

Processamento Digital de Sinais: Atividade 1 – AB2

Aluno: Aldemir Melo Rocha Filho

Matricula: 17212086

Aluno: Sandoval da Silva Almeida Junior

Matricula: 18210550

Aluno: Tayco Murilo Santos Rodrigues

Matricula: 17211250

Questão 1:

Temos que as especificações do filtro em tempo discreto são:

$$\begin{aligned} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

Na execução do projeto que utiliza a transformação bilinear aplicada a um projeto de tempo contínuo, as frequências críticas do filtro de tempo discreto são primeiro pré-deformadas nas frequências de tempo contínuo correspondentes com a seguinte Equação:

$$\frac{2}{T_d} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.0)$$

De modo que a distorção de frequência inerente na transformação bilinear mapeará as frequências de tempo contínuo de volta para as frequências críticas de tempo discreto corretas. Para esse filtro específico, com $|H_c(j\Omega)|$ representando a função de resposta em magnitude do filtro de tempo contínuo, queremos que:

$$0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 \quad 0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T_d} \operatorname{tg}\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) \quad (1.1a)$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0.17783, \quad \frac{2}{T_d} \operatorname{tg}\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq \infty \quad (1.1b)$$

Por conveniência, escolhemos $T_d = 1$. Além disso, já que um filtro *Butterworth* de tempo contínuo tem uma resposta em magnitude monotônica, podemos requerer de forma equivalente que:

$$|H_c(j2\operatorname{tg}(0.1\pi))| \geq 0.89125 \quad (1.2a)$$

e

$$|H_c(j2\operatorname{tg}(0.15\pi))| \leq 0.17783 \quad (1.2b)$$

A forma da função de magnitude ao quadrado para o filtro *Butterworth* é:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (1.3)$$

Calculando N e Ω_c com o sinal de igualdade nas equações 1.2a e b, obtemos:

$$1 + \left(\frac{2\operatorname{tg}(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89}\right)^2 \quad (1.4a)$$

e

$$1 + \left(\frac{2tg(0.15\pi)}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.178} \right)^2 \quad (1.4b)$$

Ao ressovermos as equações acima para N , obtemos:

$$N = \frac{\log \left[\left(\left(\frac{1}{0.178} \right)^2 - 1 \right) / \left(\left(\frac{1}{0.89} \right)^2 - 1 \right) \right]}{2 \log [tg(0.15\pi) / tg(0.1\pi)]} = 5.305 \quad (1.5)$$

Como é preciso que N seja um inteiro, escolhemos $N = 6$. Substituindo $N = 6$ na Equação 1.4b, obtemos $\Omega_c = 0.766$. Para esse valor de Ω_c , as especificações da faixa de passagem são excedidas e as especificações na faixa de rejeição são atendidas exatamente. Isso é razoável no caso da transformação bilinear, pois não temos de nos preocupar com o *aliasing*. Ou seja, com a pré-deformação apropriada, podemos estar certos de que o filtro de tempo discreto resultante atenderá às especificações exatamente na extremidade da faixa de rejeição desejada.

A função de sistema do filtro de tempo contínuo causal obtida pela seleção dos polos no semiplano esquerdo é:

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

A seguir, são mostrados os resultados do filtro em tempo contínuo projetado em linguagem *python*:

