*Note de l'auteur, c'est un résumé des notes de cours d'analyse 3, pas tous les théorèmes, définitions, et autres y sont écrites, seules celles que je veux retenir et qui ne sont pas évidentes.*

**(Cours 2)**

**Définition 1.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *Un point $a \in E$ est dit adhérent à $A$ si tout voisinage de $a$ rencontre $A$.*
2. *On note $\bar{A} =$ l'ensemble des points adhérent à $A$.*
3. *Un point $x \in A$ est dit intérieur à $A$ s'il existe une boule ouverte centré en $x$ et contenue dans $A$.*
4. *On note $\mathring{A} =$ l'ensemble des points intérieurs de $A$.*

**Définition 2.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. $A$ est dense si tout point de $E$ est adhérent à $A$.*

**Théorème 1.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$.*
2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$.*

**(Cours 3)**

**Théorème 2.** *Soit $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ 2 espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application $f$ est continue sur $E$.*
2. *Pour tout ouvert $U$ de $F$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $E$.*
3. *Pour tout fermé $B$ de $F$, $f^{-1}(B)$ est un fermé de $E$.*

**(Cours 4)**

**Définition 3.** *Soit $(E, d)$ et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouvert de $E$. On dit que la famille $(U_i)_{i \in I}$ est un <u>recouvrement</u> ouvert de $E$, si $E = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. On appelle un <u>sous-recouvrement</u> une sous-famille $(U_i)_{i \in J}$, avec $J \subset I$ fini et $E = \bigcup\limits_{i \in J} U_i$.*

**Définition 4.** *On dit que $(E, d)$ est un espace métrique <u>compact</u> si tout recouvrement ouvert de $E$ contient un sous-recouvrement fini.*

**Remarque 1.** *$(E, d)$ compact $\Leftrightarrow \forall (U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouvert tel que $E = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, $\exists J \subset I$ fini vérifiant $E = \bigcup\limits_{i \in J}$*
*$\Leftrightarrow$ De tout recouvrement ouvert de $E$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

**Remarque 2.** *On peut définir les espaces métriques compacts en utilisant les fermés.*

**Théorème 3.** *$(E, d)$ est un compact si et seulement si toutes familles de fermés non vides, qui est stables par intersection finie, possède une intersection non vide.*

**Définition 5.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $K \subset E$ une partie non vide de $E$. On dit que $K$ est compact si et seulement si $(K, d_K)$ est un espace métrique compact, avec $d_K$ est la restriction de la distance $d$ à $K$.*

**Théorème 4.** *Si $(E, d)$ un espace métrique, $K \subset E$ compact et $F \subset K$ un fermé, alors $F$ est compact.*

**Propriétés 1.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique.*

1. *Si $K_1$ et $K_2$ sont 2 compacts de $E$, alors $K_1 \bigcup K_2$ est aussi un compact de $E$.*
2. *Si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille de compacts de $E$ et $\bigcap\limits_{i \in I} K_i \neq \emptyset$, alors $\bigcap\limits_{i \in I} K_i$ est un compact de $E$.*

**Théorème 5.** *Soit $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si $K \subset E$ compact, alors $f(K)$ est un compact de $F$. En particulier, si $E$ est compact et $f$ surjective, alors $F$ est compact.*

**Corollaire 1.** *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application continue bijective et $E$ un espace métrique compact, alors $f$ est un homéomorphisme.*

**<u>Théorème Bolzano-Weirstrass</u>**

**Théorème 6.** *Soit $E$ un espace métrique. Il y a équivalence entre :*

1. *L'espace $E$ est compact.*
2. *Toute suite de point de $E$ possède un point adhérent.*
3. *Toute suite de point de $E$ possède une sous-suite convergente dans $E$.*

**Rappel 1.** *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $E$. Le nombre $\rho > 0$ est dit <u>nombre de Lebesgue</u> du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ si $\forall x \in E$, $B(x, \rho)$ est contenue dans certain $U_i$.*

**Lemme 1.** *Soit $E$ un espace métrique. Si toute suite de points de $E$ possède une valeur d'adhérence, alors tout recouvrement ouvert de $E$ admet un nombre de Lebesgue*

**Rappel 2.** *Le diamètre :*

$$\delta(E) := \sup_{x \in E, y \in E} d(x, y)$$

**Théorème 7.** *Si $E$ est un espace métrique compact, alors il est de diamètre fini.*

**Théorème 8.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite de point de $(E, d)$ . Si $(x_n)_n$ possède une seule valeur d'adhérence, alors $(x_n)_n$ est convergente*

**Définition 6.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que $E$ est précompact si, $\forall \epsilon > 0$, il existe un recouvrement de $E$ par un nombre fini de parties de diamètre inférieur à $\epsilon$.*

