2

[Processus de Poisson]

2 Le processus de Poisson

Vous pourrez consulter les livre de Ross (chapitre 5) et de Taylor Karlin (chapitre V) pour plus de détails ce chapitre.

Les chaînes de Markov que nous avons vu jusqu'ici nous permettent de modéliser des phénomènes aléatoires ou les changements d'états se produisent à des temps fixes. Elles nous permettent de modéliser beaucoup de contextes, mais ne sont pas suffisantes pour décrire tous les phénomènes. Le processus de Poisson est un processus stochastique à temps continu; en fait, c'est un cas particulier des chaînes de Markov à temps continu. La distribution exponentielle jouant un rôle important dans ces processus, nous allons commencer par étudier celle-ci.

2.1 Les distributions exponentielle et de Poisson

2.1.1 La distribution exponentielle

La distribution exponentielle est souvent utilisé pour décrire des durées de vie. Elle joue une importance majeure dans les processus de Poisson. Une variable aléatoire X exponentielle suit une distribution exponentielle avec paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On utilisera souvent $P[X > x]$, que l'on notera $\bar{F}(x)$, qui est dans ce cas $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$. La démonstration en annexe montre que l'espérance d'une loi $Exp(\lambda)$ est $\frac{1}{\lambda}$ et sa variance $\frac{1}{\lambda^2}$.

P1 ⊟ **Distribution Exponentielle** Une variable aléatoire X suit une distribution exponentielle de paramètre λ, noté $X \sim Exp(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{de plus} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

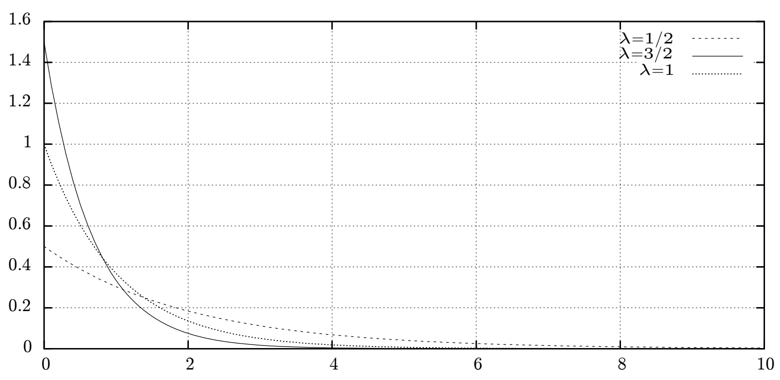


Figure 2.1 Exemples de distribution exponentielle, de paramètres $\lambda = 1/2, 1, 3/2$.

La distribution exponentielle est *sans-mémoire*.[1] Si la durée de vie d'un objet est distribuée exponentiellement, alors cet objet ayant été utilisé x heures est aussi ``bon'' qu'un objet neuf quant au temps qu'il lui reste à fonctionner, c'est-à-dire sa vie résiduelle. La distribution exponentielle est la seule distribution continue positive ayant cette propriété.

D1 ⊠ *Une variable aléatoire X est sans mémoire si:*

$$P[X > s + t | X > t] = P[X > s], \quad \forall s, t \geq 0.$$

Montrons que la distribution exponentielle est sans mémoire.

P2 ⊟ La distribution Exponentielle est sans mémoire.

Remarquons qu'il existe une distribution discrète sans mémoire: la distribution géométrique (voir section 2.5.1 page 43).

Remarquons tout d'abord, que si Z si une distribution géométrique de paramètre p, alors

$$P[Z = k] = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, ...$$

Ensuite, évaluons $P[Z > t]$:

[1] *(memoryless)*

$$
\begin{aligned}
P[Z > t] &= \sum_{j=t+1}^{\infty} (1-p)^{j-1} p \\
&= p\left[(1-p)^t + (1-p)^{t+1} + (1-p)^{t+2} \cdots\right] \\
&= p(1-p)^t \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \\
&= \frac{p(1-p)^t}{p} = (1-p)^t.
\end{aligned}
$$

Voyons si la distribution géométrique est sans mémoire:

$$
\begin{aligned}
P[Z > s+t \mid Z > s] &= \frac{P[Z > s+t \cap Z > s]}{P[Z>s]} \\
&= \frac{P[Z > s+t]}{P[Z>s]} \quad t \text{ positif} \\
&= \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} \quad t \text{ positif} \\
&= (1-p)^t = P[Z > t].
\end{aligned}
$$

Donc la distribution géométrique est sans mémoire (c'est d'ailleurs la seule distribution discrète sans mémoire).

Si X est la durée de vie d'un outil par exemple, alors la probabilité que l'outil fonctionne pour au moins $s+t$ heures sachant qu'il a fonctionné t heures est la même que la probabilité initiale qu'il fonctionne pour au moins s heures. L'outil ``ne se souvient'' pas qu'il a déjà été utilisé t heures.

■ Exemple 1 ■

Supposons que le temps passé au guichet d'une banque soit distribué exponentiellement avec espérance de 30 minutes, c'est-à-dire $\lambda = 1/30$.

(a) Quelle est la probabilité qu'un client passe plus de 15 minutes au comptoir ?

▷

(b) Quelle est la probabilité que le client passe plus de 30 minutes sachant qu'il est la depuis 10 minutes ?

▷

■ Exemple 2 ■

Considérons un bureau de poste ou deux employés servent les clients. Quand Mr C. entre dans le bureau de poste il voit que Mr. A. est servi par un des deux employés et que Mde B. est servie par l'autre employé. Mr C. sera servi aussitôt que Mr. A. ou Mde B. auront quittés. Si le temps que passe un employé à servir un client est $Exp(\lambda)$, quelle est la probabilité que des trois clients, ce soit Mr C. qui soit le dernier à quitter le bureau de poste ?

▷ Considérons le moment ou Mr C. commence à être servi. À ce moment, Mr. A. ou Mde B. aura quitté, et celui qui n'as pas quitté sera toujours en train d'être servi. Mais par le manque de mémoire de la distribution exponentielle, le temps que cela prendra avant que celui qui reste ait fini d'être servi (Mr. A. ou Mde B.) est encore distribué de façon exponentielle d'espérance $1/\lambda$, c'est-à-dire comme s'il venait d'arriver au comptoir. Ainsi, la probabilité qu'il finisse avant Mr. C. est par symétrie

Il est important de noter que la *seule* distribution possédant la propriété du manque de mémoire est la distribution exponentielle. C'est pourquoi cette distribution est très utilisée. On a vu que

$$P[X > s+t] = P[X > s]P[X > t] \quad \text{c'est-à-dire} \quad \bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Donc $\bar{F}(x)$ satisfait l'équation

$$g(s+t) = g(s)g(t),$$

et la seule fonction monotone décroissante continue à droite qui est solution de cette équation est

$$g(x) = e^{-\lambda x};$$

donc $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ et donc $F(x) = 1 - \bar{F}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ce qui montre que la seule distribution possédant la propriété sans-mémoire est la distribution exponentielle.

■ Exemple 3 ■

Supposons que la durée de vie d'une ampoule électrique suit une distribution exponentielle d'espérance 10 heures. Supposons qu'une personne entre dans une pièce sans fenêtre ou une telle ampoule est en fonction, et que cette personne désire travailler 5 heures. Quelle est la probabilité qu'elle soit capable de compléter son travail avant que l'ampoule ne brûle ?

▷ Par la propriété sans-mémoire de la distribution exponentielle, la durée de vie de l'ampoule quand la personne entre dans la pièce est $Exp(1/10)$, donc, si Z dénote la durée de vie résiduelle de l'ampoule, c'est-à-dire la durée de vie restante, alors

$$P[Z > 5] = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-5\frac{1}{10}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Notons que si la durée de vie de l'ampoule n'était pas exponentielle, alors la probabilité cherchée serait

$$P[\text{durée de vie } > t+5 \mid \text{durée de vie } > t] = \frac{1-F(t+5)}{1-F(t)},$$

où t est le temps que l'ampoule a été utilisée quand la personne entre dans la pièce. Notez que dans le cas non exponentiel, cette probabilité dépend de t, ce qui n'est pas le cas si la durée de vie est exponentielle.