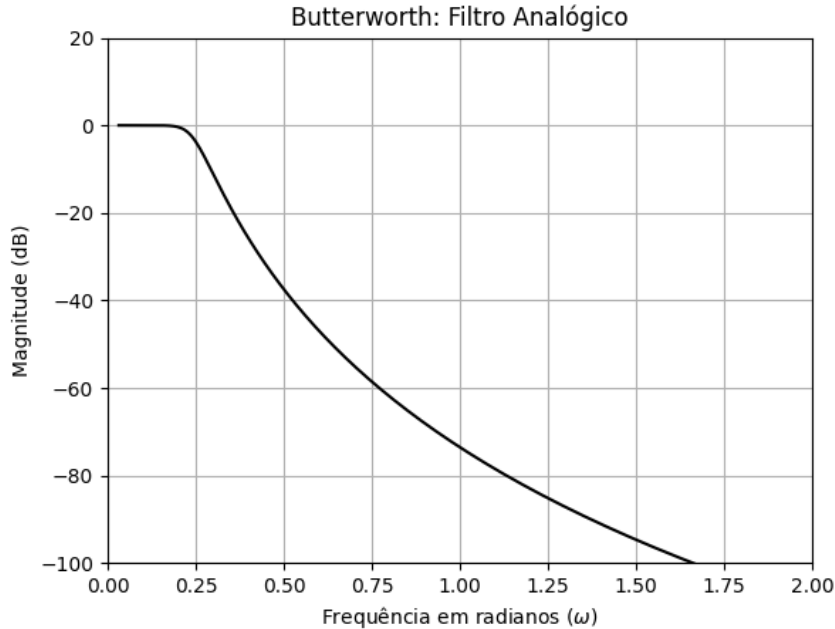


Figura 1.1: Magnitude Logarítmica da resposta em frequência do filtro de tempo contínuo

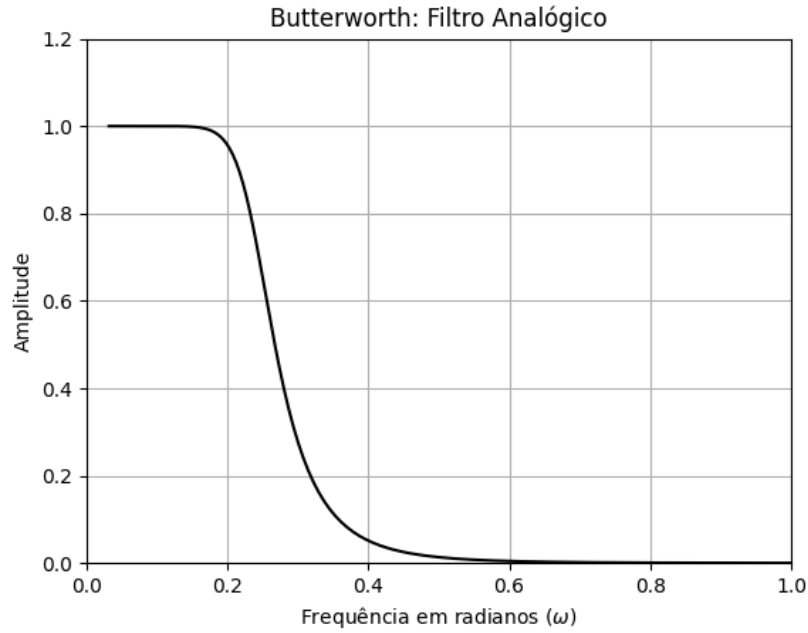


Figura 1.2: Magnitude da resposta em frequência do filtro de tempo contínuo

A função de sistema para o filtro de tempo discreto é então obtida pela aplicação da transformação bilinear a $H_c(s)$ com $T_d = 1$. O resultado é:

$$H(z) = \frac{0.0007378(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.2686z^{-1} + 1.7051z^{-2})(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2})} \times \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

A seguir, são mostrados os resultados do filtro em tempo discreto projetado em linguagem *python*. Perceba que em $\omega = 0.2\pi$, a magnitude logarítmica é -0.56dB e, em $\omega = 0.3\pi$, a magnitude logarítmica é exatamente -0.15dB .

