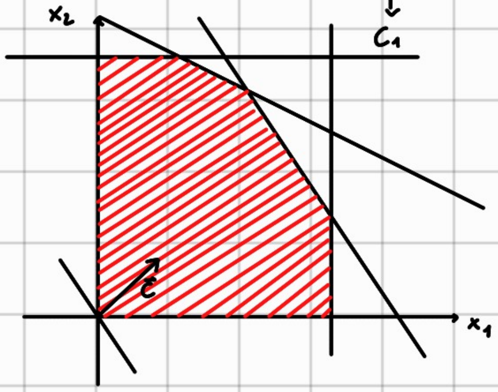
Lezione 2

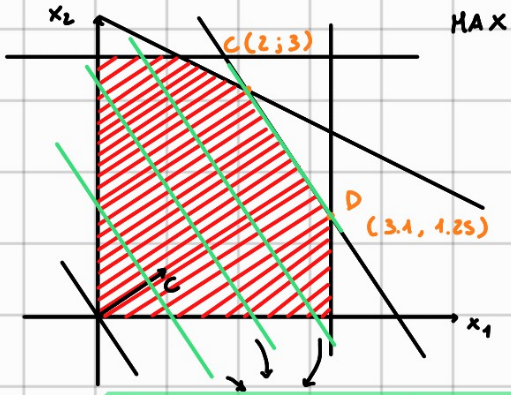
Interpretazione geometrica di un problema PL

F.O = $\boxed{11.4\,x_1 + 8.2\,x_2 = 0}$ ma se considero ⟶ $11.4\,x_1 + 8.2\,x_2 = \underline{K}$ e cerco il MAX, la sol. ottimale sarà C o D ma quale?

C_1 C_2



F.O.



C: $11.4(2) + 8.2(3) = 47.4$
D: $11.4(3.1) + 8.2(1.25)$
$= 45.59$

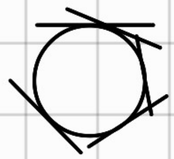
Linee isocosto o isoguadagno: insieme di punti di $\mathbb{R}^m$ dove la F.O. $c^T x$ vale K

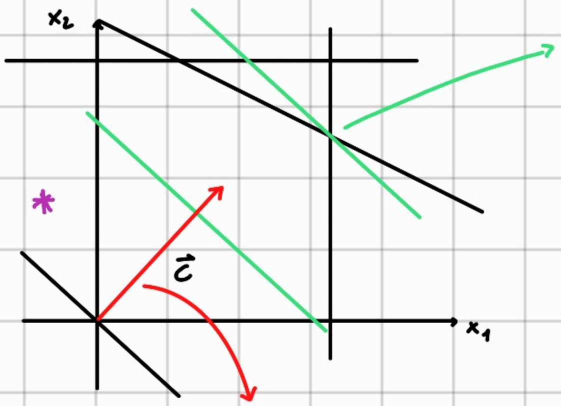
N. B. Un **Poliedro** è una intersezione di un numero **finito** di **semispazi lineari chiusi** (con $\leq$ o $\geq$)

⟶ include il bordo

⟶ un cerchio non è un pol.

∞ Rette





Sol. ottimale: mi sposto il più possibile lungo il gradiente ⟶ massima crescita fino alla regione ammissibile

Vett. gradiente: le linee di isocosto sono tutte ortogonali al gradiente (vettore c)

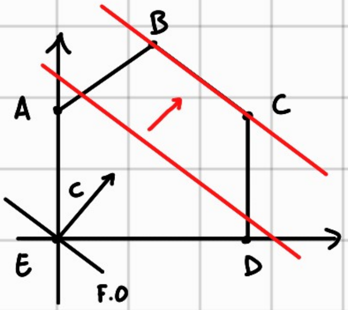
Proprietà elementari di un problema PL

1. Esiste una **risoluzione geometrica** per $m = 2$
2. Un problema PL è un problema di **massimo / minimo**
3. La sol. ottimale **non è mai interna** ⟶ per Fermat il gradiente è 0 in un punto massimo interno, però qua * non si annulla mai, quindi in un problema P.L. la sol. se esiste è sul bordo