2.1.2 Taux de panne

Ross p 276, Karlin, p36

Considérons une variable aléatoire continue positive ayant fonction de densité f et fonction de répartition F. Le taux de panne est défini comme:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

Supposons que la durée de vie d'un objet soit X et que cet objet a déjà t heures de service. On cherche la probabilité qu'il ne survive pas un temps supplémentaire dt, c'est-à-dire

$$P[X \in (t, t+dt) \mid X > t] =$$

$$=$$

$$\approx$$

Un objet ayant fonctionné jusqu'au temps t va donc tomber en panne dans l'intervalle $t+dt$ avec probabilité (conditionnelle) $r(t)dt$.

Supposons maintenant que la durée de vie de l'objet soit exponentielle de paramètre λ; de par la propriété du manque de mémoire de l'exponentielle, la durée de vie résiduelle de l'objet âgé de t devrait être la même qu'un objet neuf, donc le taux de panne $r(t)$ devrait être constant. Ainsi,

ce qui confirme nos intuitions. De plus le taux de panne $r(t)$ détermine de façon unique la distribution F. Supposons que f est continue partout, et montrons que:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t r(x)\ dx\right].$$

Notons que:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{F(t)'}{1-F(t)} = -\left[\log \bar{F}(t)\right]'.$$

$$\text{donc} \quad \log \bar{F}(t) = -\int_0^t r(x)\ dx + k, \quad \text{alors} \quad \bar{F}(t) = c\exp\left[-\int_0^t r(x)\ dx\right]$$

mais $\bar{F}(0) = 1$, alors pour $t = 0$, on doit avoir $c = 1$, et on trouve le résultat. Enfin, cette expression permet de montrer que seule la distribution exponentielle est sans-mémoire. En effet, si X est sans-mémoire, alors $r(t)$ doit être une constante, disons c, et l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp\left[-\int_0^t c\ dx\right] \\ \Leftrightarrow 1 - F(t) &= \exp\left[-c\,[x]_0^t\right] \\ \Leftrightarrow 1 - F(t) &= \exp\left[-ct\right], \end{aligned}$$

ce qui montre que la variable X est exponentielle.

2.1.3 Somme d'exponentielles iid

P3 ▬ Somme d'Exponentielles i.i.d. ▬ Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$. La somme $Y = X_1 + ... + X_n$ a une distribution Gamma de paramètres n et λ, et on a:

$$E[Y] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[Y] = n/\lambda^2.$$

$$\text{On a } f_Y(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad \text{si } t \geq 0,$$

pour $\lambda > 0$, $n > 0$. Notons que $\Gamma(n) = (n-1)!$, et que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\ dx$.

■ Preuve ■

2.1.4 Probabilité du minimum de deux exponentielles

Déterminons la probabilité qu'une variable aléatoire exponentielle soit plus petite qu'une autre. Supposons X_1 et X_2 indépendantes de distribution exponentielle et de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On cherche $P(X_1 < X_2)$.

Prenez note que ce résultat nous sera très utile dans les chaînes de Markov à temps continu.

■ Exemple 4 ■

Supposons qu'un téléphone mobile est composé de deux parties indépendantes: un écran, dont la durée de vie suit une loi exponentielle d'espérance 1000, et le reste de l'appareil, dont la durée de vie suit une distribution exponentielle d'espérance 500 heures. Quelle est la probabilité qu'une panne du téléphone soit causée par un bris de l'écran ?

▷

2.1.5 Loi du minimum d'exponentielles

Supposons $X_1, X_2, ...X_n$ des variables aléatoires de distribution exponentielles de paramètres λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Le minimum des X_i est une variable exponentielle de paramètres $\sum_i \lambda_i$:

Une conséquence du résultat précédent est obtenue en considérant la probabilité qu'une variable aléatoire X_i soit plus petite que n autres. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires exponentielles de taux $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Alors:

2.1.6 Convolutions d'exponentielles

Soit X_i $(i = 1, ..., n)$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de taux respectif λ_i $(i = 1, ..., n)$ et supposons que pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. La variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est dite une variable aléatoire *hypoexponentielle*. Pour $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t f_{X_1}(s) f_{X_2}(t-s)\ ds \\
&= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}\ \lambda_2 e^{-\lambda_2 (t-s)}\ ds \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s}\ ds \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s} \right]_0^t \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.
\end{aligned}
$$

Pour $n = 3$, on trouve de façon similaire:

$$f_{X_1+X_2+X_3}(t) = \sum_{i=1}^{3} \left[\lambda_i e^{-\lambda_i t} \left(\prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \right],$$

et on pourrait démontrer par récurrence que:

$$f_{X_1+X_2\cdots+X_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,n} \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad \text{où} \quad C_{i,n} = \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Notons que la distribution a n paramètres. À titre d'exemple, vérifions la formule pour $n = 2$. On a:

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2} &= \sum_{i=1}^{2} C_{i,2} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \\ &= C_{1,2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_{2,2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

■ Exemple 5 ■

Considérons un système à deux serveurs, dans lequel un client est servi par un des deux serveurs puis sort du système. Le temps de service du serveur i suit une distribution exponentielle de taux μ_i ($i = 1, 2$). Quand vous arrivez, vous trouvez le serveur 1 occupé (client A), et un autre client au serveur 2 (client B).

Combien de temps (en moyenne) allez-vous restez dans le système ?

[Suite / variante] Maintenant si on a n serveurs tel que $\mu_i = \mu \ \forall i = 1, ..., n$; on entre dans le bureau et tous les guichets sont occupés ! Quel votre temps moyen de service si le nombre de guichets n tends vers l'infini ?

■ Exemple 6 ■

[Ross, chap 5, ex 20] Considérons un système à deux serveurs, dans lequel un client est servi d'abord par le serveur 1, puis par le serveur 2, et enfin sort du système. Le temps de service du serveur i suit une distribution exponentielle de taux μ_i $(i = 1, 2)$. Quand vous arrivez, vous trouvez le serveur 1 libre, et deux clients au serveur 2: le client A est en train d'être servi, et le client B attends son tour.

a. *Trouvez P_A, la probabilité que A soit encore en train d'être servi quand vous avez fini d'être servi par le premier serveur.*
b. *Trouvez P_B, la probabilité que B soit encore dans le système quand vous avez fini d'être servi par le premier serveur.*
c. *Trouvez $E[T]$, le temps moyen que vous passerez dans le système.*

▷

2.1.7 La distribution de Poisson

Ross, p32.
Karlin p267

Une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots$ suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si:

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Siméon Poisson
1781–1840

On a:

$$E[X] = \lambda, \qquad Var[X] = \lambda.$$

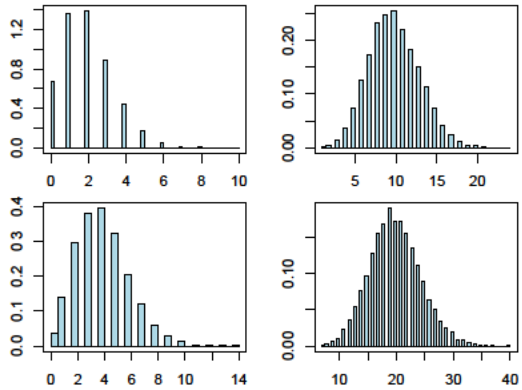


Figure 2.2 Exemples de distribution de Poisson, de paramètres $\lambda = 2, 10, 4, 20$.

