



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

**RELATÓRIO DA EXPERIÊNCIA Nº 02
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS REPRESENTADOS
POR EQUAÇÕES A DIFERENÇAS**

Tayco Murilo Santos Rodrigues - 17211250

Maceió - AL
2023

Tayco Murilo Santos Rodrigues - 17211250

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS REPRESENTADOS POR EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

Segundo Relatório Parcial apresentado à disciplina de Introdução à Identificação de Sistemas, correspondente à avaliação do semestre 2023.1 do 10^o período do curso de Engenharia de Computação da Universidade Federal de Alagoas, sob orientação do **Prof. Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo**.

Maceió - AL
2023

RESUMO

Este relatório aborda a análise e identificação de sistemas de controle em malha aberta. O objetivo é compreender o comportamento desses sistemas, identificar modelos matemáticos que os representem adequadamente e avaliar a eficácia desses modelos por meio de métodos de validação. Iniciamos coletando as respostas a entradas degrau dos sistemas e analisamos suas características em relação aos polos. Em seguida, obtivemos as funções de transferência discretas. Utilizamos o estimador de mínimos quadrados para identificar modelos de diferentes ordens, considerando tanto dados simulados quanto dados com ruído. Pro fim, validamos os modelos usando diferentes métodos: simulação com conjuntos diferentes de dados, coeficiente de correlação múltipla e razão sinal-ruído. Testamos modelos ARX e ARMAX de diferentes ordens e comparamos seus desempenhos em termos de erro médio quadrático.

Palavras-Chave: sistemas de controle em malha aberta, análise de sistemas, identificação de modelos, função de transferência discreta, estimador de mínimos quadrados, simulação, equações de diferenças, ARX, ARMAX.

Lista de Figuras

1	Descrição simplificada de um Sistema de Controle.	10
2	Exemplo de entrada gerada com o código presente em Listing 1.	26
3	Sinal de entrada Utilizado para validação.	29
4	Resposta dos Sistemas (3.1.1) e (3.1.2) ao Degrau unitário.	32
5	Comparativo entre $G(s)$ e $G(z)$ para ambos os sistemas.	34
6	Comparativo para as diferentes entradas para $G(z)$	35
7	Comparativo para as diferentes entradas para $G(s)$	36
8	Resultados para $G_1(z)$ de ordem 1	37
9	Resultados para $G_1(z)$ de ordem 2	37
10	Resultados para $G_1(z)$ de ordem 3	38
11	Resultados para $G_1(z)$ de ordem 4	38
12	Resultados para $G_1(z)$ de ordem 5	39
13	Resultados para $G_2(z)$ de ordem 1	40
14	Resultados para $G_2(z)$ de ordem 2	40
15	Resultados para $G_2(z)$ de ordem 3	41
16	Resultados para $G_2(z)$ de ordem 4	41
17	Resultados para $G_2(z)$ de ordem 5	42
18	Resultado para a adição do ruído dinâmico.	43
19	Resultado para a adição do ruído estático.	44
20	Saída dos Parâmetros estimados para a entrada senoidal.	44
21	Saída dos Parâmetros estimados para a entrada senoidal.	46
22	Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 1.	47
23	Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 2.	48
24	Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 1.	50
25	Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 2.	51
26	Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 3.	53
27	Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 4.	54
28	Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 3.	55
29	Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 4.	56
30	Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 3.	57
31	Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 4.	58
32	Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 3.	59
33	Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 4.	60

Listings

1	Código responsável por gerar a Entrada aleatória	25
2	Estimador de mínimos quadrados	26
3	Calculo do resíduo e sua média	27
4	Adição de ruído ao sistema	28
5	$u(t)$ para validação	29
6	Calculo do somatório dos erros ao quadrado.	29
7	Calculo do coeficiente de correlação multipla.	30
8	Calculo da relação sinal-ruído.	30

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Contextualização	9
1.2	Objetivos	9
1.3	Motivação	9
2	Fundamentação teórica	10
2.1	Introdução a Sistemas de Controle	10
2.2	Sistemas de Primeira Ordem no Domínio da Frequência	10
2.3	Sistemas de Segunda Ordem no Domínio da Frequência	11
2.4	Sistemas de Ordem n no Domínio da Frequência	12
2.4.1	Função de Transferência para Sistemas de Ordem n	12
2.4.2	Resposta em Frequência	12
2.4.3	Estabilidade no Domínio da Frequência	13
2.5	Método de Tustin (Transformação Bilinear)	13
2.5.1	Passo a Passo da Discretização pelo Método de Tustin	13
2.6	Equações a Diferença no Contexto de Discretização de Sistemas de Controle	14
2.7	Estimador de Mínimos Quadrados	16
2.8	Resíduos	17
2.9	Ruído Gaussiano, Ruído Dinâmico e Ruído Interno de Sensor	17
2.9.1	Ruído Gaussiano	17
2.9.2	Ruído Dinâmico	18
2.9.3	Ruído Interno de Sensor	19
2.10	Validação de modelos	19
2.10.1	Simulação com um Conjunto Diferente de Dados de Entrada e Somatório do Erro Quadrático	19
2.10.2	Coefficiente de Correlação Múltipla	19
2.10.3	Razão Sinal-Ruído (S/R)	20
2.11	Modelos de Estimação ARX	21
2.12	Modelos de Estimação ARMAX	22
2.13	Modelos Variantes no Tempo	22
2.14	Regressores	23
3	Metodologia	24
3.1	Sistemas em tempo contínuo (s) e resposta	24
3.2	Sistemas em tempo discreto (z) e equações a diferença	24
3.3	Gerando uma entrada aleatória	25
3.4	Estimação do Modelo e cálculo do Resíduo	26

3.5	Adição de ruído ao Sistema	27
3.6	Validação dos Modelos	28
3.7	Identificação de Modelos ARX e ARMAX	30
4	Resultados	32
4.1	Resposta dos Sistemas em Malha Aberta	32
4.1.1	Sistema 3.1.1	33
4.1.2	Sistema 3.1.2	33
4.2	Resposta dos Sistemas Discretizados	33
4.3	Resposta à entrada aleatória	34
4.4	Parâmetros encontrados utilizando EMQ	36
4.4.1	Sistema 3.2.1	36
4.4.2	Sistema 3.2.2	39
4.5	Parâmetros calculados com adição de ruído	42
4.5.1	Resultados para adição de ruído dinâmico	42
4.5.2	Resultados para adição de ruído estático	43
4.6	Validação dos coeficientes encontrados	44
4.6.1	Validação do sistema 3.2.1 com a adição de ruído	44
4.6.2	Validação do sistema 3.2.2 com a adição de ruído	46
4.7	Resultados para os conjuntos 1 e 2	47
4.7.1	Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 1)	47
4.7.2	Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 2)	48
4.7.3	Resultante EMQ para os modelos ARX	49
4.7.4	Justificativa da escolha do modelo ARX	49
4.7.5	Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 1)	50
4.7.6	Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 2)	51
4.7.7	Resultante EMQ para os modelos ARMAX	52
4.7.8	Justificativa da escolha do modelo ARMAX	52
4.8	Resultados para os conjuntos 3 e 4	53
4.8.1	Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 3)	53
4.8.2	Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 4)	54
4.8.3	Resultante EMQ para os modelos ARX	55
4.8.4	Resultante do comportamento dos Regressores ARX	55
4.8.5	Justificativa da escolha do modelo ARX	56
4.8.6	Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 3)	57
4.8.7	Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 4)	58
4.8.8	Resultante EMQ para os modelos ARMAX	59
4.8.9	Resultante do comportamento dos Regressores ARMAX	59
4.8.10	Justificativa da escolha do modelo ARMAX	60

5 Conclusão**61**

1 Introdução

1.1 Contextualização

No campo da engenharia de controle e automação, a análise e identificação de sistemas são fundamentais para projetar estratégias de controle eficazes. Este relatório aborda uma série de atividades relacionadas à análise, identificação e validação de modelos de sistemas de controle em malha aberta. O objetivo é compreender o comportamento desses sistemas, identificar modelos matemáticos que os representem adequadamente e avaliar a eficácia desses modelos por meio de diferentes métodos de validação.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste relatório é explorar e entender os sistemas de controle em malha aberta através de uma série de etapas estruturadas. Essas etapas incluem a coleta de respostas a entradas degrau, a análise das respostas em relação aos polos dos sistemas e a obtenção das funções de transferência discretas para diferentes períodos de amostragem. Além disso, pretende-se investigar a identificação de modelos matemáticos usando o estimador de mínimos quadrados, incorporando tanto dados simulados quanto dados com ruído.

1.3 Motivação

A motivação por trás deste estudo reside na necessidade de compreender e modelar sistemas de controle em malha aberta, que podem ser encontrados em uma variedade de aplicações práticas. Ao obter uma compreensão mais profunda desses sistemas e suas características, podemos aprimorar a capacidade de projetar controladores eficazes e tomar decisões baseadas em dados para otimizar o desempenho e a confiabilidade de sistemas reais. Além disso, a análise dos métodos de identificação e validação de modelos enriquece o conhecimento sobre a confiabilidade dessas técnicas em ambientes práticos.

2 Fundamentação teórica

2.1 Introdução a Sistemas de Controle

Um sistema de controle consiste em subsistemas e processos (ou plantas) construídos com o objetivo de se obter uma saída desejada com um desempenho desejado, dada uma entrada especificada. A Figura 1 mostra um sistema de controle em sua forma mais simples, na qual a entrada representa uma saída desejada.

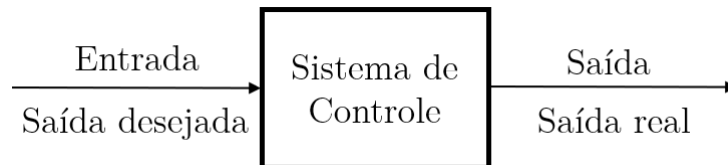


Figura 1: Descrição simplificada de um Sistema de Controle.

A figura acima pode ter sua arquitetura interna representada de duas formas: Malha aberta e Malha Fechada; sua ordem também pode variar. Nesse documento são discutidos experimentos que aproximam os dados para sistemas de primeira e segunda ordem.

2.2 Sistemas de Primeira Ordem no Domínio da Frequência

Sistemas de primeira ordem podem ser analisados no domínio da frequência por meio da Transformada de Laplace. Nesse domínio, a equação diferencial de um sistema de primeira ordem é representada pela função de transferência.

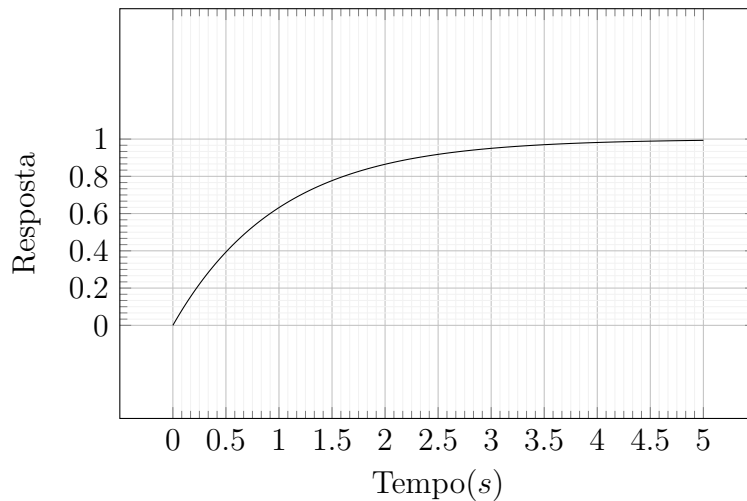
A função de transferência de um sistema de primeira ordem, no domínio da frequência, é definida como:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s} \quad (2.2.1)$$

onde s é a variável complexa da frequência, K é o ganho estático e τ é a constante de tempo.

A função de transferência descreve a relação entre a transformada de Laplace da saída $X(s)$ e a transformada de Laplace da entrada $U(s)$ do sistema. Ela permite analisar o comportamento do sistema em termos de ganho e fase em diferentes frequências. Abaixo é apresentada a resposta típica de um sistema de primeira ordem à um Degrau unitário.

