Robótica: Atividade 01 – Teórica

Aluno: Aldemir Melo Rocha Filho **Matricula:** 17212086
Aluno: Sandoval da Silva Almeida Junior **Matricula:** 18210505
Aluno: Tayco Murilo Santos Rodrigues **Matricula:** 17211250

Descrição da Atividade:

Esta atividade foca em problemas de representação espacial.

Questão 1:

Temos que P^A é nosso vetor inicial e P^B o nosso vetor final. De forma que $P^B = R_y(30°)[R_x(45°)P^A]$.

1.a:

Considerando $R_x(45°)P^A$ um ponto intermediário c entre as duas rotações, temos que:

$$ {}^B_AR = R_y \cdot R_x $$

Dessa forma temos que ${}^B_AR$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$ {}^B_AR = \begin{bmatrix} \cos(30°) & 0 & \sin(30°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(30°) & 0 & \cos(30°) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45°) & -\sin(45°) \\ 0 & \sin(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix} $$

Dessa forma temos que:

$$ {}^B_AR = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} $$

1.b:

Temos que $P^B = {}^B_AR \cdot P^A$, assim temos que:

$$ \begin{bmatrix} {}^BP_x \\ {}^BP_y \\ {}^BP_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^AP_x \\ {}^AP_y \\ {}^AP_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}(y + z) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{4}(y + z) \end{bmatrix} $$

Questões 2:

(b) Representa o eixo de rotação.

Temos que 1 é autovalor de $R \rightarrow$ para $\forall$ vetor $p \in \mathbb{R}^3$ associado a este autovalor, teremos $R_p = 1 \cdot p = p$. $\therefore$ Temos que um dos eixos permanece preservado sobre os mesmos pontos.

Questão 3:

3.a:

Podemos provar que (1) está em conformidade com (2) usando a soma dos elementos da diagonal principal das matrizes, esta operação irá calcular o traço das matrizes. dessa forma temos que:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = r_x^2(1 - c\theta) + c\theta + r_y^2(1 - c\theta) + c\theta + r_z^2(1 - c\theta) + c\theta =$$

$$= (1 - c\theta)\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right) + 3c\theta = (1 - c\theta)|r^2| + 3c\theta$$

$$\rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 - c\theta + 3c\theta = 1 - 2c\theta; \text{ pois } \|r\| = 1$$

Assim, resolvendo para θ, temos que:

$$c\theta = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}\right)$$

Temos também que:

$$a_{21} - a_{12} = [r_x r_y(1 - c\theta) + r_z s\theta] - [r_x r_y(1 - c\theta) - r_z s\theta] = 2r_z s\theta$$

$$a_{32} - a_{23} = 2r_x s\theta$$

$$a_{13} - a_{31} = 2r_y s\theta$$

Logo:

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2sen(\theta)} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}$$

3.b:

De **3.a**, temos que:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}\right)$$

Dessa forma:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{0.9801 + 0.9363 + 0.9553 - 1}{2}\right) \rightarrow \theta = arc\,cos(0.93585) \cong 20.634°$$

E de maneira análoga:

$$r = \frac{1}{2sen(20.634°)} = \begin{bmatrix} 0.2893 - 0.2955 \\ 0 - 0.0587 \\ 0.1898 - 0.1897 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.83 \\ -0.08 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

3.c:

Teremos:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1+1+1-1}{2}\right) = \cos^{-1}(1) = 0$$

∴ Podemos concluir que nenhuma rotação é realizada, o que é de se esperar ao rotacionar um vetor qualquer P utilizando a matriz identidade.

Questão 4:

(a) Verdadeira

(b) Verdadeira

(c) Verdadeira

(d) Verdadeira

Questão 5:

(a) Verdadeira

(b) Verdadeira

(c) Verdadeira

(d) Falsa. Provando por absurdo:

Tome uma matriz de transformação homogênea qualquer:

$${}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora tome sua transposta como a matriz utilizada para a transformação inversa:

$${}^{A}_{B}T^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta & 0 \\ 0 & -s\theta & c\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, se ${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{T} \rightarrow a_{41} = 0 = b_{41} = 1 \rightarrow 0 = 1$. Logo por absurdo a assertiva não vale $\forall$ caso.