→ oppure si può far vedere

④ La sol. ottimale potrebbe non essere unica

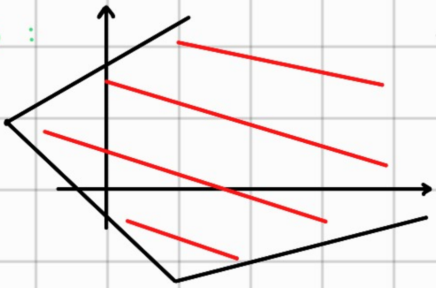
Esempio:



se cerco di massimizzare, trovo che la linea isocosto coincide con il vincolo => tutti i punti del segmento $\overline{BC}$ sono sol. ottimali

⑤ Non esiste sempre la sol. ottima

Esempio:



- è un poliedro? Si è un'intersezione di un # finito di semispazi lineari chiusi

- esiste la sol. ottima? No il guadagno sarebbe $+\infty$ (impossibile)

ZAINO INTERO

CHIAMO LA SOL. OTTIMA

$V_{ZI} \longleftrightarrow \bar{x} = (, , , , ,)$

$$\begin{cases} \max \quad 7x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 14x_4 + 16x_5 + 18x_6 \\ 13x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 20x_4 + 27x_5 + 28x_6 \leq 52 \\ \cancel{x_i \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

SE FACCIO COSÌ

$x_i \geq 0$ ⟶ E LA SOL. OTTIMA DIVENTA V_{RC} E QUESTO È CHIAMATO :

- **RILASSATO CONTINUO** DI UN PROBLEMA PLI È IL PROBLEMA STESSO PRIVATO DEI VINCOLI DI INTEREZZA (E DIVENTA UN PROBLEMA DI PL) E VALE :

$V_{RC} \geq V_{ZI}$ " PERCHÉ STO ALLARGANDO I CONFINI DEL POLIEDRO "

- IL RILASSATO CONTINUO È UNA VALUTAZIONE SUPERIORE NEI PROBLEMI DI MAX E UNA VALUTAZIONE INFERIORE IN QUELLI DI MIN

- SE PRENDO UNA $\bar{x}$ AMM. PER IL RILASSATO (PROBLEMI DI MAX)

  ALLORA VALE :

$$\underbrace{V_{RC} \geq V_{ZI}}_{\text{SOL. OTTIMA}} \geq V_I = c\bar{x}$$

RICORDA

- LA PL SI RISOLVE SEMPRE PERCHÉ IL SIMPLESSO RISOLVE SEMPRE ALL' OTTIMO , NON HA SENSO STIMARE

- LA PLI INVECE NO ⟶ DOBBIAMO ACCONTENTARCI DI STIME (SUP E INF .)

ES $\quad V_S \geq V_{ZI} \geq V_I \quad (800 \quad 700)$ ERRORE MAX ? $\dfrac{V_S - V_I}{V_I} = \dfrac{100}{700}$ 14 %

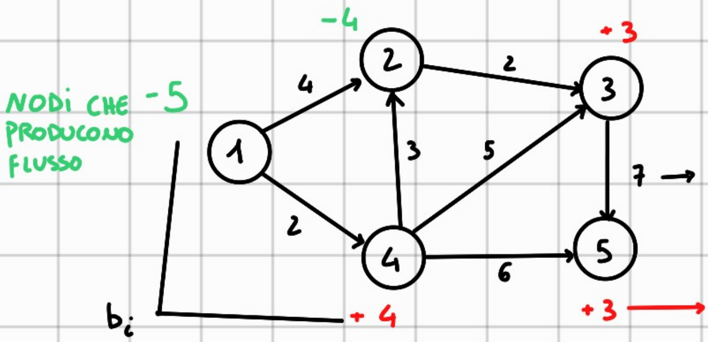
ERRORE MASSIMO

- L'ALGORITMO PLI PARTE DALLE STIME E CON DEGLI ALGORITMI SI RAFFINA

Lezione 24

Problema 8:

Flusso di distribuzione su reti non capacitate di costo minimo



· $N = \{1,2,3,4,5\}$

· $A \subseteq N \times N$ con

· $(4,3) \neq (3,4)$

$m = \#$ nodi $= 5$

$m = \#$ archi $= 7$

(il flusso si distribuisce sulla rete)

Rete NON completa

· se fosse completo m^2 archi, io ne ho messi 7

· in questo esempio la rete è bilanciata $\underbrace{5+4}_{\text{nodi che producono}} = \underbrace{3+3+3}_{\text{nodi che richiedono}}$

$b_i \quad i = 1 \dots m$ **Bilanci**

$c_{ij} \quad i,j = 1 \dots m$ **costi**

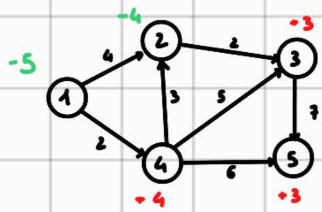
Oss: $\sum b_i = 0$ allora rete bilanciata

Quelle sbilanciate? 1° caso: - richiesta + produzione (banale)

2° caso: + richiesta - produzione $\sum b_i > 0$

N.B. se non c'è una **preferenza** su **chi servire** (servo tutti in modo uguale)

$\Rightarrow$ **problema impossibile**: non si può decidere a chi servire e quanto servire (es preferenza: servo prima gli ospedali)



Dovrei provare a servire $\{3,4\}$, $\{4,5\}$ ... e trovare quello di costo minimo $\longrightarrow$ su $m = 100$ non è gestibile

Lezione 37

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \le 0 \\ h = 0 \end{cases} \qquad (P)$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $f, g, h \in C^1$

- NOI CONSIDEREREMO SOLO :

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) \le 0, \ h(x) = 0 \}$$

REMIND

NEL CASO NON VINCOLATO LA C.N. E' $\nabla f = 0$

DOVE POTEVAMO 1) RISOLVERE IL SISTEMA

2) TROVARE UNA $\{x^k\}$

TH. 3 LAGRANGE - KARUSH - KUHN - TUCKER (LKKT)

(i) SIA D REGOLARE E $\bar{x}$ min. LOCALE DI (P)

ALLORA ESISTONO $(\bar{\lambda}_1, \dots \bar{\lambda}_m) = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, $(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p) = \bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} \overbrace{\nabla f(\bar{x})}^{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \overbrace{\nabla g_i(\bar{x})}^{\mathbb{R}^n} + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \overbrace{\nabla h_j(\bar{x})}^{\mathbb{R}^n} = 0 \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = \bar{\lambda}_1 g_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\bar{x}) = 0 \\ h_j(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

(E OVVIAMENTE $g(\bar{x}) \le 0$)

LKKT

" IL TH. MI DICE CHE IN PRESENZA DI UN MINIMO LOCALE IL SISTEMA E' RISOLVIBILE "

- IL SISTEMA QUANTE INCOGNITE HA? $\underset{m}{\lambda}$, $\underset{n}{x}$, $\underset{p}{\mu}$ $(m + n + p)$
- EQ ?

Oss: $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = 0$ PROD. SCALARE E $g(\bar{x})$ E' UN VETTORE ≤ 0 PK SE $\bar{x}$ min L. => E' AMM.

SE E' AMM. PER IL MODELLO $g_i(x) \le 0$ MA SE $<, > = 0$ $\longrightarrow$ $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i$

=> $m + n + p$ EQUAZIONI => SISTEMA LKKT QUADRATO

$\swarrow$ RISOLUZIONE $\quad \searrow$ $\{x^k\}$

x^k SOL. DI LKKT

Oss: SEMPRE RISOLVIBILE SE D E' CHIUSO E LIMITATO => WEISTRASS => $\exists \ \bar{x}$ min => TH. 3. SISTEMA RISOLVIBILE

SE D ILLIMITATO IL SISTEMA POTREBBE ESSE ϕ

- IL SISTEMA HA ALMENO DUE SOLUZIONI !