Resposta típica ao Degrau unitário de um Sistema de Primeira Ordem



2.3 Sistemas de Segunda Ordem no Domínio da Frequência

Um sistema de segunda ordem é um tipo de sistema dinâmico cujo comportamento pode ser descrito no domínio da frequência por meio da função de transferência. A função de transferência de um sistema de segunda ordem é definida como:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\theta s} \quad (2.3.1)$$

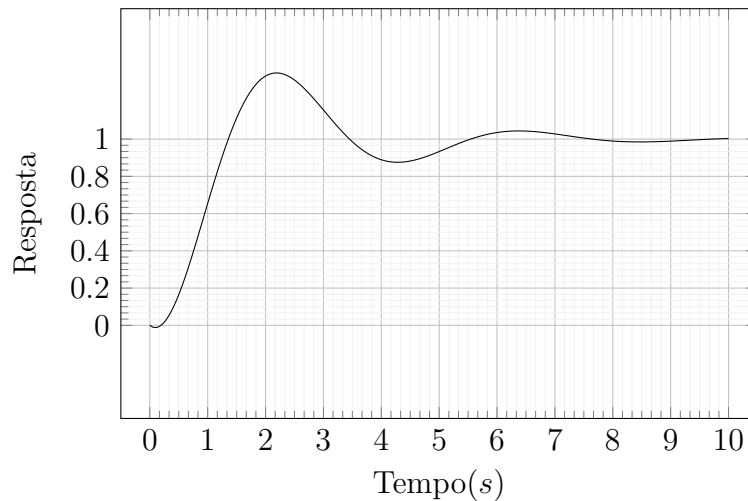
onde:

- $G(s)$ é a função de transferência do sistema,
- s é a variável complexa que representa a frequência complexa,
- K é o ganho do sistema,
- ζ é o coeficiente de amortecimento,
- ω_n é a frequência natural não amortecida.

No domínio da frequência, a função de transferência representa a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada do sistema.

A resposta em frequência de um sistema de segunda ordem é caracterizada pela presença de dois polos complexos conjugados no plano complexo s . Os polos são determinados pelos valores de ζ e ω_n . O coeficiente de amortecimento ζ afeta a forma da resposta em frequência, enquanto a frequência natural não amortecida ω_n determina a frequência de pico do sistema. Abaixo é apresentada a resposta típica de um sistema de segunda ordem **subamortecido** à um Degrau unitário.

Resposta típica ao Degrau unitário de um Sistema de Segunda Ordem



Claro, vou explicar sobre sistemas de controle de ordem n no domínio da frequência.

2.4 Sistemas de Ordem n no Domínio da Frequência

Em sistemas de controle, a ordem n refere-se ao número de integradores presentes na função de transferência do sistema. Um sistema de controle de ordem n possui n integradores na sua função de transferência, o que implica que a saída depende das n derivadas da entrada.

A análise no domínio da frequência é uma abordagem para entender o comportamento dos sistemas de controle ao considerar como eles respondem a diferentes frequências de entrada. Isso é particularmente útil para compreender a resposta em regime permanente, a rejeição de distúrbios e a estabilidade do sistema.

2.4.1 Função de Transferência para Sistemas de Ordem n

A função de transferência $G(s)$ para um sistema de controle de ordem n é definida como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.4.1)$$

Onde $Y(s)$ é a transformada de Laplace da saída, $U(s)$ é a transformada de Laplace da entrada, e s é a variável complexa $s = \sigma + j\omega$.

2.4.2 Resposta em Frequência

A resposta em frequência de um sistema de controle de ordem n é a maneira como o sistema reage a diferentes frequências de entrada. Ela é obtida substituindo

$s = j\omega$ na função de transferência $G(s)$ e analisando como a magnitude e a fase da função de transferência variam com a frequência ω .

- A magnitude da função de transferência nos dá informações sobre a amplificação ou atenuação da entrada em diferentes frequências.
- A fase da função de transferência nos informa sobre o atraso ou avanço de fase da saída em relação à entrada.

A representação mais comum da resposta em frequência é o diagrama de Bode, que exhibe graficamente a magnitude e a fase da função de transferência em função da frequência.

2.4.3 Estabilidade no Domínio da Frequência

No domínio da frequência, a estabilidade de um sistema pode ser analisada observando-se a localização dos polos da função de transferência no plano complexo. Se todos os polos estiverem no semiplano esquerdo do plano complexo, o sistema será estável no sentido de BIBO (Bounded Input Bounded Output).

Em sistemas de ordem n , a localização dos polos é determinada pelas raízes do polinômio denominador da função de transferência. Se todas as raízes tiverem parte real negativa, o sistema será estável.

2.5 Método de Tustin (Transformação Bilinear)

A discretização de sistemas contínuos é um processo pelo qual um sistema de controle em tempo contínuo é convertido em uma forma que possa ser implementada em um sistema digital, ou seja, em tempo discreto.

O método de Tustin é uma técnica comum para discretizar sistemas contínuos usando a transformação bilinear. A ideia básica é mapear as variáveis contínuas para o domínio discreto mantendo a correspondência entre as frequências. Isso é importante para manter a relação de estabilidade entre sistemas contínuos e discretos.

Claro, vou explicar com mais detalhes o processo de discretização de sistemas contínuos utilizando o método de Tustin.

2.5.1 Passo a Passo da Discretização pelo Método de Tustin

1. Obtenção da Função de Transferência Contínua

Comece com a função de transferência contínua do sistema que você deseja discretizar. Por exemplo, considere uma função de transferência contínua genérica:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.5.1.1)$$

Onde $N(s)$ é o polinômio do numerador e $D(s)$ é o polinômio do denominador.

2. Substituição de s por sua Equivalência em z

A transformação de Tustin mapeia s para z da seguinte maneira:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (2.5.1.2)$$

Onde T_s é o período de amostragem.

Substitua s pela expressão acima na função de transferência contínua:

$$G(z) = \frac{N\left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}\right)}{D\left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}\right)} \quad (2.5.1.3)$$

3. Simplificação da Expressão

Simplifique a expressão substituindo z nas funções N e D , e faça as operações algébricas necessárias para obter uma forma mais simples da função de transferência no domínio z .

4. Conversão para a Forma de Função de Transferência Discreta

Depois de simplificar a expressão, você terá a função de transferência discreta $G(z)$ na forma de um polinômio no domínio z .

Por exemplo, suponha que a expressão simplificada seja:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (2.5.1.4)$$

Esta é a função de transferência discretizada no domínio z , que pode ser implementada em um sistema digital.

A discretização de sistemas contínuos usando o método de Tustin preserva as características de estabilidade e resposta em frequência do sistema original, desde que o período de amostragem T_s seja pequeno o suficiente. No entanto, é importante observar que a discretização introduzirá um atraso na resposta do sistema discreto em relação ao sistema contínuo. Esse atraso é uma consequência natural do processo de amostragem.

2.6 Equações a Diferença no Contexto de Discretização de Sistemas de Controle

Uma equação a diferença é uma representação matemática que descreve como um sistema evolui no tempo discreto, similar às equações diferenciais que descrevem

a evolução no tempo contínuo. Ela é fundamental para entender e analisar sistemas em tempo discreto, como aqueles que surgem após a discretização de sistemas contínuos.

Uma equação a diferença relaciona o valor de uma variável em um instante de tempo discreto k com os valores anteriores dessa mesma variável com valores de outras variáveis. Geralmente, a equação a diferença é expressa como:

$$a_0y[k+n] + a_1y[k+n-1] + \dots + a_ny[k] = b_0u[k+m] + b_1u[k+m-1] + \dots + b_mu[k] \quad (2.6.1)$$

Onde:

- $y[k]$ é a saída do sistema no instante de tempo k .
- $u[k]$ é a entrada do sistema no instante de tempo k .
- n é a ordem da saída atrasada.
- m é a ordem da entrada atrasada.
- a_i e b_i são coeficientes constantes.

Para realizar a Derivação da Equação a Diferença através do Método de Tustin, inicialmente é preciso considerar o processo de discretização de uma função de transferência contínua $G(s)$ usando o método de Tustin como descrito no tópico anterior.

Partindo da equação (2.5.1.3), podemos simplificar multiplicando ambos os lados por $D(s)D(z)$, chegamos a:

$$D(s)D(z)G(z) = N(s)N(z) \quad (2.6.2)$$

Aqui, $D(s)D(z)$ e $N(s)N(z)$ são polinômios em s e z , respectivamente. Agora, aplicamos a transformada Z inversa para obter uma equação a diferença:

$$d[k]d(z)g[k] = n[k]n(z) \quad (2.6.3)$$

Onde $d[k]$, $g[k]$ e $n[k]$ são as transformadas Z inversas dos polinômios $D(s)D(z)$, $G(z)$ e $N(s)N(z)$, respectivamente.

A equação acima é uma representação discreta do sistema resultante após a discretização usando o método de Tustin. Ela relaciona os valores discretos da saída e da entrada com as ordens atrasadas correspondentes.

2.7 Estimador de Mínimos Quadrados

O estimador de mínimos quadrados é uma técnica amplamente utilizada para estimar parâmetros desconhecidos em um modelo matemático, de forma a minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre as observações reais e as previsões do modelo. Ele é especialmente útil em problemas nos quais há dados ruidosos ou observações imperfeitas.

O estimador de mínimos quadrados procura encontrar os valores dos parâmetros de um modelo que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos (diferenças entre as observações reais e as previsões do modelo). Isso é feito para encontrar o melhor ajuste do modelo aos dados observados.

Suponha que possuímos um conjunto de N pares de dados (x_i, y_i) , onde x_i é uma variável independente e y_i é a correspondente variável dependente. É desejado ajustar um modelo linear da forma $y = mx + b$ aos dados. O estimador de mínimos quadrados procura encontrar os valores de m e b que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos e_i :

$$E(m, b) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + b))^2 \quad (2.7.1)$$

Para encontrar os valores de m e b que minimizam essa função, é possível calcular as derivadas parciais de E em relação a m e b e igualá-las a zero. A solução resultante é o estimador de mínimos quadrados para m e b :

$$m = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (2.7.2)$$

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{N} \quad (2.7.3)$$

O estimador de mínimos quadrados tem uma ampla gama de aplicações em diversas áreas, incluindo:

1. Regressão Linear: É usada para ajustar um modelo linear a dados observados, como no exemplo dado acima.
2. Análise de Séries Temporais: Pode ser aplicado para estimar os coeficientes de modelos de séries temporais.
3. Processamento de Sinais: É usado para ajustar modelos de sinal a dados de sensoramento ou medidas.
4. Ajuste de Curvas: Pode ser aplicado para encontrar funções que melhor se ajustem a conjuntos de dados.

5. Identificação de Sistemas: É usado para determinar os parâmetros de sistemas dinâmicos a partir de dados experimentais.
6. Machine Learning: Alguns algoritmos de aprendizado de máquina, como regressão linear, também utilizam o conceito de mínimos quadrados.

2.8 Resíduos

Os resíduos desempenham um papel crucial na análise de dados, modelagem estatística e verificação da adequação de um modelo aos dados observados. Eles fornecem informações valiosas sobre o quão bem um modelo se ajusta aos dados e ajudam a identificar possíveis problemas ou padrões não capturados pelo modelo.

Resíduos são as diferenças entre os valores observados (ou medidas) e os valores previstos pelo modelo. Em outras palavras, um resíduo é a discrepância entre os dados reais e as previsões do modelo. Eles representam a parte não explicada pelos parâmetros do modelo. Suponha que você tenha um conjunto de dados observados (x_i, y_i) e tenha ajustado um modelo $f(x; \theta)$ com parâmetros θ aos dados. Os resíduos e_i são calculados como:

$$e_i = y_i - f(x_i; \theta) \quad (2.8.1)$$

Onde:

- y_i é o valor observado.
- $f(x_i; \theta)$ é o valor previsto pelo modelo com parâmetros θ .

A análise dos resíduos é fundamental para verificar a adequação do modelo aos dados e identificar possíveis problemas.

2.9 Ruído Gaussiano, Ruído Dinâmico e Ruído Interno de Sensor

2.9.1 Ruído Gaussiano

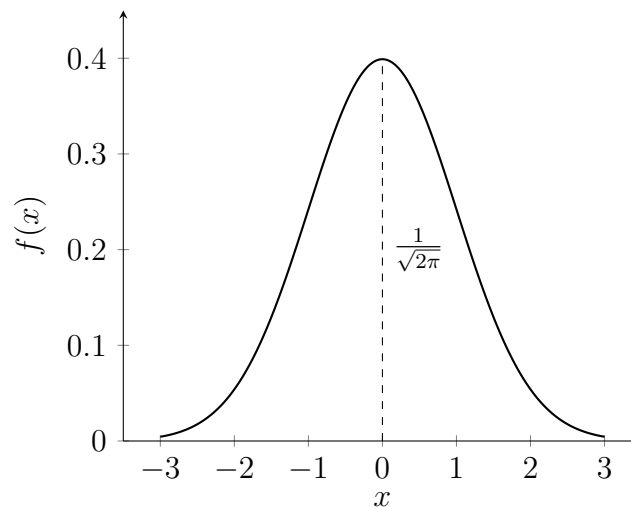
O ruído gaussiano, também conhecido como ruído branco gaussiano, é um tipo de ruído cujas amostras seguem uma distribuição normal (ou gaussiana). Sua característica fundamental é que as flutuações em torno de um valor médio seguem uma distribuição de probabilidade em formato de sino. A densidade de probabilidade de um sinal com ruído gaussiano é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.9.1.1)$$

Onde:

- x é a variável aleatória.
- μ é a média do sinal.
- σ é o desvio padrão, que controla a dispersão dos valores em torno da média.

