2

[Processus de Poisson]

2 Le processus de Poisson

Vous pourrez consulter les livre de Ross (chapitre 5) et de Taylor Karlin (chapitre V) pour plus de détails ce chapitre.

Les chaînes de Markov que nous avons vu jusqu'ici nous permettent de modéliser des phénomènes aléatoires ou les changements d'états se produisent à des temps fixes. Elles nous permettent de modéliser beaucoup de contextes, mais ne sont pas suffisantes pour décrire tous les phénomènes. Le processus de Poisson est un processus stochastique à temps continu; en fait, c'est un cas particulier des chaînes de Markov à temps continu. La distribution exponentielle jouant un rôle important dans ces processus, nous allons commencer par étudier celle-ci.

2.1 Les distributions exponentielle et de Poisson

2.1.1 La distribution exponentielle

La distribution exponentielle est souvent utilisé pour décrire des durées de vie. Elle joue une importance majeure dans les processus de Poisson. Une variable aléatoire X exponentielle suit une distribution exponentielle avec paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On utilisera souvent $P[X > x]$, que l'on notera $\bar{F}(x)$, qui est dans ce cas $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$. La démonstration en annexe montre que l'espérance d'une loi $Exp(\lambda)$ est $\frac{1}{\lambda}$ et sa variance $\frac{1}{\lambda^2}$.

P1 ⊟ **Distribution Exponentielle** Une variable aléatoire X suit une distribution exponentielle de paramètre λ, noté $X \sim Exp(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{de plus} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

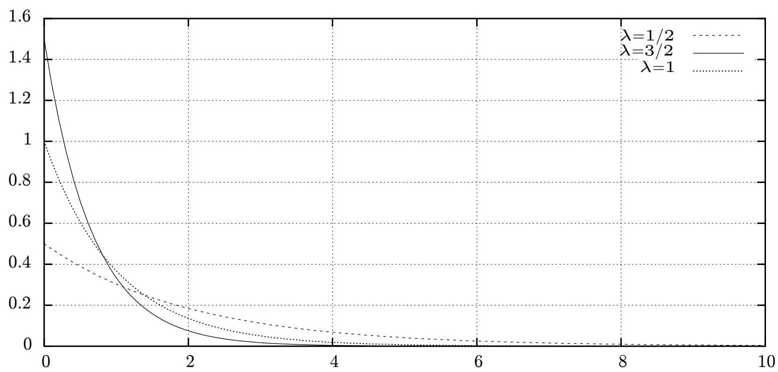


Figure 2.1 Exemples de distribution exponentielle, de paramètres $\lambda = 1/2, 1, 3/2$.

La distribution exponentielle est *sans-mémoire*.[1] Si la durée de vie d'un objet est distribuée exponentiellement, alors cet objet ayant été utilisé x heures est aussi ``bon'' qu'un objet neuf quant au temps qu'il lui reste à fonctionner, c'est-à-dire sa vie résiduelle. La distribution exponentielle est la seule distribution continue positive ayant cette propriété.

D1 ⊠ *Une variable aléatoire X est sans mémoire si:*

$$P[X > s + t | X > t] = P[X > s], \quad \forall s, t \geq 0.$$

Montrons que la distribution exponentielle est sans mémoire.

P2 ⊟ La distribution Exponentielle est sans mémoire.

Remarquons qu'il existe une distribution discrète sans mémoire: la distribution géométrique (voir section 2.5.1 page 43).

Remarquons tout d'abord, que si Z si une distribution géométrique de paramètre p, alors

$$P[Z = k] = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, ...$$

Ensuite, évaluons $P[Z > t]$:

[1] *(memoryless)*

$$
\begin{aligned}
P[Z>t] &= \sum_{j=t+1}^{\infty}(1-p)^{j-1}p \\
&= p\left[(1-p)^t + (1-p)^{t+1} + (1-p)^{t+2}\cdots\right] \\
&= p(1-p)^t\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j \\
&= \frac{p(1-p)^t}{p} = (1-p)^t.
\end{aligned}
$$

Voyons si la distribution géométrique est sans mémoire:

$$
\begin{aligned}
P[Z>s+t \mid Z>s] &= \frac{P[Z>s+t \cap Z>s]}{P[Z>s]} \\
&= \frac{P[Z>s+t]}{P[Z>s]} \quad t \text{ positif} \\
&= \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} \quad t \text{ positif} \\
&= (1-p)^t = P[Z>t].
\end{aligned}
$$

Donc la distribution géométrique est sans mémoire (c'est d'ailleurs la seule distribution discrète sans mémoire).

Si X est la durée de vie d'un outil par exemple, alors la probabilité que l'outil fonctionne pour au moins $s+t$ heures sachant qu'il a fonctionné t heures est la même que la probabilité initiale qu'il fonctionne pour au moins s heures. L'outil ``ne se souvient'' pas qu'il a déjà été utilisé t heures.

■ Exemple 1 ■

Supposons que le temps passé au guichet d'une banque soit distribué exponentiellement avec espérance de 30 minutes, c'est-à-dire $\lambda = 1/30$.

(a) Quelle est la probabilité qu'un client passe plus de 15 minutes au comptoir ?

▷

(b) Quelle est la probabilité que le client passe plus de 30 minutes sachant qu'il est la depuis 10 minutes ?

▷

■ Exemple 2 ■

Considérons un bureau de poste ou deux employés servent les clients. Quand Mr C. entre dans le bureau de poste il voit que Mr. A. est servi par un des deux employés et que Mde B. est servie par l'autre employé. Mr C. sera servi aussitôt que Mr. A. ou Mde B. auront quittés. Si le temps que passe un employé à servir un client est $Exp(\lambda)$, quelle est la probabilité que des trois clients, ce soit Mr C. qui soit le dernier à quitter le bureau de poste ?

▷ Considérons le moment où Mr C. commence à être servi. À ce moment, Mr. A. ou Mde B. aura quitté, et celui qui n'as pas quitté sera toujours en train d'être servi. Mais par le manque de mémoire de la distribution exponentielle, le temps que cela prendra avant que celui qui reste ait fini d'être servi (Mr. A. ou Mde B.) est encore distribué de façon exponentielle d'espérance $1/\lambda$, c'est-à-dire comme s'il venait d'arriver au comptoir. Ainsi, la probabilité qu'il finisse avant Mr. C. est par symétrie

Il est important de noter que la *seule* distribution possédant la propriété du manque de mémoire est la distribution exponentielle. C'est pourquoi cette distribution est très utilisée. On a vu que

$$P[X > s + t] = P[X > s]P[X > t] \quad \text{c'est-à-dire} \quad \bar{F}(s + t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Donc $\bar{F}(x)$ satisfait l'équation

$$g(s + t) = g(s)g(t),$$

et la seule fonction monotone décroissante continue à droite qui est solution de cette équation est

$$g(x) = e^{-\lambda x};$$

donc $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ et donc $F(x) = 1 - \bar{F}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ce qui montre que la seule distribution possédant la propriété sans-mémoire est la distribution exponentielle.

■ Exemple 3 ■

Supposons que la durée de vie d'une ampoule électrique suit une distribution exponentielle d'espérance 10 heures. Supposons qu'une personne entre dans une pièce sans fenêtre ou une telle ampoule est en fonction, et que cette personne désire travailler 5 heures. Quelle est la probabilité qu'elle soit capable de compléter son travail avant que l'ampoule ne brûle ?

▷ Par la propriété sans-mémoire de la distribution exponentielle, la durée de vie de l'ampoule quand la personne entre dans la pièce est $Exp(1/10)$, donc, si Z dénote la durée de vie résiduelle de l'ampoule, c'est-à-dire la durée de vie restante, alors

$$P[Z > 5] = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-5\frac{1}{10}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Notons que si la durée de vie de l'ampoule n'était pas exponentielle, alors la probabilité cherchée serait

$$P[\text{durée de vie } > t + 5 \mid \text{durée de vie } > t] = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)},$$

où t est le temps que l'ampoule a été utilisée quand la personne entre dans la pièce. Notez que dans le cas non exponentiel, cette probabilité dépend de t, ce qui n'est pas le cas si la durée de vie est exponentielle.

2.1.2 Taux de panne

Ross p 276, Karlin, p36

Considérons une variable aléatoire continue positive ayant fonction de densité f et fonction de répartition F. Le taux de panne est défini comme:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Supposons que la durée de vie d'un objet soit X et que cet objet a déjà t heures de service. On cherche la probabilité qu'il ne survive pas un temps supplémentaire dt, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P[X \in (t, t + dt) \mid X > t] &= \\ &= \\ &\approx \end{aligned}$$

Un objet ayant fonctionné jusqu'au temps t va donc tomber en panne dans l'intervalle $t + dt$ avec probabilité (conditionnelle) $r(t)dt$.

Supposons maintenant que la durée de vie de l'objet soit exponentielle de paramètre λ; de par la propriété du manque de mémoire de l'exponentielle, la durée de vie résiduelle de l'objet âgé de t devrait être la même qu'un objet neuf, donc le taux de panne $r(t)$ devrait être constant. Ainsi,

ce qui confirme nos intuitions. De plus le taux de panne $r(t)$ détermine de façon unique la distribution F. Supposons que f est continue partout, et montrons que:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t r(x)\ dx\right].$$

Notons que:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{F(t)'}{1-F(t)} = -\left[\log \bar{F}(t)\right]'.$$

$$\text{donc} \quad \log \bar{F}(t) = -\int_0^t r(x)\ dx + k, \quad \text{alors} \quad \bar{F}(t) = c\exp\left[-\int_0^t r(x)\ dx\right]$$

mais $\bar{F}(0) = 1$, alors pour $t = 0$, on doit avoir $c = 1$, et on trouve le résultat. Enfin, cette expression permet de montrer que seule la distribution exponentielle est sans-mémoire. En effet, si X est sans-mémoire, alors $r(t)$ doit être une constante, disons c, et l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp\left[-\int_0^t c\ dx\right] \\ \Leftrightarrow 1 - F(t) &= \exp\left[-c\,[x]_0^t\right] \\ \Leftrightarrow 1 - F(t) &= \exp\left[-ct\right], \end{aligned}$$

ce qui montre que la variable X est exponentielle.

2.1.3 Somme d'exponentielles iid

P3 ⊟ ▬ Somme d'Exponentielles i.i.d. ▬ Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$. La somme $Y = X_1 + ... + X_n$ a une distribution Gamma de paramètres n et λ, et on a:

$$E[Y] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[Y] = n/\lambda^2.$$

$$\text{On a } f_Y(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad \text{si } t \geq 0,$$

pour $\lambda > 0$, $n > 0$. Notons que $\Gamma(n) = (n-1)!$, et que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\ dx$.

■ Preuve ■

2.1.4 Probabilité du minimum de deux exponentielles

Déterminons la probabilité qu'une variable aléatoire exponentielle soit plus petite qu'une autre. Supposons X_1 et X_2 indépendantes de distribution exponentielle et de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On cherche $P(X_1 < X_2)$.

Prenez note que ce résultat nous sera très utile dans les chaînes de Markov à temps continu.

■ Exemple 4 ■

Supposons qu'un téléphone mobile est composé de deux parties indépendantes: un écran, dont la durée de vie suit une loi exponentielle d'espérance 1000, et le reste de l'appareil, dont la durée de vie suit une distribution exponentielle d'espérance 500 heures. Quelle est la probabilité qu'une panne du téléphone soit causée par un bris de l'écran ?

▷

2.1.5 Loi du minimum d'exponentielles

Supposons $X_1, X_2, ... X_n$ des variables aléatoires de distribution exponentielles de paramètres λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Le minimum des X_i est une variable exponentielle de paramètres $\sum_i \lambda_i$:

Une conséquence du résultat précédent est obtenue en considérant la probabilité qu'une variable aléatoire X_i soit plus petite que n autres. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires exponentielles de taux $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Alors:

2.1.6 Convolutions d'exponentielles

Soit X_i $(i = 1, ..., n)$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de taux respectif λ_i $(i = 1, ..., n)$ et supposons que pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. La variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est dite une variable aléatoire *hypoexponentielle*. Pour $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t f_{X_1}(s) f_{X_2}(t-s)\ ds \\
&= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}\ \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-s)}\ ds \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s}\ ds \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s} \right]_0^t \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.
\end{aligned}
$$

Pour $n = 3$, on trouve de façon similaire:

$$f_{X_1+X_2+X_3}(t) = \sum_{i=1}^{3} \left[\lambda_i e^{-\lambda_i t} \left(\prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \right],$$

et on pourrait démontrer par récurrence que:

$$f_{X_1+X_2 \cdots +X_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,n} \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad \text{où} \quad C_{i,n} = \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Notons que la distribution a n paramètres. À titre d'exemple, vérifions la formule pour $n = 2$. On a:

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2} &= \sum_{i=1}^{2} C_{i,2} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \\ &= C_{1,2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_{2,2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

■ Exemple 5 ■

Considérons un système à deux serveurs, dans lequel un client est servi par un des deux serveurs puis sort du système. Le temps de service du serveur i suit une distribution exponentielle de taux μ_i ($i = 1, 2$). Quand vous arrivez, vous trouvez le serveur 1 occupé (client A), et un autre client au serveur 2 (client B).

Combien de temps (en moyenne) allez-vous restez dans le système ?

[Suite / variante] Maintenant si on a n serveurs tel que $\mu_i = \mu \; \forall i = 1, ..., n$; on entre dans le bureau et tous les guichets sont occupés ! Quel votre temps moyen de service si le nombre de guichets n tends vers l'infini ?

■ Exemple 6 ■

[Ross, chap 5, ex 20] Considérons un système à deux serveurs, dans lequel un client est servi d'abord par le serveur 1, puis par le serveur 2, et enfin sort du système. Le temps de service du serveur i suit une distribution exponentielle de taux μ_i $(i = 1, 2)$. Quand vous arrivez, vous trouvez le serveur 1 libre, et deux clients au serveur 2: le client A est en train d'être servi, et le client B attends son tour.

a. *Trouvez P_A, la probabilité que A soit encore en train d'être servi quand vous avez fini d'être servi par le premier serveur.*
b. *Trouvez P_B, la probabilité que B soit encore dans le système quand vous avez fini d'être servi par le premier serveur.*
c. *Trouvez $E[T]$, le temps moyen que vous passerez dans le système.*

▷

2.1.7 La distribution de Poisson

Ross, p32.
Karlin p267

Une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2, ...$ suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si:

$$P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Siméon Poisson
1781–1840

On a:

$$E[X] = \lambda, \qquad Var[X] = \lambda.$$

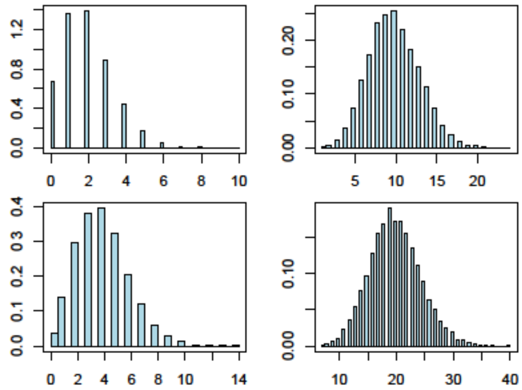


Figure 2.2 Exemples de distribution de Poisson, de paramètres $\lambda = 2, 10, 4, 20$.

P4 ⊟ Somme de Poisson Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement, alors la somme $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Notons que la distribution de Poisson peut être utilisée pour approximer une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, quand n est grand et p petit. Soit $X \sim Bin(n, p)$, et $\lambda = np$. Alors si $n \to \infty$, et $\lambda = np$ est constant:

$$P[X = i] \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Karlin, p279 C'est la *loi des évènements rare*[2]. Cette loi stipule que si un évènement peut se produire dans un grand nombre de possibilités, mais que la probabilité que l'évènement se produise à chaque possibilité est petit, alors le nombre total suit approximativement une loi de Poisson. Montrons-le:

[2] *(law of rare events)*

$$
\begin{aligned}
P[X=k] &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

■ Exemple 7 ■

Supposons que des naissances se produisent de telle sorte que la probabilité qu'une naissance survienne dans une période d'une minute est de 0.0305. Calculez, en utilisant la loi binomiale, la probabilité d'avoir une naissance (exactement) dans 60 minutes, puis faites le même calcul en approximant par la loi de Poisson.

Notez que ce résultat se généralise si la probabilité de chaque évènement n'est pas identique. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de Bernouilli tel que:

$$P[X_i = 1] = p_i, \qquad P[X_i = 0] = 1 - p_i,$$

et soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Si $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ alors S_n a une distribution binomiale. Mais si les p_i ne sont pas égaux, les choses deviennent plus complexes. Ce qui est intéressant est que même dans ce cas, l'approximation par la loi de Poisson est valide. On a:

$$\left| P[S_n = k] - \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2,$$

où $\mu = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Si tous les p_i sont égaux, alors $p_1 = p_2 = ... = \mu/n$, et le terme de droite de l'équation précédente se réduit à μ^2/n^2.

2.2 Processus de comptage

Un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'évènements qui se sont produits au temps t. Quelques exemples:

a) Si $N(t)$ est le nombre de personnes entrant dans un magasin au temps t ou avant t, alors $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage dans lequel un évènement correspond à une personne entrant dans le magasin. Notons que si $N(t)$ était le nombre de personnes dans le magasin au temps t, alors $N(t)$ n'est pas un processus de comptage, car $N(t)$ peut décroître.

b) Si un évènement correspond à la naissance d'un enfant, alors $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage, où $N(t)$ est le nombre total de naissance au temps t.

P5 ⊟ **Processus de comptage** Un processus de comptage satisfait :

i) $N(t) \geq 0$.
ii) $N(t)$ a des valeurs entières.
iii) Si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$.
iv) Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nombre d'évènements qui se produisent dans l'intervalle de temps $(s, t]$.