P4 ⊟ **Somme de Poisson** Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement, alors la somme $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Notons que la distribution de Poisson peut être utilisée pour approximer une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, quand n est grand et p petit. Soit $X \sim Bin(n, p)$, et $\lambda = np$. Alors si $n \to \infty$, et $\lambda = np$ est constant:

$$P[X = i] \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Karlin, p279 C'est la *loi des évènements rare*[2]. Cette loi stipule que si un évènement peut se produire dans un grand nombre de possibilités, mais que la probabilité que l'évènement se produise à chaque possibilité est petit, alors le nombre total suit approximativement une loi de Poisson. Montrons-le:

[2] *(law of rare events)*

$$\begin{aligned} P[X=k] &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

■ Exemple 7 ■

Supposons que des naissances se produisent de telle sorte que la probabilité qu'une naissance survienne dans une période d'une minute est de 0.0305. Calculez, en utilisant la loi binomiale, la probabilité d'avoir une naissance (exactement) dans 60 minutes, puis faites le même calcul en approximant par la loi de Poisson.

Notez que ce résultat se généralise si la probabilité de chaque évènement n'est pas identique. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de Bernouilli tel que:

$$P[X_i = 1] = p_i, \qquad P[X_i = 0] = 1 - p_i,$$

et soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Si $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ alors S_n a une distribution binomiale. Mais si les p_i ne sont pas égaux, les choses deviennent plus complexes. Ce qui est intéressant est que même dans ce cas, l'approximation par la loi de Poisson est valide. On a:

$$\left| P[S_n = k] - \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2,$$

où $\mu = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Si tous les p_i sont égaux, alors $p_1 = p_2 = ... = \mu/n$, et le terme de droite de l'équation précédente se réduit à μ^2/n^2.

2.2 Processus de comptage

Un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'évènements qui se sont produits au temps t. Quelques exemples:

a) Si $N(t)$ est le nombre de personnes entrant dans un magasin au temps t ou avant t, alors $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage dans lequel un évènement correspond à une personne entrant dans le magasin. Notons que si $N(t)$ était le nombre de personnes dans le magasin au temps t, alors $N(t)$ n'est pas un processus de comptage, car $N(t)$ peut décroître.

b) Si un évènement correspond à la naissance d'un enfant, alors $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage, où $N(t)$ est le nombre total de naissance au temps t.

P5 ⊟ **Processus de comptage** Un processus de comptage satisfait :

i) $N(t) \geq 0$.
ii) $N(t)$ a des valeurs entières.
iii) Si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$.
iv) Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nombre d'évènements qui se produisent dans l'intervalle de temps $(s, t]$.

Un processus de comptage est dit à *accroissements indépendants*[3] si le nombre d'évènements qui se produisent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. Par exemple, cela veut dire que le nombre d'évènements qui se sont produits avant ou à $t = 10$, c'est-à-dire $N(10)$, doit être indépendant du nombre d'évènements qui se produisent entre les temps 10 et 15, c'est-à-dire $N(15) - N(10)$. Formellement, pour $t_0 = 0 < t_1 <$

[3] independant increments

$t_2 < \cdots < t_n$ les accroissements $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendants. Cette hypothèse semble valide pour l'exemple (a), mais ne paraît pas raisonnable pour l'exemple (b). En effet, $N(t)$ peut être très grand, donc le nombre de naissance entre t et $t + s$ sera aussi grand. Ainsi $N(t)$ ne semble pas indépendant de $N(t + s) - N(t)$, et donc $\{N(t), t \geq 0\}$ n'est pas à accroissements indépendants.

Un processus de comptage possède des *accroissements stationnaires*[4] si la distribution du nombre d'évènements qui se produisent dans n'importe quel intervalle de temps dépend seulement de la longueur de cet intervalle. C'est-à-dire que le processus à des accroissements stationnaires si le nombre d'évènements dans l'intervalle de temps $(s, s+t)$ a la même distribution pour tout s. Notons qu'un processus ayant des accroissements stationnaires est aussi appelé processus *homogène dans le temps*.

L'hypothèse des accroissements stationnaires serait raisonnable pour l'exemple (a) seulement s'il n'y a pas de moments dans la journée ou les clients sont susceptibles d'entrer dans le magasin. S'il y a une heure de pointe, alors l'hypothèse des accroissements stationnaires est injustifiée. Si la population de la terre est à peu près constante, alors l'hypothèse des accroissements stationnaires paraît justifiée.

2.3 Définition du processus de Poisson

Un des plus importants processus de comptage est le processus de Poisson, défini comme suit:

D2 ⊠ *Processus de Poisson* *Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ $(\lambda > 0)$ si:*

i) $N(0) = 0$.
ii) *Le processus a des accroissements indépendants.*
iii) *Le nombre d'évènements dans un intervalle de longueur t est distribué selon une loi de Poisson d'espérance λt. C'est-à-dire, pour tout s, $t \geq 0$:*

$$P[N(t + s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

Notons que par la condition (iii), un processus de Poisson a des accroissements stationnaires, et que:

$$E[N(t)] = \lambda t,$$

[4] stationary increments

ce qui explique pourquoi λ s'appelle le taux du processus: le nombre d'arrivées moyen dans un intervalle de temps t est λt, ou λ par unité de temps. Pour déterminer si un quelconque processus de comptage est un processus de Poisson, on doit montrer que les conditions (i), (ii), et (iii) sont satisfaites. Les deux premières conditions peuvent habituellement être vérifiées directement par notre connaissance du processus, mais la troisième condition n'est pas toujours facile à vérifier. C'est pourquoi nous allons voir une autre définition d'un processus de Poisson, après avoir défini la fonction *petit ordre de* h, $o(h)$. Voyons d'abord un exemple simple.

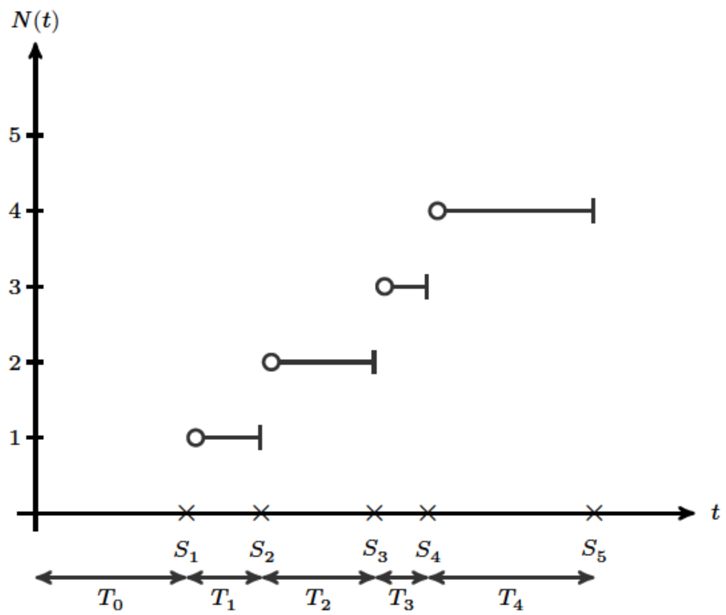


Figure 2.3 Exemple de processus de Poisson, ou l'on voit les temps de séjour T_n et les temps d'attente S_n.

■ Exemple 8 ■

Des bris se produisent le long d'un câble sous-marin selon un processus de Poisson à un taux de $\lambda = 0.1$ par kilomètre.

a. *Quelle est la probabilité qu'aucun bris ne survienne dans les deux premiers kilomètres du câble ?*

▷

b. *Sachant qu'il n'y a pas de bris dans les deux premiers kilomètres du câble, quelle est la probabilité conditionnelle qu'il n'y ait pas de bris entre les kilomètres 2 et 3 ?*

$\triangleright$

■ Exemple 9 ■

Des clients arrivent dans un dépanneur selon un Processus de Poisson de taux $\lambda = 4$ *par heure. Sachant que le dépanneur ouvre à 9h00, quelle est la probabilité conjointe qu'un client soit arrivé avant 9h30 et qu'un total de 5 soient arrivés avant 11h30 ?*

$\triangleright$

D3 ⊠ *La fonction* $f(\cdot)$ *est dite de petit ordre de* h*, notée* $o(h)$ *si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Si $f(\cdot)$ est $o(h)$, elle tends vers 0 infiniment plus vite que h. Voyons quelques exemples:

1) La fonction $f(x) = x^2$ est $o(h)$ car

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0.$$

2) La fonction $f(x) = x$ n'est pas $o(h)$ car

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \neq 0.$$

3) Si $f(\cdot)$ est $o(h)$ et $g(\cdot)$ est $o(h)$, $f(\cdot) + g(\cdot)$ est $o(h)$ car

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) + g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0 + 0 = 0.$$

4) Si $f(\cdot)$ est $o(h)$ alors $g(\cdot) = cf(\cdot)$ est aussi $o(h)$ car

$$\lim_{h \to 0} \frac{cf(h)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = c \cdot 0 = 0.$$

5) Par (3) et (4), on déduit que n'importe quelle combinaison linéaire finie de fonctions qui sont toutes $o(h)$ est aussi $o(h)$.