O ruído gaussiano é comumente encontrado em sistemas devido a múltiplas fontes de interferência, como eletrônica, propagação de sinal e variações naturais. Sua distribuição normal torna-o uma ferramenta matemática conveniente para modelar incertezas. Abaixo é apresentado um gráfico para um ruído gaussiano com média 0 e desvio padrão 1.



2.9.2 Ruído Dinâmico

O ruído dinâmico refere-se às flutuações aleatórias que ocorrem em um sinal ao longo do tempo devido a mudanças nas condições ambientais ou nas características do próprio sistema. É frequentemente modelado como um processo estocástico. Um exemplo de modelo simples é o ruído branco gaussiano, que é adicionado ao sinal para representar essas variações temporais. O ruído dinâmico é particularmente relevante em sistemas que operam ao longo do tempo, como sistemas de controle e processos em tempo real. Uma equação simples para o modelo do ruído dinâmico poderia ser:

$$y(t) = x(t) + \epsilon(t) \quad (2.9.2.1)$$

Onde:

- $y(t)$ é a medição no tempo t .
- $x(t)$ é o valor real do sinal.
- $\epsilon(t)$ é o ruído dinâmico

2.9.3 Ruído Interno de Sensor

O ruído interno de sensor refere-se às variações aleatórias originadas dentro do próprio sensor devido a imperfeições de fabricação, características físicas e eletrônicas do sensor. Essas variações afetam a precisão da medição e podem introduzir incertezas. Um sensor é muitas vezes modelado como o valor verdadeiro mais uma perturbação de ruído interno:

$$y(t) = x(t) + \epsilon_{\text{interno}}(t) \quad (2.9.3.1)$$

Onde:

- $y(t)$ é a medição no tempo t
- $x(t)$ é o valor real do sinal
- $\epsilon_{\text{interno}}(t)$ é o ruído interno do sensor

2.10 Validação de modelos

2.10.1 Simulação com um Conjunto Diferente de Dados de Entrada e Somatório do Erro Quadrático

Para validar um modelo, é essencial verificar se ele é capaz de fazer previsões precisas em novos dados, que não foram usados para treinamento. Uma abordagem comum é simular o modelo com um conjunto independente de dados de entrada X_{val} e comparar as previsões Y_{pred} do modelo com os valores reais Y_{real} . O erro quadrático médio (RMSE) é uma métrica de avaliação comumente utilizada e é calculado da seguinte forma:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{val}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{val}}} (Y_{\text{real},i} - Y_{\text{pred},i})^2} \quad (2.10.1.1)$$

Onde:

- N_{val} é o número de amostras no conjunto de validação.

Quanto menor o RMSE, melhor o ajuste do modelo aos novos dados.

2.10.2 Coeficiente de Correlação Múltipla

O coeficiente de correlação múltipla (R^2) avalia a proporção da variabilidade total dos dados explicada pelo modelo. Ele é calculado através da relação entre a

variabilidade explicada (SS_{exp}) e a variabilidade total (SS_{total}):

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{\text{exp}}}{SS_{\text{total}}} \quad (2.10.2.1)$$

Onde:

- SS_{exp} é a soma dos quadrados da diferença entre as previsões do modelo e a média dos dados reais.
- SS_{total} é a soma dos quadrados da diferença entre os dados reais e a média dos dados reais.

Um valor R^2 mais próximo de 1 indica um ajuste melhor do modelo aos dados observados.

2.10.3 Razão Sinal-Ruído (S/R)

A razão sinal-ruído avalia a relação entre o sinal útil (variação explicada pelo modelo) e o ruído (variação não explicada). Ela pode ser calculada como:

$$S/N = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}} \right) \quad (2.10.2.2)$$

Onde:

- P_{sinal} é a potência do sinal.
- $P_{\text{ruído}}$ é a potência do ruído.

De forma que a potência do sinal é calculada como:

$$P_{\text{sinal}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2 \quad (2.10.2.3)$$

Onde:

- N é o número de amostras do sinal.
- s_i são as amostras individuais do sinal.

E para a equação da Potência do Ruído:

$$P_{\text{ruído}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 \quad (2.10.2.4)$$

- N é o número de amostras do ruído.

- r_i são as amostras individuais do ruído.

O cálculo da relação sinal-ruído (S/N) é uma maneira de quantificar a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído. Quanto maior o valor S/N, mais forte é o sinal em relação ao ruído, indicando uma melhor qualidade do sinal em relação às interferências indesejadas.

2.11 Modelos de Estimação ARX

Os modelos de estimação ARX (AutoRegressive with eXogenous input) são amplamente utilizados em análise de séries temporais e previsão, especialmente quando há uma influência mútua entre uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes. Esses modelos são uma classe de modelos autorregressivos que consideram não apenas os valores passados da variável dependente, mas também os valores de variáveis independentes (ou entradas exógenas). Um modelo ARX de ordem n_a é representado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = \\ = b_0u(t) + b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t) \end{aligned} \quad (2.11.1)$$

Onde:

- $y(t)$ é a variável dependente no tempo t .
- $u(t)$ é a variável independente (entrada exógena) no tempo t .
- a_i e b_i são os coeficientes do modelo.
- n_a é a ordem do atraso da variável dependente.
- n_b é a ordem do atraso da variável independente.
- $e(t)$ é o termo de erro.

A estimação dos coeficientes a_i e b_i pode ser feita usando técnicas de ajuste de mínimos quadrados ou métodos mais avançados. A identificação do modelo ARX envolve a seleção adequada das ordens n_a e n_b com base na análise dos dados e na aplicação específica. Pode-se usar métodos como critério de informação de Akaike (AIC) ou critério de informação bayesiana (BIC) para determinar as ordens que melhor se ajustam aos dados.

2.12 Modelos de Estimação ARMAX

Os modelos de estimação ARMAX são uma extensão dos modelos ARX (AutoRegressive with eXogenous input) que incorporam não apenas os valores passados da variável dependente e as variáveis independentes exógenas, mas também os termos de média móvel (MA). Esses modelos são amplamente utilizados para modelar séries temporais complexas em que os efeitos das variáveis dependentes e independentes podem se estender por múltiplos períodos. Um modelo ARMAX de ordem n_a , n_b , e n_c é representado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = \\ = b_0u(t) + b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + \\ + c_1e(t-1) + c_2e(t-2) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c) + e(t) \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

Onde:

- $y(t)$ é a variável dependente no tempo t .
- $u(t)$ é a variável independente (entrada exógena) no tempo t .
- $e(t)$ é o termo de erro.
- a_i , b_i , e c_i são os coeficientes do modelo.
- n_a é a ordem do atraso da variável dependente.
- n_b é a ordem do atraso da variável independente.
- n_c é a ordem do atraso do termo de média móvel (MA).

Assim como nos modelos ARX, os coeficientes a_i , b_i , e c_i podem ser estimados usando técnicas de ajuste de mínimos quadrados.

A identificação do modelo ARMAX também envolve a seleção adequada das ordens n_a , n_b , e n_c com base na análise dos dados e na aplicação específica. Métodos como critério de informação de Akaike (AIC) ou critério de informação bayesiana (BIC) podem ser usados para determinar as ordens ideais. Os modelos de estimação ARMAX são uma extensão valiosa dos modelos ARX que incorporam efeitos de média móvel para melhor capturar a complexidade das séries temporais. Eles são uma ferramenta poderosa para análise e previsão em várias áreas.

2.13 Modelos Variantes no Tempo

Modelos variantes no tempo, também conhecidos como modelos dinâmicos, são uma classe de modelos matemáticos que levam em consideração a mudança de

comportamento de um sistema ao longo do tempo. Diferente dos modelos estáticos, que presumem que os parâmetros do sistema permanecem constantes, os modelos variantes no tempo permitem que esses parâmetros evoluam ao longo da série temporal. Esses modelos são frequentemente usados em situações onde o sistema exibe mudanças graduais ou abruptas ao longo do tempo. Um modelo variante no tempo pode ser representado pela seguinte equação geral:

$$y(t) = f(t, \theta(t), u(t)) + e(t) \quad (2.13.1)$$

Onde:

- $y(t)$ é a variável dependente no tempo t .
- $f(t, \theta(t), u(t))$ é a função do sistema que varia no tempo, dependendo do vetor de parâmetros $\theta(t)$ e das entradas $u(t)$.
- $e(t)$ é o termo de erro.

2.14 Regressores

Regressores são variáveis independentes ou preditores que são usados em modelos estatísticos para explicar ou prever uma variável dependente. Eles representam fatores que possuem um relacionamento hipotético com a variável de interesse e são usados para quantificar essa relação.

Na regressão linear simples, temos um único regressor x que é usado para prever a variável dependente y . A equação geral é representada por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (2.14.1)$$

Onde:

- β_0 e β_1 são os coeficientes de interceptação e inclinação, respectivamente.
- ε é o termo de erro.

Na regressão linear múltipla, há vários regressores x_1, x_2, \dots, x_p que são usados para prever a variável dependente y . A equação geral é representada por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon \quad (2.14.2)$$

Onde:

- $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ são os coeficientes de regressão
- ε é o termo de erro.

3 Metodologia

A metodologia do experimento envolve carregar os dados no **MATLAB**, pré-processamento dos dados se necessário, aplicar algoritmos ou análises específicas e, em seguida, plotar ou apresentar os resultados para interpretação.

3.1 Sistemas em tempo contínuo (s) e resposta

A resposta ao Degrau unitário de $G_1(s)$ e $G_2(s)$ foi computada, coletada e exibida em um gráfico para melhor visualização. As funções de transferência que definem $G_1(s)$ e $G_2(s)$ são apresentadas abaixo:

$$G_1(s) = \frac{0.5s^2 + 2s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} \quad (3.1.1)$$

$$G_2(s) = \frac{2.5}{s^2 + s + 2.5} \quad (3.1.2)$$

Ambos os sistemas, tiveram sua resposta analisada com relação aos seus polos.

3.2 Sistemas em tempo discreto (z) e equações a diferença

O próximo passo se deu em discretizar as duas Funções de Transferência usando um período de amostragem de $T_s = 0.1s$ e o método de **Tustin**. O processo foi realizado utilizando a função **c2d** presente no **MATLAB**. As Funções de Transferência resultantes são apresentadas abaixo:

$$G_1(z) = \frac{0.0261z^3 - 0.0166z^2 - 0.0252z + 0.0175}{z^3 - 2.7057z^2 + 2.4484z - 0.7410} \quad (3.2.1)$$

$$G_2(z) = \frac{0.0059z^2 + 0.0118z + 0.0059}{z^2 - 1.8817z + 0.9053} \quad (3.2.2)$$

Uma vez que temos ambas as funções montadas em z , podemos explicitar suas equações a diferença. Para $G_1(z)$, temos:

$$\begin{aligned} 0.0261 \cdot u(k-1) - 0.0166 \cdot u(k-2) - 0.0252 \cdot u(k-3) + 0.0175 \cdot u(k-4) = \\ = y(k) - 2.7057 \cdot y(k-1) + 2.4484 \cdot y(k-2) - 0.7410 \cdot y(k-3) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

E para $G_2(z)$:

$$\begin{aligned} 0.0059 \cdot u(k-1) + 0.0118 \cdot u(k-2) + 0.0059 \cdot u(k-3) = \\ = y(k) - 1.8817 \cdot y(k-1) + 0.9053 \cdot y(k-2) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

A simulação dos sistemas representados nas Funções de Transferência (3.2.1) e (3.2.2) foi realizada e comparadas com sua resposta contínua. Um degrau unitário foi utilizado como entrada para ambos os sistemas.

3.3 Gerando uma entrada aleatória

Os critérios para gerar a entrada $u(t)$ em questão foram os seguintes:

- Distribuição uniforme;
- valores no intervalo $[-1, 1]$;
- Média 0;
- Sem ruído;
- Equivalente a 100 passos de simulação.