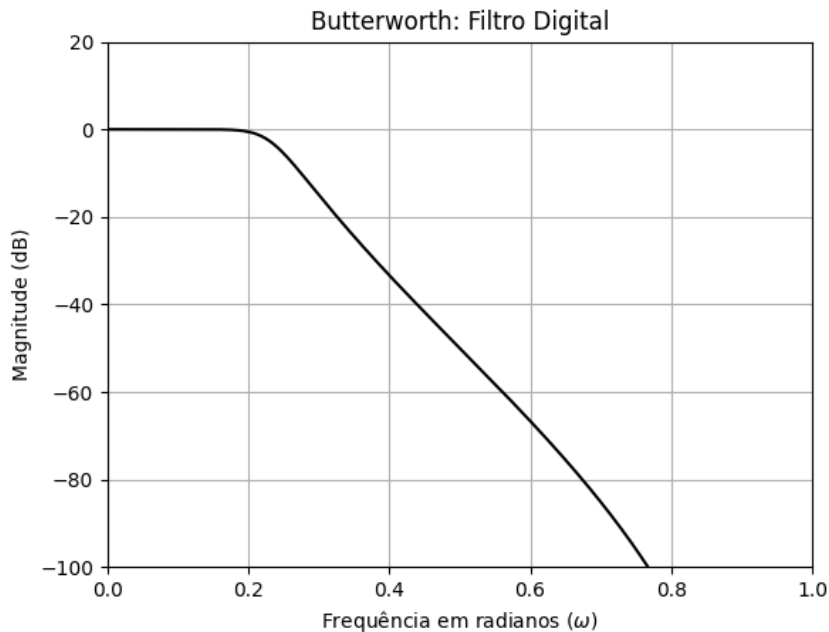


Figura 1.3: Magnitude Logarítmica da resposta em frequência do filtro de tempo discreto

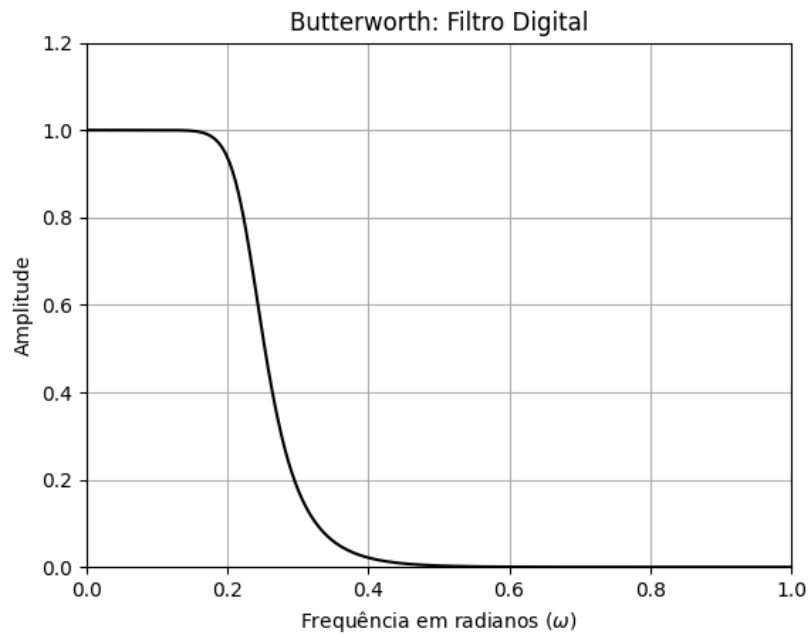


Figura 1.4: Magnitude da resposta em frequência do filtro de tempo discreto

Para comprovar que as funções de transferências possuem desempenho adequado foi aplicado o seguinte sinal contaminado com ruído na entrada do filtro:

$$input = \sin(2\pi * 0.75) + \sin(2\pi * 1.25) * 0.08$$

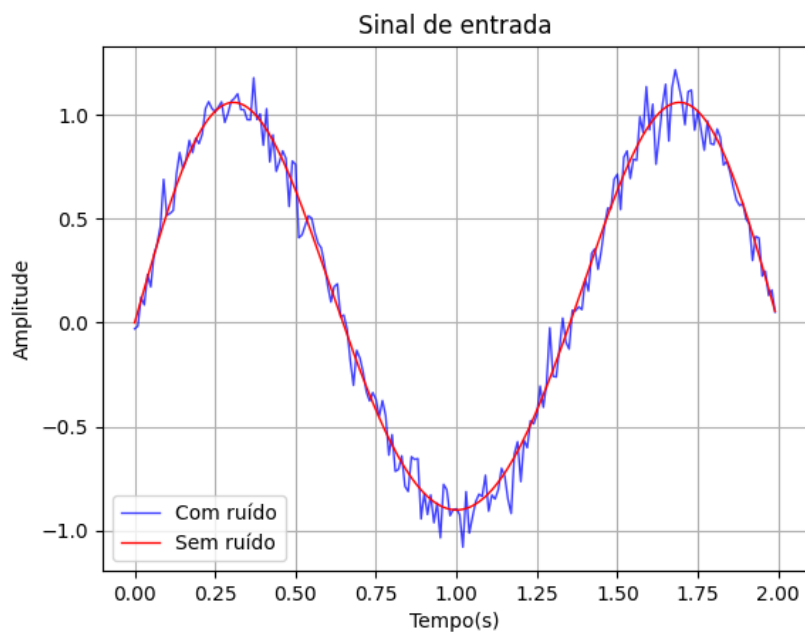


Figura 1.5: Representação gráfica do sinal de entrada para o filtro

O seguinte sinal filtrado foi obtido na saída:

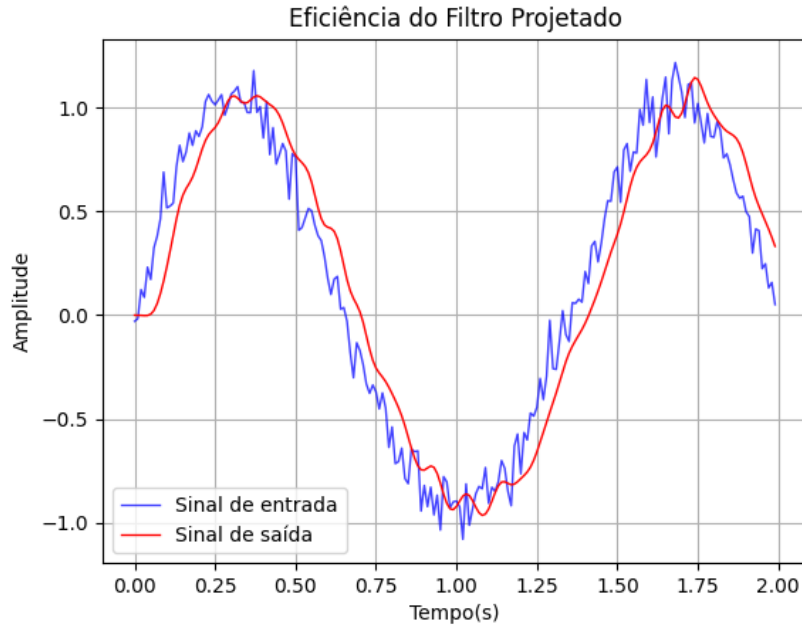


Figura 1.6: Representação gráfica do sinal de saída para o filtro Butterworth

Questão 2:

Considerando o seguinte filtro passa-baixa Chebyshev de Tipo 1 com a seguinte função de sistema:

$$H_{lp}(z) = \frac{0.001836(1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.5548z^{-1} + 0.6493z^{-2})(1 - 1.4996z^{-1} + 0.8482z^{-2})}$$

Esse sistema de ordem 4 foi projetado para atender às especificações:

$$0.89125 \leq |H_{lp}(e^{j\theta})| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 0.2\pi$$

$$|H_{lp}(e^{j\theta})| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq \theta \leq \pi$$

A resposta em frequência desse filtro é mostrada nas **Imagens 2.1** e **2.2**. Os resultados foram obtidos com o auxílio de implementações em *Python*.

Agora, para transformar esse filtro em um filtro passa-altas com frequência de corte da faixa de passagem $\omega_p = 0.6\pi$, faremos uso da seguinte relação:

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \text{ onde } \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)} \text{ e } \omega_p = \text{frequência de corte desejada}$$

Dessa forma, temos:

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{0.2\pi + 0.6\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{0.2\pi - 0.6\pi}{2}\right)} = -0.38197$$

A resposta em frequência desse filtro é mostrada nas **Imagens 2.3** e **2.4**. Os resultados foram obtidos com o auxílio de implementações em *Python*.