Pour que la fonction $f(\cdot)$ soit $o(h)$, il est nécessaire que $f(h)/h$ tende vers 0 quand h tend vers 0. Mais si h tend vers 0, le seul moyen pour que $f(h)/h$ tende vers 0 est que $f(h)$ tend vers 0 plus vite que h. C'est-à-dire que si h est petit, $f(h)$ doit être petit comparée h.

D4 ⊠ ▬ *Processus de Poisson* ▬ *Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si*

i) $N(0) = 0$.
ii) *Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires.*
iii) $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$.
iv) $P[N(h) \geq 2] = o(h)$.

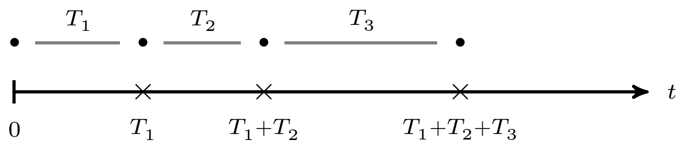
T1 ⊡ Les définitions 2 et 4 sont équivalentes.

■ Preuve ■ On va montrer que la définition 2 implique la 4.

La preuve que la définition 4 implique la 2 vous est offerte dans l'appendice 2.5.3.

2.3.1 Temps d'attente

Considérons un processus de Poisson, et notons le temps où se produit le premier évènement par T_1. De plus, soit T_n le temps qui s'écoule entre les $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ évènements. La suite $\{T_n, n = 1, 2, ...\}$ est appelé *suite des temps entre évènements*. Par exemple, si $T_1 = 5$ et $T_2 = 10$, alors le premier évènement du processus de Poisson s'est produit au temps 5, et le second évènement au temps 15.

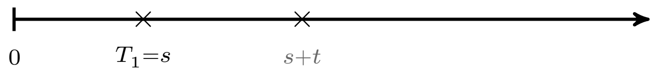


Cherchons la distribution de T_n. Notons d'abord que l'évènement $\{T_1 > t\}$ se produit si et seulement si aucun évènement du processus de Poisson ne se produit dans l'intervalle $[0, t]$, et:

$$P[T_1 > t] =$$

Alors T_1 a une distribution exponentielle d'espérance $1/\lambda$. Cherchons la distribution de T_2.

$$\begin{aligned} P[T_2 > t | T_1 = s] &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$



donc T_2 est $Exp(\lambda)$ et indépendant de T_1. En répétant cet argument, on voit que $T_1, T_2, ...$ sont indépendants tous de distribution $Exp(\lambda)$. Ainsi, généralisons ces résultats:

P6 **Temps d'attente** Les temps d'attente entre évènements T_n $(n = 1, 2, ...)$ sont indépendants et identiquement distribués comme des variables aléatoires exponentielle d'espérance $1/\lambda$ si les évènements sont produits selon un processus de Poisson d'intensité λ.

La preuve s'obtient en montrant que la densité conjointe de $T_1, T_2, ..., T_n$ est le produit des densités individuelles, soit:

$$f_{T_1,T_2,...,T_n}(t_1, t_2, ..., t_n) = \lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda t_2} ... \lambda e^{-\lambda t_n}.$$

Les hypothèses de stationnarité et d'indépendance font que le processus ``redémarre'' dès qu'un évènement se produit. À n'importe quel moment, le processus est indépendant de ce qui s'est produit dans le passé (par accroissements indépendants) et a également la même distribution que le processus original (par accroissements stationnaires): ainsi, le processus n'a pas de mémoire, et il est donc attendu que la distribution des temps d'attente soit exponentielle.

■ Exemple 10 ■

Des étudiants arrivent au registrariat de l'université, pour obtenir leur cartes d'étudiants; un étudiant arrive à toutes les 5 minutes en moyenne selon un processus de Poisson. Il y a un seul employé pour faire les cartes. Soit $N(t)$ le nombre d'étudiants qui sont arrivés au temps t depuis que l'employé a commencé son quart de travail. Utilisons les heures comme unité de temps.

i) Quelle est l'intensité (le taux) du processus de Poisson décrit ici?

▷

ii. Sachant que l'employé prends 2 minutes pour faire une carte, quelle est la probabilité qu'il ait le temps de se reposer entre deux arrivées?

▷ Le temps entre deux arrivées suit une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$, c'est-à-dire $1/12$. Comme 2 minutes, c'est $1/30$ d'heure:

$$P[\text{il a le temps de se reposer entre deux arrivées}]$$

mais $T_n \sim Exp(12)$, donc:

$$P[\text{il a le temps de se reposer entre deux arrivées}]$$

iii. Sachant que l'employé commence son travail à midi (12h00) et qu'il arrête de travailler à 16h00, quelle est l'espérance et la variance du temps qu'il passe à faire des cartes d'étudiants ? [Note: il faut supposer une file d'attente et que l'employé reste finir de remplir ses cartes même après 16h00... ie que tout étudiant arrivé entre 12h00 et 16h00 est servi.]

▷ Au cours de son quart de travail, le nombre d'étudiants qui vont se présenter est :

Soit alors Y le nombre de minutes passées à faire des cartes: $Y = 2X$. Alors

$$E[Y] =$$

$$Var[Y] =$$

Ainsi, sur 4 heures de travail, il passera en moyenne 1 heure et 36 minutes (96 min) à faire des cartes d'étudiants. □

Une autre quantité intéressante est le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement, aussi appelé temps d'attente, et noté S_n. On a:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad (n \geq 1).$$

Comme les T_i sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres λ, S_n est donc distribuée comme une somme d'exponentielle i.i.d., c'est-à-dire une selon une distribution Gamma de paramètres n et λ:

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (t \geq 0).$$

Ainsi:

P7 ⊟ Pour un processus de Poisson d'intensité λ, le temps nécessaire pour obtenir n évènements, c'est-à-dire S_n, suit une loi Gamma de paramètres n et λ. On a alors:

$$E[S_n] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[S_n] = n/\lambda^2.$$

Il existe une autre façon de trouver la proposition précédente. Il faut remarquer que le $n^{\text{ème}}$ évènement arrive avant ou au temps t si et seulement si le nombre d'évènements au temps t est au moins n, c'est-à-dire:

$$S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n.$$

De plus, par les accroissements stationnaires et indépendants du processus de Poisson, le temps pour que n évènements se produisent à partir d'un instant t_k, sachant que k évènements se sont produits jusqu'à t_k, a la même distribution que S_n.

$$P[S_{n+k} \leq t + t_k \mid N(t_k) = k] = P[S_n \leq t], \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

■ Exemple 11 ■

(Suite exemple précédent) Supposons que des étudiants arrivent au registrariat avec intensité (taux) $\lambda = 12$ par heure.

iv. *Quelle est le temps moyen jusqu'à ce que le 48$^{\text{ème}}$ étudiant arrive ?*

▷

v. *Quelle est la probabilité que le temps entre la 48$^{\text{ème}}$ et la 49$^{\text{ème}}$ arrivée soit plus grand que 30 minutes ?*

▷ .

P8 ⊟ ▬ Processus de Poisson ▬ Soit une suite de variables aléatoires T_i indépendantes et identiquement distribuées de loi $Exp(\lambda)$, et soit $S_0 = 0$. Soit un processus de comptage où le $n^{\text{ème}}$ évènement se produit au temps

$$S_n \equiv T_1 + T_2 + \ldots + T_n,$$

alors, le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.

