Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours de théorie des anneaux, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.

Chapitre 1

Proposition 1. *Soit A un anneau. Alors l'ensemble $A^{n\times n}$ des matrices de tailles $n \times n$ sur A est un anneau.*

Proposition 2. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau.*

Définition 1. *Un sous-anneau B de l'anneau A est un sous-groupe additif de A tel que :*

1. $\forall a, b \in B, ab \in B$
2. $1 \in B$

Corollaire 1. *L'intersection de tous les sous-anneaux de l'anneau A est l'ensemble $\{n \cdot 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, avec la notation usuelles des groupes additifs.*

Définition 2. *Si A est un anneau, on dit qu'un élément a de A est inversible s'il existe b de A tel que $ab = ba = 1$. Un tel élément b est alors unique et est appelé inverse de a.*

Définition 3. *L'ensembles des éléments inversibles d'un anneau A est noté $U(A)$.*

Proposition 3. *$U(A)$ est un groupe sous la multiplication.*

Définition 4. *Dans un anneau A un diviseur de 0 est un élément de a de A, tel que $a \neq 0$ et :*

1. *$ab = 0$ (a est un diviseur de 0 à gauche).*
2. *$ba = 0$ (a est un diviseur de 0 à droite).*

Définition 5. *Un anneau est dit intègre s'il n'a aucun diviseur de 0.*

Proposition 4. *Si $a, b, c \in A$, un anneau intègre. Alors $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$. De plus, si $a \neq 0$ et $ab = ac \Rightarrow b = c$ et $ba = ca \Rightarrow b = c$.*

Proposition 5. *Soient A,B deux anneaux. L'ensemble $A \times B$ muni de l'addition*

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

et de la multiplication

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

est un anneau, avec $0_{A\times B} = (0, 0)$ et l'élément neutre $1_{A\times B} = (1, 1)$. Il est commutatif si et seulement si A et B le sont aussi. L'anneau $A \times B$ n'est pas intègre.

Définition 6. *On appelle $A \times B$ l'aneau produit de A et B.*

Proposition 6. $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$

Définition 7. *Un homomorphisme d'anneau $f : A \longrightarrow B$ est une fonction tel que :*

1. f est un homomorphisme de groupes additifs.
2. $\forall a, b \in A$, $f(aa') = f(a)f(a')$.
3. $f(1_A) = 1_B$.

Définition 8. *Un idéal dans un anneau A est un sous-ensemble I tel que :*

1. I est un sous-groupe additif.
2. $\forall a \in A$, $\forall x \in I$, $ax, xa \in I$.

Proposition 7. *Le noyau d'un homomorphisme est un idéal.*

Proposition 8. *Soit I un idéal d'un anneau A, tel que $I \neq A$. On construit le groupe additif A/I, quotient des groupes additifs A et I. Alors A/I est un anneau, tel que l'homomorphisme canonique de groupe $A \longrightarrow A/I$ est aussi un homomorphisme d'anneaux.*

Définition 9. *On appelle A/I l'anneau quotient de A par l'idéal I.*

Théorème 1. *Il est à la fin de la page 7(chapitre 1), il n'est pas copiable à cause d'une figure. À lire.*

Corollaire 2. *Si $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme d'anneau, on a toujours l'isomorphisme d'anneau $A/ker(f) \simeq f(a)$*

Proposition 9. *L'image et l'image réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau. L'image réciproque d'un idéal est un idéal. Si l'homomorphisme est surjectif, alors l'image d'un idéal est un idéal.*

Proposition 10. *$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si m est premier.*

Proposition 11. *Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont les n avec $n \perp m$.*

Corollaire 3. *$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est en bijection avec $\{n | 0 \leqslant n \leqslant m-1, n \perp m\}$. En particulier $|U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = \varphi(m)$.*

Rappel 1. *$\varphi(m) = |\{n | 0 \leqslant n \leqslant m-1\}$. φ est appelé l'indicateur d'Euler, ou fonction d'Euler.*

Proposition 12. *Si m, p sont premier entre eux, alors $\varphi(mp) = \varphi(m)\varphi(p)$.*

Corollaire 4. *Si $m = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, p_i premiers distincts, alors*

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{m_i} - p_i^{m_{i-1}})$$

$$= m \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Définition 10. *La caractéristique d'un anneau A est l'ordre pour la loi additive de l'élément neutre de la loi multiplicative. Par exemple, la caractéristique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est n, car $n \cdot 1 = 0 \bmod n$*

Proposition 13. *Si la caractéristique d'un anneau intègre n'est pas nulle, c'est un nombre premier.*

Proposition 14. *Si A est un anneau commutatif de caractéristique p, un nombre premier, alors l'application $F : A \to A$, $x \mapsto x^p$, est un homomorphisme d'anneaux. On l'appelle l'homomorphisme de Frobenius.*

Définition 11. *Un corps est un anneau où tout élément non nul est inversible.*

Proposition 15. *Un corps est intègre.*

Définition 12. *Un sous-corps d'un corps est un sous-anneau qui contient l'inverse de chaque éléments non nuls qu'il contient.*

Remarque 1. *Un sous-corps est un corps.*

Proposition 16. *L'anneau commutatif A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et A.*

Proposition 17. *p est premiers si et seulement si $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.*

Définition 13. *Un idéal $I \neq A$ d'un anneau commutatif A est dit maximal si : $\forall J$ idéal de A, $I \subseteq J \subseteq A$, on a $J = I$ ou $J = A$.*

Proposition 18. *Soit A un anneau commutatif et I un idéal. Alors I est maximal si et seulement si A/I est un corps.*

Corollaire 5. *Les idéaux (ou sous-groupes) maximaux de $\mathbb{Z}$ sont les $p\mathbb{Z}$, p premier.*

Proposition 19. *Si un corps K est de caractéristique non nulle, celle-ci étant un nombre premier, et K contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, à savoir son sous-corps premier.*

Proposition 20. *Soit K un corps et A un anneau). Si $f : K \to A$ est un homomorphisme d'anneaux, alors f est injectif.*

Proposition 21. *L'ensemble $\{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ dont les élément inversible sont $\{-1, 1, -i, i\}$*

Proposition 22. *Soit E et A un anneau. L'ensemble A^E des fonctions de E dans A est un anneau. La somme et le produit sont défini par :*

1. $(f + g)(e) = f(e) + g(e)$.
2. $(f \cdot g)(e) = f(e) \cdot g(e)$.

Les éléments neutres pour l'addition et la multiplication sont les fonctions constantes égale, l'une à 0, l'autre à 1.

Chapitre 1

Définition 14. *Dans un anneau, on dit que a divise b, noté $a|b$, s'il existe c tel que $ac = b$. Alors b s'appelle multiple de a et a un diviseur de b. Note, aucun rapport avec diviseur de 0.*

Remarque 2. *1. si a est inversible, a divise n'importe quel b, car $b = a(a^{-1}b)$*

2. *si a divise b et si u est inversible, alors au divise aussi b, car $b = ac \Rightarrow b = (au)(u^{-1}c)$.*

Définition 15. *Deux éléments a et b de A, anneau commutatif, sont dits associés, s'il existe $u \in A$, u inversible, tel que $b = au$.*

Proposition 23. *Si A est intègre, alors a et b associés est une relation d'équivalence. On a*

$$Aa = Ab \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ associés.}$$