**MAT3510**

Semaine 1

**Rappel 1.** *Sur la convergence uniforme.*

**Définition 1.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'une suite de fonction $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformémrent vers $f : E \longrightarrow R$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in E$$

*Dans ce cas, on écrit que $f_n \rightrightarrows f$.*

**Théorème 1.** *Si $\{f_n\}$ est une suite de fonction intégrables (au sens de Riemann) sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que $f_n \rightrightarrows f$, alors*

$$F_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

**Théorème 2.** *Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions sur continue sur $E \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f_n \rightrightarrows f$, alors $f$ est une fonction continue.*

**Avertissement :** Si $f_n \rightrightarrows f$ et $f_n$ est différentiable $\forall n$, alors on n'a pas nécessairement $f_n' \to f'$

**Théorème 3.** *Si $\{f_n\}$ est une suite de fontion sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\{f_n\}$ converge ponctuellement vers $f$. Supposons que les $f_n$ sont différentiables et que $f_n'$ est intégrable au sens de Riemann avec $f_n' \rightrightarrows g$. Alors $f$ est différentiable avec $f' \rightrightarrows g$ et $f_n \rightrightarrows f$.*

**Définition 2.** *Une fonction $f : E \longrightarrow R$ (où $E \subset \mathbb{R}$) est uniformément continue si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in E$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

**Théorème 4.** *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fontion continue, alors $f$ est continue.*

**Définition 3.** *On dénote par $C'(E)$ l'ensemble des fontions $f : E \longrightarrow R$ avec $E \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f$ est continue et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $E$ pour $i = 1, \ldots, n$. où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$*

**Théorème 5.** *Si $f \in C'([a, b]_x \times [c, d]_t)$, alors la fonction $t \mapsto \int_a^b f(x, t)dx$ est différentiable avec $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(x, t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx$*