Un processus de comptage est dit à *accroissements indépendants*[3] si le nombre d'évènements qui se produisent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. Par exemple, cela veut dire que le nombre d'évènements qui se sont produits avant ou à $t = 10$, c'est-à-dire $N(10)$, doit être indépendant du nombre d'évènements qui se produisent entre les temps 10 et 15, c'est-à-dire $N(15) - N(10)$. Formellement, pour $t_0 = 0 < t_1 <$

[3] independant increments

$t_2 < \cdots < t_n$ les accroissements $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendants. Cette hypothèse semble valide pour l'exemple (a), mais ne paraît pas raisonnable pour l'exemple (b). En effet, $N(t)$ peut être très grand, donc le nombre de naissance entre t et $t+s$ sera aussi grand. Ainsi $N(t)$ ne semble pas indépendant de $N(t+s) - N(t)$, et donc $\{N(t), t \geq 0\}$ n'est pas à accroissements indépendants.

Un processus de comptage possède des *accroissements stationnaires*[4] si la distribution du nombre d'évènements qui se produisent dans n'importe quel intervalle de temps dépend seulement de la longueur de cet intervalle. C'est-à-dire que le processus à des accroissements stationnaires si le nombre d'évènements dans l'intervalle de temps $(s, s+t)$ a la même distribution pour tout s. Notons qu'un processus ayant des accroissements stationnaires est aussi appelé processus *homogène dans le temps*.

L'hypothèse des accroissements stationnaires serait raisonnable pour l'exemple (a) seulement s'il n'y a pas de moments dans la journée ou les clients sont susceptibles d'entrer dans le magasin. S'il y a une heure de pointe, alors l'hypothèse des accroissements stationnaires est injustifiée. Si la population de la terre est à peu près constante, alors l'hypothèse des accroissements stationnaires paraît justifiée.

2.3 Définition du processus de Poisson

Un des plus importants processus de comptage est le processus de Poisson, défini comme suit:

D2 ⊠ *Processus de Poisson* *Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si:*

i) $N(0) = 0$.
ii) Le processus a des accroissements indépendants.
iii) Le nombre d'évènements dans un intervalle de longueur t est distribué selon une loi de Poisson d'espérance λt. C'est-à-dire, pour tout s, $t \geq 0$:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

Notons que par la condition (iii), un processus de Poisson a des accroissements stationnaires, et que:

$$E[N(t)] = \lambda t,$$

[4] stationary increments

ce qui explique pourquoi λ s'appelle le taux du processus: le nombre d'arrivées moyen dans un intervalle de temps t est λt, ou λ par unité de temps. Pour déterminer si un quelconque processus de comptage est un processus de Poisson, on doit montrer que les conditions (i), (ii), et (iii) sont satisfaites. Les deux premières conditions peuvent habituellement être vérifiées directement par notre connaissance du processus, mais la troisième condition n'est pas toujours facile à vérifier. C'est pourquoi nous allons voir une autre définition d'un processus de Poisson, après avoir défini la fonction *petit ordre de* h, $o(h)$. Voyons d'abord un exemple simple.

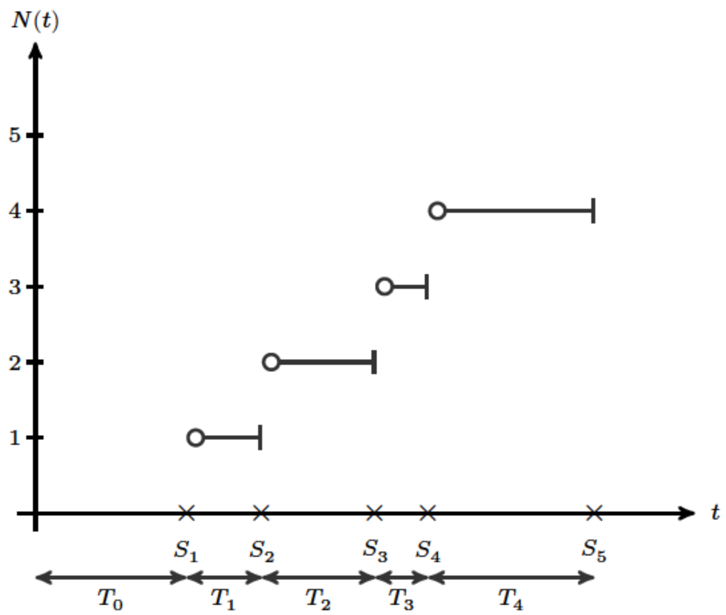


Figure 2.3 Exemple de processus de Poisson, ou l'on voit les temps de séjour T_n et les temps d'attente S_n.

■ Exemple 8 ■

Des bris se produisent le long d'un câble sous-marin selon un processus de Poisson à un taux de $\lambda = 0.1$ *par kilomètre.*

a. *Quelle est la probabilité qu'aucun bris ne survienne dans les deux premiers kilomètres du câble ?*

▷

b. *Sachant qu'il n'y a pas de bris dans les deux premiers kilomètres du câble, quelle est la probabilité conditionnelle qu'il n'y ait pas de bris entre les kilomètres 2 et 3 ?*

$\triangleright$

■ Exemple 9 ■

Des clients arrivent dans un dépanneur selon un Processus de Poisson de taux $\lambda = 4$ par heure. Sachant que le dépanneur ouvre à 9h00, quelle est la probabilité conjointe qu'un client soit arrivé avant 9h30 et qu'un total de 5 soient arrivés avant 11h30 ?

$\triangleright$

D3 ☒ *La fonction $f(\cdot)$ est dite de petit ordre de h, notée $o(h)$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Si $f(\cdot)$ est $o(h)$, elle tends vers 0 infiniment plus vite que h. Voyons quelques exemples:

1) La fonction $f(x) = x^2$ est $o(h)$ car

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0.$$

2) La fonction $f(x) = x$ n'est pas $o(h)$ car
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \neq 0.$$
3) Si $f(\cdot)$ est $o(h)$ et $g(\cdot)$ est $o(h)$, $f(\cdot) + g(\cdot)$ est $o(h)$ car
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0 + 0 = 0.$$
4) Si $f(\cdot)$ est $o(h)$ alors $g(\cdot) = cf(\cdot)$ est aussi $o(h)$ car
$$\lim_{h\to 0} \frac{cf(h)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = c \cdot 0 = 0.$$
5) Par (3) et (4), on déduit que n'importe quelle combinaison linéaire finie de fonctions qui sont toutes $o(h)$ est aussi $o(h)$.

Pour que la fonction $f(\cdot)$ soit $o(h)$, il est nécessaire que $f(h)/h$ tende vers 0 quand h tend vers 0. Mais si h tend vers 0, le seul moyen pour que $f(h)/h$ tende vers 0 est que $f(h)$ tend vers 0 plus vite que h. C'est-à-dire que si h est petit, $f(h)$ doit être petit comparée h.

D4 ⊠ ▬ *Processus de Poisson* ▬ *Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si*

i) $N(0) = 0$.
ii) Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires.
iii) $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$.
iv) $P[N(h) \geq 2] = o(h)$.

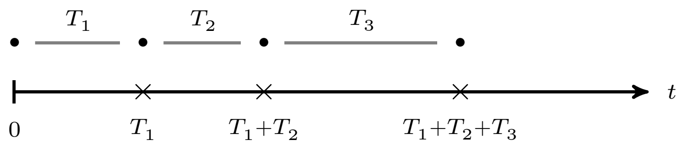
T1 ⊡ Les définitions 2 et 4 sont équivalentes.

■ Preuve ■ On va montrer que la définition 2 implique la 4.

La preuve que la définition 4 implique la 2 vous est offerte dans l'appendice 2.5.3.

2.3.1 Temps d'attente

Considérons un processus de Poisson, et notons le temps où se produit le premier évènement par T_1. De plus, soit T_n le temps qui s'écoule entre les $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ évènements. La suite $\{T_n, n = 1, 2, ...\}$ est appelé *suite des temps entre évènements*. Par exemple, si $T_1 = 5$ et $T_2 = 10$, alors le premier évènement du processus de Poisson s'est produit au temps 5, et le second évènement au temps 15.

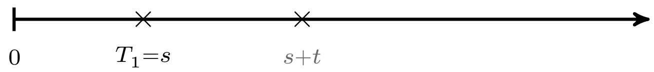


Cherchons la distribution de T_n. Notons d'abord que l'évènement $\{T_1 > t\}$ se produit si et seulement si aucun évènement du processus de Poisson ne se produit dans l'intervalle $[0, t]$, et:

$$P[T_1 > t] =$$

Alors T_1 a une distribution exponentielle d'espérance $1/\lambda$. Cherchons la distribution de T_2.

$$\begin{aligned} P[T_2 > t | T_1 = s] &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$



donc T_2 est $Exp(\lambda)$ et indépendant de T_1. En répétant cet argument, on voit que $T_1, T_2, ...$ sont indépendants tous de distribution $Exp(\lambda)$. Ainsi, généralisons ces résultats:

P6 ⊟ **Temps d'attente** Les temps d'attente entre évènements T_n $(n = 1, 2, ...)$ sont indépendants et identiquement distribués comme des variables aléatoires exponentielle d'espérance $1/\lambda$ si les évènements sont produits selon un processus de Poisson d'intensité λ.

La preuve s'obtient en montrant que la densité conjointe de $T_1, T_2, ..., T_n$ est le produit des densités individuelles, soit:

$$f_{T_1,T_2,...,T_n}(t_1, t_2, ..., t_n) = \lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda t_2} ... \lambda e^{-\lambda t_n}.$$

Les hypothèses de stationnarité et d'indépendance font que le processus ``redémarre'' dès qu'un évènement se produit. À n'importe quel moment, le processus est indépendant de ce qui s'est produit dans le passé (par accroissements indépendants) et a également la même distribution que le processus original (par accroissements stationnaires): ainsi, le processus n'a pas de mémoire, et il est donc attendu que la distribution des temps d'attente soit exponentielle.

■ Exemple 10 ■

Des étudiants arrivent au registrariat de l'université, pour obtenir leur cartes d'étudiants; un étudiant arrive à toutes les 5 minutes en moyenne selon un processus de Poisson. Il y a un seul employé pour faire les cartes. Soit $N(t)$ le nombre d'étudiants qui sont arrivés au temps t depuis que l'employé a commencé son quart de travail. Utilisons les heures comme unité de temps.

i) Quelle est l'intensité (le taux) du processus de Poisson décrit ici?

▷

ii. Sachant que l'employé prends 2 minutes pour faire une carte, quelle est la probabilité qu'il ait le temps de se reposer entre deux arrivées?

▷ Le temps entre deux arrivées suit une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$, c'est-à-dire $1/12$. Comme 2 minutes, c'est $1/30$ d'heure:

$$P[\text{il a le temps de se reposer entre deux arrivées}]$$

mais $T_n \sim Exp(12)$, donc:

$$P[\text{il a le temps de se reposer entre deux arrivées}]$$

iii. Sachant que l'employé commence son travail à midi (12h00) et qu'il arrête de travailler à 16h00, quelle est l'espérance et la variance du temps qu'il passe à faire des cartes d'étudiants ? [Note: il faut supposer une file d'attente et que l'employé reste finir de remplir ses cartes même après 16h00... ie que tout étudiant arrivé entre 12h00 et 16h00 est servi.]

▷ Au cours de son quart de travail, le nombre d'étudiants qui vont se présenter est :

Soit alors Y le nombre de minutes passées à faire des cartes: $Y = 2X$. Alors

$$E[Y] =$$

$$Var[Y] =$$

Ainsi, sur 4 heures de travail, il passera en moyenne 1 heure et 36 minutes (96 min) à faire des cartes d'étudiants. □

Une autre quantité intéressante est le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement, aussi appelé temps d'attente, et noté S_n. On a:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad (n \geq 1).$$

Comme les T_i sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres λ, S_n est donc distribuée comme une somme d'exponentielle i.i.d., c'est-à-dire une selon une distribution Gamma de paramètres n et λ:

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (t \geq 0).$$

Ainsi:

P7 ⊟ Pour un processus de Poisson d'intensité λ, le temps nécessaire pour obtenir n évènements, c'est-à-dire S_n, suit une loi Gamma de paramètres n et λ. On a alors:

$$E[S_n] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[S_n] = n/\lambda^2.$$

Il existe une autre façon de trouver la proposition précédente. Il faut remarquer que le $n^{\text{ème}}$ évènement arrive avant ou au temps t si et seulement si le nombre d'évènements au temps t est au moins n, c'est-à-dire:

$$S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n.$$

De plus, par les accroissements stationnaires et indépendants du processus de Poisson, le temps pour que n évènements se produisent à partir d'un instant t_k, sachant que k évènements se sont produits jusqu'à t_k, a la même distribution que S_n.

$$P[S_{n+k} \leq t + t_k \mid N(t_k) = k] = P[S_n \leq t], \qquad (k = 0, 1, ...).$$

■ Exemple 11 ■

(Suite exemple précédent) Supposons que des étudiants arrivent au registrariat avec intensité (taux) $\lambda = 12$ par heure.

iv. *Quelle est le temps moyen jusqu'à ce que le 48ème étudiant arrive ?*

$\triangleright$

v. *Quelle est la probabilité que le temps entre la 48ème et la 49ème arrivée soit plus grand que 30 minutes ?*

$\triangleright$.

P8 ■ Processus de Poisson ■ Soit une suite de variables aléatoires T_i indépendantes et identiquement distribuées de loi $Exp(\lambda)$, et soit $S_0 = 0$. Soit un processus de comptage où le $n^{\text{ème}}$ évènement se produit au temps

$$S_n \equiv T_1 + T_2 + ... + T_n,$$

alors, le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.

■ Preuve ■ Montrons que $N(0) = 0$ et que $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$. Comme $N(t) = n$ si et seulement si $S_n \leq t$ et $S_{n+1} > t$, alors $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$.

- Au temps $t = 0$, $N(0) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq 0\}$. Comme S_n est toujours positif ou nul, alors $\max\{n \geq 0 : S_n = 0\} = 0$, donc $N(0) = 0$.

- Cherchons la distribution de $N(t)$. On se souvient que $S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n$.

$$\begin{aligned}
P[N(t) = n] &= P[N(t) \geq n] - P[N(t) \geq n+1] \\
&= P[S_n \leq t] - P[S_{n+1} \leq t]] \\
&= \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx - \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n}}{(n)!}\, dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{n!}\left[n\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1} - \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n}\right]\, dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{n!}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}\left[n - (\lambda x)\right]\, dx \\
&= \cdots \\
&= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = P[Poisson(\lambda t) = n]
\end{aligned}$$

donc une loi de Poisson.

2.3.2 Autres propriétés du processus de Poisson

Considérons un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ où l'on peux classifier en deux catégories chaque nouvel évènement indépendamment de tous les autres évènements. Un évènement est classifié de type 1 avec probabilité p et de type 2 avec probabilité $1 - p$. Par exemple supposons que les clients d'une banque arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ, et que chaque nouveau client est un homme avec probabilité $1/2$ et une femme avec probabilité $1/2$. Soit $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre d'arrivées de chacun des types (1 et 2) dans l'intervalle $[0, t]$. Remarquons que $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$; $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont alors des processus de Poisson.

P9 ⊟ ▬ Séparation de deux processus de Poisson ▬ Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Si l'on peux classifier en deux catégories chaque nouvel évènement, tel qu'un évènement est classifié de type 1 avec probabilité p et de type 2 avec probabilité $1 - p$ indépendamment de tous les autres évènements. Soit $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre d'arrivées de chacun des types (1 et 2) dans l'intervalle $[0,t]$. Alors $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ sont tous deux des processus de Poisson d'intensité respective $\lambda \cdot p$ et $\lambda \cdot (1-p)$, et ils sont indépendants.

■ Preuve ■ On va vérifier que $\{N_1(t), t \geq 0\}$ vérifie la deuxième définition des processus de Poisson.

a. Comme $N(0) = 0$, alors $N_1(0) = 0$.
b. Le processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ hérite les accroissements indépendants et stationnaires de $\{N(t), t \geq 0\}$, car la distribution du nombre d'évènements de type I dans un intervalle peut être obtenue en conditionnant sur le nombre d'évènement dans cet intervalle, et la distribution de cette dernière quantité ne dépend que de la longueur de l'intervalle et est indépendante de ce qui s'est produit dans d'autres intervalles.
c.

$$\begin{aligned} P[N_1(h) = 1] &= P[N_1(h) = 1 | N(h) = 1] P[N(h) = 1] \\ &\quad + P[N_1(h) = 1 | N(h) \geq 2] P[N(h) \geq 2] \\ &= p(\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= \lambda p h + o(h). \end{aligned}$$

d. $P[N_1(h) \geq 2] \leq P[N(h) \geq 2] = o(h)$.

Donc $\{N_1(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λp, et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda(1-p)$ par les mêmes arguments. Si $Y = j$ et $Z = k$, il y a eu $j+k$ arrivées dans un intervalle de longueur t; j ont étés assignées de type I, et k ont étés assignées de type II:

$$\begin{aligned} P[Y = j, Z = k] &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!} \cdot \frac{(j+k)!}{j!k!} p^j (1-p)^k \\ &= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t} \frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

et les deux processus sont donc indépendants.

■ Exemple 12 ■

Si des immigrants arrivent dans un certain pays selon un processus de Poisson d'intensité 10 par semaine, et que chaque immigrant provient du pays A avec probabilité $\frac{1}{12}$, alors *quelle est la probabilité qu'aucun immigrant d'origine A émigre dans le pays durant le mois de novembre ?* (On suppose qu'un mois à 4 semaines)

▷

P10 ⊟ ▬ Séparation de k processus de Poisson ▬ Soit un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de taux λ. Si chacun des évènements qui se produisent peut être classé de type i avec probabilité p_i $(i = 1, 2, ..., k, \sum_j p_i = 1)$ *indépendamment* des autres évènements, et si $\{N_i(t), t \geq 0\}$ est le nombre d'évènements de type i dans l'intervalle $[0, t]$, alors les processus $\{N_i(t), t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_i = \lambda p_i$.

Ainsi, si les arrivées d'un processus de Poisson peuvent être classifiés indépendamment en plusieurs groupes, alors le nombre d'arrivée dans chacun des groupes sera une variable de Poisson.