O código utilizado para gerar a entrada supracitada pode ser visualizado abaixo.

```

1 % Numero de passos de simulacao
2 num_steps = 100;
3
4 % Gerar valores uniformemente distribuidos no intervalo [0, 1]
5 u_uniform = rand(1, num_steps);
6
7 % Ajustar os valores para o intervalo [-1, 1] com media zero
8 u_uniform = 2 * u_uniform - 1;
9
10 % Plot da entrada uniforme gerada
11 figure;
12 stem(u_uniform, 'b', 'LineWidth', 2);
13 title('Entrada Caracterizada por Distribuicao Uniforme');
14 xlabel('Tempo (Passo de Simulacao)');
15 ylabel('Entrada');
16 grid on;

```

Listing 1: Código responsável por gerar a Entrada aleatória

O passo seguinte, se deu em gerar valores simulados a partir da Equação a diferença para uma entrada degrau e para a entrada aleatória criada no passo anterior. A entrada aleatória em questão pode ser visualizada de forma gráfica abaixo.

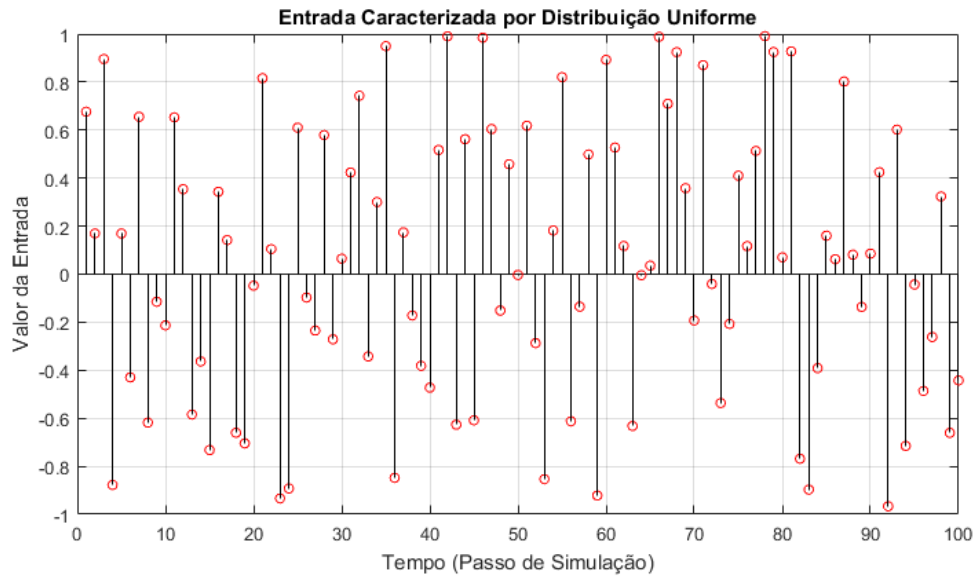


Figura 2: Exemplo de entrada gerada com o código presente em Listing 1.

3.4 Estimação do Modelo e cálculo do Resíduo

Uma vez que podemos gerar uma entrada aleatória como a presente na Figura 1, podemos também, observar e coletar a saída do sistema para esta entrada. Uma vez que a saída em questão foi coletada, podemos fazer uso de métodos de estimação de parâmetros para determinar a função de transferência para este sistema. O método utilizado foi o estimador de mínimos quadrados (EMQ) e um código exemplo em MATLAB é mostrado abaixo.

```

1 for order = 1:max_order
2     % Matriz de regressores
3     X = zeros(num_data - max_order, order);
4
5     for k = 1:order
6         X(:, k) = y_uniform(k:num_data - max_order + k - 1);
7     end
8
9     % Dados de sada correspondentes
10    y_output = y_uniform(max_order + 1:end);
11
12    % Calcular coeficientes usando EMQ
13    theta = X' * X \ X' * y_output;
14
15    % Valores estimados do modelo
16    y_estimated = X * theta;
17 end

```

Listing 2: Estimador de mínimos quadrados

O código acima estima parâmetros para um sistema que começa com ordem 1 e vai até ordem 5. Com os parâmetros estimados, podemos também calcular o resíduo. De forma que: $\text{Resíduo} = y(k) - y(\hat{k})$. O código responsável por calcular os valores de resíduo e sua média é apresentado abaixo.

```

1 for order = 1:max_order
2     % Matriz de regressores
3     X = zeros(num_data - max_order, order);
4
5     for k = 1:order
6         X(:, k) = y_uniform(k:num_data - max_order + k - 1);
7     end
8
9     % Dados de sada correspondentes
10    y_output = y_uniform(max_order + 1:end);
11
12    % Calcular coeficientes usando EMQ
13    theta = X' * X \ X' * y_output;
14
15    % Valores estimados do modelo
16    y_estimated = X * theta;
17
18    % Clculo dos resduos
19    residuals = y_output' - y_estimated;
20
21    % Clculo do valor mdio dos resduos
22    mean_residual = mean(residuals);
23 end

```

Listing 3: Calculo do resíduo e sua média

É fácil ver que o código responsável por calcular o resíduo é o mesmo presente em Listing 2 com o adicional de código presente entre as linhas 18 e 22, isso, pois, os passos de execução dos algoritmos são os mesmo até certo ponto. Os resultados obtidos podem ser visualizados no subtópico (4.4).

3.5 Adição de ruído ao Sistema

Os critérios para gerar o ruído em questão foram os seguintes:

- Gaussiano;
- 0.05 de desvio padrão;
- média 0.

O ruído em questão é recalculado 100 vezes, pois o experimento necessita. Para cada ruído calculado os parâmetros do modelo são recalculados, sua média

apresentada junto de seu desvio padrão. O código utilizado para realizar esta tarefa com as características supracitadas pode ser visualizado abaixo.

```

1  for rep = 1:num_repetitions
2
3      %Ruido dinamico
4      y_gaussian_dinamico = std_deviation * randn(1, num_data) + mean_value;
5      %Ruido estatico
6      y_gaussian_static = std_deviation * randn(1, 1) + mean_value;
7
8      %Adicao de ruido
9      noise = . . .;
10     out = y + noise;
11
12     %Codigo intermediario
13     . . .
14
15     % Calculo da media
16     m_value = mean(theta);
17
18     % Calculo do desvio padrao
19     s_deviation = std(theta);
20
21     % Display coefficients and difference equation
22     . . .
23 end

```

Listing 4: Adição de ruído ao sistema

O código acima apresenta duas formas de se adicionar ruído ao Sistema. O ruído estático(Adicionado de uma vez ao sistema):

$$Y(k) = Y(k) + E(k) \quad (3.5.1)$$

E o ruído dinâmico(Adicionado a cada amostragem):

$$y(k) = y(k) + e(k) \quad (3.5.2)$$

Ambos são apresentados respectivamente nas linhas 4 e 6 do código presente em Listing 4.

3.6 Validação dos Modelos

Neste experimento, foi realizada a validação dos modelos obtidos anteriormente a partir de uma entrada em forma de senoide, por meio de três métodos estatísticos: simulação com um conjunto diferente de dados de entrada e o cálculo

do erro quadrático, coeficiente de correlação múltipla e a razão sinal-ruído (S/R). O objetivo é avaliar a capacidade de cada modelo em se ajustar aos dados reais e determinar quão bem eles representam o comportamento do sistema. O código utilizado para gerar $(u(t))$ e o sinal em questão podem ser visualizados abaixo.



Figura 3: Sinal de entrada Utilizado para validação.

```

1 % Tempo de amostragem
2 T = 0.1;
3
4 % Nmero de passos de simulao
5 num_steps = 100;
6
7 t = 0:T:(num_steps-1)*T; % Vetor de tempos
8 u = sin(2 * pi * t); % Sinal de entrada(senoide)

```

Listing 5: $u(t)$ para validação

Os modelos de primeira até quinta ordem estimados foram submetidos à entrada em questão, e suas saídas foram submetidas ao ruído gaussiano **dinâmico**, criado no subtópico 3.5. A escolha da aplicação do ruído dinâmico se deu com base nos resultados preliminares obtidos antes da adição do mesmo, uma vez que o sinal de saída submetido ao ruído **estático** sofreu **poucas alterações**.

Aplicamos cada um dos modelos obtidos anteriormente a esses novos dados de entrada e calculamos o erro quadrático entre as saídas estimadas e as saídas reais do sistema. O código responsável por calcular a soma dos erros ao quadrado é mostrado abaixo.

```

1 % Clculo do somatrio do erro quadrtico
2 se = sum((y_output' - y_estimated).^2);
3 disp(['Somatrio do Erro Quadrtico: ' num2str(se)]);

```

Listing 6: Cálculo do somatório dos erros ao quadrado.

Em seguida, Calculamos o coeficiente de correlação múltipla para cada modelo, comparando as saídas estimadas com as saídas reais do sistema. O código responsável por calcular o coeficiente de correlação múltipla é mostrado abaixo.

```

1 % Clculo do coeficiente de correlao mltipla
2 y_mean = mean(y_output);
3 ss_total = sum((y_output' - y_mean).^2);
4 ss_residual = sum((y_output' - y_estimated).^2);
5 r_squared = 1 - ss_residual / ss_total;
6 disp(['Coeficiente de Correlao Mltipla: ' num2str(r_squared)]);

```

Listing 7: Cálculo do coeficiente de correlação múltipla.

Por fim, a razão sinal-ruído foi obtida, a mesma é uma métrica que avalia a proporção do sinal (informação útil) em relação ao ruído (variabilidade não explicada) nos dados. Calculamos a S/R para as saídas estimadas e reais de cada modelo. Quanto maior a S/R, mais informações relevantes o modelo está capturando e menos influência o ruído exerce. O código responsável por calcular a relação sinal-ruído é mostrado abaixo.

```

1 % Clculo razo sinal-ruído
2 signal_power = sum(y_estimated.^2);
3 noise_power = sum(noise.^2);
4 snr_value = signal_power / noise_power;
5 snr_value = 10 * log10(snr_value);
6 disp(['Razo Sinal-Ruido (SNR): ' num2str(snr_value)]);

```

Listing 8: Cálculo da relação sinal-ruído.

Após a aplicação dos modelos aos novos dados de entrada e o cálculo das métricas, foram gerados gráficos que comparam as saídas reais do sistema com as saídas estimadas por cada modelo. Observamos a sobreposição das curvas para avaliar visualmente o ajuste. Os resultados desses métodos de validação nos permitirão avaliar a qualidade de ajuste de cada modelo aos dados reais. Modelos que apresentem baixo erro quadrático, alto coeficiente de correlação múltipla e alta razão S/R são considerados mais adequados para representar o comportamento do sistema.

3.7 Identificação de Modelos ARX e ARMAX

A metodologia adotada consiste em identificar modelos matemáticos para os Conjuntos de Dados 1, 2, 3 e 4 por meio dos modelos ARX e ARMAX. As ordens dos modelos variam de 1 a 5. O processo de identificação ocorre em duas fases: estimação e validação.

Na fase de estimação, os modelos ARX e ARMAX são ajustados aos dados. O modelo ARX é definido pela equação:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(t-j) + e(t) \quad (3.7.1)$$

Enquanto o modelo ARMAX incorpora termos de médias móveis:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(t-j) + \sum_{k=1}^r c_k e(t-k) \quad (3.7.2)$$

Na fase de validação, os modelos ajustados são testados. O desempenho de cada modelo é avaliado calculando o erro médio quadrático (EMQ), dado por:

$$EMQ = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_{\text{real}}(t) - y_{\text{previsto}}(t))^2 \quad (3.7.3)$$

O modelo que apresentar o menor EMQ pode ser considerado aquele com melhor ajuste aos dados. Já para os conjuntos 3 e 4 foi adicionada mais uma etapa de validação para fins de verificar se os modelos variam com o tempo, isso pode ser feito plotando o comportamento dos regressores (coeficientes dos termos autorregressivos e exógenos) ao longo do tempo. Isso ajuda a entender a evolução das influências das variáveis no processo.

