Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours d'analyse 3, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.

(Cours 2)

Définition 1. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *Un point $a \in E$ est dit adhérent à A si tout voisinage de a rencontre A.*
2. *On note $\bar{A}$ = l'ensemble des points adhérent à A.*
3. *Un point $x \in A$ est dit intérieur à A s'il existe une boule ouverte centré en x et contenue dans A.*
4. *On note $\mathring{A}$ = l'ensemble des points intérieurs de A.*

Définition 2. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. A est dense si tout point de E est adhérent à A.*

Théorème 1. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*
2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*

(Cours 3)

Théorème 2. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) 2 espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est continue sur E.*
2. *Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.*
3. *Pour tout fermé B de F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.*

(Cours 4)
<u>Théorème Bolzano-Weirstrass</u>

Théorème 3. *Soit E un espace métrique. Il y a équivalence entre :*

1. *L'espace E est compact.*
2. *Toute suite de point de E possède un point adhérent.*
3. *Toute suite de point de E possède une sous-suite convergente dans E.*

Remarque 1. *Vu sur un site internet :*

dans R et plus generalement dans un espace vectoriel norme de dimension finie : A compact <=>A fermé et borné
pour completer :

1.dans tout metrique : A compact => A ferme et borné avec reciproque fausse en général

2.dans un espace vectoriel normé E : sphere unite fermée compacte => E de dimension finie (th de Riesz)

(Cours 5)

Proposition 1. *(Premières propriétés des suites de Cauchy). Soit (E, d) un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Toute suite extraite (y_n) d'une suite de Cauchy (x_n) est de Cauchy.*
4. *Si (x_n) est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, alors (x_n) est convergente.*

Corollaire 1. *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

Théorème 4. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|.\|_F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application linéaire f est continue sur E ;*
2. *f est continue en 0 ;*
3. *f est uniformément continue sur E ;*
4. *f est lipschitzienne ;*
5. *Il existe une constante $k > 0$, telle que $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, $\forall x \in E$.*

Remarque 2. *Si E est un espace de Banach et $F \subset E$ et F est fermé, alors F est un espace de Banach.*

Remarque 3. *Soit E un espace vectoriel normé normé, on sait que $\bar{B}(0, 1)$ est compact, comme $S^1 \subset \bar{B}$ est fermé, alors S^1 est compact.*

Remarque 4. *E est compact si et seulement si E est fermé et borné.*