■ Preuve ■ Montrons que $N(0) = 0$ et que $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$. Comme $N(t) = n$ si et seulement si $S_n \leq t$ et $S_{n+1} > t$, alors $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$.

- Au temps $t = 0$, $N(0) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq 0\}$. Comme S_n est toujours positif ou nul, alors $\max\{n \geq 0 : S_n = 0\} = 0$, donc $N(0) = 0$.

- Cherchons la distribution de $N(t)$. On se souvient que $S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n$.

$$\begin{aligned}
P[N(t) = n] &= P[N(t) \geq n] - P[N(t) \geq n+1] \\
&= P[S_n \leq t] - P[S_{n+1} \leq t]] \\
&= \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx - \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n}}{(n)!}\, dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{n!}\left[n\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1} - \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n}\right]\, dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{n!}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}\left[n - (\lambda x)\right]\, dx \\
&= \cdots \\
&= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = P[Poisson(\lambda t) = n]
\end{aligned}$$

donc une loi de Poisson.

2.3.2 Autres propriétés du processus de Poisson

Considérons un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ où l'on peux classifier en deux catégories chaque nouvel évènement indépendamment de tous les autres évènements. Un évènement est classifié de type 1 avec probabilité p et de type 2 avec probabilité $1 - p$. Par exemple supposons que les clients d'une banque arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ, et que chaque nouveau client est un homme avec probabilité $1/2$ et une femme avec probabilité $1/2$. Soit $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre d'arrivées de chacun des types (1 et 2) dans l'intervalle $[0, t]$. Remarquons que $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$; $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont alors des processus de Poisson.

P9 ⊟ **Séparation de deux processus de Poisson** Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Si l'on peux classifier en deux catégories chaque nouvel évènement, tel qu'un évènement est classifié de type 1 avec probabilité p et de type 2 avec probabilité $1 - p$ indépendamment de tous les autres évènements. Soit $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre d'arrivées de chacun des types (1 et 2) dans l'intervalle $[0, t]$. Alors $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ sont tous deux des processus de Poisson d'intensité respective $\lambda \cdot p$ et $\lambda \cdot (1-p)$, et ils sont indépendants.

■ Preuve ■ On va vérifier que $\{N_1(t), t \geq 0\}$ vérifie la deuxième définition des processus de Poisson.

a. Comme $N(0) = 0$, alors $N_1(0) = 0$.
b. Le processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ hérite les accroissements indépendants et stationnaires de $\{N(t), t \geq 0\}$, car la distribution du nombre d'évènements de type I dans un intervalle peut être obtenue en conditionnant sur le nombre d'évènement dans cet intervalle, et la distribution de cette dernière quantité ne dépend que de la longueur de l'intervalle et est indépendante de ce qui s'est produit dans d'autres intervalles.
c.

$$\begin{aligned} P[N_1(h) = 1] &= P[N_1(h) = 1 | N(h) = 1] P[N(h) = 1] \\ &\quad + P[N_1(h) = 1 | N(h) \geq 2] P[N(h) \geq 2] \\ &= p(\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= \lambda p h + o(h). \end{aligned}$$

d. $P[N_1(h) \geq 2] \leq P[N(h) \geq 2] = o(h)$.

Donc $\{N_1(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λp, et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda(1-p)$ par les mêmes arguments. Si $Y = j$ et $Z = k$, il y a eu $j+k$ arrivées dans un intervalle de longueur t; j ont étés assignées de type I, et k ont étés assignées de type II:

$$\begin{aligned} P[Y = j, Z = k] &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!} \cdot \frac{(j+k)!}{j!k!} p^j (1-p)^k \\ &= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t} \frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

et les deux processus sont donc indépendants.

■ Exemple 12 ■

Si des immigrants arrivent dans un certain pays selon un processus de Poisson d'intensité 10 par semaine, et que chaque immigrant provient du pays A avec probabilité $\frac{1}{12}$, alors *quelle est la probabilité qu'aucun immigrant d'origine A émigre dans le pays durant le mois de novembre ?* (On suppose qu'un mois à 4 semaines)

▷

P10 ⊟ ▬ Séparation de k processus de Poisson ▬ Soit un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de taux λ. Si chacun des évènements qui se produisent peut être classé de type i avec probabilité p_i $(i = 1, 2, ..., k, \sum_j p_i = 1)$ *indépendamment* des autres évènements, et si $\{N_i(t), t \geq 0\}$ est le nombre d'évènements de type i dans l'intervalle $[0, t]$, alors les processus $\{N_i(t), t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_i = \lambda p_i$.

Ainsi, si les arrivées d'un processus de Poisson peuvent être classifiés indépendamment en plusieurs groupes, alors le nombre d'arrivée dans chacun des groupes sera une variable de Poisson.

P11 ⊟ ▬ Superposition de deux processus de Poisson ▬ Soit $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ des processus de Poisson indépendants de taux respectifs λ_1 et λ_2. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ défini par:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad t \geq 0$$

est un processus de Poisson de taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Intéressons-nous maintenant à la probabilité que n évènements d'un processus de Poisson se produisent avant que m évènements se soient produit dans un second processus de Poisson indépendant du premier. Soient $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensité λ_1 et λ_2. De plus, soient S_n^1 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du premier processus et S_n^2 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du second processus. On cherche:

$$P[S_n^1 < S_m^2].$$

Considérons tout d'abord le cas où $m = n = 1$. Comme S_1^1 et S_1^2 sont des variables aléatoires exponentielles d''espérance $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$, alors on sait déjà que:

$$P[S_1^1 < S_1^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

■ Exemple 13 ■

Prenons par exemple le passage d'autos et de camions à l'entrée d'un pont; les autos arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda_1 = 100$ par heure et les camions selon un second processus de Poisson indépendant du premier de taux $\lambda_2 = 10$. On peut alors considérer un nouveau processus de Poisson $N(t)$ comptant le passage d'un véhicule à l'entrée du pont (en supposant que le pont est interdit à tout autre véhicule comme les motos, les vélos...), ce processus est donc de taux:

À chaque nouveau véhicule qui passe, la probabilité que ce véhicule soit une auto est:

Considérons maintenant la probabilité que deux évènements se produisent dans le processus $N_1(t)$ avant qu'un évènement se produise dans $N_2(t)$. C'est-à-dire $P[S_2^1 < S_1^2]$. Pour que deux évènements se soient produit dans $N_1(t)$ avant qu'un évènement ne se produise dans $N_2(t)$, le premier évènement à se produire doit être un évènement de $N_1(t)$ (cela se produit avec probabilité $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$). Maintenant, sachant que le premier évènement provient de $N_1(t)$, l'autre condition pour que S_2^1 soit plus petit que S_1^2 est que le second évènement qui se produit provienne encore de $N_1(t)$. Cependant, quand le premier évènement se produit, les deux processus ``redémarrent'' (par la propriété sans-mémoire du processus de Poisson), et donc la probabilité conditionnelle est encore $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Ainsi, la probabilité est:

$$P[S_2^1 < S_1^2] =$$

Le raisonnement montre que chaque évènement qui se produit va être un évènement de $N_1(t)$ avec probabilité $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ou un évènement de $N_2(t)$ avec probabilité $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$, indépendamment de ce qui s'est produit auparavant. Essayons de raisonner de façon plus générale à l'aide d'un exemple.

■ Exemple 14 ■

[Suite de l'exemple 13]

a. *Quelle est la probabilité que deux voitures arrivent avant deux camions ?*

b. Quelle est la probabilité que six voitures arrivent avant quatre camions ?