4 Resultados

4.1 Resposta dos Sistemas em Malha Aberta

Como descrito no subtópico (3.1), os Sistemas em malha aberta representados pelas funções de transferência (3.1.1) e (3.1.2) foram submetidos à entra degrau e o resultado é apresentado abaixo:

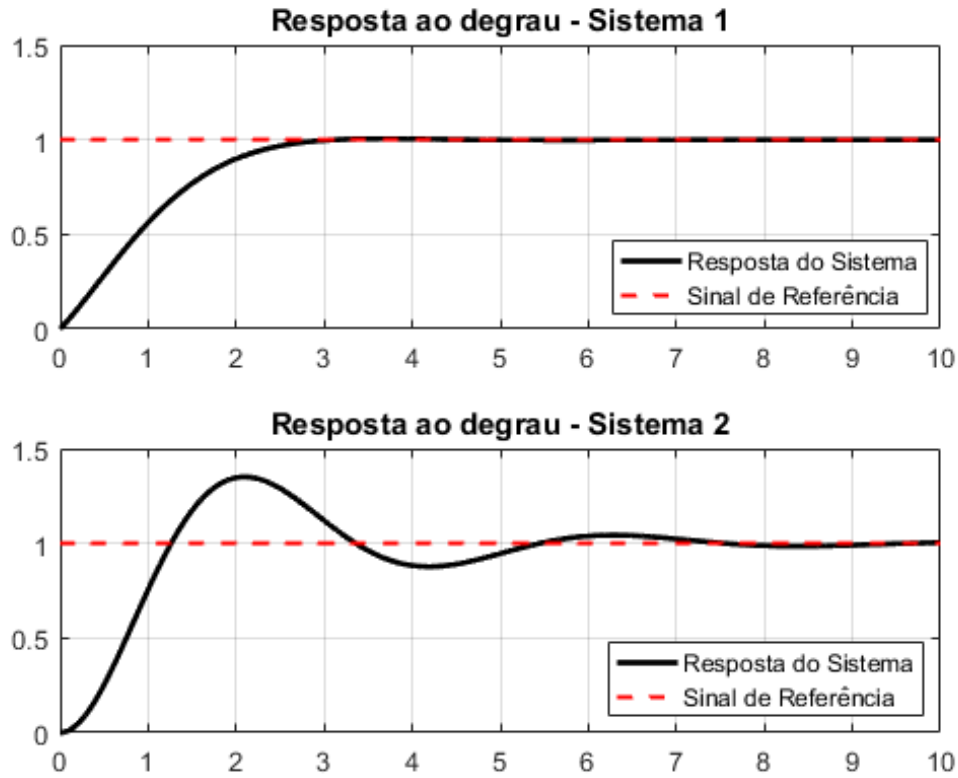


Figura 4: Resposta dos Sistemas (3.1.1) e (3.1.2) ao Degrau unitário.

Podemos notar que o Sistema $G_1(s)$ apresenta uma resposta próxima a um sistema de **primeira ordem**, enquanto o Sistema $G_2(s)$ apresenta uma resposta próxima a um sistema de **segunda ordem subamortecido**. Os polos de ambos são apresentados abaixo:

$$\text{Polos do Sistema 1: } -1.0 + 1.0i, \quad -1.0 - 1.0i, \quad -1.0$$

$$\text{Polos do Sistema 2: } -0.5 + 1.5i, \quad -0.5 - 1.5i$$

Os polos de um sistema de controle têm um impacto direto no desempenho do sistema. Nos próximos subtópicos são apresentados uma caracterização dos sistemas 3.1.1 e 3.1.2 com base nos critérios de desempenho observados em seus polos.

4.1.1 Sistema 3.1.1

Tempo de Resposta: Os polos reais (-1) indicam que o sistema terá uma resposta relativamente rápida, com um tempo de subida menor. A parte imaginária pequena dos polos indica que as oscilações serão amortecidas.

Estabilidade: Todos os polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, o que indica que o sistema é estável, pois todos os polos têm partes reais negativas.

Amortecimento: Os polos complexos conjugados $(-1+1i, -1-1i)$ sugerem um amortecimento moderado das oscilações, resultando em uma resposta suave.

Oscilações: Os polos complexos conjugados também indicam oscilações na resposta, mas o fato de terem uma parte imaginária relativamente pequena sugere que as oscilações serão controladas.

4.1.2 Sistema 3.1.2

Tempo de Resposta: Os polos complexos conjugados com uma parte real negativa indicam um tempo de resposta mais rápido em comparação com um sistema puramente real.

Estabilidade: Assim como o Sistema 1, todos os polos estão no semiplano esquerdo, garantindo estabilidade.

Amortecimento: A parte imaginária dos polos complexos sugere oscilações, mas o fato de ter uma parte real negativa indica um amortecimento razoável.

Oscilações: A parte imaginária dos polos indica a presença de oscilações na resposta, mas a combinação com a parte real negativa implica que essas oscilações são controladas.

Em resumo, ambos os sistemas parecem ter respostas controladas e estáveis, com oscilações moderadas. O Sistema 1 parece ter um amortecimento um pouco mais forte devido aos polos reais próximos, enquanto o Sistema 2 tem polos complexos conjugados que resultam em uma resposta mais rápida.

4.2 Resposta dos Sistemas Discretizados

As simulações apresentadas abaixo foram realizadas utilizando as funções de transferência em z , para os sistemas G_1 e G_2 , respectivamente apresentados em (3.2.1) e (3.2.2). O métodos de discretização utilizado junto da entrada $u(t)$ para ambos os sistemas podem ser visualizadas revisitando o tópico 3.2.

A comparação entre um sistema discretizado usando o método de **Tustin** com um período de amostragem de $0.1s$ e o mesmo sistema contínuo, quando suas saídas não diferem significativamente, ressalta a eficácia da discretização em preservar o

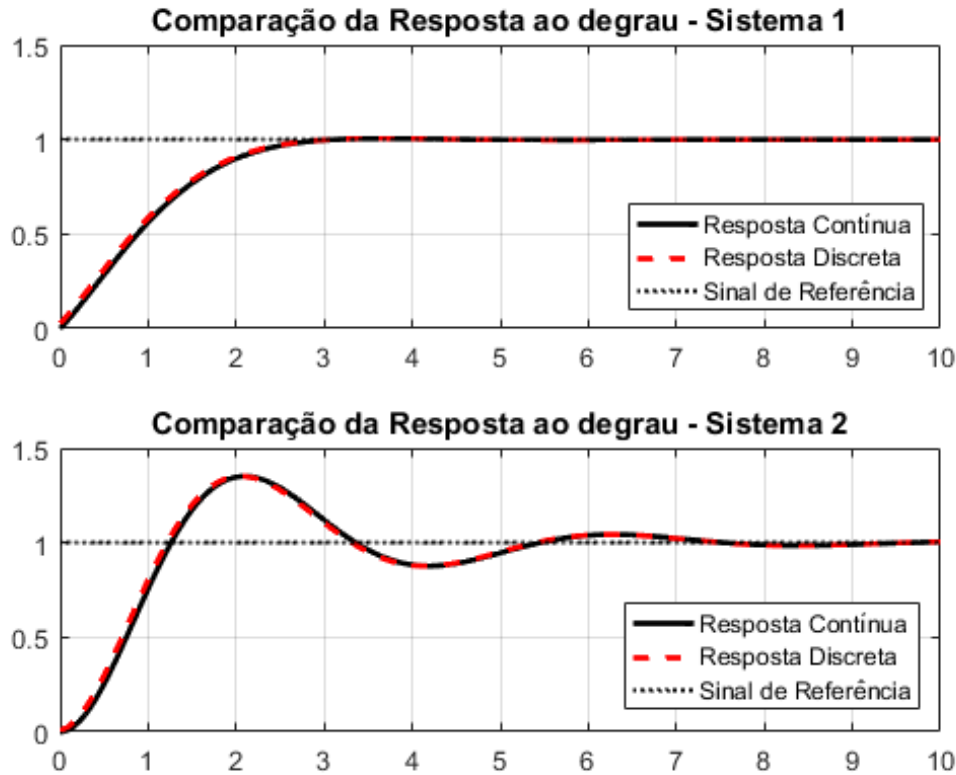


Figura 5: Comparativo entre $G(s)$ e $G(z)$ para ambos os sistemas.

comportamento dinâmico e a resposta em frequência do sistema contínuo. Esse resultado sugere que o método de Tustin, ao escolher um período de amostragem apropriado, consegue capturar fielmente a natureza do sistema contínuo, sendo uma abordagem valiosa para análise e controle.

4.3 Resposta à entrada aleatória

Utilizando a entrada gerada no passo apresentado no tópico (3.3) em conjunto de uma entrada degrau podemos observar e interpretar a saída do sistema. As saídas em questão podem ser observadas abaixo.

A resposta do **Sistema 1 discreto** para a entrada uniforme mostra que, inicialmente, a saída segue a entrada, mas com o tempo, a resposta começa a oscilar e se estabiliza em um valor próximo a zero. Isso acontece porque os polos complexos conjugados do Sistema 1 têm uma parte real negativa, o que resulta em oscilações amortecidas. A resposta suave indica que as oscilações são controladas e a saída eventualmente converge para um valor próximo a zero, que é a média da entrada uniforme.

A resposta do **Sistema 2 discreto** para a entrada uniforme também mostra um comportamento oscilatório, mas em uma escala menor em comparação com o

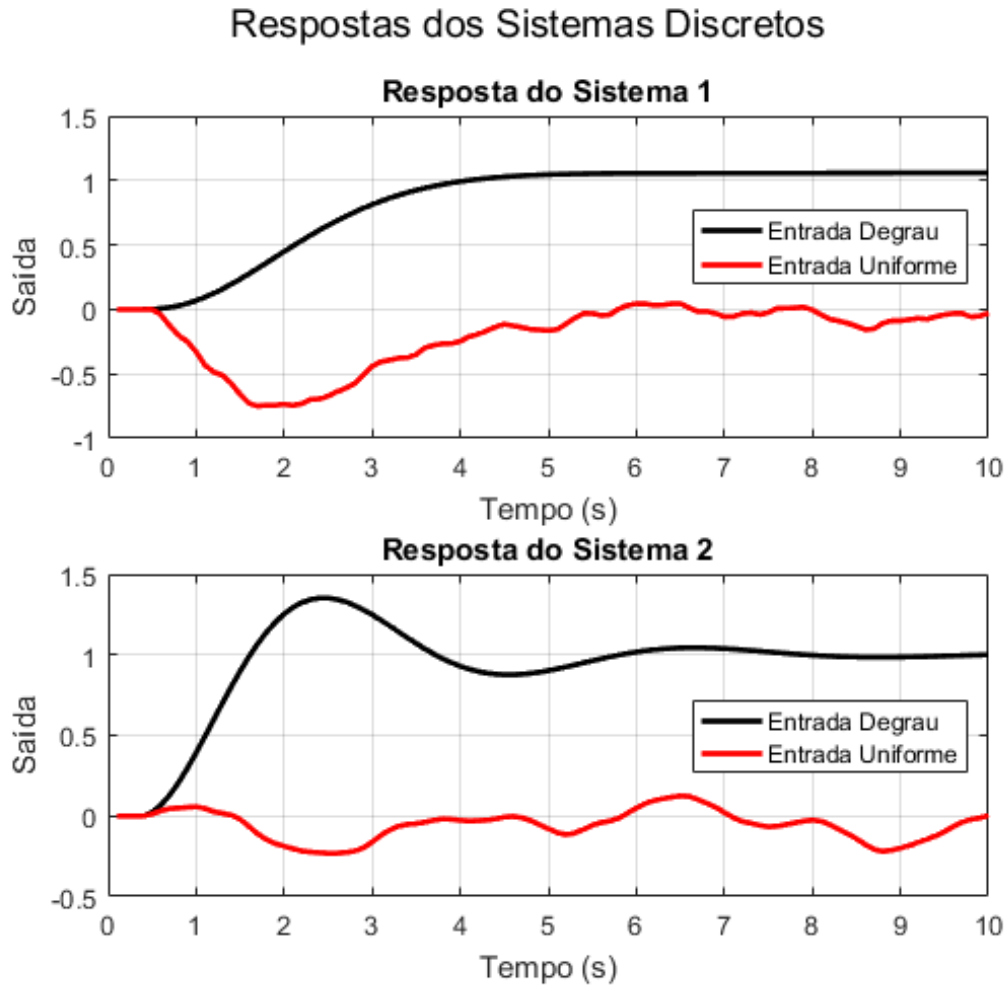


Figura 6: Comparativo para as diferentes entradas para $G(z)$.

Sistema 1. Isso ocorre porque o Sistema 2 possui apenas um polo complexo com parte real negativa. Essa parte real negativa faz com que a resposta se mova em direção a zero ao longo do tempo. As oscilações na resposta são causadas pelo polo complexo. Assim como no Sistema 1, essas oscilações estão amortecidas e a saída converge para um valor próximo a zero. Agora, para os sistemas contínuos, temos as seguintes saídas.

A resposta do **Sistema 1 contínuo** para a entrada uniforme exhibe uma resposta transitória inicial à entrada e, eventualmente, converge para um valor próximo a zero. Isso ocorre porque os polos do Sistema 1 têm partes reais negativas, o que indica uma resposta estável e a tendência da saída em retornar ao equilíbrio (zero). A resposta transitória inicial é uma característica comum de sistemas de primeira e segunda ordem. A convergência para zero ocorre devido à natureza estável dos polos.

