*Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours de théorie des anneaux, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.*

## Chapitre 1

**Proposition 1.** *Soit $A$ un anneau. Alors l'ensemble $A^{n\times n}$ des matrices de tailles $n \times n$ sur $A$ est un anneau.*

**Proposition 2.** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un anneau.*

**Définition 1.** *Un sous-anneau $B$ de l'anneau $A$ est un sous-groupe additif de $A$ tel que :*

1. $\forall a, b \in B, ab \in B$
2. $1 \in B$

**Corollaire 1.** *L'intersection de tous les sous-anneaux de l'anneau $A$ est l'ensemble $\{n \cdot 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, avec la notation usuelles des groupes additifs.*

**Définition 2.** *Si $A$ est un anneau, on dit qu'un élément $a$ de $A$ est inversible s'il existe $b$ de $A$ tel que $ab = ba = 1$. Un tel élément $b$ est alors unique et est appelé inverse de $a$.*

**Définition 3.** *L'ensembles des éléments inversibles d'un anneau $A$ est noté $U(A)$.*

**Proposition 3.** *$U(A)$ est un groupe sous la multiplication.*

**Définition 4.** *Dans un anneau $A$ un diviseur de 0 est un élément de $a$ de $A$, tel que $a \neq 0$ et :*

1. $ab = 0$ *($a$ est un diviseur de 0 à gauche).*
2. $ba = 0$ *($a$ est un diviseur de 0 à droite).*

**Définition 5.** *Un anneau est dit intègre s'il n'a aucun diviseur de 0.*

**Proposition 4.** *Si $a, b, c \in A$, un anneau intègre. Alors $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$. De plus, si $a \neq 0$ et $ab = ac \Rightarrow b = c$ et $ba = ca \Rightarrow b = c$.*

**Proposition 5.** *Soient $A$,$B$ deux anneaux. L'ensemble $A \times B$ muni de l'addition*

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

*et de la multiplication*

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

*est un anneau, avec $0_{A\times B} = (0, 0)$ et l'élément neutre $1_{A\times B} = (1, 1)$. Il est commutatif si et seulement si $A$ et $B$ le sont aussi. L'anneau $A \times B$ n'est pas intègre.*

**Définition 6.** *On appelle $A \times B$ l'aneau produit de $A$ et $B$.*

**Proposition 6.** $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$

**Définition 7.** *Un homomorphisme d'anneau $f : A \longrightarrow B$ est une fonction tel que :*

1. *$f$ est un homomorphisme de groupes additifs.*
2. *$\forall a, b \in A$, $f(aa') = f(a)f(a')$.*
3. *$f(1_A) = 1_B$.*

**Définition 8.** *Un idéal dans un anneau $A$ est un sous-ensemble $I$ tel que :*

1. *$I$ est un sous-groupe additif.*
2. *$\forall a \in A$, $\forall x \in I$, $ax, xa \in I$.*

**Proposition 7.** *Le noyau d'un homomorphisme est un idéal.*

**Proposition 8.** *Soit $I$ un idéal d'un anneau $A$, tel que $I \neq A$. On construit le groupe additif $A/I$, quotient des groupes additifs $A$ et $I$. Alors $A/I$ est un anneau, tel que l'homomorphisme canonique de groupe $A \longrightarrow A/I$ est aussi un homomorphisme d'anneaux.*

**Définition 9.** *On appelle $A/I$ l'anneau quotient de $A$ par l'idéal $I$.*

**Théorème 1.** *Il est à la fin de la page 7(chapitre 1), il n'est pas copiable à cause d'une figure. À lire.*

**Corollaire 2.** *Si $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme d'anneau, on a toujours l'isomorphisme d'anneau $A/ker(f) \simeq f(a)$*

**Proposition 9.** *L'image et l'image réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau. L'image réciproque d'un idéal est un idéal. Si l'homomorphisme est surjectif, alors l'image d'un idéal est un idéal.*

**Proposition 10.** *$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si $m$ est premier.*

**Proposition 11.** *Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont les $n$ avec $n \perp m$.*