Donc, la probabilité que $N_1(t)$ atteigne n avant que $N_2(t)$ atteigne m est la probabilité que n faces apparaissent avant m piles si l'on lance une pièce de monnaie dont la probabilté d'obtenir face est $p = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$. Cet évènement se produira si et seulement si les premiers $n+m-1$ lancés donnent n faces ou plus:

$$P[S_n^1 < S_m^2] = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

2.3.3 Distribution conditionnelle des temps d'arrivés

Supposons que l'on sait qu'exactement un évènement d'un processus de Poisson s'est produit jusqu'au temps t, et que nous voulons déterminer la distribution du temps auquel l'évènement s'est produit. Comme un processus de Poisson a des accroissements stationnaires et indépendants, il semble raisonnable que chaque intervalle $[0,t]$ de longueur égale ait la même probabilité de ``contenir'' l'évènement. Ainsi le temps auquel se produit l'évènement devrait être uniforme sur $[0,t]$. Vérifions cette intuition:

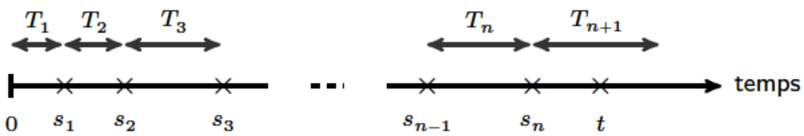
Avant de généraliser ce résultat, faisons un rappel sur les statistiques d'ordre. Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ n variables aléatoires. On dit que $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre correspondant à $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ si la $k^{\text{ème}}$ plus petite valeur de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ est $Y_{(k)}$ pour $k = 1, 2, ..., n$. Par exemple:

$$\begin{aligned} n = 3, \qquad & Y_1 = 4, \quad Y_2 = 5, \quad Y_3 = 1, \\ & Y_{(1)} = 1, \quad Y_{(2)} = 4, \quad Y_{(3)} = 5. \end{aligned}$$

Si les Y_i sont des variables aléatoires continues indépendantes et identiquement distribuées de densité f, la densité conjointe de $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n)}$ est:

$$f(y_1, y_2 ..., y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), \quad y_1 < y_2 < ... < y_n.$$

T2 ⊡ Sachant que $N(t) = n$, les n temps d'arrivée $S_1, ..., S_n$ ont la même distribution que les statistiques d'ordre correspondant à n variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées distribués sur $(0, t)$.



■ Preuve ■ Pour obtenir la distribution conditionnelle de $S_1, ..., S_n$ sachant que $N(t) = n$, notons que pour $0 < S_1 < ... < S_n < t$ les évènements $S_1 = s_1, ... S_n = s_n$, $N(t) = n$ est équivalent à l'évènement que les premiers $n+1$ arrivées satisfont $T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, ..., T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n$. Les temps entre évènements suivent des loi exponentielle; notons que $P(T_{n+1} > t - s_n)$ (le dernier terme) est $1 - F(t - s_n) = \exp[-\lambda(t - s_n)]$. La densité conjointe de $S_1, ..., S_n$ sachant que $N(t) = n$ est:

Autrement dit, sachant qu'il y a eu n arrivées, l'ensemble des temps d'arrivée à la même distribution que la position de n fléchettes jetés au hasard dans l'intervalle $[0, t]$.

T3 ⊡ Si $s < t$ et $0 \leq m \leq n$, alors

$$P[N(s) = m \mid N(t) = n] = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

c'est-à-dire que la distribution conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est $\mathcal{B}in(n, s/t)$.

■ Preuve ■

Supposons que les évènements d'un processus de Poisson peuvent se classer en k catégories, et que la probabilité qu'un évènement soit classé de catégorie i $(i = 1, ..., k)$, dépend du temps auquel l'évènement se produit. Si un évènement se produit au temps y, il sera classifié dans la catégorie i, indépendamment de tout ce qu'il s'est produit auparavant, avec probabilité $P_i(y)$ $(i = 1..., k)$, où $\sum_{i=1}^{k} P_i(y) = 1$.

P12 ⊟ Soient $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$ le nombre d'évènements de catégorie i étant arrivés au temps t, alors $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$, sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes d'espérance:

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)\, ds.$$

■ Preuve ■ Considérons un évènement qui s'est produit dans l'intervalle $[0, t]$, à l'instant s $(0 \leq s \leq t)$. La probabilité que cet évènement soit de type i est $P_i(s)$. D'après les résultats que nous avons vu précédemment (théo. 2 p 32), l'évènement s'est produit à un temps distribué uniformément sur $[0, t]$, donc il sera se type i avec probabilité

$$P_i = \int_0^t \frac{1}{t} P_i(s)\, ds, \quad \text{pour } i = 1, 2, ..., k$$

Donc le processus $N_i(t)$ décrivant le nombre d'évènements de type i dans $[0, t]$ suit une une loi de Poisson de paramètre λP_i, et on a:

$$E[N_i(t)] = \lambda t P_i = \lambda t \int_0^t \frac{1}{t} P_i(s)\, ds = \lambda \int_0^t P_i(s).$$

De plus, on peut utiliser les résultats précédents pour montrer que les $N_i(t)$ sont indépendants.

2.4 Généralisation du processus de Poisson

2.4.1 Processus de Poisson non-homogène

Un processus non-homogène (non-stationnaire) est un processus de Poisson où les arrivées au temps t dépendent de t.

D5 ⊠ ▬ *Processus de Poisson non homogène* ▬ *Le processus de comptage* $\{N(t), t \geq 0\}$ *est dit être un processus de Poisson non-homogène d'intensité* $\lambda(t)$ *(*$t \geq 0$*) si*

i) $N(0) = 0$,
ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ *a des accroissement indépendants,*
iii) $P[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$,
iv) $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$.

En posant

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy$$

on pourrait montrer que:

$$P[N(s+t) - N(s) = n] = e^{-[m(s+t)-m(s)]} \frac{[m(s+t) - m(s)]^n}{n!}, \; n = 0, 1, ...$$

qui a la même forme que pour un processus stationnaire:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

Ainsi, on peut voir que $N(s+t) - N(s)$ est une variable aléatoire de Poisson d'espérance $m(s+t) - m(s)$. Ainsi, $N(t)$ sera une variable aléatoire de Poisson d'espérance $m(t)$, et

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du.$$

Donc $N(s+t) - N(s)$ a une loi de Poisson de paramètre

$$m(s+t) - m(s) =$$

Ainsi, on a (proposition équivalente à la définition 5):

P13 ⊟ ▬ Processus de Poisson non homogène ▬ On dit que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda(r)$ $(r \geq 0)$ si

i) $N(0) = 0$,
ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissement indépendants,
iii) $N(t+s) - N(s)$ est Poisson d'espérance $\int_s^{s+t} \lambda(r)\, dr$.

Notez que les temps $T_1, T_2, \ldots$ ne sont plus distribués exponentiellement ni indépendants. En effet:

$$= P[T_1 > t] =$$

En dérivant, nous obtenons:

$$f_{T_1}(t) =$$

où $\mu(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$. De plus, on pourrait montrer que

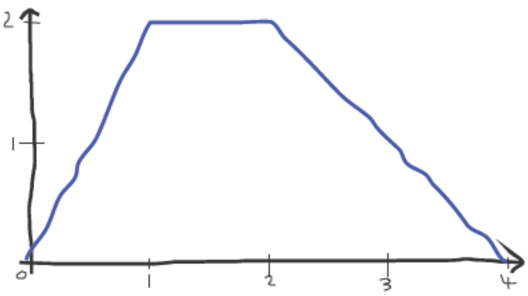
$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \lambda(s)e^{-\mu(s)} \cdot \lambda(s+t)e^{-(\mu(s+t)-\mu(s))}$$

donc T_1 et T_2 ne sont pas indépendants quand $\lambda(s)$ n'est pas constant.

■ Exemple 15 ■

Les demandes d'aide d'étudiants le matin pour un examen ayant lieu l'après-midi se produisent selon un processus de Poisson non homogène de taux:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t, & \text{pour } 0 \leq t < 1, \\ 2, & \text{pour } 1 \leq t < 2, \\ 4-t, & \text{pour } 2 \leq t < 4. \end{cases}$$



où $t = 0$ correspond à 9h00. Quelle est la probabilité que deux demandes se produisent durant les deux premières heures; que deux demandes se produisent durant les deux dernières heures ?