P11 ⊟ ▬ Superposition de deux processus de Poisson ▬ Soit $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ des processus de Poisson indépendants de taux respectifs λ_1 et λ_2. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ défini par:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad t \geq 0$$

est un processus de Poisson de taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Intéressons-nous maintenant à la probabilité que n évènements d'un processus de Poisson se produisent avant que m évènements se soient produit dans un second processus de Poisson indépendant du premier. Soient $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensité λ_1 et λ_2. De plus, soient S_n^1 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du premier processus et S_n^2 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du second processus. On cherche:

$$P[S_n^1 < S_m^2].$$

Considérons tout d'abord le cas où $m = n = 1$. Comme S_1^1 et S_1^2 sont des variables aléatoires exponentielles d''espérance $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$, alors on sait déjà que:

$$P[S_1^1 < S_1^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

■ Exemple 13 ■

Prenons par exemple le passage d'autos et de camions à l'entrée d'un pont; les autos arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda_1 = 100$ *par heure et les camions selon un second processus de Poisson indépendant du premier de taux* $\lambda_2 = 10$*. On peut alors considérer un nouveau processus de Poisson* $N(t)$ *comptant le passage d'un véhicule à l'entrée du pont (en supposant que le pont est interdit à tout autre véhicule comme les motos, les vélos...), ce processus est donc de taux:*

À chaque nouveau véhicule qui passe, la probabilité que ce véhicule soit une auto est:

Considérons maintenant la probabilité que deux évènements se produisent dans le processus $N_1(t)$ avant qu'un évènement se produise dans $N_2(t)$. C'est-à-dire $P[S_2^1 < S_1^2]$. Pour que deux évènements se soient produit dans $N_1(t)$ avant qu'un évènement ne se produise dans $N_2(t)$, le premier évènement à se produire doit être un évènement de $N_1(t)$ (cela se produit avec probabilité $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$). Maintenant, sachant que le premier évènement provient de $N_1(t)$, l'autre condition pour que S_2^1 soit plus petit que S_1^2 est que le second évènement qui se produit provienne encore de $N_1(t)$. Cependant, quand le premier évènement se produit, les deux processus ``redémarrent'' (par la propriété sans-mémoire du processus de Poisson), et donc la probabilité conditionnelle est encore $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Ainsi, la probabilité est:

$$P[S_2^1 < S_1^2] =$$

Le raisonnement montre que chaque évènement qui se produit va être un évènement de $N_1(t)$ avec probabilité $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ou un évènement de $N_2(t)$ avec probabilité $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$, indépendamment de ce qui s'est produit auparavant. Essayons de raisonner de façon plus générale à l'aide d'un exemple.

■ Exemple 14 ■

[Suite de l'exemple 13]

a. *Quelle est la probabilité que deux voitures arrivent avant deux camions ?*

b. Quelle est la probabilité que six voitures arrivent avant quatre camions ?

Donc, la probabilité que $N_1(t)$ atteigne n avant que $N_2(t)$ atteigne m est la probabilité que n faces apparaissent avant m piles si l'on lance une pièce de monnaie dont la probabilté d'obtenir face est $p = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$. Cet évènement se produira si et seulement si les premiers $n+m-1$ lancés donnent n faces ou plus:

$$P[S_n^1 < S_m^2] = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

2.3.3 Distribution conditionnelle des temps d'arrivés

Supposons que l'on sait qu'exactement un évènement d'un processus de Poisson s'est produit jusqu'au temps t, et que nous voulons déterminer la distribution du temps auquel l'évènement s'est produit. Comme un processus de Poisson a des accroissements stationnaires et indépendants, il semble raisonnable que chaque intervalle $[0, t]$ de longueur égale ait la même probabilité de ``contenir'' l'évènement. Ainsi le temps auquel se produit l'évènement devrait être uniforme sur $[0, t]$. Vérifions cette intuition:

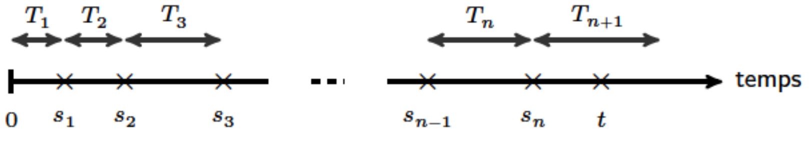
Avant de généraliser ce résultat, faisons un rappel sur les statistiques d'ordre. Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ n variables aléatoires. On dit que $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre correspondant à $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ si la $k^{\text{ème}}$ plus petite valeur de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ est $Y_{(k)}$ pour $k = 1, 2, ..., n$. Par exemple:

$$\begin{aligned} n = 3, \qquad & Y_1 = 4, \quad Y_2 = 5, \quad Y_3 = 1, \\ & Y_{(1)} = 1, \quad Y_{(2)} = 4, \quad Y_{(3)} = 5. \end{aligned}$$

Si les Y_i sont des variables aléatoires continues indépendantes et identiquement distribuées de densité f, la densité conjointe de $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n)}$ est:

$$f(y_1, y_2 ..., y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), \quad y_1 < y_2 < ... < y_n.$$

T2 ⊡ Sachant que $N(t) = n$, les n temps d'arrivée $S_1, ..., S_n$ ont la même distribution que les statistiques d'ordre correspondant à n variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées distribués sur $(0, t)$.



■ Preuve ■ Pour obtenir la distribution conditionnelle de $S_1, ..., S_n$ sachant que $N(t) = n$, notons que pour $0 < S_1 < ... < S_n < t$ les évènements $S_1 = s_1, ... S_n = s_n$, $N(t) = n$ est équivalent à l'évènement que les premiers $n+1$ arrivées satisfont $T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, ..., T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n$. Les temps entre évènements suivent des loi exponentielle; notons que $P(T_{n+1} > t - s_n)$ (le dernier terme) est $1 - F(t - s_n) = \exp[-\lambda(t - s_n)]$. La densité conjointe de $S_1, ..., S_n$ sachant que $N(t) = n$ est:

Autrement dit, sachant qu'il y a eu n arrivées, l'ensemble des temps d'arrivée à la même distribution que la position de n fléchettes jetés au hasard dans l'intervalle $[0, t]$.

T3 ⊡ Si $s < t$ et $0 \leq m \leq n$, alors

$$P[N(s) = m \mid N(t) = n] = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

c'est-à-dire que la distribution conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est $\mathcal{B}in(n, s/t)$.

■ Preuve ■

Supposons que les évènements d'un processus de Poisson peuvent se classer en k catégories, et que la probabilité qu'un évènement soit classé de catégorie i $(i = 1, ..., k)$, dépend du temps auquel l'évènement se produit. Si un évènement se produit au temps y, il sera classifié dans la catégorie i, indépendamment de tout ce qu'il s'est produit auparavant, avec probabilité $P_i(y)$ $(i = 1..., k)$, où $\sum_{i=1}^{k} P_i(y) = 1$.

P12 ⊟ Soient $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$ le nombre d'évènements de catégorie i étant arrivés au temps t, alors $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$, sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes d'espérance:

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)\, ds.$$

■ Preuve ■ Considérons un évènement qui s'est produit dans l'intervalle $[0, t]$, à l'instant s $(0 \leq s \leq t)$. La probabilité que cet évènement soit de type i est $P_i(s)$. D'après les résultats que nous avons vu précédemment (théo. 2 p 32), l'évènement s'est produit à un temps distribué uniformément sur $[0, t]$, donc il sera se type i avec probabilité

$$P_i = \int_0^t \frac{1}{t} P_i(s)\, ds, \quad \text{pour } i = 1, 2, ..., k$$

Donc le processus $N_i(t)$ décrivant le nombre d'évènements de type i dans $[0, t]$ suit une une loi de Poisson de paramètre λP_i, et on a:

$$E[N_i(t)] = \lambda t P_i = \lambda t \int_0^t \frac{1}{t} P_i(s)\, ds = \lambda \int_0^t P_i(s).$$

De plus, on peut utiliser les résultats précédents pour montrer que les $N_i(t)$ sont indépendants.

2.4 Généralisation du processus de Poisson

2.4.1 Processus de Poisson non-homogène

Un processus non-homogène (non-stationnaire) est un processus de Poisson où les arrivées au temps t dépendent de t.

D5 ⊠ ▬ *Processus de Poisson non homogène* ▬ *Le processus de comptage* $\{N(t), t \geq 0\}$ *est dit être un processus de Poisson non-homogène d'intensité* $\lambda(t)$ *(*$t \geq 0$*) si*

i) $N(0) = 0$,
ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ *a des accroissement indépendants,*
iii) $P[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$,
iv) $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$.

En posant

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)\ dy$$

on pourrait montrer que:

$$P[N(s+t) - N(s) = n] = e^{-[m(s+t)-m(s)]}\frac{[m(s+t) - m(s)]^n}{n!},\ n = 0, 1, ...$$

qui a la même forme que pour un processus stationnaire:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

Ainsi, on peut voir que $N(s+t) - N(s)$ est une variable aléatoire de Poisson d'espérance $m(s+t) - m(s)$. Ainsi, $N(t)$ sera une variable aléatoire de Poisson d'espérance $m(t)$, et

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u)\ du.$$

Donc $N(s+t) - N(s)$ a une loi de Poisson de paramètre

$$m(s+t) - m(s) =$$

Ainsi, on a (proposition équivalente à la définition 5):

P13 ⊟ ▬ Processus de Poisson non homogène ▬ On dit que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda(r)$ $(r \geq 0)$ si

i) $N(0) = 0$,
ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissement indépendants,
iii) $N(t+s) - N(s)$ est Poisson d'espérance $\int_s^{s+t} \lambda(r)\, dr$.

Notez que les temps $T_1, T_2, \ldots$ ne sont plus distribués exponentiellement ni indépendants. En effet:

$$= P[T_1 > t] =$$

En dérivant, nous obtenons:

$$f_{T_1}(t) =$$

où $\mu(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$. De plus, on pourrait montrer que

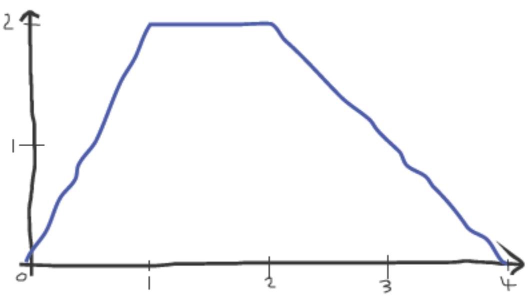
$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \lambda(s)e^{-\mu(s)} \cdot \lambda(s+t)e^{-(\mu(s+t)-\mu(s))}$$

donc T_1 et T_2 ne sont pas indépendants quand $\lambda(s)$ n'est pas constant.

■ Exemple 15 ■

Les demandes d'aide d'étudiants le matin pour un examen ayant lieu l'après-midi se produisent selon un processus de Poisson non homogène de taux:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t, & \textit{pour } 0 \leq t < 1, \\ 2, & \textit{pour } 1 \leq t < 2, \\ 4-t, & \textit{pour } 2 \leq t < 4. \end{cases}$$



où $t = 0$ correspond à 9h00. Quelle est la probabilité que deux demandes se produisent durant les deux premières heures; que deux demandes se produisent durant les deux dernières heures ?

▷

■ Exemple 16 ■

Alexandre travaille dans un stand a hot-dogs qui ouvre à 8 heures le matin. De 8 à heures à 11 heures, les clients arrivent, en moyenne, selon un taux croissant linéairement de 8h à 11h, tel qu'il a environ 5 clients à 8 heures jusqu'à 20 clients à 11 heures. De 11h00 à 13h00, le taux moyen semble constant, en moyenne de 20 clients à l'heure. Ce taux décroît linéairement de 13h00 à 17h00 (la fermeture), et il a en moyenne 12 clients par heure à 17h00. Si nous supposons que les clients arrivant durant des périodes de temps disjointes sont indépendants, alors définissons un modèle décrivant les arrivées des clients au stand. Quelle est la probabilité qu'aucun client ne se présente entre 8h30 et 9h30 ? Combien aura-t il de clients en moyenne durant cette période ?

▷

P14 ⊟ Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$ deux processus de Poisson non homogène et indépendants, de taux respectifs $\lambda(t)$ et $\mu(t)$, et soit $N^\star(t) = N(t) + M(t)$. Alors:

a. $\{N^\star(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène de taux $\lambda(t) + \mu(t)$.

b. Sachant qu'un évènement du processus $\{N^\star(t)\}$ se produit au temps t, alors, indépendamment de ce qui s'est produit avant t, l'évènement à t provient du processus $\{N(t)\}$ avec probabilité

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}.$$

■ Preuve ■ Prouver la partie a) revient à prouver que le processus $N^\star(t)$ satisfait les quatre conditions du processus de Poisson non homogène (voir la définition 5). Nous allons prouver la partie b).

$$\begin{aligned}
P[N(t,t+h)=1\,|\,N^{\star}(t,t+h)=1] &= \frac{P[N(t,t+h)=1, M(t,t+h)=0]}{P[N^{\star}(t,t+h)=1]} \\
&= \frac{P[N(t,t+h)=1]P[M(t,t+h)=0]}{P[N^{\star}(t,t+h)=1]} \\
&= \frac{(\lambda(t)h+o(h))(1-\mu(t)h+o(h))]}{(\lambda(t)+\mu(t))h+o(h)} \\
&= \frac{\lambda(t)h+o(h)}{(\lambda(t)+\mu(t))h+o(h)} \\
&= \frac{\lambda(t)+\frac{o(h)}{h}}{\lambda(t)+\mu(t)+\frac{o(h)}{h}}.
\end{aligned}$$

et on fait tendre $h \to 0$.

2.4.2 Processus de Poisson composé

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \ t \geq 0$$

où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson, et $\{Y_i, i \geq 1\}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. qui est aussi indépendante de $\{N(t), t \geq 0\}$. La variables $X(t)$ est dite une variable aléatoire de Poisson composée.

Exemples:

1. Si $Y_i \equiv 1$, alors $X(t) = N(t)$, et nous avons un processus de Poisson.
2. Des autobus arrivent à une rencontre selon un processus de Poisson, et le nombre de passagers dans chacun des autobus sont des v.a. i.i.d. Alors $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé où $X(t)$ dénote le nombre de passagers qui sont arrivés à t. Ainsi Y_i de la définition représente le nombre de passagers dans le $i^{\text{ème}}$ autobus.

Si $X(t)$ est une variable de Poisson composée, on a:

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1],$$

$$Var[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2].$$

Afin de démontrer ce résultat, dans le cas particulier ou l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire Y_1 est fini ou infini dénombrable. Notez cependant que le résultat est vrai en général !

■ Exemple 17 ■

Des familles migrent dans un pays selon un processus de Poisson d'intensité 2 par semaine. Si le nombre de personnes dans chaque famille est indépendante et prends les valeurs 1,2,3 et 4 avec probabilités respectives $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$, alors quelle est l'espérance et la variance du nombre de personnes migrant dans le pays durant une période de 5 semaines ?

▷ *On a:*

$$E[Y_i] =$$

$$E[Y_i^2] =$$

Alors $X(5)$ est le nombre de personnes migrant durant 5 semaines, on a:

$$E[X] =$$

$$Var[X] =$$

$$\therefore$$

2.5 Annexes

2.5.1 Propriété sans mémoire de la distribution géométrique

Remarquons tout d'abord, que si Z si une distribution géométrique de paramètre p, alors

$$P[Z = k] = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ensuite, évaluons $P[Z > t]$:

$$\begin{aligned}
P[Z > t] &= \sum_{j=t+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}p \\
&= p(1-p)^t \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \\
&= \frac{p(1-p)^t}{p} = (1-p)^t.
\end{aligned}$$

Voyons si la distribution géométrique est sans mémoire:

$$\begin{aligned}
P[Z > s+t \mid Z > s] &= \frac{P[Z > s+t \cap Z > s]}{P[Z > s]} \\
&= \frac{P[Z > s+t]}{P[Z > s]} \quad t \text{ positif} \\
&= \frac{\sum_{j=s+t+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}p}{\sum_{j=s+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}p} \\
&= \frac{(1-p)^{s+t} \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j}{(1-p)^s \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j} \\
&= (1-p)^t = P[Z > t].
\end{aligned}$$

Donc la distribution géométrique est sans mémoire (c'est d'ailleurs la seule distribution discrète sans mémoire).

2.5.2 Espérance et variance d'une loi exponentielle

Une variable aléatoire X exponentielle suit une distribution exponentielle avec paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\ dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Son espérance est:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\ dx \\ &= \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\ dx \\ &= \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments $\Phi(t)$ est :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= E[e^{tx}] \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\ dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda - t)}\ dx \\ &= \left[-\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-x(\lambda - t)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda \end{aligned}$$

Alors on a:

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \qquad \Phi'(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$\Phi''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \qquad \Phi''(0) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\text{et} \quad Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

2.5.3 Implication des deux définitions du processus de Poisson

On va montrer que la définition 4 implique la 2. Soit $u \geq 0$, et soit

$$g(t) = E\left[e^{-uN(t)}\right]$$

Construisons une équation différentielle pour $g(t)$:

$$\begin{aligned} g(t+h) &= E\left[e^{-uN(t+h)}\right] \\ &= E\left[e^{-uN(t+h)-uN(t)+uN(t)}\right] \\ &= E\left[e^{-uN(t)}e^{-u(N(t+h)-N(t))}\right] \\ &= E\left[e^{-uN(t)}\right]E\left[e^{-u(N(t+h)-N(t))}\right], \text{ par accroissements indépendants} \\ &= g(t)E\left[e^{-uN(h)}\right], \text{ par accroissements stationnaires} \end{aligned}$$

Les hypothèse (iii) et (iv) impliquent que

$$P[N(h) = 0] = 1 - P[N(h) = 1] - P[N(h) \geq 2] = 1 - \lambda h + o(h)$$

En conditionnant sur $N(h) = 0$, $N(h) = 1$ ou $N(h) \geq 2$,

$$\begin{aligned} E\left[e^{-uN(h)}\right] &= E\left[e^{-uN(h)}|N(h) = 0\right]P[N(h) = 0] \\ &\quad + E\left[e^{-uN(h)}|N(h) = 1\right]P[N(h) = 1] \\ &\quad + E\left[e^{-uN(h)}|N(h) \geq 2\right]P[N(h) \geq 2] \\ &= P[N(h) = 0] + e^{-u}P[N(h) = 1] \\ &\qquad + E\left[e^{-uN(h)}|N(h) \geq 2\right]P[N(h) \geq 2] \\ &= 1 - \lambda h + o(h) + e^{-u}(\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= 1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Notons que $E[e^{-uN(h)}|N(h) \geq 2] = \sum_{i=2} E[e^{-uN(h)}|N(h) = i] = E[e^{-u2}] + E[e^{-u3}] + \cdots$. Ainsi, on obtient:

$$
\begin{aligned}
& g(t+h) = g(t)(1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h) + o(h) \\
\Leftrightarrow\ & g(t+h) = g(t) - g(t)\lambda h + g(t)e^{-u}\lambda h + o(h) \\
\Leftrightarrow\ & g(t+h) - g(t) = g(t)\lambda h(e^{-u} - 1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = g(t)\lambda(e^{-u} - 1)
\end{aligned}
$$

et si $h \to 0$, alors on obtient:

$$
\begin{aligned}
g'(t) =& g(t)\lambda(e^{-u} - 1) \\
\frac{g'(t)}{g(t)} =& \lambda(e^{-u} - 1)
\end{aligned}
$$

En intégrant, et en utilisant le fait que $g(0) = 1$:

$$\log g(t) = \lambda t(e^{-u} - 1), \quad \text{ou} \quad g(t) = e^{\lambda t(e^{-u}-1)}$$

C'est-à-dire, la transformée de Laplace de $N(t)$ évaluée à u est $e^{\lambda t(e^{-u}-1)}$. Comme c'est aussi la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de Poisson d'espérance λt, on a le résultat voulu en notant que la distribution d'une variable aléatoire non négative est uniquement déterminée par sa transformée de Laplace.
[Note: la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ est définie par:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = E[e^{-ts}]$$

où $f(t)$ est définie pour $t \geq 0$. De plus, lorsque $f_X(x)$ est la fonction de densité alors, $M_X(s) = \mathcal{L}[f_X(x)](-s) = E[e^{-Xs}]$ est la série génératrice des moments de X].