**Remarque 3.** *On peut montrer l'équivalence suivante :*

1. *$E$ est précompacte.*
2. *$\forall \epsilon > 0$, on peut recouvrir $E$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\epsilon$.*

**Théorème 9.** *Tout espace métrique compact est précompact.*

**Remarque 4.** *La réciproque est fausse, on verra plus tard qu'un espace métrique est compacte si et seulement si il est précompact et complet.*

**Définition 7.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit qu'il est séparable si et seulement si il existe $B \subset E$ une partie de $E$ qui est dénombrable et dense dans $E$. C'est-à-dire $\bar{B} = E$, avec $B \subset E$ dénombrable.*

**Théorème 10.** *Tout espace métrique compact est séparable*

**Théorème 11.** *Si $E$ et $F$ sont des espaces métriques compacts, alors le produit $E \times F$ est compact.*

**Théorème 12.** *Le produit d'une famille d'espaces métriques compacts est compact.*

**(Cours 5)**
(Suite de Cauchy)

**Définition 8.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset E$ est dite de Cauchy si :*
$\forall \epsilon > 0$ , $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n$, $m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$.

**Remarque 5.** *$(x_n)$ est de cauchy $\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow \infty$*
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} diam(P_n) = 0$ *où* $P_n = \{x_k; k \geq n\}$.

**Proposition 1.** *(Premières propriétés des suites de Cauchy). Soit $(E, d)$ un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Toute suite extraite $(y_n)$ d'une suite de Cauchy $(x_n)$ est de Cauchy.*
4. *Si $(x_n)$ est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, alors $(x_n)$ est convergente.*

**Corollaire 2.** *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

**Remarque 6.** *Souvent, pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente, on montre qu'elle possède une valeur d'adhérence.*

**Définition 9.** *Un espace métrique $(E, d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de $(E, d)$ est convergente dans $(E, d)$ .*

**Remarque 7.**
1. *La notion d'espace complet n'est pas topologique, c'est-à-dire que la notion n'est pas invariante par homéomorphisme. En effet $\mathbb{R}$ et $]-1, 1[$ sont homéomorphe, mais $\mathbb{R}$ est complet et $]-1, 1[$ ne l'est pas.*
2. *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $F \subset E$. $F$ est complet si l'espace métrique $(F, d_F)$ est complet, où $d_F$ est la métrique induite par $d$ sur $F$, c'est-à-dire $d = d|_F$ .Dans la suite, on note $d$ pour $d_F$ : la restriction de $d$ à $F$.*

**Théorème 13.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $F \subset E$. Alors $(F, d_F)$ est complet si et seulement si $F$ est fermé de $E$.*

**Remarque 8.** *$]0,1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas complet, car $]0,1[$ n'est pas fermé. De même, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas complet, donc $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$*

**Proposition 2.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique et $F \subset E$. Alors si $F$ est complet, alors $F$ est fermé.*

**Théorème 14.** *Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

**Corollaire 3.** *$(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est complet, $\forall n \geq 1$.*

**Théorème 15.** *Un espace métrique $(E,d)$ est compact si et seulement si il est précompact et complet*

**<u>Théorème de Cantor</u>**

**Théorème 16.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique. Alors $(E,d)$ est complet si et seulement si pour toute suite $(F_n)$ d'ensembles fermés non vides tels que*

1. *$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \ldots F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ (on dit que $(F_n)$ est décroissante),*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ ($diam(F_n)$ = diamètre de $F_n$)*

*On a l'intersection des $(F_n)$ qui contient un et un seul point.*

**<u>Théorème de Baire</u>**

**Théorème 17.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique complet et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts dense dans $E$ ($\bar{\theta_n} = E$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \theta_n$ est aussi dense dans $E$.*

**Corollaire 4.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique complet et $(F_n)$ une suite de fermés d'intérieur vide ($\mathring{F_n} = \emptyset$, $\forall n \geq 1$). Alors $\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide.*

**Corollaire 5.** *Soit $(E,d)$ un espacae métrique complet et $(F_n)$ une suite de fermés telle que $E = \bigcup\limits_{n} F_n$. Alors il existe $n_0 \in (N)$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$.*

**Théorème 18.** *Si $f$ est une fonction continue du compact $K$ dans $\mathbb{R}$, alors $f$ est bornée sur $K$ et atteint sur $K$ sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

**<u>Théorème de Heine</u>**

**Théorème 19.** *Soit $(E,d_E)$ un espace métrique compact, $(F,d_F)$ un espace métrique et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. ALors $f$ est <u>uniformément</u> continue.*