▷

■ Exemple 16 ■

Alexandre travaille dans un stand a hot-dogs qui ouvre à 8 heures le matin. De 8 à heures à 11 heures, les clients arrivent, en moyenne, selon un taux croissant linéairement de 8h à 11h, tel qu'il a environ 5 clients à 8 heures jusqu'à 20 clients à 11 heures. De 11h00 à 13h00, le taux moyen semble constant, en moyenne de 20 clients à l'heure. Ce taux décroît linéairement de 13h00 à 17h00 (la fermeture), et il a en moyenne 12 clients par heure à 17h00. Si nous supposons que les clients arrivant durant des périodes de temps disjointes sont indépendants, alors définissons un modèle décrivant les arrivées des clients au stand. Quelle est la probabilité qu'aucun client ne se présente entre 8h30 et 9h30 ? Combien aura-t il de clients en moyenne durant cette période ?

▷

P14 $\boxminus$ Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$ deux processus de Poisson non homogène et indépendants, de taux respectifs $\lambda(t)$ et $\mu(t)$, et soit $N^\star(t) = N(t) + M(t)$. Alors:

a. $\{N^\star(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène de taux $\lambda(t) + \mu(t)$.

b. Sachant qu'un évènement du processus $\{N^\star(t)\}$ se produit au temps t, alors, indépendamment de ce qui s'est produit avant t, l'évènement à t provient du processus $\{N(t)\}$ avec probabilité

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}.$$

■ Preuve ■ Prouver la partie a) revient à prouver que le processus $N^\star(t)$ satisfait les quatre conditions du processus de Poisson non homogène (voir la définition 5). Nous allons prouver la partie b).

$$\begin{aligned}
P[N(t,t+h)=1\,|\,N^\star(t,t+h)=1] &= \frac{P[N(t,t+h)=1, M(t,t+h)=0]}{P[N^\star(t,t+h)=1]} \\
&= \frac{P[N(t,t+h)=1]P[M(t,t+h)=0]}{P[N^\star(t,t+h)=1]} \\
&= \frac{(\lambda(t)h+o(h))(1-\mu(t)h+o(h))]}{(\lambda(t)+\mu(t))h+o(h)} \\
&= \frac{\lambda(t)h+o(h)}{(\lambda(t)+\mu(t))h+o(h)} \\
&= \frac{\lambda(t)+\frac{o(h)}{h}}{\lambda(t)+\mu(t)+\frac{o(h)}{h}}.
\end{aligned}$$

et on fait tendre $h \to 0$.

2.4.2 Processus de Poisson composé

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \; t \geq 0$$

où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson, et $\{Y_i, i \geq 1\}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. qui est aussi indépendante de $\{N(t), t \geq 0\}$. La variables $X(t)$ est dite une variable aléatoire de Poisson composée.

Exemples:

1. Si $Y_i \equiv 1$, alors $X(t) = N(t)$, et nous avons un processus de Poisson.
2. Des autobus arrivent à une rencontre selon un processus de Poisson, et le nombre de passagers dans chacun des autobus sont des v.a. i.i.d. Alors $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé où $X(t)$ dénote le nombre de passagers qui sont arrivés à t. Ainsi Y_i de la définition représente le nombre de passagers dans le $i^{\text{ème}}$ autobus.

Si $X(t)$ est une variable de Poisson composée, on a:

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1],$$

$$Var[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2].$$

Afin de démontrer ce résultat, dans le cas particulier ou l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire Y_1 est fini ou infini dénombrable. Notez cependant que le résultat est vrai en général !

■ Exemple 17 ■

Des familles migrent dans un pays selon un processus de Poisson d'intensité 2 par semaine. Si le nombre de personnes dans chaque famille est indépendante et prends les valeurs 1,2,3 et 4 avec probabilités respectives $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$, alors quelle est l'espérance et la variance du nombre de personnes migrant dans le pays durant une période de 5 semaines ?

▷ *On a:*

$$E[Y_i] =$$

$$E[Y_i^2] =$$

Alors $X(5)$ est le nombre de personnes migrant durant 5 semaines, on a:

$$E[X] =$$

$$Var[X] =$$

$$\therefore$$

2.5 Annexes

2.5.1 Propriété sans mémoire de la distribution géométrique

Remarquons tout d'abord, que si Z si une distribution géométrique de paramètre p, alors

$$P[Z = k] = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, ...$$

Ensuite, évaluons $P[Z > t]$:

$$\begin{aligned}
P[Z > t] &= \sum_{j=t+1}^{\infty} (1 - p)^{j-1}p \\
&= p(1 - p)^t \sum_{j=0}^{\infty} (1 - p)^j \\
&= \frac{p(1 - p)^t}{p} = (1 - p)^t.
\end{aligned}$$

Voyons si la distribution géométrique est sans mémoire:

$$\begin{aligned}
P[Z > s + t \mid Z > s] &= \frac{P[Z > s + t \cap Z > s]}{P[Z > s]} \\
&= \frac{P[Z > s + t]}{P[Z > s]} \quad t \text{ positif} \\
&= \frac{\sum_{j=s+t+1}^{\infty} (1 - p)^{j-1}p}{\sum_{j=s+1}^{\infty} (1 - p)^{j-1}p} \\
&= \frac{(1 - p)^{s+t} \sum_{j=0}^{\infty} (1 - p)^j}{(1 - p)^s \sum_{j=0}^{\infty} (1 - p)^j} \\
&= (1 - p)^t = P[Z > t].
\end{aligned}$$

Donc la distribution géométrique est sans mémoire (c'est d'ailleurs la seule distribution discrète sans mémoire).

2.5.2 Espérance et variance d'une loi exponentielle

Une variable aléatoire X exponentielle suit une distribution exponentielle avec paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\ dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Son espérance est:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\ dx \\ &= [-x e^{-\lambda x}]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x}\ dx \\ &= [-x e^{-\lambda x}]_0^\infty - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments $\Phi(t)$ est :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= E[e^{tx}] \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\ dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda - t)}\ dx \\ &= \left[-\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-x(\lambda - t)}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda \end{aligned}$$

Alors on a:

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \qquad \Phi'(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$\Phi''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \qquad \Phi''(0) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\text{et} \quad Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

2.5.3 Implication des deux définitions du processus de Poisson

On va montrer que la définition 4 implique la 2. Soit $u \geq 0$, et soit

$$g(t) = E\left[e^{-uN(t)}\right]$$

Construisons une équation différentielle pour $g(t)$:

$$\begin{aligned}
g(t+h) &= E\left[e^{-uN(t+h)}\right] \\
&= E\left[e^{-uN(t+h)-uN(t)+uN(t)}\right] \\
&= E\left[e^{-uN(t)}e^{-u(N(t+h)-N(t))}\right] \\
&= E\left[e^{-uN(t)}\right] E\left[e^{-u(N(t+h)-N(t))}\right], \text{ par accroissements indépendants} \\
&= g(t)E\left[e^{-uN(h)}\right], \text{ par accroissements stationnaires}
\end{aligned}$$

Les hypothèse (iii) et (iv) impliquent que

$$P[N(h) = 0] = 1 - P[N(h) = 1] - P[N(h) \geq 2] = 1 - \lambda h + o(h)$$

En conditionnant sur $N(h) = 0$, $N(h) = 1$ ou $N(h) \geq 2$,

$$\begin{aligned}
E\left[e^{-uN(h)}\right] &= E\left[e^{-uN(h)}|N(h) = 0\right] P[N(h) = 0] \\
&\quad + E\left[e^{-uN(h)}|N(h) = 1\right] P[N(h) = 1] \\
&\quad + E\left[e^{-uN(h)}|N(h) \geq 2\right] P[N(h) \geq 2] \\
&= P[N(h) = 0] + e^{-u}P[N(h) = 1] \\
&\qquad + E\left[e^{-uN(h)}|N(h) \geq 2\right] P[N(h) \geq 2] \\
&= 1 - \lambda h + o(h) + e^{-u}(\lambda h + o(h)) + o(h) \\
&= 1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