2.6 Résumé des principaux résultats

2.6.1 Loi exponentielle

- Une variable aléatoire X suit une distribution exponentielle si

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{si } x \geq 0, \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{si } x \geq 0$$

$$\text{et} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

- Une variable aléatoire est sans mémoire si:

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \quad \forall s, t \geq 0.$$

et la seule variable aléatoire sans mémoire est la distribution exponentielle.

- Le taux de panne est défini comme $r(t) = f(t)/(1 - F(t))$.
- Soient $X_1, ..., X_n$ $Exp(\lambda)$ iiid. La somme $Y = X_1 + ... + X_n$ a une distribution Gamma de paramètres n et λ:

$$E[Y] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[Y] = n/\lambda^2.$$

- Soient $X_i \sim$ Exp(λ_i). $P[X_1 < X_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.
- Soient $X_i \sim$ Exp(λ_i). Alors $\min(X_1, X_2, ..., X_n) =$ Exp$\left(\sum_i \lambda_i\right)$.
- Soient $X_i \sim$ Exp(λ_i). Alors $P[X_i = \min_j X_j] = \lambda_i / \sum_j \lambda_j$.

2.6.2 Processus de Poisson

- Une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2, ...$ suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si:

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

On a: $E[X] = \lambda$ et $Var[X] = \lambda$.

- Si $X_i \sim$ Poisson(λ_i), alors $Y = \sum_i X_i \sim$ Poisson$(\sum_i \lambda_i)$.
- Loi des évènements rares; si $X_i \sim$ Bernouilli(p_i), alors:

$$\left| P[X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k] - \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2,$$

où $\mu = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

- Un processus de comptage satisfait :

i) $N(t) \geq 0$.
ii) $N(t)$ a des valeurs entières.
iii) Si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$.
iv) Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nombre d'évènements qui se produisent dans l'intervalle de temps $(s, t]$.

- (Def, 2) Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si:

  i) $N(0) = 0$.
  ii) Le processus a des accroissements indépendants.
  iii) Le nombre d'évènements dans un intervalle de longueur t est distribué selon une loi de Poisson d'espérance λt. C'est-à-dire, pour tout s, $t \geq 0$:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

- (Def, 4) Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson de taux λ ($\lambda > 0$) si

  i) $N(0) = 0$.
  ii) Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires.
  iii) $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$.
  iv) $P[N(h) \geq 2] = o(h)$.

- Les temps d'attente entre évènements T_n ($n = 1, 2, ...$) sont indépendants et identiquement distribués comme des variables aléatoires exponentielle d'espérance $1/\lambda$ si les évènements sont produits selon un processus de Poisson d'intensité λ.

- Pour un processus de Poisson d'intensité λ, le temps nécessaire pour obtenir n évènements, c'est-à-dire S_n, suit une loi Gamma de paramètres n et λ. On a alors:

$$E[S_n] = n/\lambda \quad \text{et} \quad Var[S_n] = n/\lambda^2.$$

- On a la propriété remarquable:

$$S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n.$$

- (Troisième déf. PdP) Soit une suite de variables aléatoires T_i indépendantes et identiquement distribuées de loi $Exp(\lambda)$, et soit $S_0 = 0$. Soit un processus de comptage où le $n^{\text{ème}}$ évènement se produit au temps

$$S_n \equiv T_1 + T_2 + ... + T_n,$$

  alors, le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.

- (Séparation de processus de Poisson) Soit un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de taux λ. Si chacun des évènements qui se produisent peut être classé de type i avec probabilité p_i ($i = 1, 2, ..., k$, $\sum_j p_i = 1$) *indépendamment* des autres évènements, et si $\{N_i(t), t \geq 0\}$ est le nombre d'évènements de type i dans l'intervalle $[0, t]$, alors les processus $\{N_i(t), t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_i = \lambda p_i$.

- (Superposition de processus de Poisson) Soit $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ des processus de Poisson indépendants de taux respectifs λ_1 et λ_2. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ défini par:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad t \geq 0$$

  est un processus de Poisson de taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

- ($P[S_n^1 < S_m^2]$) Soient S_n^1 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et S_n^2 le temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ évènement du processus $\{N_2(t), t \geq 0\}$, alors:

$$P[S_n^1 < S_m^2] = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

- Sachant que $N(t) = n$, les n temps d'arrivée $S_1, ..., S_n$ ont la même distribution que les statistiques d'ordre correspondant à n variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées distribués sur $(0, t)$.

- Si $s < t$ et $0 \leq m \leq n$, alors

$$P[N(s) = m \mid N(t) = n] = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

  c'est-à-dire que la distribution conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est $\mathcal{B}in(n, s/t)$.

- Soient $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$ le nombre d'évènements de catégorie i étant arrivés au temps t; si un évènement se produit au temps y, il sera classifié dans la catégorie i, indépendamment de tout ce qu'il s'est produit auparavant, avec probabilité $P_i(y)$ ($i = 1..., k$), où $\sum_{i=1}^{k} P_i(y) = 1.$; alors $N_i(t)$, $i = 1, ..., k$, sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes d'espérance

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)\, ds$$

- On dit que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda(r)$ $(r \geq 0)$ si

i) $N(0) = 0$,
ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissement indépendants,
iii) $N(t+s) - N(s)$ est Poisson d'espérance $\int_s^{s+t} \lambda(r)\, dr$.

Si $m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy$, alors $N(s+t) - N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson d'espérance $m(s+t) - m(t)$.

- Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$ deux processus de Poisson non homogène et indépendants, de taux respectifs $\lambda(t)$ et $\mu(t)$, et soit $N^\star(t) = N(t) + M(t)$. Alors:

  a. $\{N^\star(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène de taux $\lambda(t) + \mu(t)$.

  b. Sachant qu'un évènement du processus $\{N^\star(t)\}$ se produit au temps t, alors, indépendamment de ce qui s'est produit avant t, l'évènement à t provient du processus $\{N(t)\}$ avec probabilité

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}.$$

  c. Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \ t \geq 0$$

  où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson, et $\{Y_i, i \geq 1\}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. qui est aussi indépendante de $\{N(t), t \geq 0\}$.

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1], \qquad Var[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2].$$

[Chaîne de Markov]

3

[à temps continu]

3 Chaînes de Markov à temps continu

Nous avons déjà rencontré une chaîne de Markov à temps continu: le processus de Poisson. En effet, si nous définissons une chaîne de Markov où l'état de la chaîne au temps t est $N(t)$, alors nous avons une chaîne de Markov à temps continu, qui passe systématiquement de l'état n à l'état $n+1$. Un tel processus est un processus de naissance pur. De façon plus générale, un modèle exponentiel qui peut aller de l'état n vers les états n et $n-1$ est un processus de naissance et de mort.

3.1 Introduction

Supposons un processus stochastique à temps continu $\{X(t), t \geq 0\}$ prenant des valeurs entières non négatives sur l'espace des états $\mathcal{S}_{X(t)}$. Par analogie avec une chaîne de Markov à temps discret, on dit que $\{X(t), t \geq 0\}$ est une *chaîne de Markov à temps continu* (CMTC) si pour tout $s, t \geq 0$ et des entiers non négatifs $i, j, x(u), 0 \leq u < s$

$$P[X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s] = P[X(t+s) = j | X(s) = i].$$

Une chaîne de Markov à temps continu est donc un processus stochastique ayant la propriété markovienne que la distribution conditionnelle du futur $X(t+s)$ sachant l'actuel $X(s)$ et le passé $X(u) = x(u)$ $(0 \leq u < s)$ dépend seulement du présent et est indépendant du passé. Si, de plus,

$$P[X(t+s) = j | X(s) = i]$$

ne dépend pas de s, alors la chaîne de Markov à temps continu est dite avoir des probabilités de transition *stationnaires* ou *homogènes*. Nous ne travaillerons qu'avec de telles chaînes.

Supposons qu'une CMTC entre à l'état i à un moment donné, disons au temps 0, et y reste 10 minutes (aucune transition pendant ce temps). Quelle est la probabilité que le processus ne quitte pas l'état i les 5 minutes suivantes? Comme le processus est à l'état i au temps 10, par les propriétés markoviennes, il en suit que la probabilité qu'il reste dans cet état dans l'intervalle $[10, 15]$ est juste la probabilité qu'il reste à l'état i pour au moins 5 minutes. C'est-à-dire, si T_i est le temps que le processus passe à l'état i avant de faire une transition vers un autre état:

$$P[T_i > 15 | T_i > 10] = P[T_i > 5],$$

ou par le même raisonnement:

$$P[T_i > s + t | T_i > s] = P[T_i > t]$$

pour tout $s, t \geq 0$. Donc la variable T_i est *sans-mémoire*, et doit donc être exponentielle. Ainsi, quel que soit le temps que le processus a déjà passé dans un état i, la probabilité qu'il y reste un temps supplémentaire s est la même que s'il venait d'arriver dans cet état.

Ceci nous donne un autre moyen de définir une chaîne de Markov à temps continu: c'est un processus stochastique ayant la propriété que chaque fois qu'il rentre à l'état i:

i. le temps qu'il passe dans cet état avant de faire une transition vers un autre état suit une loi exponentielle d'espérance $1/v_i$,

ii. quand le processus quitte l'état i, il va à l'état j $(j \neq i)$ avec probabilité P_{ij} qui satisfait:

$$P_{ii} = 0, \quad \text{pour tout } i,$$
$$\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{ij} = 1, \quad \text{pour tout } i.$$

Une CMTC est donc un processus stochastique qui passe d'un état à une autre selon une chaîne de Markov à temps discret, mais de telle sorte que le temps passé dans chaque état, avant de changer d'état, est distribué exponentiellement. De plus, le temps passé à l'état i et l'état suivant sont indépendants. Si l'état suivant dépendait de T_i, alors l'information sur le temps que le processus aurait passé à l'état i serait utile à la prédiction du prochain état, ce qui contredit l'hypothèse markovienne.

Les probabilités de transition définies ci-dessus sont des probabilités de transition en une étape de la chaîne de Markov à temps discret qui est imbriquée[1] dans la chaîne de Markov

[1] ``embedded''

à temps continu (notez que la diagonale de cette matrice est composée uniquement de zéros). Définissons

$$P_{ij}(t) = P[X(t+s) = j | X(s) = i],$$

la probabilité d'aller des états i à j en t unités de temps. La probabilité $P_{ij}(t)$ est l'équivalent en temps continu de la probabilité $P_{ij}^{(n)}$ en temps discret. Les notions d'accessibilité et de communication sont similaires: s'il existe t et t' tel que $P_{ij}(t) > 0$ et $P_{ji}(t') > 0$, alors les états i et j communiquent. Si l'état i est absorbant, alors

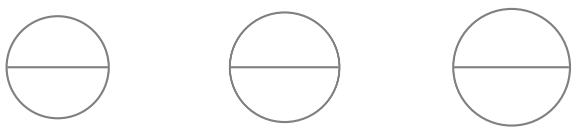
$$P_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $v_i = 0$ par convention .

■ Exemple 1 ■

L'accès aux étages dans un pavillon de l'université se fait à l'aide de deux ascenseurs. Chaque ascenseur fonctionne un temps exponentiel d'espérance $1/\mu$, et le temps de réparation d'un ascenseur suit une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$ (il n'y a qu'un seul réparateur). En considérant le nombre d'ascenseur en fonction comme l'espace des états de la chaîne, modélisons cette chaîne de Markov à temps continu.

▷



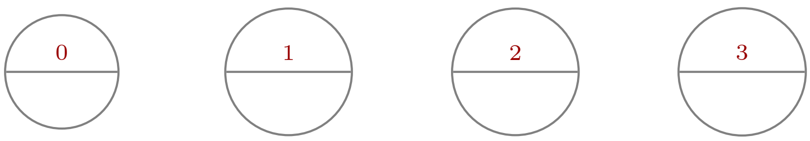
3.2 Quelques exemples particuliers

Considérons un système dans lequel les états sont représentés par le nombre de personnes dans le système à cet instant. Supposons que l'on a n personnes dans le système; des arrivées se font dans le système à un taux exponentiel λ_n, et les personnes quittent le système à un taux μ_n. C'est-à-dire que si il y a n personnes dans le système, le temps avant une nouvelle arrivée est distribué exponentiellement d'espérance $1/\lambda_n$, et est indépendant du temps où la prochaine personne quitte, qui est lui même distribué exponentiellement d'espérance $1/\mu_n$, Un tel système est un *processus de naissance et de mort*[2] . Les paramètres $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont appelés respectivement les taux de naissance (arrivée) et de mort (départ).

Un processus de naissance et de mort est une chaîne de Markov à temps continu d'états $\{0, 1, ...\}$ pour lesquels on peut aller seulement vers les états $n-1$ ou $n+1$. Les relations entre les taux de naissance et de mort, et les probabilités sont:

$$\begin{aligned} v_0 &= \\ v_i &= \\ P_{01} &= \\ P_{i,i+1} &= \\ P_{i,i-1} &= \end{aligned}$$

Si il y a i personnes dans le système, alors le prochain état sera $i+1$ si une naissance arrive avant une mort. De plus, le temps avant qu'une naissance ou qu'une mort se produise est distribué exponentiellement de taux $\lambda_i + \mu_i$, et donc $v_i = \lambda_i + \mu_i$.



Remarques:

- Un processus de naissance et de mort peut être utilisé pour modéliser, comme son nom le suggère, la taille d'une population. Mais il peut aussi être utilisé pour

[2] ``birth and death process''

modéliser une *foule* d'autres choses: nombre de clients dans un magasin, nombre de machines en état de fonctionnement, etc.

- Notez qu'à l'état 0, on peut avoir une naissance: ce n'est pas parce que l'état du système est 0 que l'on ne peut pas avoir une arrivée.
- Par contre, à l'état 0, on ne peut avoir de mort !

■ Exemple 2 ■

Considérons un processus de naissance et de mort tel que

$$\lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0,$$
$$\mu_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Décrivez le processus.

▷

George Yule
1871

■ Exemple 3 ■

Voyons un exemple particulier de processus de naissance et de mort, le processus de Yule. *Soit $X(t)$ la taille d'une population au temps t. Chaque individu de la population peut donner naissance au bout d'un temps exponentiel d'espérance $1/\lambda$ à un nouvel individu, indépendamment des autres individus. Les individus ne meurent jamais. $\{X(t), t \geq 0\}$ est un* processus de naissance pur. *Le taux de naissance du processus est donc:*

$$\lambda_n =$$

Si il y a n personnes dans la population, le temps moyen (exponentiel) avant d'avoir une naissance est donc

■ Exemple 4 ■

Soit un processus de naissance et de mort où chaque individu d'une population donne naissance à un nouvel individu à un taux exponentiel λ. Les morts se produisent à un taux exponentiel μ par individu. De plus, un nouvel individu arrive par immigration dans la population à un taux exponentiel θ. Quels sont les taux de naissance et de mort du processus considéré ?

▷ $\mu_n = \qquad\qquad , \qquad \lambda_n =$

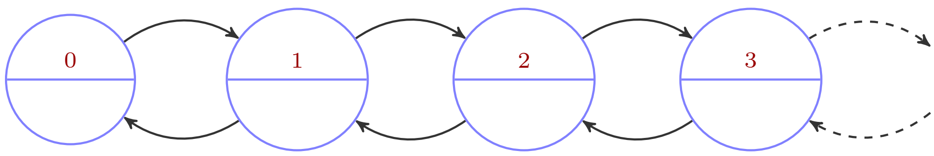
■ Exemple 5 ■

Un système $M/M/1$ est tel que des arrivées se font selon un processus de Poisson d'intensité λ, dans un système où l'on a 1 guichet (serveur). Les clients (indépendamment des arrivés du processus de Poisson) ont des temps de service S_n distribués exponentiellement de taux μ. Les clients arrivant vont dans une file d'attente et sont servis selon leur ordre d'arrivée (FIFO: ``First in, First out''). Soit $X(t)$ le nombre de clients au temps t dans le système (clients en attente + clients servis). Donc, par exemple, si $X(t) = 2$, on a 1 client dans la file d'attente, et 1 servi. Une transition se fait quand un client part ou un autre arrive. On a un processus de naissance et de mort. Si $X(t) = 0$, le temps avant qu'un évènement ne se produise est $Exp(\lambda)$. Si $X(t) = i$, le temps avant qu'il se produise un évènement est le temps minimum entre le temps de service et le temps d'arrivée d'un nouveau client, soit $Exp(\lambda + \mu)$ (par indépendance des services et des arrivées). Clairement on a:

$$P_{01} =$$

$$P_{i,i+1} = \qquad , \qquad P_{i,i-1} =$$

Notons que les taux de naissance et de mort, quand on a i personnes dans le système, λ_i et μ_i sont constants: λ et μ respectivement.