**Définition 10.** *Soit $(E,d_E)$ et $(F,d_F)$ deux espaces métrique et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que $F$ est une<u>contraction</u> (ou une application contractante) s'il existe une constante $k$ : $0 < k < 1$ vérifiant :*

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x,y), \forall x,y \in E$$

**<u>Théorème deu point fixe de Banach</u>**

**Théorème 20.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique <u>complet</u> et $f : E \longrightarrow E$ une <u>contraction</u>. Alors il existe un unique point fixe de $f$, c'est-à-dire il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$.*

**(Cours 6)**

**Remarque 9.** *Soit* $(K,d)$ *un espace métrique compact et* $(E,d)$ *un espace métrique complet. On note* $\varphi(K,E)$ *l'ensemble des fonctions continues de* $K$ *dans* $E$. *On définit l'application* $d$ *sur* $C(K,E)$ *:*

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

*Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point de* $K$.

**Théorème 21.** *L'application* $d$ *définit une distance sur* $C(K,E)$ *appelée distance de la convergence uniforme.*

**Théorème 22.** *Si* $K$ *est compact et* $E$ *complet, alors* $C(K,E)$ *muni de la distance de convergence uniforme est complet.*

**Remarque 10.** *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions continues* ($f_n \in C(K,E)$)*, et si* $(f_n)_n$ *converge vers* $f$ *pour la distance de la convergence uniforme, alors la limite de* $f$ *est continue. Inversement, si* $(f_n)_n$ *converge simplement et si* $f$ *est continue, la convergence n'est pas nécessairement uniforme.*

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

**(Cours 8)**

**Corollaire 6.** *Toutes les normes sur un espace vectoriel normé sont équivalentes. Et elles sont topologiquement équivalentes. (Voir théorème 3.1 et corollaire 3.3).*

**Théorème 23.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $E$. Alors l'application*

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$

*est une homéomorphisme.*

**Corollaire 7.** *Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé*

**Théorème 24.** *Si $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors la boule unité fermé $\bar{B}(0,1)$ est compacte.*

**Théorème 25.** *Si $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $K \subset E$ est compact de $E$ si et seulement si $K$ est fermé borné.*

(Théorème de Riez

**Théorème 26.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé . Si la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$ est compacte, alors $E$ est de dimension finie.*

' En fait, s'il existe une boule fermée et compacte, alors l'espace $E$ est de dimension finie. Suite de la remarque cours 8 page 3 du pdf.
Théorème de Hahn-Banach

**Théorème 27.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé , $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. Alors il existe un point $v \in F$ tel que :*

$$d(x, F) = \|x - v\|$$

**Théorème 28.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors Si $F$ est de dimension finie, alors $F$ est fermé.*

Notation : Si $\bar{x} \in E/F$, alors $\|\bar{x}\| := inf\|y\|$, pour $y \in \bar{x}$ (pour y est en dessous du inf..., voir page 5 cours 8)

**Théorème 29.** *L'application $\bar{x} \in E/F \mapsto \|\bar{x}\| = inf\|y\|$ définit une norme sur $E/F$ pour laquelle l'application ... trop long à écrire, voir thm 4.3*

**Théorème 30.** *Soit $E$ et $F$ 2 espace vectoriel normé et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de rang fini. ALors $f$ est continue sur $E$ si et seulement si son noyau est fermé dans $E$.*

Théorème de Hahn-Banach

**Théorème 31.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $H \subset E$ un sous-espace vectoriel et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur $H$. Alors il existe une forme linéaire continue $F$ définie sur $E$ qui prolonge $f$ et de même norme c-a-d $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue*

$$F(x) = f(x), \;\; \forall x \in H$$

$$\|F\| = \|f\|$$

**(Cours 9)**

**Corollaire 8.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. ALors $E^1 \neq \emptyset$. De plus si $x_0 \in E$ non nul, alors il existe une forme linéaire continue $f_0$ tel que $f_0(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f_0\| = 1$*

**Corollaire 9.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé . Alors l'application ... dur a écrire voir coro 4.7 page 3 cours 9.*

**Définition 11.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé .*

1. *Un hyperplan de $E$ est un ensemble de la forme :*

$$H = \{x \in E | f(x) = \alpha\}$$

   *où $f \in E^*$ non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ ($f$ n'est pas nécessairement continue). On dit que $H$ est d'équation $f(x) = \alpha$.*

2. *L'hyperplan $H$ est fermé si et seulement si $f$ est continue.*

3. *Une partie $C \subset E$ est dite convexe si et seulement si $\forall x, y \in C$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda + \mu = 1$), on a $\lambda x + \mu y \in C$ avec (pas sure du reste)*