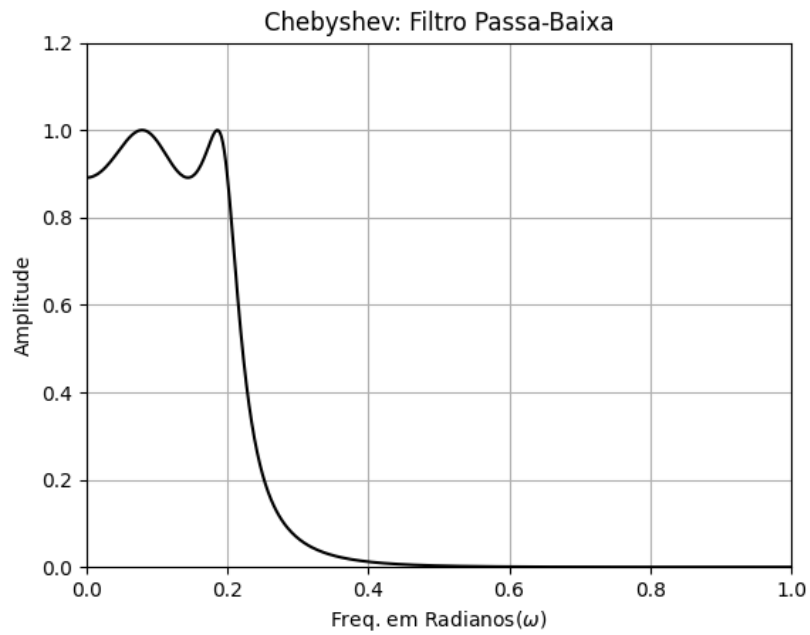


Imagem 2.1: Magnitude da resposta em frequência do filtro Chebyshev tipo 1 Passa-baixa

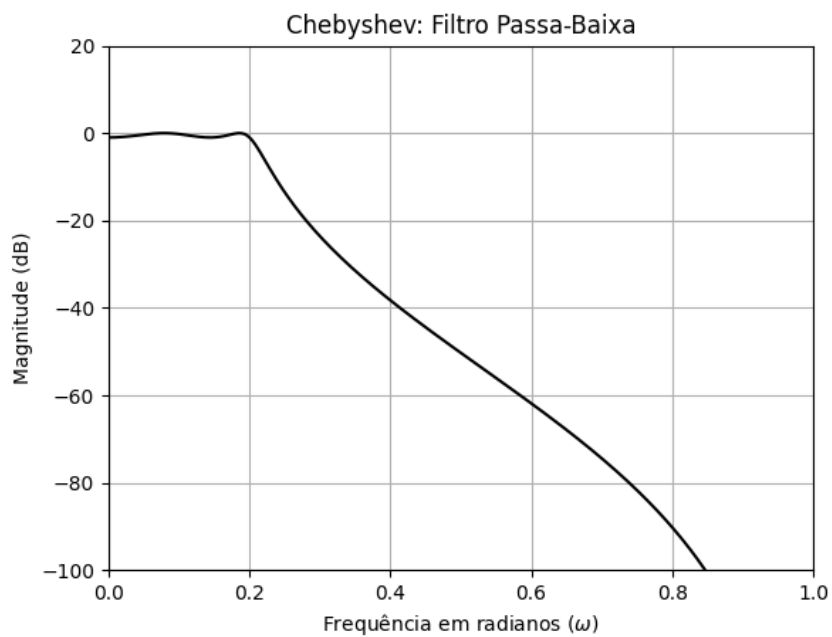


Imagem 2.2: Magnitude logarítmica da resposta em frequência do filtro Chebyshev tipo 1 Passa-baixa

Para comprovar que as funções de transferências possuem desempenho adequado foi aplicado o mesmo sinal descrito na **Imagem 1.5** na entrada do filtro:

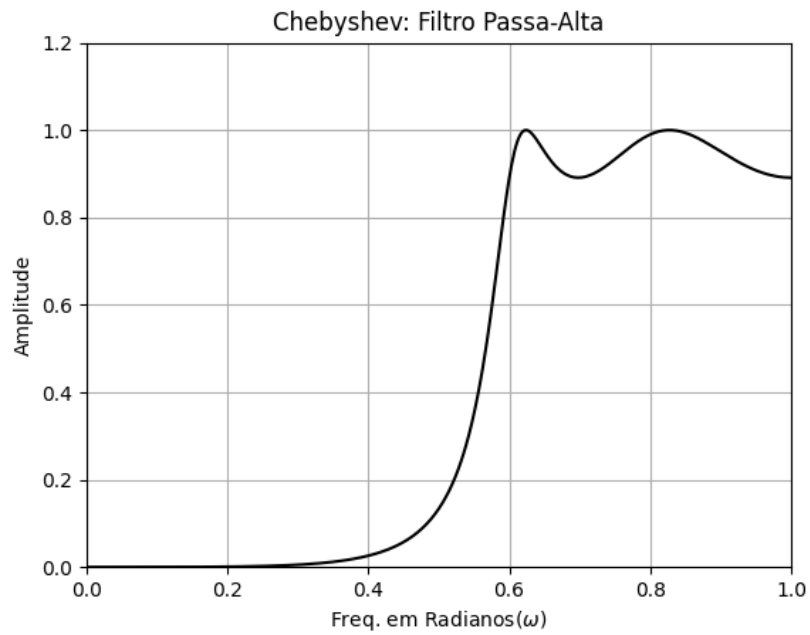


Imagem 2.3: Magnitude da resposta em frequência do filtro Chebyshev tipo 1 Passa-alta