A resposta do **Sistema 2 contínuo** para a entrada uniforme também mostra uma resposta transitória inicial, seguida por uma convergência para zero. A pre-

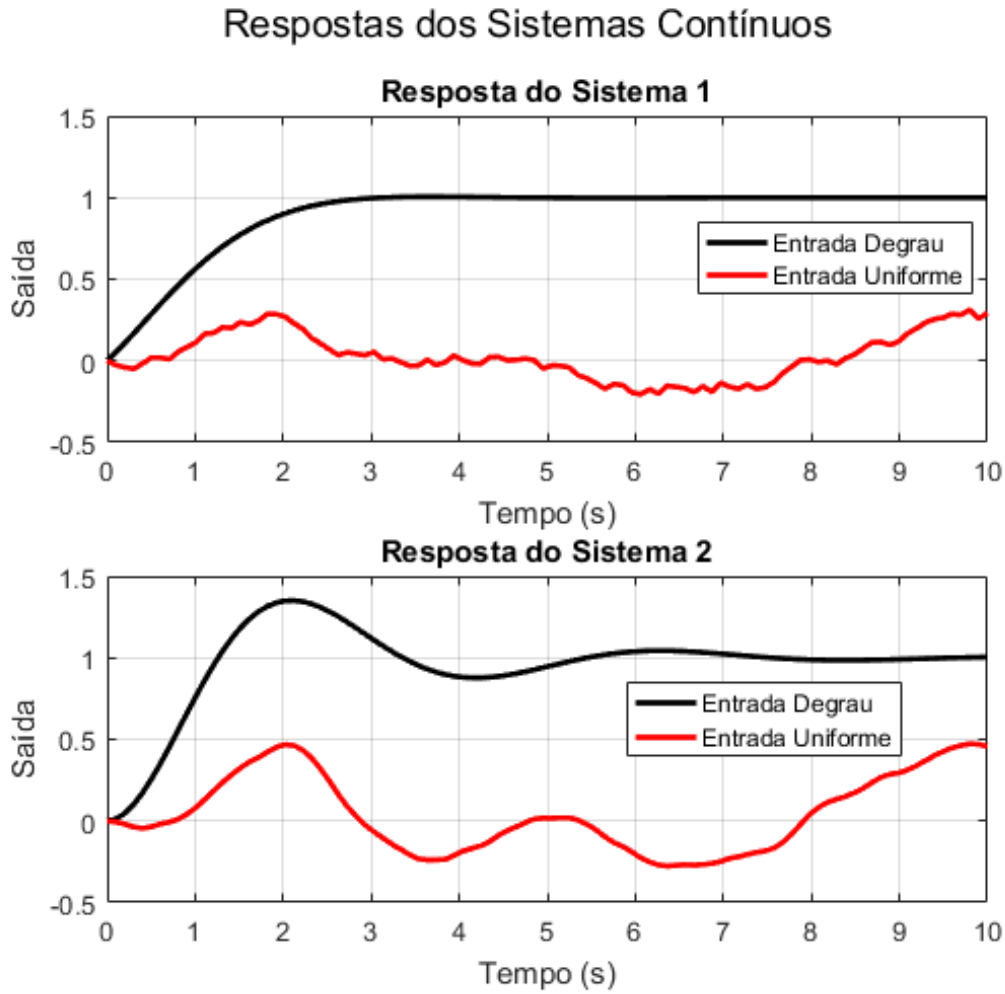


Figura 7: Comparativo para as diferentes entradas para $G(s)$.

sença de um único polo com parte real negativa no Sistema 2 faz com que a saída retorne ao equilíbrio de maneira suave e estável. A resposta transitória inicial é uma consequência natural da mudança da entrada e é observada em sistemas de primeira ordem.

4.4 Parâmetros encontrados utilizando EMQ

4.4.1 Sistema 3.2.1

As seguintes equações a diferença foram encontradas utilizando o método EMQ apresentado em (3.4).

Modelo de Ordem 1:

$$y(k) = 0.92 \cdot u(k - 1) \quad (4.4.1.1)$$

Nesse modelo de primeira ordem, os resíduos são principalmente pequenos, o que su-

gere que o modelo está bem calibrado para os dados. Mas devido ao baixo número de parâmetros, acaba sofrendo uma defasagem quando comparado ao modelo original.

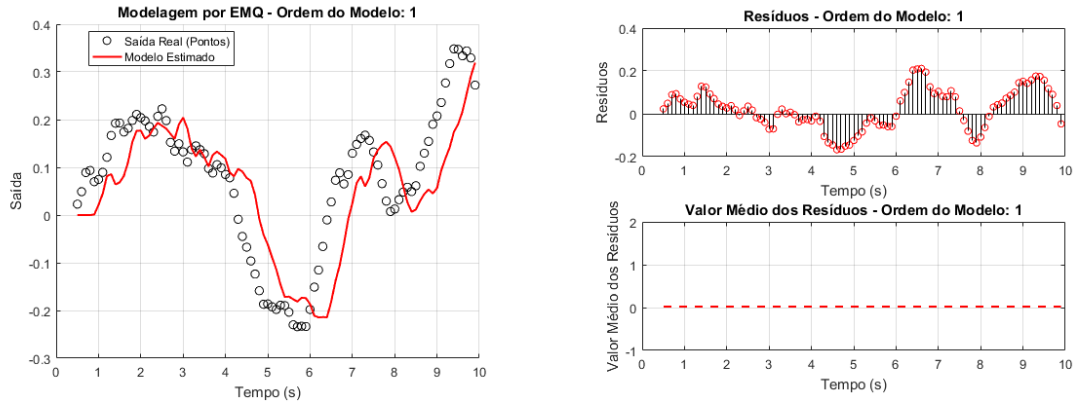


Figura 8: Resultados para $G_1(z)$ de ordem 1

Modelo de Ordem 2:

$$y(k) = -1.82 \cdot u(k-1) + 2.70 \cdot u(k-2) \quad (4.4.1.2)$$

Nesse modelo de segunda ordem, os resíduos têm algumas flutuações, mas o valor médio dos resíduos é relativamente baixo (0.0143), indicando que o modelo ainda está se ajustando bem aos dados.

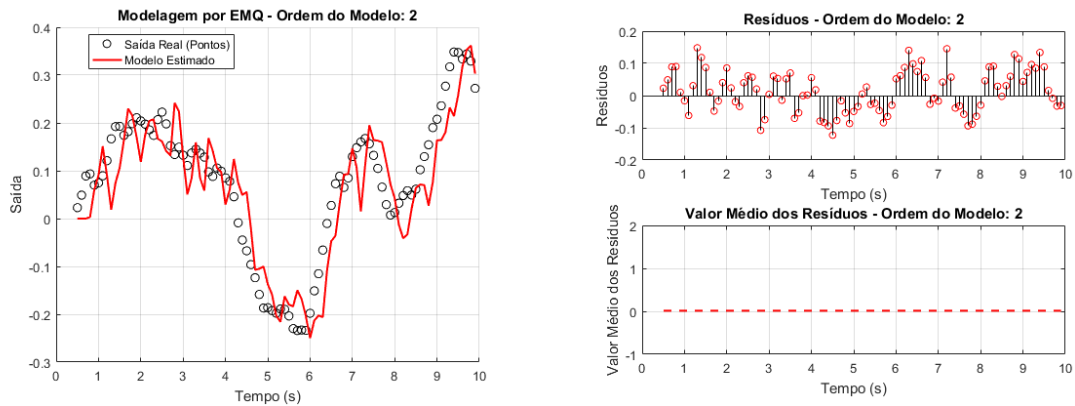


Figura 9: Resultados para $G_1(z)$ de ordem 2

Modelo de Ordem 3:

$$y(k) = -0.13 \cdot u(k-1) - 1.30 \cdot u(k-2) + 2.34 \cdot u(k-3) \quad (4.4.1.3)$$

Nesse modelo, os resíduos são pequenos e variam ao longo do tempo. O valor médio dos resíduos é ainda menor (0.0097), indicando um ajuste razoável aos dados.

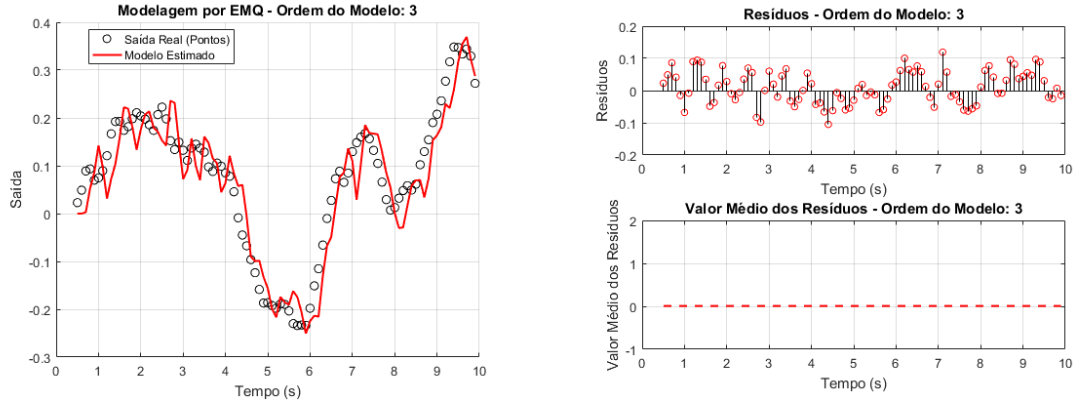


Figura 10: Resultados para $G_1(z)$ de ordem 3

Modelo de Ordem 4:

$$y(k) = -0.56 \cdot u(k-1) + 0.93 \cdot u(k-2) - 1.57 \cdot u(k-3) + 2.13 \cdot u(k-4) \quad (4.4.1.4)$$

Nesse modelo de quarta ordem, os resíduos variam consideravelmente e parecem ter mais flutuações do que os modelos anteriores. O valor médio dos resíduos ainda é relativamente baixo (0.0057), sugerindo um ajuste razoável aos dados.

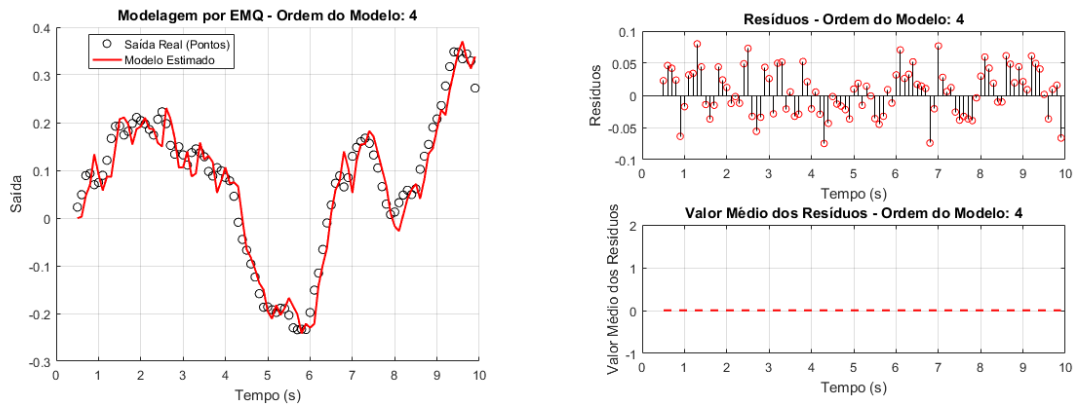


Figura 11: Resultados para $G_1(z)$ de ordem 4

Modelo de Ordem 5:

$$y(k) = 0.17 \cdot u(k-1) - 0.71 \cdot u(k-2) + 1.13 \cdot u(k-3) - 1.57 \cdot u(k-4) + 1.96 \cdot u(k-5) \quad (4.4.1.5)$$

Nesse modelo de quinta ordem, os resíduos têm menos flutuações em comparação com o modelo de quarta ordem. O valor médio dos resíduos é muito baixo (0.0018), sugerindo um bom ajuste aos dados.