Questão 6:

Temos que ${}^{s}_{r}T\,{}^{e}_{s}T\,{}^{a}_{e}T\,{}^{r}_{a}T = I_4$, pois não houve mudança no frame $\{r\}$.

6.a:

Usando a relação supracitada podemos multiplicar os dois lados da equação por $({}^{e}_{s}T\,{}^{a}_{e}T\,{}^{r}_{a}T)^{-1}$ e obter a seguinte relação:

$$ {}^{s}_{r}T({}^{e}_{s}T\,{}^{a}_{e}T\,{}^{r}_{a}T)({}^{e}_{s}T\,{}^{a}_{e}T\,{}^{r}_{a}T)^{-1} = I_4({}^{e}_{s}T\,{}^{a}_{e}T\,{}^{r}_{a}T)^{-1} \rightarrow {}^{s}_{r}T = {}^{e}_{s}T^{-1}\,{}^{a}_{e}T^{-1}\,{}^{r}_{a}T^{-1} $$

Assim podemos escrever ${}^{s}_{r}T$ como:

$$ {}^{s}_{r}T = {}^{s}_{e}T \cdot \begin{bmatrix} {}^{r}_{a}R^{T} & -{}^{r}_{a}R^{T}\,{}^{a}P_{rORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{a}_{e}R^{T} & -{}^{a}_{e}R^{T}\,{}^{e}P_{aORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

6.b:

Sabemos que a origem do *frame* $\{s\}$ visto do *frame* $\{e\}$ é $[1 \quad 1 \quad 1]^{T}$ e partindo de ${}^{r}_{e}T$ podemos notar que a origem do *frame* $\{r\}$ visto do *frame* $\{e\}$ também é $[1 \quad 1 \quad 1]^{T}$. Logo é imediato que:

$$ {}^{r}P_{sORG} = {}^{r}_{e}T\left(\left[{}^{e}P^{T}{}_{sORG} \ 1\right]^{T} - \left[{}^{e}P^{T}{}_{rORG} \ 1\right]^{T} \right) $$

$$ = {}^{r}_{e}T([1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{T} - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{T}) $$

$$ = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{T} $$

Questão 7:

7.a:

Observando a imagem podemos inferir que o vetor ${}^{B}r = ({}^{A}P - {}^{B}P)$. De forma que ${}^{A}P$ é o vetor com origem no *frame* $\{A\}$ que vai em direção ao *frame* $\{C\}$ e ${}^{B}P$ é o vetor com origem no *frame* $\{A\}$ que vai em direção ao o *frame* $\{B\}$. Assim teremos ${}^{B}r$ com origem em $\{A\}$, por fim basta utilizar ${}^{B}_{A}T$ e teremos ${}^{B}r$ com origem em $\{B\}$, assim resolvendo nosso problema. Logo:

$$ {}^{B}r = {}^{B}_{A}T \cdot \left({}^{A}P - {}^{B}P \right) = $$

$$ = {}^{B}_{A}T \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} \right) $$

$$ \longrightarrow {}^{B}r = {}^{B}_{A}T \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ -500 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ 400 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

7.b:

Temos que os eixos y e z dos *frames* $\{A\}$ e $\{C\}$ são coplanares e o ângulo entre os vetores $\hat{z}_a$ e $\hat{z}_c$ com relação à estrela do norte é $30°$. Dessa forma temos que podemos obter ${}^{B}_{C}T$ da seguinte forma:

$${}^{C}_{B}T = ({}^{B}_{A}T)^{-1} \cdot {}^{C}_{A}T$$

De forma que:

$$({}^{B}_{A}T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -100 \\ 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -300 \\ -1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e:

$${}^{C}_{A}T = \begin{bmatrix} & R_x & & 0 \\ & & & 800 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(30°) & -sin(30°) & 800 \\ 0 & sin(30°) & cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$${}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -300 \\ -1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(30°) & -sin(30°) & 800 \\ 0 & sin(30°) & cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow {}^{B}_{C}T \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -300 \\ -1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 800 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.866 & -0.5 & 500 \\ -1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0.5 & 0.866 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$