■ Exemple 6 ■

Un système $M/M/s$ est un système similaire avec s guichets au lieu d'un. Supposons que $s = 2$. Donc $X(t) = 4$ signifie que deux clients sont en attente, et deux sont servis. Quand $X(t) = 0$ ou $X(t) = 1$, le temps avant qu'un évènement ne se produise est $Exp(\lambda)$ et $Exp(\lambda + \mu)$ respectivement. Si $X(t) \geq 2$, les deux guichets sont occupés et le temps avant un départ est $Exp(\mu + \mu)$. Donc le temps avant qu'un évènement ne se produise est $Exp(\lambda + 2\mu)$. De façon générale, quand $s \geq 2$, on a avec i individus dans le système:

$$\lambda_i =$$

$$\mu_i = \begin{cases} \quad , & \text{si } 0 \leq i \leq s, \\ \quad , & \text{si } i > s \end{cases}$$

et la distribution du temps avant qu'un évènement ne se produise est

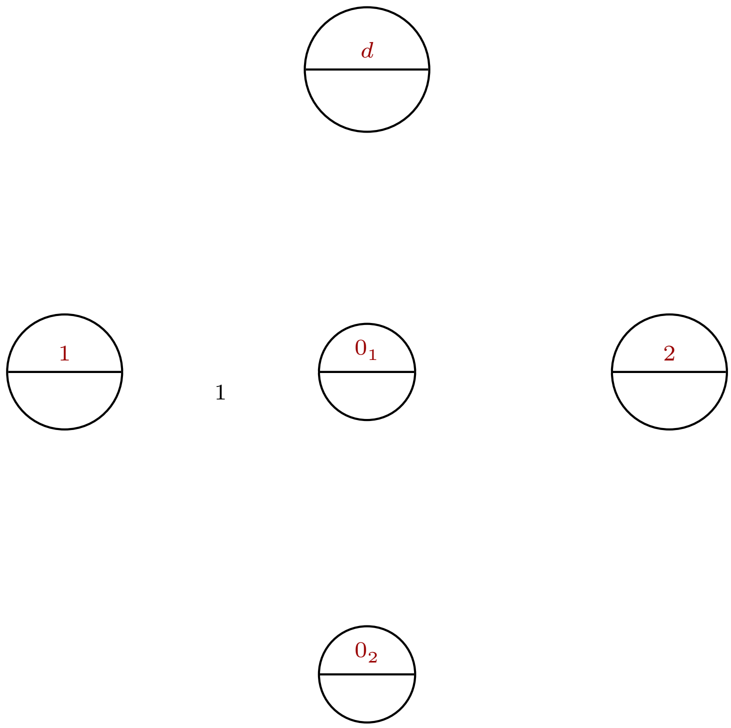
■ Exemple 7 ■

Considérons deux machines M_1 et M_2 entretenues par un unique réparateur. La machine i fonctionne un temps exponentiel μ_i avant de tomber en panne ($i = 1, 2$). Le temps de réparation pour une machine est $Exp(\mu)$. Considérons les états:

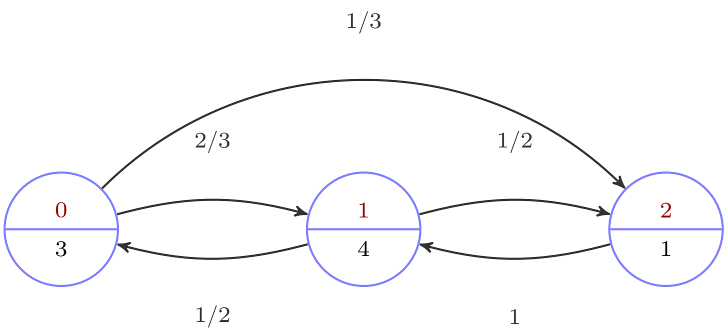
$$\begin{cases} d & \text{: les deux machines fonctionnent} \\ 1 & \text{: } M_1 \text{ fonctionne, } M_2 \text{ est en panne} \\ 2 & \text{: } M_2 \text{ fonctionne, } M_1 \text{ est en panne} \\ 0_1 & \text{: les deux sont en panne, } M_1 \text{ est en réparation} \\ 0_2 & \text{: les deux sont en panne, } M_2 \text{ est en réparation.} \end{cases}$$

Trouvez les temps moyens de chaque état, et les probabilités de transition.

▷



Voyons comment calculer des temps pour aller d'un état à un autre dans un cas simple. Soit la chaîne de Markov à temps continu sur les états $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ définie par le graphe qui suit:



Calculons le temps moyen pour atteindre l'état 2 en partant de l'état 0.

Considérons maintenant un processus de naissance et de mort de taux de naissance $\{\lambda_n\}$ et de taux de mort $\{\mu_n\}$, où $\mu_0 = 0$, et soit T_i le temps, en partant de l'état i, que cela prend au processus pour entrer à l'état $i+1$ $(i \geq 0)$. On va calculer $E[T_i]$ récursivement. Pour $i = 0$, comme T_0 est exponentiel de taux λ_0, on a que:

$$E[T_0] =$$

Pour $i \geq 0$, on conditionne sur la première transition. Soit:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si la première transition est vers } i+1, \\ 0 & \text{si la première transition est vers } i-1. \end{cases}$$

et notons que:

$$E[T_i | I_i = 1] =$$

$$E[T_i | I_i = 0] =$$

car indépendamment du fait que la première transition soit une naissance ou une mort, le temps avant que cela ne se produise est exponentiel de taux $\lambda_i + \mu_i$; si cette première transition est une naissance, alors la taille de la population est $i+1$, et aucun temps additionnel est requis; cependant, si c'est une mort, alors la taille de la population devient $i-1$ et le temps additionnel nécessaire pour rejoindre $i+1$ est le temps que cela prend pour revenir à i $(E[T_{i-1}])$ plus le temps additionnel pour rejoindre $i+1$ $(E[T_i])$. Comme la probabilité que la première transition soit une naissance est $\lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$,

$$
\begin{aligned}
&E[T_i] = \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i] = \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i]\left(1-\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\right) = \frac{1}{\lambda_i+\mu_i}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+E[T_{i-1}]\right)\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i] = \left[\frac{\lambda_i+\mu_i}{\lambda_i}\right]\left[\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+E[T_{i-1}]\right)\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\right] \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i] = \frac{1}{\lambda_i+\mu_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+E[T_{i-1}]\right)\frac{\mu_i}{\lambda_i} \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i] = \frac{1}{\lambda_i+\mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}\frac{1}{\lambda_i+\mu_i} + E[T_{i-1}]\frac{\mu_i}{\lambda_i} \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i] = \frac{\lambda_i+\mu_i}{\lambda_i(\lambda_i+\mu_i)} + E[T_{i-1}]\frac{\mu_i}{\lambda_i} \\
&\quad \Leftrightarrow E[T_i] = \frac{1}{\lambda_i} + E[T_{i-1}]\frac{\mu_i}{\lambda_i}, \quad i \geq 1.
\end{aligned}
$$

En partant de $E[T_0] = 1/\lambda_0$, on a un moyen de calculer successivement $E[T_1], E[T_2], \ldots$. De plus, pour calculer le temps pour aller de i à j ($i < j$), il suffit de calculer $E[T_i] + E[T_{i+1}] + \ldots + E[T_{j-1}]$.

■ Exemple 8 ■

Soit un processus de naissance et de mort de taux respectifs $\lambda_i \equiv \lambda$ et $\mu_i \equiv \mu$. Trouvez $E[T_i]$ et $E[$temps pour aller de k à $j]$.

▷ D'après les résultats de la section précédente, on a:

$$
\begin{aligned}
E[T_i] &= \frac{1}{\lambda_i} + E[T_{i-1}]\frac{\mu_i}{\lambda_i} \\
&= \frac{1}{\lambda} + E[T_{i-1}]\frac{\mu}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1+\mu E[T_{i-1}]\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, comme $E[T_0] = 1/\lambda$, nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
E[T_1] &= \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)\\
E[T_2] &= \frac{1}{\lambda}(1+\mu E[T_1])\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1+\mu\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right)\\
E[T_3] &= \frac{1}{\lambda}(1+\mu E[T_2])\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1+\mu\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\right)\\
\vdots &= \\
E[T_i] &= \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-(\mu/\lambda)^{i+1}}{1-(\mu/\lambda)} \qquad \text{(en supposant } \lambda\neq\mu)\\
&= \frac{1-(\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda-\mu}, \quad i\geq 0
\end{aligned}
$$

Maintenant, le temps moyen, en partant de l'état k pour rejoindre l'état j $(k<j)$ est donc:

$$
\begin{aligned}
&E[\text{temps moyen pour aller de } k \text{ à } j]\\
&\quad= E[T_k]+E[T_{k+1}]+\ldots+E[T_{j-1}]\\
&\quad= \sum_{i=k}^{j-1} E[T_i]\\
&\quad= \sum_{i=k}^{j-1} \frac{1-(\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda-\mu}\\
&\quad= \sum_{i=k}^{j-1} \left[\frac{1}{\lambda-\mu}-\frac{(\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda-\mu}\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&E[\text{temps moyen pour aller de } k \text{ à } j] \\
&= \frac{j-k}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\sum_{i=k}^{j-1}(\mu/\lambda)^{i+1} \\
&= \frac{j-k}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\sum_{i=k+1}^{j}(\mu/\lambda)^{i} \\
&= \frac{j-k}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\left[\sum_{i=0}^{j}(\mu/\lambda)^{i} - \sum_{i=0}^{k}(\mu/\lambda)^{i}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E[\text{temps moyen pour aller de } k \text{ à } j] \\
&= \frac{j-k}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\left[\frac{1-(\mu/\lambda)^{j+1}}{1-(\mu/\lambda)} - \frac{1-(\mu/\lambda)^{k+1}}{1-(\mu/\lambda)}\right] \\
&= \frac{j-k}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\frac{1}{1-(\mu/\lambda)}\left[(\mu/\lambda)^{k+1} - (\mu/\lambda)^{j+1}\right] \\
&= \frac{j-k}{\lambda-\mu} - \frac{(\mu/\lambda)^{k+1}}{\lambda-\mu}\frac{\left[1-(\mu/\lambda)^{j-k}\right]}{1-\mu/\lambda}
\end{aligned}$$

Si $\lambda = \mu$, alors $E[T_i] = (i+1)/\lambda$, et

$$\begin{aligned}
&E[\text{temps moyen pour aller de } k \text{ à } j] \\
&= \sum_{i=k}^{j-1} E[T_i] = \sum_{i=k}^{j-1}\frac{i+1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=k+1}^{j} i = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{j(j+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2\lambda}\left[j(j+1) - k(k+1)\right]
\end{aligned}$$

3.3 Probabilités de transition $P_{ij}(t)$

On a déjà vu:

$$P_{ij}(t) = P[X(t+s) = j | X(s) = i]$$

la *probabilité de transition* qu'un processus présentement à l'état i sera à l'état j t unités de temps plus tard. De plus,

$$P_{ij}(t) \geq 0,$$

$$\lim_{t \to 0^+} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1.$$

Exemple 9

On peut calculer facilement $P_{ij}(t)$ dans le cas d'un processus de Poisson:

$\triangleright$ $P_{ij}(t) =$

$=$

De plus, on dénote par $P_j(t)$ la probabilité marginale que la CMTC soit à l'état j au temps t:

$$P_j(t) = P[X(t) = j].$$

Ainsi, si $p_i = P[X(0) = i]$ pour $i \in \mathcal{S}$, alors

$$P_j(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i P_{ij}(t).$$

Dans le cas d'un processus de naissance pur ayant des taux de naissance distincts, on peut déterminer explicitement $P_{ij}(t)$. Soit T_k le temps que passe le processus dans l'état k avant de faire une transition vers $k+1$ ($k \geq 1$). Supposons que le processus est présentement dans l'état i, et soit $j > i$. Le temps nécessaire pour aller jusqu'à l'état j est

$$T_i + T_{i+1} + \ldots + T_{j-2} + T_{j-1} = \sum_{k=i}^{j-1} T_k.$$

Si le processus n'est pas encore à l'état j au temps t, alors l'état au temps t est plus petit que j (et vice-versa), i.e.:

$$X(t) < j \Leftrightarrow T_i + T_{i+1} + ... + T_{j-1} > t$$

donc pour $i < j$, nous avons pour un processus de naissance pur:

$$P[X(t) < j | X(0) = i] = P\left[\sum_{k=i}^{j-1} T_k > t\right]$$

mais $T_i, ..., T_{j-1}$ sont i.i.d. exponentielles de taux respectifs $\lambda_i, ..., \lambda_{j-1}$ (distincts), on a une distribution hypoexponentielle, et:

$$P[X(t) < j | X(0) = i] = \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r \neq k, r=i}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}$$

Comme

$$P[X(t) = j | X(0) = i] = P[X(t) < j+1 | X(0) = i] - P[X(t) < j | X(0) = i]$$

et que $P_{ii}(t) = P[X(i) > t] = e^{-\lambda_i t}$, nous avons démontré:

P1 ⊟ Pour un processus de naissance pur, si $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$:

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{r \neq k, r=i}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k} - \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r \neq k, r=i}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}, \ i < j$$

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t} \ \blacksquare$$

FIN

Nous allons maintenant construire un ensemble d'équations différentielles que les probabilités de transition $P_{ij}(t)$ satisfont dans une CMTC quelconque. Voyons tout d'abord quelques résultats.

P2 ⊟ La probabilité qu'une CMTC fasse deux transitions ou plus dans un intervalle de temps de longueur h est $o(h)$.

Pour une paire d'états i et j, soit

$$q_{ij} = v_i P_{ij}$$

Comme v_i est le taux auquel le processus fait une transition quand il est à l'état i et que P_{ij} est la probabilité qu'une transition se fasse vers l'état j, q_{ij} est le taux auquel le processus fait une transition vers l'état j si il est en i. Si $X(t)$ est à l'état i et $v_i = 0$, alors $X(t)$ reste dans cet état pour toujours. Les q_{ij} sont des *taux de transition instantanés*. On acceptera sans démonstration la proposition suivante:

P3

$$P[X(t+h) = j | X(t) = i] = P_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h), \quad i \neq j$$

$$P[X(t+h) = i | X(t) = i] = P_{ii}(h) = 1 - v_i h + o(h)$$

De plus, comme

$$v_i =$$

et

$$P_{ij} =$$

alors on conclut que la spécification des taux de transition instantanés détermine les paramètres de la CMTC.

■ Exemple 10 ■

Soit $X(t)$ le nombre d'arrivées au temps t dans un processus de Poisson d'intensité λ. On a simplement

$$q_{n,n+1} =$$

■ Exemple 11 ■

(retour sur l'exemple 4 p. 5) Soit un processus de naissance et de mort où chaque individu d'une population donne naissance à un nouvel individu à un taux exponentiel λ. Les morts se produisent à un taux exponentiel μ par individu. De plus, un nouvel individu arrive par immigration dans la population à un taux exponentiel θ par individu. On a vu que les taux de naissance et de mort du processus considéré étaient:

$$\mu_n = \qquad\qquad , \qquad \lambda_n =$$

Cherchons maintenant $M(t) = E[X(t)]$, où $X(t)$ est la taille de la population au temps t. Supposons que la taille de la population au temps 0 est i ($X(0) = i$).

Il est possible de construire une équation différentielle $M(t+h)$ en conditionnant sur $X(t)$:

$$\begin{aligned} M(t+h) &= E[X(t+h)] \\ &= E[E[X(t+h) \mid X(t)]] \end{aligned}$$

Sachant la taille de la population au temps t, $X(t)$, la population au temps $t+h$ va soit augmenter si une naissance ou une immigration se produit dans l'intervalle $(t, t+h)$, soit diminuer de 1 si une mort se produit dans l'intervalle en question, ou enfin rester la même si rien ne se produit. Ainsi, à partir des taux que nous avons déjà défini, on a:

$$v_n = \qquad\qquad\qquad , \quad P_{n,n+1} = \qquad\qquad\qquad P_{n,n-1} =$$

et on en déduit simplement les taux instantanés:

$$q_{n,n+1} = \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad q_{n,n-1} = \qquad\qquad\qquad .$$

Ainsi, en négligeant les termes $o(h)$, sachant $X(t)$:

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1 & \text{avec prob.} \\ X(t)-1 & \text{avec prob.} \\ X(t) & \text{avec prob.} \end{cases}$$

Donc, on obtient:

$$E[X(t+h) \mid X(t)] = X(t) + (\lambda - \mu)X(t)h + \theta h$$

En prenant l'espérance, on a $E[E[X(t+h) \mid X(t)]] = M(t+h)$, et on obtient

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda - \mu)M(t)h + \theta h$$

Soit:

$$\begin{aligned} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} &= (\lambda - \mu)M(t) + \theta \\ \text{si } h \to 0 \Leftrightarrow M'(t) &= (\lambda - \mu)M(t) + \theta \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, il faut distinguer si $\lambda = \mu$ ou $\lambda \neq \mu$. On obtient finalement:

$$M(t) = \begin{cases} \theta t + i & \text{si } \lambda = \mu \\ \frac{1}{\lambda - \mu}\left[((\lambda - \mu)i + \theta)e^{(\lambda-\mu)t} - \theta\right], & \text{sinon.} \end{cases}$$

FIN *[Note: pour les curieux, la preuve complète peut être trouvée dans Ross.]*

3.4 Générateur infinitésimal

Posons

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & \text{si } i \neq j \\ -v_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

et soit $\mathbf{R}$ la matrice des r_{ij}. La forme de $\mathbf{R}$ est alors:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -v_0 & q_{01} & \cdots & q_{0N} \\ q_{10} & -v_1 & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N0} & q_{N1} & \cdots & -v_N \end{bmatrix}$$

La matrice R est le *générateur infinitésimal*. C'est ce générateur qui est utilisé dans la plupart des manuels afin de décrire les chaînes de Markov à temps continu. Il joue un rôle équivalent à celui que joue les matrices de transitions en une étape dans les chaînes de Markov à temps discret. Notez que comme

$$\sum_j q_{ij} = \sum_j v_i P_{ij} = v_i \sum_j P_{ij} = v_i$$

la somme en ligne du générateur est toujours nulle. Le générateur est ``commode'' pour décrire une CMTC, et nous verrons comment l'utiliser afin de calculer les probabilités limites.