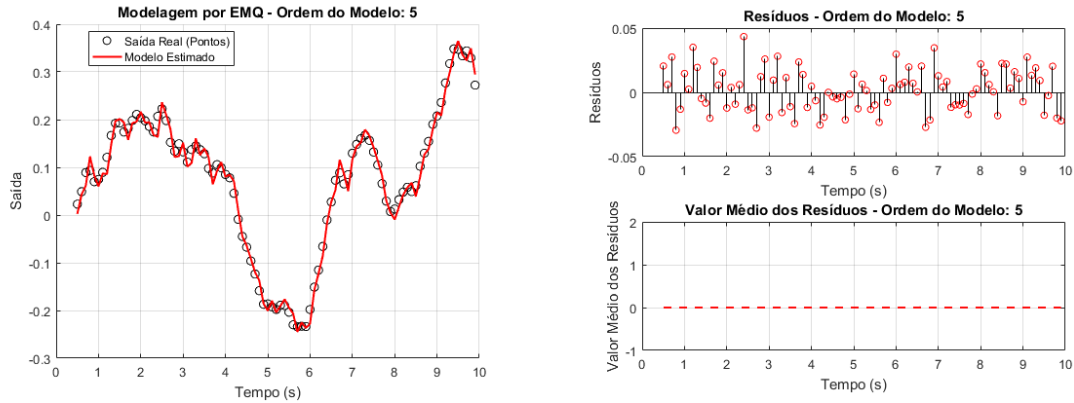


Figura 12: Resultados para $G_1(z)$ de ordem 5

No geral, os modelos parecem estar se ajustando razoavelmente bem aos dados simulados. Modelos de ordem mais baixa tendem a ter resíduos um pouco mais variáveis, enquanto modelos de ordem mais alta têm resíduos mais suaves. O valor médio dos resíduos em todos os casos é relativamente baixo, indicando um ajuste satisfatório.

4.4.2 Sistema 3.2.2

As seguintes equações a diferença foram encontradas utilizando o método EMQ apresentado em (3.4).

Modelo de Ordem 1:

$$y(k) = 0.78 \cdot u(k-1) \quad (4.4.2.1)$$

Os resíduos mostram uma tendência geral de estar próximos de zero, o que sugere que o modelo de ordem 1 ajustou razoavelmente bem os dados.

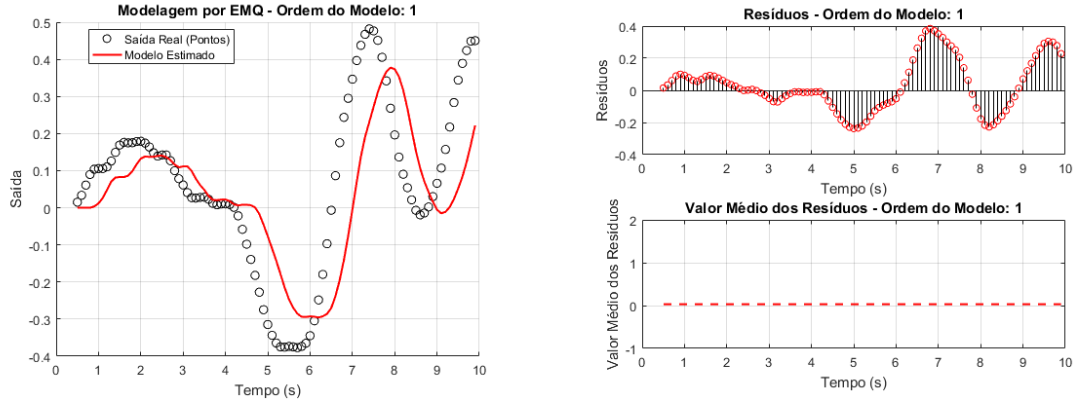


Figura 13: Resultados para $G_2(z)$ de ordem 1

Modelo de Ordem 2:

$$y(k) = -3.46 \cdot u(k-1) + 4.24 \cdot u(k-2) \quad (4.4.2.2)$$

Os resíduos parecem variar mais do que no modelo de ordem 1, o que pode indicar que o modelo de ordem 2 está ajustando os dados com mais detalhes.

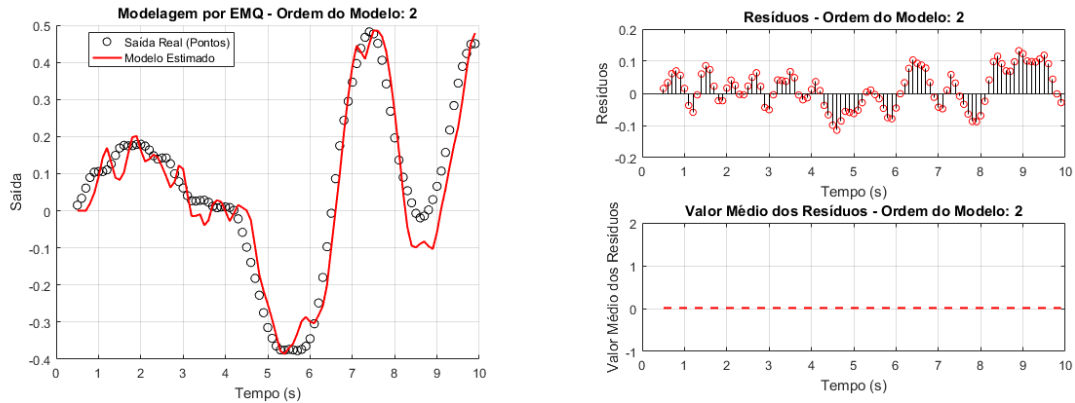


Figura 14: Resultados para $G_2(z)$ de ordem 2

Modelo de Ordem 3:

$$y(k) = 2.65 \cdot u(k-1) - 7.86 \cdot u(k-2) + 6.14 \cdot u(k-3) \quad (4.4.2.3)$$

Os resíduos parecem oscilar mais, sugerindo que o modelo de ordem 3 está capturando mais nuances nos dados.

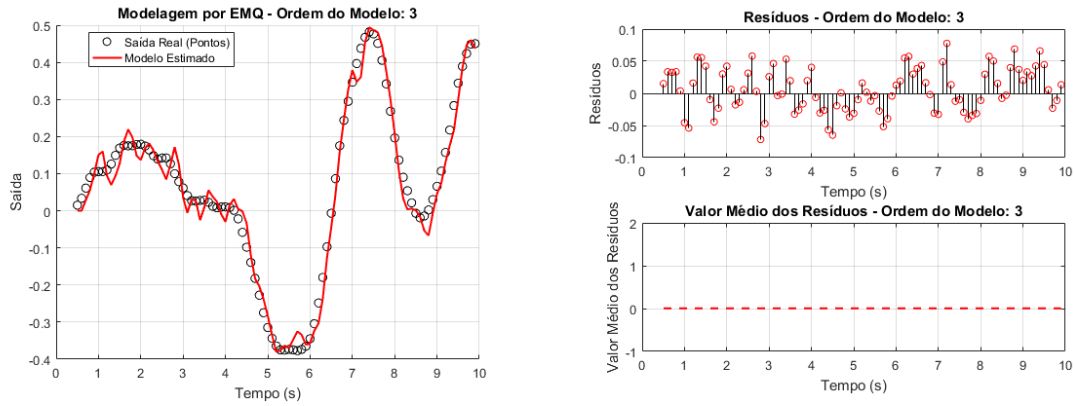


Figura 15: Resultados para $G_2(z)$ de ordem 3

Modelo de Ordem 4:

$$y(k) = -0.98 \cdot u(k-1) + 4.21 \cdot u(k-2) - 7.37 \cdot u(k-3) + 5.10 \cdot u(k-4) \quad (4.4.2.4)$$

Os resíduos parecem continuar variando, mas podem estar começando a se aproximar de uma distribuição mais uniforme.

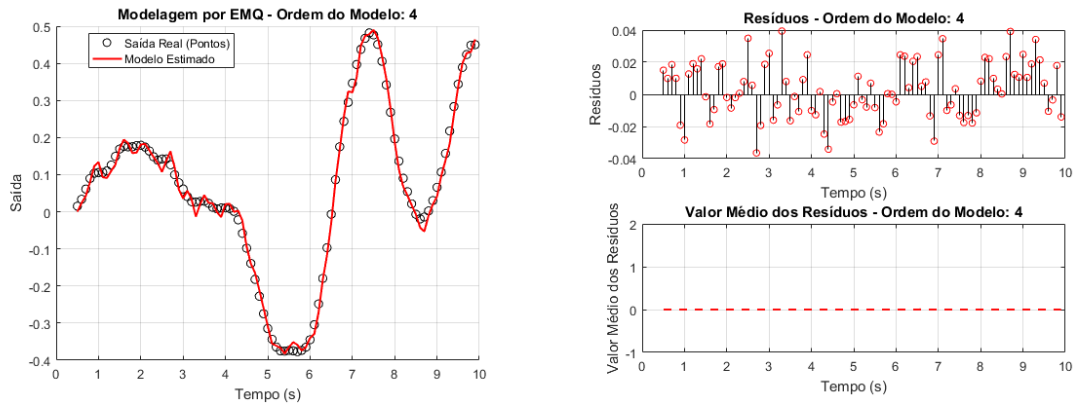


Figura 16: Resultados para $G_2(z)$ de ordem 4

Modelo de Ordem 5:

$$y(k) = 0.45 \cdot u(k-1) - 1.76 \cdot u(k-2) + 3.37 \cdot u(k-3) - 4.21 \cdot u(k-4) + 3.15 \cdot u(k-5) \quad (4.4.2.5)$$

Os resíduos parecem ser os mais próximos de uma distribuição simétrica em torno de zero em comparação com os modelos anteriores.

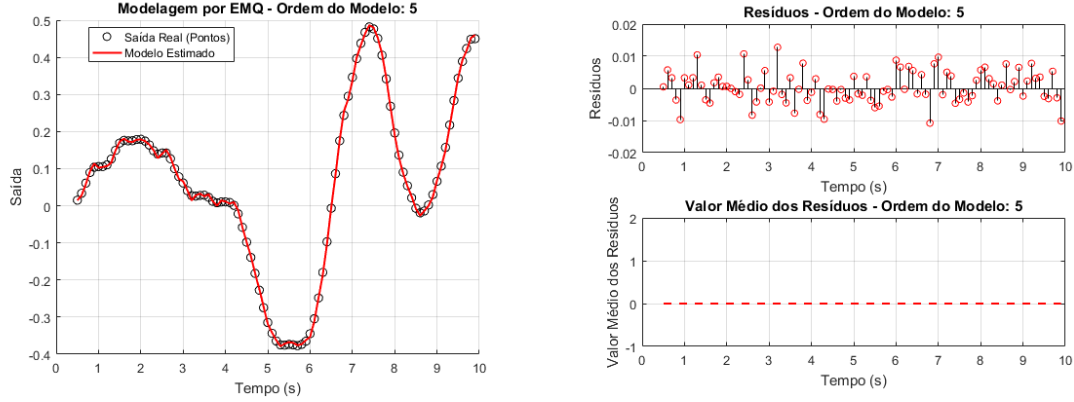


Figura 17: Resultados para $G_2(z)$ de ordem 5

Em geral, quanto maior a ordem do modelo, mais flexível ele é para se ajustar aos dados, mas também há um risco maior de sobreajuste (*overfitting*). Portanto, a escolha da ordem do modelo deve ser cuidadosamente considerada com base na compreensão do domínio dos dados e na avaliação da qualidade do ajuste e dos resíduos.

4.5 Parâmetros calculados com adição de ruído

Os resultados para o procedimento apresentado em (3.5) podem ser visualizados abaixo. Como descrito anteriormente, para cada iteração um valor diferente para o ruído foi calculado e o número total de iterações é 100.

4.5.1 Resultados para adição de ruído dinâmico

Os valores calculados representam as estatísticas das médias e desvios padrão dos coeficientes estimados (θ) ao longo das repetições usando o ruído dinâmico em cada iteração do `loop`. Os valores de média dos coeficientes tendem, neste caso, a convergir para 0.32.

Já para o desvio padrão, temos que os valores tendem a convergir para 0.25. Um desvio padrão menor indica que as médias dos coeficientes estão relativamente próximas da média geral (0.32), o que sugere que os coeficientes tendem a variar menos em relação à média geral.

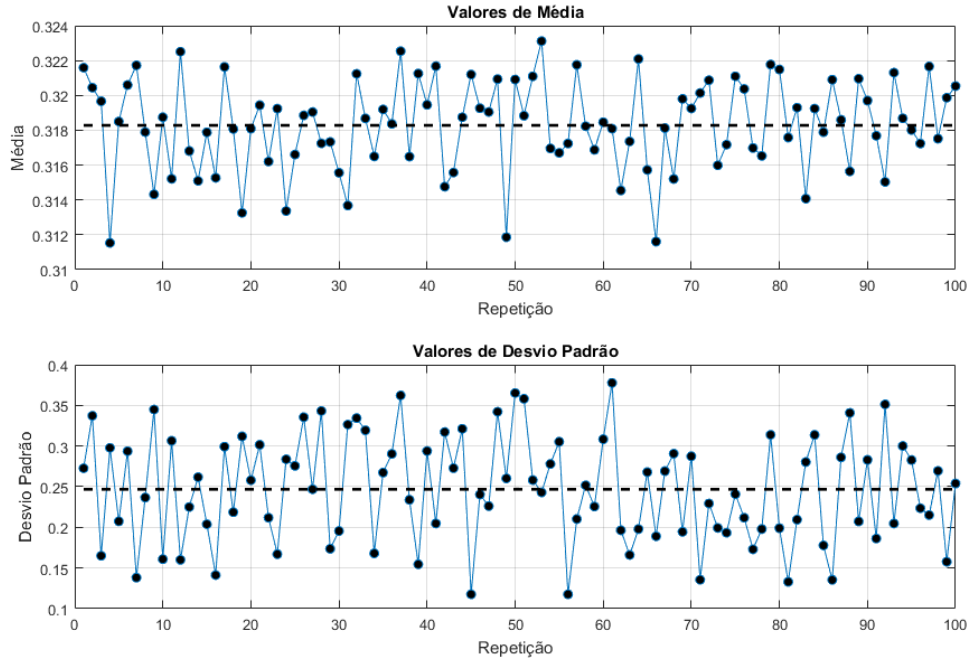


Figura 18: Resultado para a adição do ruído dinâmico.