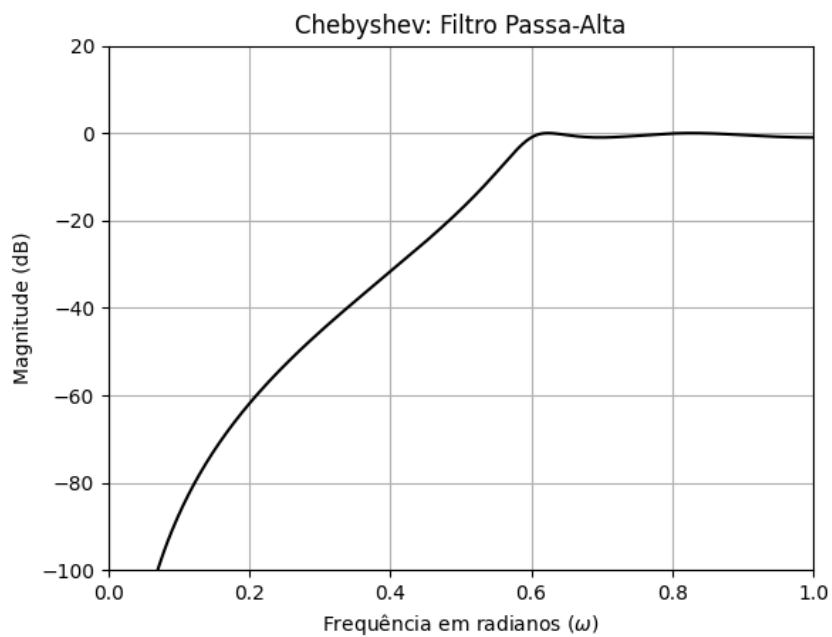


Imagem 2.4: Magnitude logarítmica da resposta em frequência do filtro Chebyshev tipo 1 Passa-alta

Para comprovar que as funções de transferências possuem desempenho adequado foi aplicado o mesmo sinal descrito na **Imagem 1.5** na entrada do filtro.

O seguinte sinal filtrado foi obtido na saída:

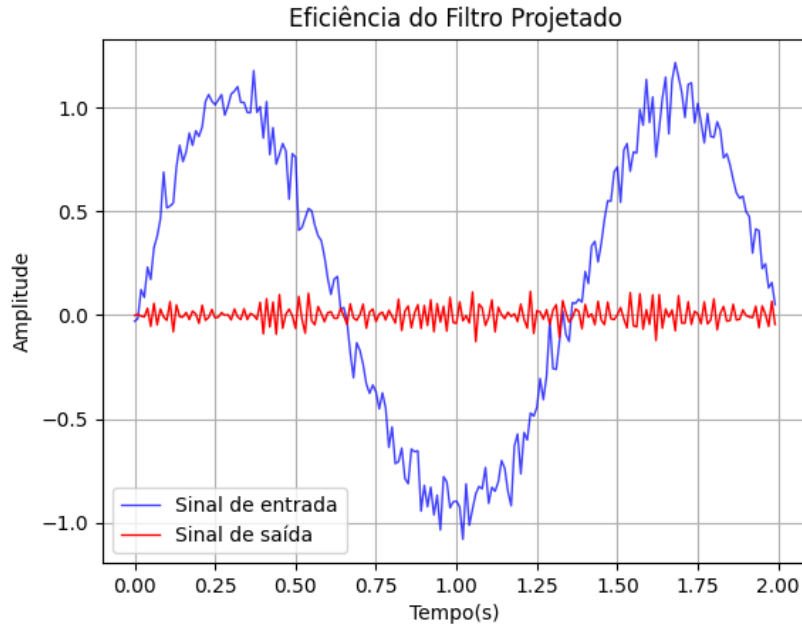


Figura 1.6: Representação gráfica do sinal de saída para o filtro Chebyshev tipo 1 Passa-baixa