■ Exemple 12 ■

Soit un processus de naissance et de mort, de taux de naissance $\lambda_i = \lambda$ et de taux de mort $\mu_i = \mu$, défini sur trois états (0,1,2). On a alors:

$$P_{01} = 1, \quad P_{12} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad P_{10} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P_{21} = 1$$

Le temps que l'on reste à chaque état est de taux

$$v_0 = \qquad v_1 = \qquad\qquad v_2 =$$

$$q_{01} = \qquad\qquad =$$

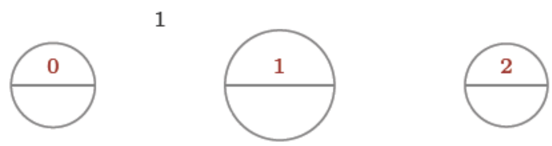
$$q_{10} = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

$$q_{12} = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

$$q_{21} =$$

Le générateur est alors:

$$R = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$



3.5 Équations de Chapman-Kolgomorov

La proposition 3 implique:

P4

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i \\ &\text{(b)} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}, \quad \text{quand } i \neq j \end{aligned}$$

Notez que ce sont les dérivées à l'origine de $P_{ij}(t)$. En effet,

$$P'_{ij}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h},$$

$$(a)\ P'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ii}(h) - P_{ii}(0)}{h} \quad (P_{ii}(0) = 1);$$

$$(b)\ P'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h} \quad (P_{ij}(0) = 0).$$

On acceptera cette proposition sans autre démonstration.

P5 ⊟ **Équations de Chapman-Kolgomorov** Pour tout $s \geq 0, t \geq 0$,

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Preuve

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+s) &= P[X(t+s) = j | X(0) = i] \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P[X(t+s) = j, X(t) = k | X(0) = i] \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P[X(t+s) = j | X(t) = k, X(0) = i] \cdot P[X(t) = k | X(0) = i] \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P[X(t+s) = j | X(t) = k] \cdot P[X(t) = k | X(0) = i] \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P_{kj}(s) P_{ik}(t) \quad \square
\end{aligned}$$

En partant des équations de Chapman-Kolmogorov, on a:

$$\begin{aligned}
& P_{ij}(h+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \\
\Leftrightarrow \quad & P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq i, k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) + P_{ii}(h) P_{ij}(t) - P_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq i, k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)] P_{ij}(t)
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\sum_{k\neq i, k=0}^{\infty} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \left[\frac{1 - P_{ii}(h)}{h} \right] P_{ij}(t) \right]$$

En supposant que l'on peut interchanger la limite et la somme (on le peut ici, mais on ne le démontrera pas...!), et en utilisant la proposition 4, on obtient le théorème qui suit.

T1 ⊡ **Équations de Kolmogorov rétrogrades** Pour tous les états i, j et des temps $t \geq 0$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

Exemple 13

Les équations rétrogrades pour un processus de naissance pur sont:

Exemple 14

Équations rétrogrades pour un processus de naissance et de mort.

De plus, on peut développer les équations de Kolmogorov prospectives (``*forward*''):

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) - P_{ij}(t) \\
&= \sum_{k \neq j, k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) + P_{jj}(h) P_{ij}(t) - P_{ij}(t) \\
&= \sum_{k \neq j, k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)] P_{ij}(t)
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\sum_{k\neq j,k=0}^{\infty}P_{ik}(t)\frac{P_{kj}(h)}{h}-\left[\frac{1-P_{jj}(h)}{h}\right]P_{ij}(t)\right]$$

et en supposant que nous pouvons changer la limite et la somme, on obtient (en utilisant la proposition 4):

$$P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}q_{kj}P_{ik}(t)-v_jP_{ij}(t),$$

mais malheureusement, on peut ne pas toujours interchanger la limite et la somme dans ce cas ! Cependant, cela fonctionne dans la plupart des modèles incluant *tous* les processus de naissances et de mort, et tous les modèles à nombre d'états finis.

T2 **Équations de Kolmogorov prospectives** Pour tous les états i, j et des temps $t \geq 0$

$$P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}q_{kj}P_{ik}(t)-v_jP_{ij}(t).$$

Exemple 15

(Exercice) Les équations prospectives pour un processus de naissance pur sont:

P6 Pour un processus de naissance pur,

$$P_{ii}(t)=e^{-\lambda_i t},\quad i\geq 0$$

$$P_{ij}(t)=\lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}P_{i,j-1}(s)\,ds,\quad j\geq i+1$$

■ Exemple 16 ■

On a vu que les équations prospectives sont:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

ce qui donne pour un processus de naissance et de mort:

3.6 Probabilités limites

La probabilité qu'une CMTC soit à l'état j au temps t peut converger vers une valeur limite indépendante de l'état initial, que nous noterons P_j:

$$P_j \equiv \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t),$$

où nous supposons ici que la limite existe et est indépendante de l'état i. Pour obtenir P_j, considérons l'ensemble des équations prospectives:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Si $t \to \infty$, et si nous supposons que nous pouvons changer la limite et la sommation, on a:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} P'_{ij}(t) &= \lim_{t \to \infty} \left[\sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t) \right] \\ &= \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j. \end{aligned}$$

Comme $P_{ij}(t)$ est bornée (entre 0 et 1), si $P'_{ij}(t)$ converge, alors elle converge vers 0, donc

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k$$

$$\text{et de plus si} \qquad \sum_j P_j = 1 \qquad \text{alors}$$

nous obtenons les équations utilisées pour obtenir les probabilités limites.

Remarque 1. On a supposé que ces probabilités limites existent. Une condition suffisante pour qu'elles existent:

a. tous les états de la chaîne de Markov communiquent dans le sens qu'en partant de l'état i, il y a une probabilité positive d'être éventuellement à l'état j $(\forall i, j)$, **et**

b. la chaîne de Markov est positive récurrente dans le sens que, en partant d'un état, le temps moyen pour retourner à cet état est fini.

Si ces conditions sont réalisées, alors les probabilités limitent existent. De plus, P_j s'interprète alors comme étant la proportion à long terme que le processus soit à l'état j.

Remarque 2. À long terme, le taux des transitions vers l'état j égal le taux des transitions de l'état j. Si le processus est à l'état j, il quitte au taux v_j, et comme P_j est la proportion du temps qu'il est dans l'état j, il en suit que

$$v_j P_j = \quad \text{le taux auquel le processus quitte l'état } j.$$

De façon similaire, quand le processus est à l'état k, il entre à l'état j au taux q_{kj}. Comme P_k est la proportion du temps à l'état k, le taux auquel se font les transitions de k à j est $q_{kj} P_k$. Alors

$$\sum_{k \neq j} q_{kj} P_k = \quad \text{le taux auquel le processus entre à l'état } j.$$

Donc l'équation ?? montre l'égalité des taux auxquels le processus entre et quitte l'état j. On les appelle les ``équations à l'équilibre''[3].

Remarque 3. Il y a une analogie entre ces équations et l'équation:

[3] anglais: ``balance equations''

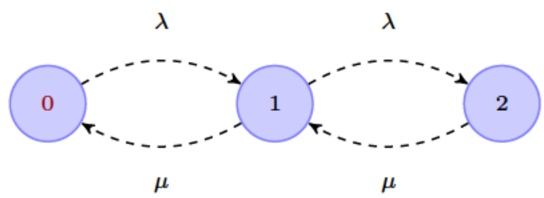
$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$$

du cas des chaînes de Markov à temps discret. π_j est la proportion à long terme du temps que le processus passe à l'état j, mais aussi le taux (nombre de visites à long terme par unité de temps) auquel la chaîne entre à l'état j, et aussi au taux auquel elle quitte l'état j. $\pi_i P_{ij}$ peut être interprété comme le taux auquel la chaîne fait une transition de i vers j, et donc $\sum_i \pi_i P_{ij}$ peut être interprété comme le taux auquel la chaîne fait une transition vers l'état j.

Remarque 4. Quand les probabilités limites existent, on dit que la chaîne est ergodique. Les P_j sont appelées probabilités stationnaires.

■ Exemple 17 ■

(Suite de l'exemple 12 *p.* 17*) Soit un processus de naissance et de mort, de taux de naissance $\lambda_i = \lambda$ et de taux de mort $\mu_i = \mu$, défini sur trois états (0,1,2). On a vu que la chaîne est décrite comme ceci:*



Trouvez les équations à l'équilibre.

Voyons maintenant comment obtenir les probabilités limites à l'aide du générateur infinitésimal. On a vu que les équations de Kolmogorov sont:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t), \qquad \text{(rétrospectives)}$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t). \qquad \text{(prospectives)}$$

Si nous posons

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & \text{si } i \neq j, \\ -v_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

alors les équations de Kolmogorov deviennent:

$$P'_{ij}(t) = \sum_k r_{ik} P_{kj}(t), \qquad \text{(rétrospectives)}$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_k r_{kj} P_{ik}(t). \qquad \text{(prospectives)}$$

Si les éléments d'une matrice $\mathbf{R}$ sont r_{ij}, les éléments d'une matrice $\mathbf{P}(t)$ sont $P_{ij}(t)$ et les éléments d'une matrice $\mathbf{P}'(t)$ sont $P'_{ij}(t)$, alors les équations de Kolmogorov s'écrivent:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{R}\mathbf{P}(t) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{R}.$$

Comme la limite de $\mathbf{P}'(t) = 0$ quand $t \to \infty$, les probabilités limites $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, ..., P_N)$ sont solutions de

$$\mathbf{0} = \mathbf{P}\mathbf{R} = (P_0, P_1, ..., P_N) \begin{bmatrix} -v_0 & q_{01} & \cdots & q_{0N} \\ q_{10} & -v_1 & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N0} & q_{N1} & \cdots & -v_N \end{bmatrix}.$$

On a vu que la matrice R est le *générateur infinitésimal*. En solutionnant l'équation ?? (ou l'équation ?? p. ??) et en utilisant $\sum_j P_j = 1$, on trouve les probabilités limites.

■ Exemple 18 ■

(Suite de l'exemple 12 p. 17) Soit un processus de naissance et de mort, de taux de naissance $\lambda_i = \lambda$ et de taux de mort $\mu_i = \mu$, défini sur trois états (0,1,2). On a vu que le générateur était:

$$R = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

■ Exemple 19 ■

Un établissement de cirage de chaussures à deux chaises. Un client arrive et va à la première chaise pour un premier traitement, puis à la seconde quand le premier traitement est fini. Les temps de services aux deux chaises sont indépendants et exponentiels de taux μ_1 *et* μ_2. *Les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité* λ, *et un client entre dans le système seulement si les deux chaises sont vides.*

C'est une CMTC à 3 états:

$$\begin{cases} 0 & \text{le système est vide,} \\ 1 & \text{un client est sur la chaise 1,} \\ 2 & \text{un client est sur la chaise 2.} \end{cases}$$

Étudions le système (équations à l'équilibre, générateur, et probabilité limite).

P7 ⊟ ▬ processus de naissance et de mort ▬ Pour un processus de naissance et de mort de taux de naissance $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ et de taux de mort $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, alors:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}...\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}...\mu_2\mu_1},$$

et les probabilités limites P_i $(i \geq 0)$ existent si et seulement si $S < \infty$. Dans ce cas, on a:

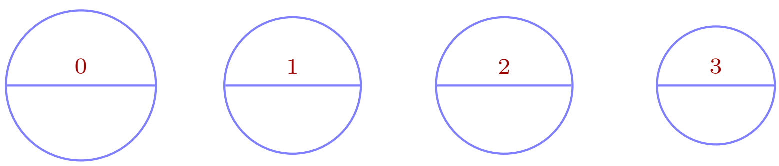
$$P_0 = \frac{1}{1+S}, \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0, \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1, ...$$

■ Exemple 20 ■

Une chaîne de montage consiste en trois machines et deux réparateurs. Le temps avant qu'une machine brise suit un loi exponentielle d'espérance 10*, et le temps avant qu'un réparateur répare une machine suit une distribution exponentielle d'espérance 8. Soit* $X(t)$ *le nombre de machines en panne.*

a. *À long terme, quel est le nombre moyen de machines hors d'usage à un instant donné?*
b. *Quelle proportion du temps les deux réparateurs sont occupés ?*

▷ *retour*



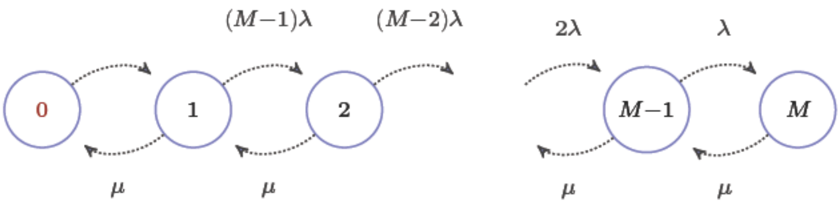
■ Exemple 21 ■

Considérons un système avec M machines et un réparateur. Le temps de fonctionnement d'une machine suit une distribution exponentielle d'espérance $1/\lambda$, et le temps de réparation suit une distribution exponentielle d'espérance $1/\mu$.

a. Quelle est le nombre moyen de machines hors service ?
b. Quelle proportion du temps chaque machine est-elle en service ?

▷ Soit une chaîne de Markov d'espaces d'états $\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots, M-1, M\}$, où l'état i ($i = 1, 2, \ldots, M$) est le nombre de machines en panne à l'instant t. On reconnaît un processus de naissance et de mort, de taux:

$$\mu_i =$$
$$\lambda_i =$$



Comme c'est un processus de naissance et de mort, on peut appliquer les résultats déjà connus (Prop. 7). Ainsi on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_{i-1}\lambda_{i-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_2\mu_1} \\ &= \sum_{i=1}^{M} \frac{(M-(i-1))\lambda(M-(i-2))\lambda\cdots(M-1)\lambda M\lambda}{\mu^i} \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{M!}{(M-i)!}. \end{aligned}$$

De plus, on sait que $P_0 = 1/(1+S)$, et

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\lambda_{i-1}\lambda_{i-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_2\mu_1} P_0 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{M!}{(M-i)!}\left(\frac{1}{1+S}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{M!}{(M-i)!}}{1+\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{M!}{(M-i)!}}. \end{aligned}$$

Maintenant, afin de trouver le nombre moyen de machine hors service, il suffit d'évaluer:

$$\sum_{i=0}^{M} iP_i = \frac{\sum_{i=0}^{M} i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{M!}{(M-i)!}}{1+\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{M!}{(M-i)!}}.$$

Afin d'obtenir la probabilité qu'une machine j fonctionne, on peut conditionner sur le nombre de machines qui sont hors service:

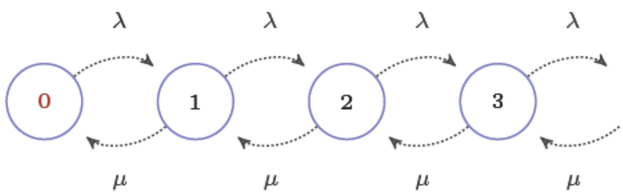
$$\begin{aligned} P[\text{machine } j \text{ fonctionne}] &= \sum_{i=0}^{M} P[\text{machine } j \text{ fonctionne} \mid i \text{ hors-service}]P_i \\ &= \sum_{i=0}^{M} \frac{M-i}{M}P_i = 1-\sum_{i=0}^{M}\frac{i}{M}P_i = 1-\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} iP_i \end{aligned}$$

3.7 Probabilités limites dans les systèmes $M/M/n$

Regardons brièvement les probabilités limites dans ces systèmes.

3.7.1 Systèmes $M/M/1$

Nous avons déjà rencontré ce système au début du chapitre. En bref, on se souvient qu'un système $M/M/1$ est tel que des arrivées se font selon un processus de $Poisson(\lambda)$, dans un système où l'on a 1 guichet (serveur). Les clients (indépendamment des arrivés du processus de Poisson) ont des temps de service S_n distribués exponentiellement de taux μ. Les clients arrivant vont dans une file d'attente et sont servis selon un leur ordre d'arrivée (FIFO). Soit $X(t)$ représente le nombre de clients au temps t dans le système. Une transition se fait quant un client part ou un autre arrive. On a un processus de naissance et de mort:



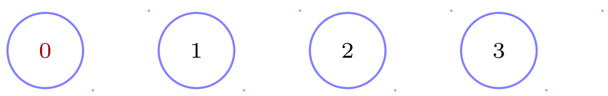
Vous montrerez en exercice que

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^j(1-\rho),\ (j \geq 0)$$

où $\rho = \lambda/\mu$, et l'on reconnaît une distribution géométrique de paramètre $1-\rho$.

3.7.2 Systèmes $M/M/$infini

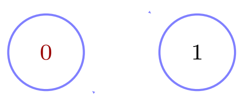
Un système $M/M/\infty$ est un système similaire avec un nombre de guichets infini ($n = \infty$).



C'est une sorte de marche aléatoire où les probabilités de transition dépendent de i. On pourrait montrer que $P_j = e^{\rho}\rho^j/j!$, donc $Poisson(\rho)$.

3.7.3 Systèmes $M/M/1$ sans attente

Un système $M/M/1$ *sans attente* est un système similaire mais sans file d'attente. Tout client arrivant dans le système quitte s'il ne peut être servi de suite.