Notons que $E[e^{-uN(h)}|N(h) \geq 2] = \sum_{i=2} E[e^{-uN(h)}|N(h) = i] = E[e^{-u2}] + E[e^{-u3}] + \cdots$. Ainsi, on obtient:

$$
\begin{aligned}
& g(t+h) = g(t)(1-\lambda h + e^{-u}\lambda h) + o(h) \\
\Leftrightarrow\ & g(t+h) = g(t) - g(t)\lambda h + g(t)e^{-u}\lambda h + o(h) \\
\Leftrightarrow\ & g(t+h) - g(t) = g(t)\lambda h(e^{-u}-1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = g(t)\lambda(e^{-u}-1)
\end{aligned}
$$

et si $h \to 0$, alors on obtient:

$$
\begin{aligned}
g'(t) =& g(t)\lambda(e^{-u}-1) \\
\frac{g'(t)}{g(t)} =& \lambda(e^{-u}-1)
\end{aligned}
$$

En intégrant, et en utilisant le fait que $g(0) = 1$:

$$\log g(t) = \lambda t(e^{-u}-1), \quad \text{ou} \quad g(t) = e^{\lambda t(e^{-u}-1)}$$

C'est-à-dire, la transformée de Laplace de $N(t)$ évaluée à u est $e^{\lambda t(e^{-u}-1)}$. Comme c'est aussi la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de Poisson d'espérance λt, on a le résultat voulu en notant que la distribution d'une variable aléatoire non négative est uniquement déterminée par sa transformée de Laplace.
[Note: la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ est définie par:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = E[e^{-ts}]$$

où $f(t)$ est définie pour $t \geq 0$. De plus, lorsque $f_X(x)$ est la fonction de densité alors, $M_X(s) = \mathcal{L}[f_X(x)](-s) = E[e^{-Xs}]$ est la série génératrice des moments de X].

2.6 Résumé des principaux résultats

2.6.1 Loi exponentielle

- Une variable aléatoire X suit une distribution exponentielle si

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{si } x \geq 0, \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{si } x \geq 0$$

$$\text{et} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

- Une variable aléatoire est sans mémoire si:

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \quad \forall s, t \geq 0.$$

et la seule variable aléatoire sans mémoire est la distribution exponentielle.

- Le taux de panne est défini comme $r(t) = f(t)/(1 - F(t))$.
- Soient $X_1, ..., X_n$ $Exp(\lambda)$ iiid. La somme $Y = X_1 + ... + X_n$ a une distribution Gamma de paramètres n et λ:

$$E[Y] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[Y] = n/\lambda^2.$$

- Soient $X_i \sim$ Exp(λ_i). $P[X_1 < X_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.
- Soient $X_i \sim$ Exp(λ_i). Alors $\min(X_1, X_2, ..., X_n) =$ Exp $\left(\sum_i \lambda_i\right)$.
- Soient $X_i \sim$ Exp(λ_i). Alors $P[X_i = \min_j X_j] = \lambda_i / \sum_j \lambda_j$.

2.6.2 Processus de Poisson

- Une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2, ...$ suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si:

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

On a: $E[X] = \lambda$ et $Var[X] = \lambda$.

- Si $X_i \sim$ Poisson(λ_i), alors $Y = \sum_i X_i \sim$ Poisson$(\sum_i \lambda_i)$.
- Loi des évènements rares; si $X_i \sim$ Bernouilli(p_i), alors:

$$\left| P[X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k] - \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2,$$

où $\mu = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

- Un processus de comptage satisfait :

i) $N(t) \geq 0$.
ii) $N(t)$ a des valeurs entières.
iii) Si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$.
iv) Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nombre d'évènements qui se produisent dans l'intervalle de temps $(s, t]$.

- (Def, 2) Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si:

  i) $N(0) = 0$.
  ii) Le processus a des accroissements indépendants.
  iii) Le nombre d'évènements dans un intervalle de longueur t est distribué selon une loi de Poisson d'espérance λt. C'est-à-dire, pour tout s, $t \geq 0$:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

- (Def, 4) Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si

  i) $N(0) = 0$.
  ii) Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires.
  iii) $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$.
  iv) $P[N(h) \geq 2] = o(h)$.

- Les temps d'attente entre évènements T_n ($n = 1, 2, ...$) sont indépendants et identiquement distribués comme des variables aléatoires exponentielle d'espérance $1/\lambda$ si les évènements sont produits selon un processus de Poisson d'intensité λ.

- Pour un processus de Poisson d'intensité λ, le temps nécessaire pour obtenir n évènements, c'est-à-dire S_n, suit une loi Gamma de paramètres n et λ. On a alors:

$$E[S_n] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[S_n] = n/\lambda^2.$$

- On a la propriété remarquable:

$$S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n.$$

- (Troisième déf. PdP) Soit une suite de variables aléatoires T_i indépendantes et identiquement distribuées de loi $Exp(\lambda)$, et soit $S_0 = 0$. Soit un processus de comptage où le $n^{\text{ème}}$ évènement se produit au temps

$$S_n \equiv T_1 + T_2 + ... + T_n,$$

  alors, le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.

- (Séparation de processus de Poisson) Soit un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de taux λ. Si chacun des évènements qui se produisent peut être classé de type i avec probabilité p_i ($i = 1, 2, ..., k$, $\sum_j p_i = 1$) *indépendamment* des autres évènements, et si $\{N_i(t), t \geq 0\}$ est le nombre d'évènements de type i dans l'intervalle $[0, t]$, alors les processus $\{N_i(t), t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_i = \lambda p_i$.

- (Superposition de processus de Poisson) Soit $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ des processus de Poisson indépendants de taux respectifs λ_1 et λ_2. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ défini par:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad t \geq 0$$

est un processus de Poisson de taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

- ($P[S_n^1 < S_m^2]$) Soient S_n^1 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et S_n^2 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du processus $\{N_2(t), t \geq 0\}$, alors:

$$P[S_n^1 < S_m^2] = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

- Sachant que $N(t) = n$, les n temps d'arrivée $S_1, ..., S_n$ ont la même distribution que les statistiques d'ordre correspondant à n variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées distribués sur $(0, t)$.

- Si $s < t$ et $0 \leq m \leq n$, alors

$$P[N(s) = m \mid N(t) = n] = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

c'est-à-dire que la distribution conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est $\mathcal{B}in(n, s/t)$.

- Soient $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$ le nombre d'évènements de catégorie i étant arrivés au temps t; si un évènement se produit au temps y, il sera classifié dans la catégorie i, indépendamment de tout ce qu'il s'est produit auparavant, avec probabilité $P_i(y)$ ($i = 1..., k$), où $\sum_{i=1}^k P_i(y) = 1$.; alors $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$, sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes d'espérance

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)\, ds$$

- On dit que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda(r)$ $(r \geq 0)$ si

i) $N(0) = 0$,
ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissement indépendants,
iii) $N(t+s) - N(s)$ est Poisson d'espérance $\int_s^{s+t} \lambda(r)\, dr$.

Si $m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy$, alors $N(s+t) - N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson d'espérance $m(s+t) - m(t)$.

- Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$ deux processus de Poisson non homogène et indépendants, de taux respectifs $\lambda(t)$ et $\mu(t)$, et soit $N^\star(t) = N(t) + M(t)$. Alors:

  a. $\{N^\star(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène de taux $\lambda(t) + \mu(t)$.

  b. Sachant qu'un évènement du processus $\{N^\star(t)\}$ se produit au temps t, alors, indépendamment de ce qui s'est produit avant t, l'évènement à t provient du processus $\{N(t)\}$ avec probabilité

  $$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}.$$

  c. Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé:

  $$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \; t \geq 0$$

  où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson, et $\{Y_i, i \geq 1\}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. qui est aussi indépendante de $\{N(t), t \geq 0\}$.

  $$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1], \qquad Var[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2].$$