Questão 3:

Considere as seguintes especificações de desempenho para um filtro passa-baixa FIR:

$$\omega_p = 0.4\pi$$

$$\omega_s = 0.6\pi$$

$$\delta_1 = 0.01$$

$$\delta_2 = 0.001$$

Com o uso das fórmulas de projeto na janela de Kaiser, é simples projetar um filtro passa-baixas FIR para atender às especificações prescritas. O procedimento é o seguinte:

1. Primeiro, as especificações precisam ser definidas. Isso significa selecionar ω_p e ω_s desejados e o máximo erro de aproximação tolerável. Para o projeto por janela, o filtro resultante terá o mesmo erro de pico δ na faixa de passagem e na faixa de rejeição.
2. Frequência de corte do filtro passa-baixas ideal de base precisa ser encontrada. Devido à simetria da aproximação na descontinuidade de $H_d(e^{j\omega})$, definimos:

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.5\pi$$

3. Para determinar os parâmetros da janela de Kaiser, primeiro calculamos:

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi, \quad A = -20\log_{10}\delta = 60$$

Substituímos essas duas quantidades nas equações devidas para obter os valores requeridos de β e M . Para este exemplo, as fórmulas preveem:

$$\beta = 5.653 \text{ e } M = 37$$

4. A resposta ao impulso do filtro é calculada da seguinte forma:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \cdot \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

com $\alpha = M/2 = 37/2 = 18.5$. Como $M = 37$ é um inteiro ímpar, o sistema de fase linear resultante seria de Tipo II. A **Figura 3.1** em que se mostra a resposta em magnitude logarítmica em dB, indica que $H(e^{j\omega})$ é zero em $\omega = \pi$ ou, de modo equivalente, que $H(z)$ tem um zero em $z = -1$, como requerido para um sistema FIR de Tipo II.

5. Finalmente, observe que não é necessário fazer o gráfico da fase ou do atraso de grupo, já que sabemos que a fase é exatamente linear e o atraso é de $M/2 = 18.5$ amostras.

A seguir é apresentado o diagrama de magnitude logarítmica para este filtro.

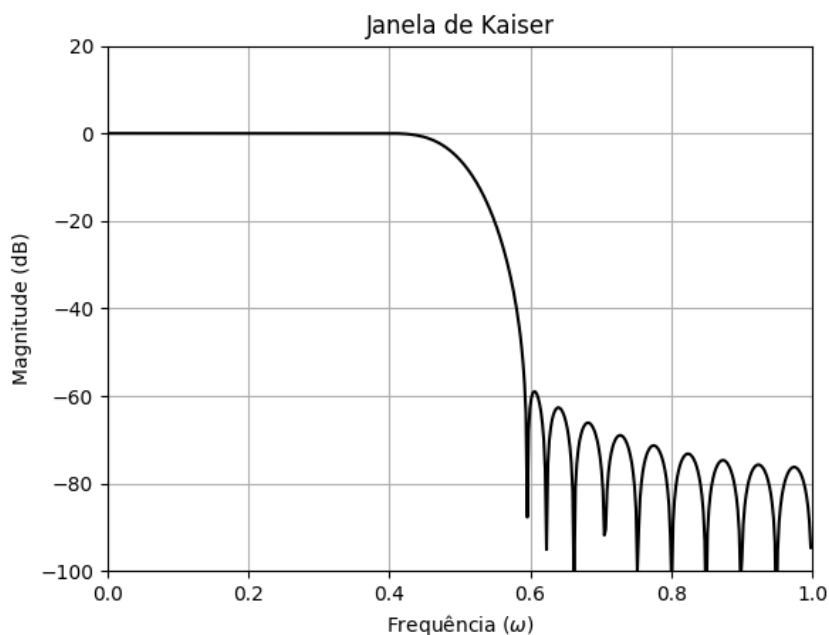


Imagem 3.1: Magnitude logarítmica da resposta em frequência do filtro passa-baixas projetado com uma janela de Kaiser.

Anexos:

[1] Link para o Notebook com as implementações realizadas para essa atividade. Google Colab. Disponível em: < [PDS - AB2](#) >

Referências Bibliográficas:

[1] OPPENHEIM, Alan V. Processamento em tempo discreto de sinais. 3ª ED. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.