Remarque. Chaîne explosive. Supposons un processus de naissance pur tel que $\lambda_i = 2^i$. En moyenne le processus passera $1/\lambda_i = 2^{-i}$ unités de temps à l'état i et passera à l'état suivant. Donc il passera de moins en moins de temps à chaque nouvel état visité. Comme $X(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$. Regardons à quelle vitesse va le processus. Si v_i est le taux de l'exponentielle correspondant au temps passé à l'état i, alors la chaîne aura visité tous les états au temps moyen:

Donc, en moyenne, tous les états auront été visités au temps $t = 2$! Le nombre de transition d'une telle chaîne dans un intervalle de temps fini est infini. Remarquons dans un système $M/M/\infty$, on avait $v_i = \lambda + i\mu$ qui tend vers l'infini quand $i \to \infty$. Cependant, dans un tel système, les arrivées se font à un taux fixe λ, donc les arrivées ne peuvent pas causer une explosion.

3.8 Chaînes à temps réversible

Considérons la chaîne à temps discret qui est imbriquée dans une CMTC: cette chaîne discrète est similaire à la chaîne continue, mis à part qu'elle est sans temps (juste des étapes). Supposons que cette chaîne imbriquée est ergodique, et qu'elle possède des probabilités limites π_i. Comme la chaîne continue passe en moyenne $1/v_i$ unités de temps à l'état i, la proportion du temps que la CMTC passe à l'état i est proportionnelle à $\pi_i(1/v_i)$. Comme on cherche une proportion, on ajuste pour que la somme des proportions fasse 1, et donc:

$$P_i = \frac{1}{c}\frac{\pi_i}{v_i}$$

où $c = \sum_j (\pi_j/v_j)$. Supposons que la chaîne est en opération depuis longtemps, et intéressons-nous à la chaîne en allant en arrière dans le temps:

car $P[X(t-s)=i]=P[X(t)=i]$ si t est grand. En allant en arrière dans le temps, le temps passé à l'état i est aussi $Exp(v_i)$. Le processus en arrière dans le temps est une CMTC avec même taux de transition que le processus original, et matrice de transition Q_{ij}:

$$Q_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$$

Ainsi, la chaîne en arrière aura la même structure de probabilité si la chaîne à temps discret imbriquée est réversible, ie.:

$$\begin{gathered}
\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \\
P_i v_i \left(\sum_j \pi_j / v_j \right) P_{ij} = P_j v_j \left(\sum_j \pi_j / v_j \right) P_{ji} \\
P_i v_i P_{ij} = P_j v_j P_{ji}
\end{gathered}$$

car on a vu que $P_i = (\pi_i/v_i)/(\sum_j \pi_j/v_j)$. Cela veut dire que le taux pour aller de i à j est égal au taux pour aller de j à i. Notons qu'un processus de naissance et de mort est à temps réversible.

P8 ⊟ Une chaîne de markov à temps continu est à temps réversible si et seulement si

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \qquad \text{pour tout } i \neq j.$$

FIN

∴

4

[Le mouvement Brownien]

4 Le mouvement Brownien

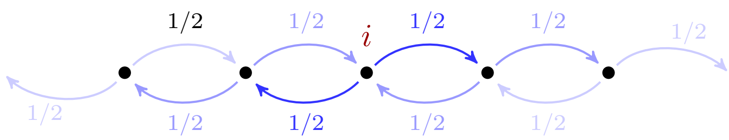
onsultez le chap. 10 de Ross, le chap. 5 de Les-rd, ou le chap. 8 Karlin et Taylor

4.1 Introduction

Soit une marche aléatoire symétrique décrite par une chaîne de Markov à temps discret, tel que:

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}.$$

À chaque unité de temps, le processus a donc autant de chances d'augmenter d'une unité ou de diminuer d'une unité.

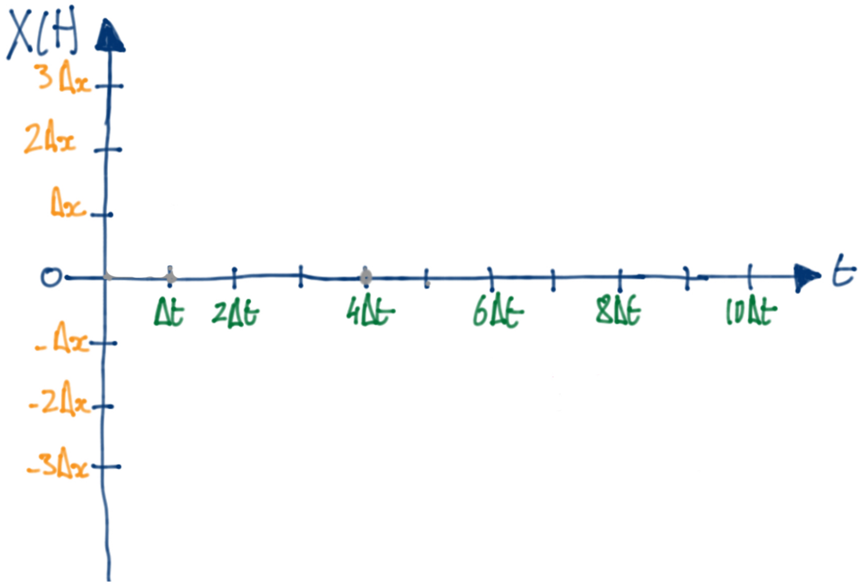


Supposons maintenant que le processus fait un pas de longueur Δx à chaque Δt unité de temps; si Δt et Δx sont de plus en plus petits, nous obtenons un mouvement brownien. Soit

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ pas de longueur } \Delta x \text{ se fait à droite,} \\ -1 & \text{s'il se fait à gauche.} \end{cases}$$

Donc, par exemple, on aura $X(t) = -\Delta x + \Delta x + \Delta x + \cdots - \Delta x$. De façon générale, si $\lfloor t/\Delta t \rfloor$ désigne le plus grand entier plus petit ou égal à $t/\Delta t$, on a:

$$X(t) = \Delta x \left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \right).$$



Les X_i sont supposés indépendants, et comme $P[X_i = +1] = P[X_i = -1] = 1/2$, on a

$$E(X_i) = \qquad \text{et} \quad Var(X_i) =$$

$$E[X(t)] = \qquad\qquad Var[X(t)] =$$

Si $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ (où σ est une constante positive), alors si $\Delta t \to 0$,

$$E[X(t)] = 0, \qquad Var[X(t)] \to \sigma^2 t.$$

Notons que si $\Delta x \to 0$ et $\Delta t \to 0$, alors $E[X(t)]$ et $Var[X(t)]$ convergeraient tous deux vers 0, et $X(t)$ serait 0 avec probabilité 1.

On se rappelle que si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est une somme de variables aléatoires i.i.d, tel que:

$$E[X_i] = 0, \qquad Var[X_i] = n\sigma^2$$

alors $S_n/(\sigma\sqrt{n})$ converge en distribution vers $X \sim N(0,1)$ (théorème central limite).

Comme $X(t)$ est une somme de variables aléatoires i.i.d., cette somme suit, par le le théorème central limite une loi normale, d'espérance 0 et de variance $\sigma^2 t$.

D1 ⊠ ▬ *Mouvement Brownien* ▬ *Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien*[1] *si:*

- $X(0) = 0$.
- $\{X(t), t \geq 0\}$ *a des accroissements indépendants, ce qui veut dire que pour toute suite* $0 < t_1 < ... < t_n$ *($n \geq 2$), les variables aléatoires*

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

  sont indépendantes.
- $\{X(t), t \geq 0\}$ *a des accroissements stationnaires: la distribution de* $X(t+s) - X(t)$ *ne dépend pas de* t.
- *pour chaque* $t > 0$, $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

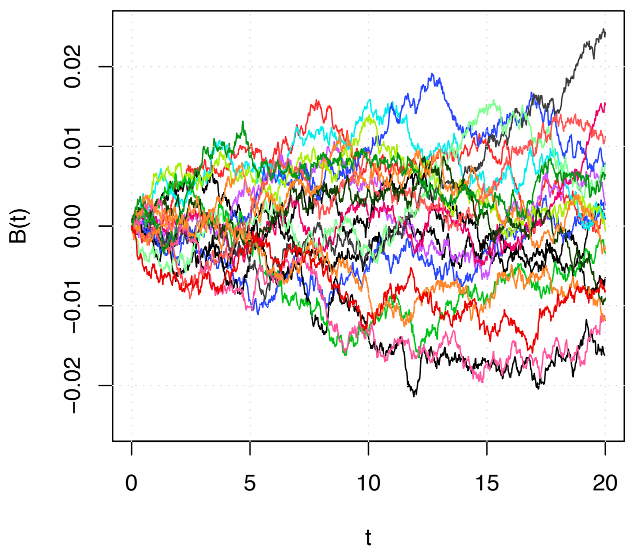


Figure 4.1 Exemples de mouvements browniens.

[1] On dit aussi processus de Wiener.

Notez que si la dernière condition de la définition précédente était:

$$X(t+s) - X(s) \sim N(0, \sigma^2 t), \quad \forall s, t \geq 0,$$

alors il ne serait pas nécessaire d'avoir la condition des accroissements stationnaires. Nous supposerons souvent que $\sigma = 1$ dans la suite du cours; ce mouvement est alors appelé *mouvement brownien standard*, habituellement noté $B(t)$. Notons que tout mouvement brownien $\{X(t), t \geq 0\}$ de variance unitaire σ^2 peut être ramené au mouvement brownien standard en considérant la transformation:

$$B(t) := \frac{X(t)}{\sigma}.$$

P1 ⊟ Le mouvement brownien standard $\{X(t), t \geq 0\}$ est une martingale, c'est-à-dire que:

$$E[X(t+s)|X(u) : 0 \leq u \leq s] = X_s.$$

Démontrons-le:

De plus, un mouvement brownien peut être défini en plusieurs dimensions. Ce mouvement brownien est alors un vecteur de mouvements browniens indépendants unidimensionnels où chaque composante a même variance unitaire. Par exemple, en observant le déplacement d'un grain de pollen au microscope, on a deux coordonnées, et un mouvement $(X^1(t), X^2(t))$. Avec des arguments similaires à ceux que l'on a utilisés précédemment, le déplacement du grain de pollen entre 0 et t est une somme d'un grand nombre d'effets aléatoires indépendants; ainsi, si $(X^1(0), X^2(0)) = (0, 0)$, alors la position au temps t, $(X^1(t), X^2(t))$, est une distribution normale bidimensionnelle.

D2 ⊠ *Un mouvement brownien* $(X^1(t), X^2(t), ..., X^n(t))$, $t \geq 0$ *est un mouvement brownien standard de dimension* n *si chacune de ces composantes est un mouvement brownien standard à une dimension indépendant des autres composantes.*

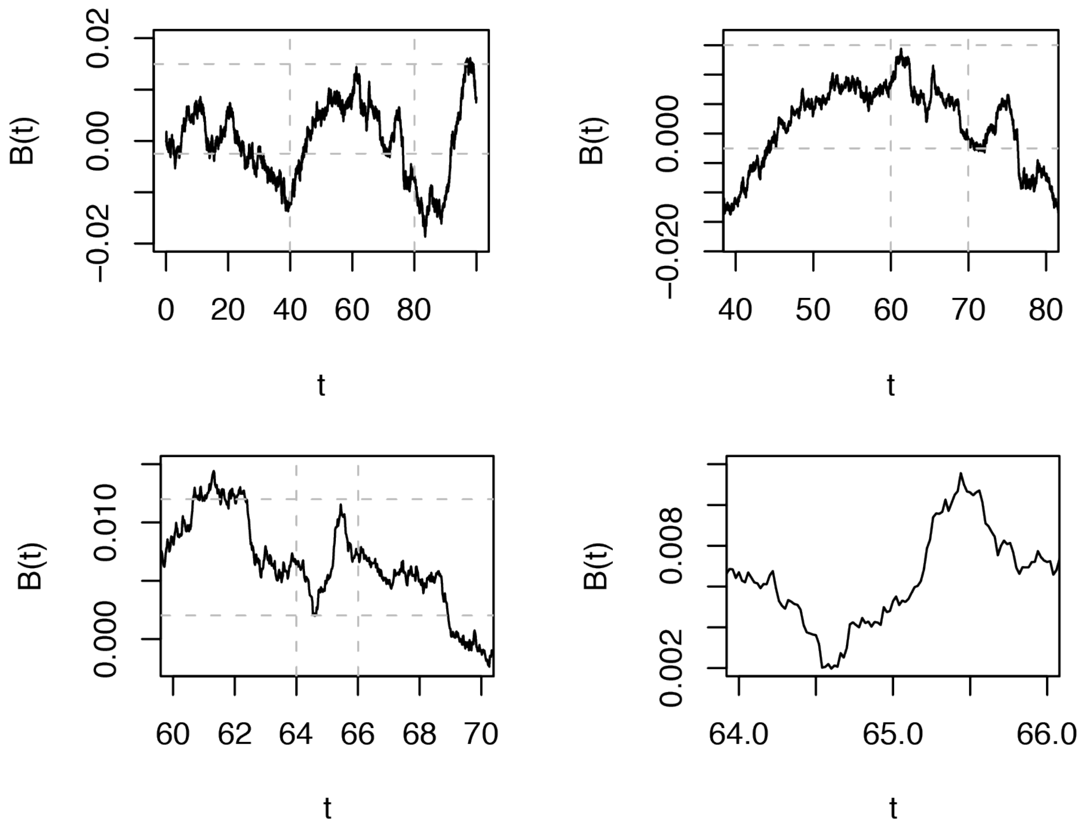


Figure 4.2 Exemples de mouvements browniens: aspect fractal.

Notons que le mouvement brownien en une dimension est un processus récurrent: tout point $x \in \mathbb{R}$ sera visité une infinité de fois.

P2 ⊟ Le mouvement brownien $X(t)$ est une fonction continue de t avec probabilité 1; c'est-à-dire que presque toute trajectoire du mouvement brownien est continue. Cependant, $X(t)$ n'est dérivable en aucun point t.

La preuve de cette propriété, plutôt délicate est laissée au lecteur curieux.
Cherchons maintenant la distribution conjointe de $X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)$, où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < +\infty$, notée $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, pour un mouvement brownien standard. Remarquons que:

$$\begin{cases} X(t_1) = x_1 \\ X(t_2) = x_2 \\ \vdots \\ X(t_n) = x_n \end{cases} \quad \text{est équivalent à} \quad \begin{cases} X(t_1) = x_1 \\ X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1 \\ \vdots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

Comme le processus est à accroissements indépendants, toutes ces composantes sont indépendantes, et comme le processus est à accroissements stationnaires, $X(t_k)-X(t_{k-1})$ est distribuée selon une loi normale d'espérance 0 et de variance $t_k - t_{k-1}$. Ainsi:

P3 ⊟ **Loi temporelle du mouvement brownien** Soient $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < +\infty$. La loi du vecteur $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$ est une loi normale à n dimensions dont la densité conjointe est

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)...(t_n-t_{n-1})}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + ... + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right].$$

Intéressons nous maintenant aux covariances entre composantes. Vous montrerez en exercice le résultat suivant:

P4 ⊟

$$Cov[X(s), X(t)] = \min(s,t).$$

Les variables $X(t)$ et $X(t+s)$ ne sont pas indépendantes, car les intervalles $[0,t]$ et $[0,t+s]$ ne sont pas disjoints. Nous avons de plus la proposition suivante:

P5 ⊟ Loi de $X(t+s) \mid X(t)$:

$$(X(t+s) \mid X(t)) \sim N(X(t), \sigma^2 s), \quad \forall s,t \geq 0.$$

Intéressons-nous maintenant à la distribution conditionnelle de $X(s)$ sachant que $X(t) = b$ $(s < t)$, pour un mouvement brownien de variance unitaire σ^2. Cette densité est le rapport entre la densité conjointe de $(X(s), X(t))$ au point (x, b) sur la densité de $X(t)$ au point b. La densité conjointe de $(X(s), X(t))$ au point (x, b) est la même que la densité de $(X(s), X(t) - X(s))$ au point $(x, b-x)$; comme ces deux variables sont indépendantes, alors leur densité conjointe est:

P6 ⊟ Loi de $X(s) \mid X(t = s + r)$, la distribution conditionnelle de $X(s)$ sachant que $X(t) = b$, pour $s < t$, est:

$$(X(s) \mid X(t) = b) \sim N\left(\frac{s}{t}b, \frac{s}{t}(t-s)\sigma^2\right).$$

■ Exemple 1 ■

Soit $Y(t)$ la fortune (en millions) de monsieur Pedalo, un investisseur, tel que le temps t est 1 à la fin de la journée, et 1/2 à la moitié de la journée. Supposons que $\{Y(t), t \geq 0\}$ peut être modélisé par un mouvement brownien de variance σ^2.

a. *Si sa fortune est de σ au milieu de la journée, quelle est la probabilité que sa fortune soit positive à la fin de la journée ?*

b. *Si sa fortune est de σ à la fin de la journée, quelle est la probabilité que sa fortune ait été positive au milieu de la journée ?*

a.

b.

Considérons maintenant un problème d'interpolation. Cherchons la distribution de $X(t)$ entre deux temps t_0 et t_1, tel que $t_0 < t_1$. Notons que $X(t_0) = x_0$ et $X(t_1) = x_1$. Les variables $X(t) - X(t_0)$ et $X(t_1) - X(t)$ sont indépendantes et de loi :

$$X(t) - X(t_0) \sim N(x_0, \sigma^2(t - t_0)),$$
$$X(t_1) - X(t) \sim N(x, \sigma^2(t_1 - t)).$$

Quand $X(t_0) = x_0$, le couple $(X(t), X(t_1))$ a donc la densité

$$f_{X(t),X(t_1)}(x, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2(t-t_0)}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_1 - t)}} e^{-\frac{(x_1-x)^2}{2\sigma^2(t_1-t)}}.$$

De plus, $X(t_1) \sim N(x_0, \sigma(t_1 - t_0))$, donc:

$$f_{X(t_1)}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_1 - t_0)}} e^{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2\sigma^2(t_1-t_0)}}.$$

Toutes ces distributions ont été trouvées en respectant la condition $X(t_0) = x_0$. Quand $X(t_1) = x_1$, la distribution conditionnelle de $X(t)$ est donc:

$$
\begin{aligned}
f_{X(t)|X(t_1)}(x|x_1) &= \frac{f_{X(t),X(t_1)}(x,x_1)}{f_{X(t_1)}(x_1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2(t-t_0)(t_1-t)}{(t_1-t_0)}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+\frac{(x_1-x)^2}{t_1-t}-\frac{(x_1-x_0)^2}{t_1-t_0}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2(t-t_0)(t_1-t)}{(t_1-t_0)}}} e^{-\frac{\left(x-\frac{(t-t_0)x_1-(t_1-t)x_0}{t_1-t_0}\right)^2}{\frac{2\sigma^2(t-t_0)(t_1-t)}{t_1-t_0}}}.
\end{aligned}
$$

P7 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un mouvement brownien de variance unitaire σ^2. Pour $t_0 < t < t_1$, si $X(t_0) = x_0$ et $X(t_1) = x_1$, alors:

$$
(X(t) \mid X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1) \sim N\left(\frac{(t-t_0)x_1 + (t_1-t)x_0}{t_1-t_0},\ \sigma^2 \frac{(t-t_0)(t_1-t)}{t_1-t_0}\right).
$$

L'espérance de cette dernière distribution est donc une interpolation linéaire entre les points (t_0, x_0) et (t_1, x_1).

