dans un espace vectoriel normé E : sphere unite fermée compacte => E de dimension finie ( th de Riesz)*

**(Cours 5)**

**Proposition 1.** *(Premières propriétés des suites de Cauchy). Soit $(E, d)$ un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Toute suite extraite $(y_n)$ d'une suite de Cauchy $(x_n)$ est de Cauchy.*
4. *Si $(x_n)$ est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, alors $(x_n)$ est convergente.*

**Corollaire 1.** *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

**Théorème 4.** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|.\|_F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application linéaire $f$ est continue sur $E$ ;*
2. *$f$ est continue en 0 ;*
3. *$f$ est uniformément continue sur $E$ ;*
4. *$f$ est lipschitzienne ;*
5. *Il existe une constante $k > 0$, telle que $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, $\forall x \in E$.*

**Remarque 2.** *Si $E$ est un espace de Banach et $F \subset E$ et $F$ est fermé, alors $F$ est un espace de Banach.*

**Remarque 3.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé normé, on sait que $\bar{B}(0, 1)$ est compact, comme $S^1 \subset \bar{B}$ est fermé, alors $S^1$ est compact.*