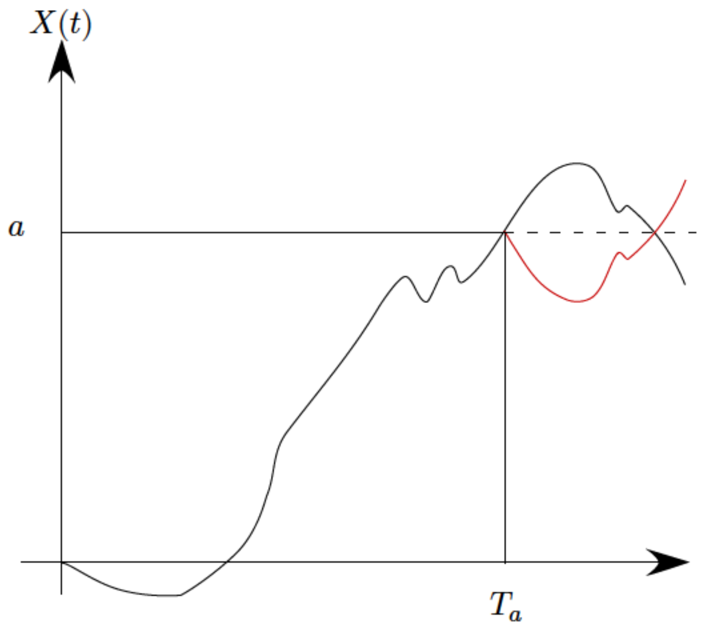
■ Exemple 2 ■

(suite ex 1 page 7) Supposons que la fortune de notre investisseur est de σ au milieu de la journée, et de 3σ à la fin de la journée, quelle est la probabilité que sa fortune au $3/4$ de la journée soit plus grande que 2σ ?

▷ On a:

4.2 Temps d'atteinte et variables aléatoires maximales

Soit T_a le temps du premier instant où un mouvement brownien de variance unitaire σ^2 atteint a (considérons $a > 0$ pour le moment). Alors $T_a \equiv \min\{t \geq 0 : X(t) = a\}$.



Cherchons $P[T_a \leq t]$ par conditionnement sur $P[X(t) \geq a]$:

$$P[X(t) \geq a] =$$

Considérons un nouveau mouvement brownien $\{Y(t), t \geq 0\}$ étant égal à $X(t)$ jusqu'à T_a et étant le symétrique de $X(t)$ par rapport à la droite d'ordonnée a après T_a:

$$Y(t) \equiv \begin{cases} X(t) & \text{si } t \leq T_a, \\ a - (X(t) - a) = 2a - X(t) & \text{si } t > T_a. \end{cases}$$

On pourrait démontrer que ce nouveau processus est un mouvement brownien ayant la même loi que $X(t)$. Si $T_a \leq t$, alors le processus atteint a dans $[0, t]$, et $X(t) = 2a - Y(t)$ donc:

$$P[X(t) \geq a | T_a \leq t] =$$

car $X(t)$ et $Y(t)$ ont même loi. Donc $P[X(t) \geq a | T_a \leq t] = \frac{1}{2}$. Maintenant, revenons à l'équation ??. Le terme $P[X(t) \geq a | T_a > t]$ est nul car le mouvement brownien ne peut pas être plus grand que a sans l'avoir atteint. Donc ?? se résume à:

$$P[X(t) \geq a] =$$

La loi du maximum est donnée par:

$$\begin{aligned} P\left[\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\right] &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Notons que la distribution de T_a est:

$$\begin{aligned} P[T_a \leq t] = 2P[X(t) \geq a] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t \sigma^2}} \int_a^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2 t}}\ dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/(\sigma\sqrt{t})}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx. \end{aligned}$$

Cas où a est négatif: la distribution de T_a est par symétrie identique à celle de T_{-a}. Il suffit donc de remplacer a par sa valeur absolue dans les bornes de l'intégrale.

■ Exemple 3 ■

Afin d'éviter la faillite, vous avez besoin de liquidité rapidement. Votre seule solution est de vendre vos actions de la compagnie X, actions dont le cours suit un mouvement brownien standard; le temps est mesuré en jours et le cours actuel de l'action est \$ 10. Cependant vous ne voulez pas vendre si le cours de l'action n'est pas au moins de \$ 20. (a) Quelle est la probabilité que vous arriviez à vendre vos actions avant 25 jours ? (b) Quelle est la médiane du temps où l'action atteindra \$ 20 ?

(b)

P8 ⊟ ▬ Principe de réflexion ▬ Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard, et soit T_a le temps où le point a est atteint pour la première fois. Le mouvement brownien

$$Y(t) \equiv \begin{cases} X(t) & \text{si } t \leq T \\ a - (X(t) - a) = 2a - X(t) & \text{si } t > T \end{cases}$$

a la même loi que $X(t)$.

La démonstration rigoureuse de ce résultat est laissé au lecteur curieux (voir les livres de Karlin).

4.2.1 Mouvement brownien entre deux points.

Soit un mouvement brownien de variance unitaire σ^2. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < 0 < b$. Posons T_{ab} le temps de la première visite à a ou à b:

$$T_{ab} = \min\{t > 0 : X(t) \in \{a, b\}\}.$$

De plus, posons $\theta_a = P[X_{T_{ab}} = a]$ et $\theta_b = P[X_{T_{ab}} = b]$. Par analogie avec le mouvement brownien et la marche aléatoire symétrique, on a que:

$$\theta_a = \qquad \text{et} \quad \theta_b =$$

On peut utiliser le fait que $E[X(t)] = 0$. En effet, on a :

$$E[X_{T_{ab}}] = \qquad ,$$

$$E[X_{T_{ab}}] =$$

Alors $a\theta_a + b\theta_b = 0$ et $\theta_a + \theta_b = 1$, on retrouve le résultat. De plus, on pourrait démonter que:

$$E[T_{ab}] = \frac{|a|b}{\sigma^2}.$$

■ Exemple 4 ■

(Suite de l'exemple 3, p 11). (a) Quelle est la probabilité que le cours de l'action tombe à zéro avant d'atteindre 20 ? (b) ... avant d'atteindre 100 ? (c) En moyenne combien de temps devrez-vous attendre avant de vendre ou d'être ruiné ?

a.

b.

c.

4.2.2 Comportement infinitésimal du mouvement brownien

Préliminaire: On a vu que:

$$F_{T_a}(t) = P[T_a \leq t] = 2P[X(t) \geq a] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/(\sigma\sqrt{t})}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad f_{T_a}(t) =& F'_{T_a}(t) \\ =& \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2}{2}} \left(-\frac{d\frac{a}{\sigma\sqrt{t}}}{dt} \right) \\ =& \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2 t}} \quad 0 < t < \infty \end{aligned}$$

Considérons l'intervalle de temps $(t_0, t_1]$, pour $t_0, t_1 > 0$, et évaluons la probabilité qu'un mouvement brownien $X(t)$ passe par 0 pour au moins un t entre t_0 et t_1, quand $X(0) = 0$. Dénotons cet évènement par $\theta(t_0, t_1)$:

$$\theta_{(t_0,t_1)} : X(t) = 0 \text{ pour au moins un } t \text{ dans } (t_0, t_1]$$

Commençons par calculer $P[\theta_{(t_0,t_1)}|X(t)]$. Comme $X(t_0) \sim N(0, \sigma^2 t_0)$:

$$\begin{aligned}
P[\theta_{(t_0,t_1)}|X(t_0) = x] &= P[\max_{0<t<t_1-t_0} X(t) \geq |x|] \\
&= P[T_{|x|} \leq t_1 - t_0] \\
&= \int_0^{t_1-t_0} f_{T_{|x|}} \, dt \\
&= \int_0^{t_1-t_0} \frac{|x|}{\sigma\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}} \, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } P[\theta_{(t_0,t_1)}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} P[\theta_{(t_0,t_1)}|X(t_0) = x] \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t_0}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t_0}} \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_1-t_0} \frac{|x|}{\sigma\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}} \, dt \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t_0}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t_0}} \, dx
\end{aligned}$$

Après deux changements de variables et quelques simplifications, on obtient:

$$P[\theta_{(t_0,t_1)}] = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}$$

Notez que si $t_0 = 0$, $P[\theta_{(t_0,t_1)}] = \frac{2}{\pi} \arccos(0) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1 \ \forall t_1$! Donc le processus retournera à zéro immédiatement après l'avoir quitté. En utilisant la propriété de Markov forte du mouvement Brownien, il en suit que le processus a un nombre infini de zéro dans $[0, t]$.

■ Exemple 5 ■

Supposons $t_0 > 0$ donné. Trouvez t tel que $P[\theta_{(t_0,t_1)}] = 1/2$.

▷ On applique la formule:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}} \\
&\sqrt{\frac{t_0}{t_1}} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&t_1 = 2t_0
\end{aligned}
$$

Donc, pour chacun des intervalles $(0.01, 0.02)$. $(1, 2)$ ou $(100, 200)$, $X(t)$ a une chance sur 2 de passer par 0 au moins une fois.

4.3 Autres mouvements browniens

4.3.1 Mouvement brownien réfléchi

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un mouvement brownien. Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ où $Y(t) \equiv |X(t)|$ $(t \geq 0)$ est appelé mouvement brownien réfléchi (à l'origine).

$$
E[Y(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathcal{R}} |x| e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t}}\, dx
$$

On pourrait démontrer que $E[Y(t)] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$. Pour calculer la variance:

$$
\begin{aligned}
Var[Y(t)] =& E[Y^2(t)] - (E[Y(t)])^2 = E[X^2(t)] - (E[Y(t)])^2 \\
=& t - \frac{2t}{\pi} = t\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)
\end{aligned}
$$

4.3.2 Mouvement brownien à la dérive

$\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien à dérive si, pour un coefficient de dérive μ, un paramètre de variance σ^2 et un mouvement brownien standard $B(t)$:

$$
X(t) = \sigma B(t) + \mu t.
$$

Comme $B(0) = 0$, et $B(t) \sim N(0, t^2)$, on a:

- $X(0) = 0$;
- $\{X(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires;
- De plus:

$$
E[X(t)] = \mu t + E[B(t)] = \mu t,
$$

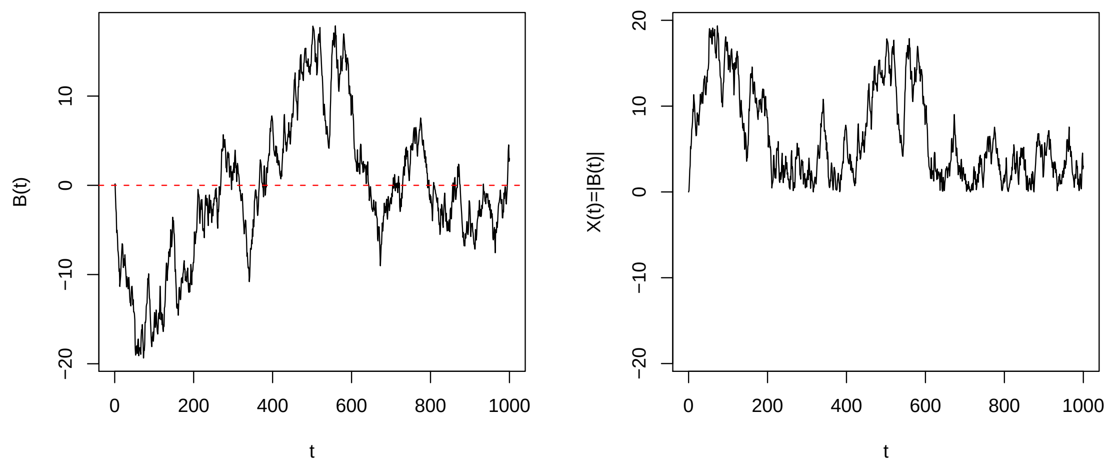


Figure 4.3 Exemple d'un mouvement $B(t)$, et du mouvement brownien réléchi $X(t) = |B(t)|$

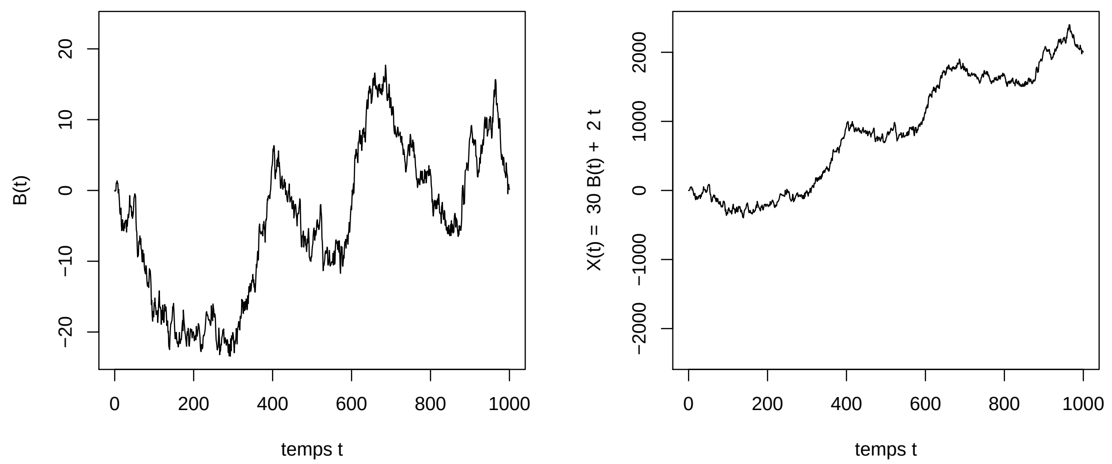


Figure 4.4 Exemple d'un mouvement $B(t)$, et d'un mouvement brownien à la dérive: $X(t) = 30B(t) + 2t$

$$Var[X(t)] = \sigma^2 Var[B(t)] = \sigma^2 t.$$

4.3.3 Mouvement brownien géométrique

Si $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien à la dérive de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$, alors le processus

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est un processus brownien géométrique. Afin de trouver la moyenne de $X(t)$, rappelons que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire normale Z est:

$$E\left[e^{aZ}\right] = e^{aE[Z]+a^2Var[Z]/2}.$$

Sa moyenne est:

$$E[X(t)] = E[e^{\sigma B(t)+\mu t}] = e^{\mu t}E[e^{\sigma B(t)}] = e^{\mu t}e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = e^{t(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}$$

car $E[e^{\sigma B(t)}]$ est la fonction génératrice des moments de $B(t)$, $\phi_{X(t)}(\sigma)$, et vaut $e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}$. Afin de trouver la variance de $X(t)$, cherchons $E[X^2(t)]$:

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] =& E[e^{2(\sigma B(t)+\mu t)}] = e^{2\mu t}E[e^{2\sigma B(t)}] \\ =& e^{2\mu t}\phi_{X(t)}(2\sigma) = e^{2\mu t}e^{\frac{(2\sigma)^2 t}{2}} = e^{2t(\mu+\sigma^2)}. \end{aligned}$$

Enfin, la variance est:

$$\begin{aligned} Var[Y(t)] =& E[Y^2(t)] - (E[Y(t)])^2 \\ =& e^{2t(\mu+\sigma^2/2)}(e^{t\sigma^2} - 1). \end{aligned}$$

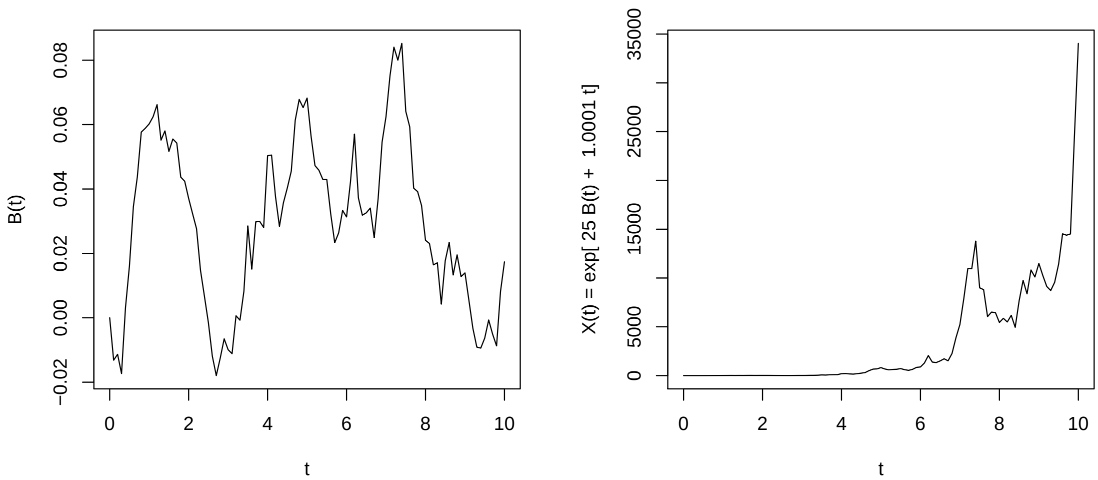


Figure 4.5 Exemple d'un mouvement $B(t)$, et d'un mouvement brownien géométrique: $X(t) = \exp[25B(t) + 1.0001t]$

$\therefore$