Isso significa que, mesmo com o ruído dinâmico variando em cada iteração, os coeficientes estimados estão se estabilizando em torno de um valor médio, e essa estabilidade é indicada pelo desvio padrão. Isso também sugere que o processo de estimação está sendo consistente e que os coeficientes não estão variando drasticamente em diferentes repetições.

4.5.2 Resultados para adição de ruído estático

Os valores calculados agora representam as estatísticas das médias e desvios padrão dos coeficientes estimados (θ) ao longo das repetições usando o ruído estático em cada iteração do `loop`. Os coeficientes estimados tendem a convergir para um valor próximo de 0.33.

Já para o desvio padrão, temos um valor maior (1.26), isso indica que as médias dos coeficientes têm uma variação mais significativa em relação à média geral (0.33) quando comparado ao caso do ruído dinâmico.

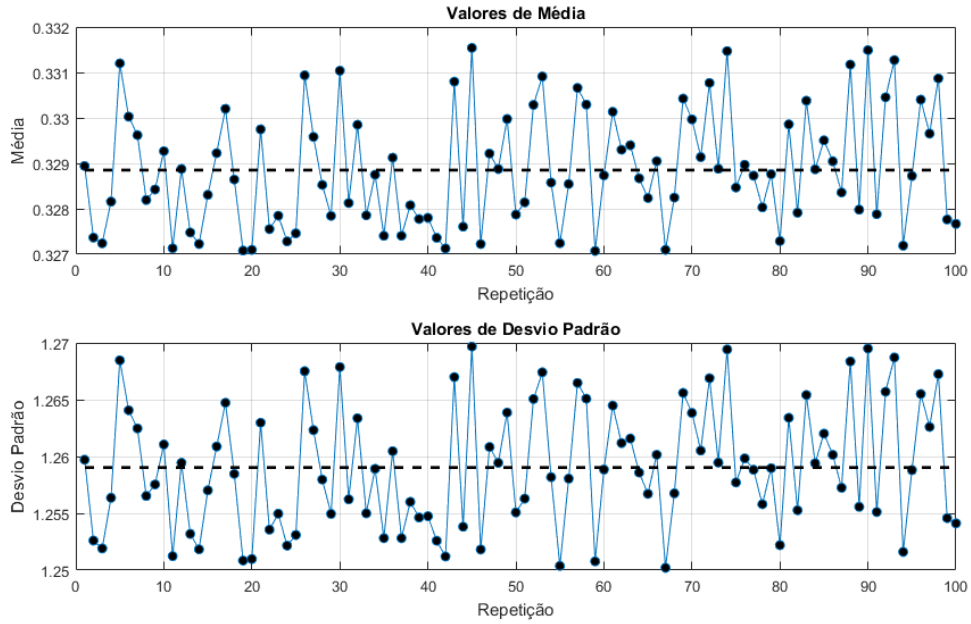


Figura 19: Resultado para a adição do ruído estático.

Esses resultados sugerem que, ao usar ruído estático, os coeficientes estimados estão apresentando uma variação mais significativa em relação à média. Isso pode indicar que o processo de estimação está sendo influenciado pelo mesmo, resultando em coeficientes estimados mais dispersos.

4.6 Validação dos coeficientes encontrados

4.6.1 Validação do sistema 3.2.1 com a adição de ruído

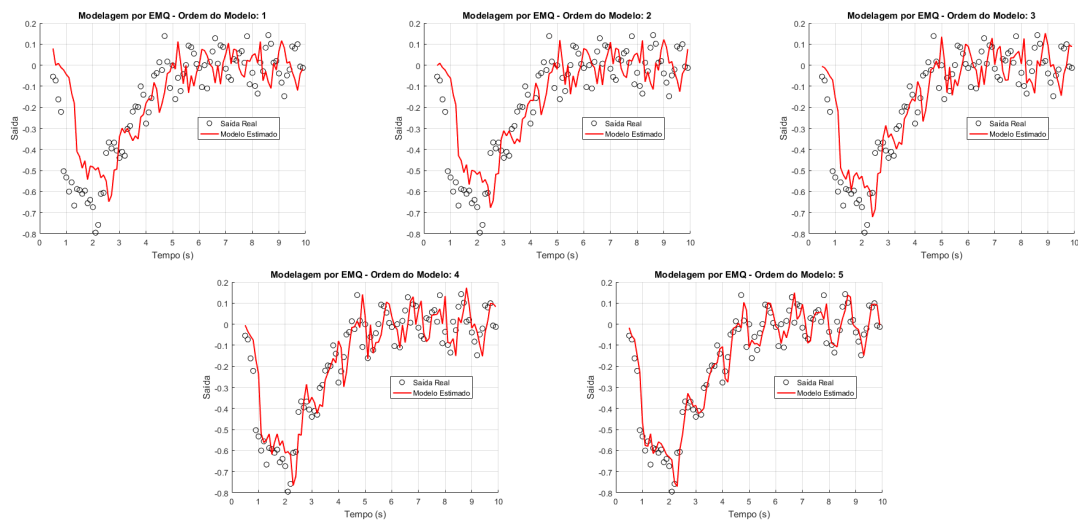


Figura 20: Saída dos Parâmetros estimados para a entrada senoidal.

Ordem	SEQ	CCM	SNR
1	2.87	0.51	14.01
2	2.38	0.60	14.37
3	1.74	0.70	14.80
4	1.03	0.83	15.23
5	0.60	0.90	15.48

Tabela 1: Valores obtidos para os diferentes métodos utilizados.

Para o modelo de **ordem 1**, observamos um valor relativamente alto de **SEQ**, indicando que o ajuste do modelo aos dados não é muito preciso. O **CCM** é em torno de 0.51, o que sugere uma correlação moderada entre as previsões do modelo e os dados reais. A **SNR** de 14.01 indica uma boa relação entre o sinal e o ruído, o que significa que o sinal de interesse é mais forte em comparação com o ruído.

O modelo de **ordem 2** apresenta uma melhoria no **SEQ** em comparação com o modelo de ordem 1, indicando um ajuste mais preciso aos dados. O **CCM** aumentou para 0.60, o que sugere uma correlação mais forte entre as previsões do modelo e os dados reais. A **SNR** também aumentou ligeiramente para 14.37, indicando uma relação sinal-ruído mais favorável.

O modelo de **ordem 3** apresenta uma queda significativa no **SEQ**, indicando um ajuste ainda melhor aos dados. O **CCM** aumentou para 0.70, o que sugere uma correlação mais forte entre as previsões do modelo e os dados reais. A **SNR** também aumentou ligeiramente para 14.80, indicando uma melhoria adicional na relação sinal-ruído.

O modelo de **ordem 4** apresenta um **SEQ** ainda menor, indicando um ajuste mais preciso aos dados. O **CCM** aumentou significativamente para 0.83, sugerindo uma correlação substancial entre as previsões do modelo e os dados reais. A **SNR** também aumentou para 15.23, indicando uma relação sinal-ruído muito favorável.

O modelo de **ordem 5** apresenta um **SEQ** ainda menor, indicando um ajuste mais preciso aos dados. O **CCM** aumentou significativamente para 0.90, sugerindo uma correlação substancial entre as previsões do modelo e os dados reais. A **SNR** também aumentou para 15.48, indicando uma relação sinal-ruído muito favorável.

Em resumo, os valores das métricas melhoraram à medida que a ordem do modelo aumentou. Isso sugere que modelos de ordem mais alta são mais capazes de capturar a relação entre o sinal de entrada e a saída do sistema, resultando em um ajuste mais preciso, maior correlação e melhor relação sinal-ruído. No entanto, a escolha da ordem do modelo deve ser feita com base em uma análise mais aprofundada para evitar o superajuste (*overfitting*) aos dados de treinamento.

4.6.2 Validação do sistema 3.2.2 com a adição de ruído

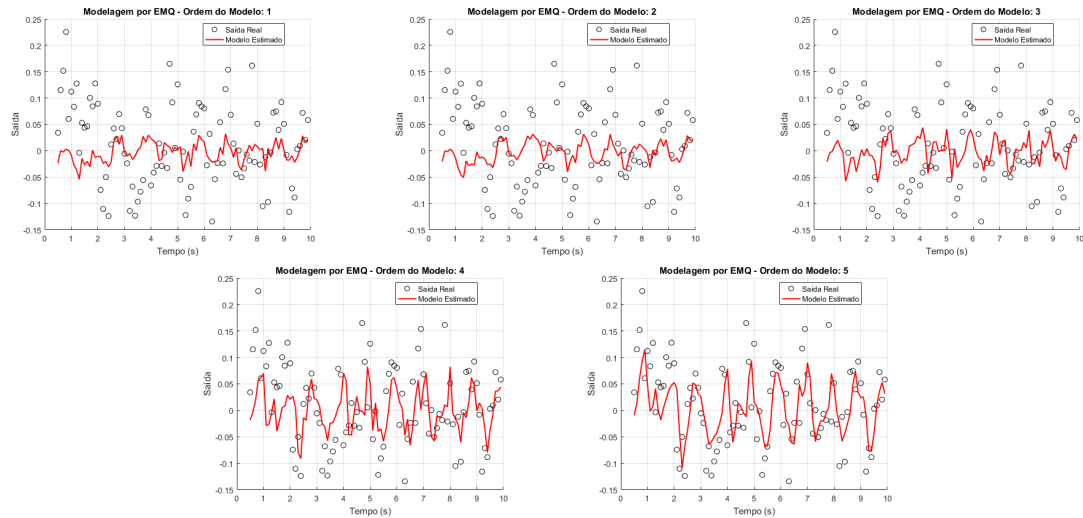


Figura 21: Saída dos Parâmetros estimados para a entrada senoidal.

Ordem	SEQ	CCM	SNR
1	0.55	0.03	-8.22
2	0.55	0.03	-8.02
3	0.53	0.07	-6.15
4	0.44	0.22	-1.95
5	0.38	0.33	-0.38

Tabela 2: Valores obtidos para os diferentes métodos utilizados.

Para o modelo de **ordem 1**, observamos um valor moderado de **SEQ**, o que indica um ajuste razoável aos dados. No entanto, o baixo valor de **CCM** sugere uma correlação muito fraca entre as previsões do modelo e os dados reais. Além disso, a **SNR** negativa indica que o ruído é significativamente mais forte do que o sinal de interesse, o que pode prejudicar a confiabilidade das previsões do modelo.

O modelo de **ordem 2** apresenta resultados semelhantes ao modelo de ordem 1. O **SEQ** e o **CCM** são praticamente iguais. A **SNR** também permanece negativa, indicando que o ruído ainda é dominante em relação ao sinal de interesse.

No modelo de **ordem 3**, há uma melhoria significativa no **SEQ**, indicando um ajuste mais preciso aos dados em comparação com os modelos anteriores. O **CCM** também aumentou, sugerindo uma correlação um pouco mais forte. No entanto, a **SNR** ainda que menor, permanece negativa, o que indica que o ruído ainda é um fator importante.

O modelo de **ordem 4** apresenta uma redução significativa no **SEQ**, indicando um ajuste mais preciso aos dados em comparação com os modelos anteriores. Além disso, o **CCM** aumentou substancialmente, sugerindo uma correlação mais

forte entre as previsões do modelo e os dados reais. A **SNR**, embora ainda negativa, está mais próxima de zero, indicando que o sinal de interesse está começando a se destacar em relação ao ruído.

No modelo de **ordem 5**, o **SEQ** continua a diminuir, indicando um ajuste ainda mais preciso aos dados. O **CCM** também continua a aumentar, sugerindo uma correlação ainda mais forte. Além disso, a **SNR** está muito próxima de zero, o que significa que o sinal de interesse e o ruído estão em um equilíbrio próximo.

Em resumo, à medida que a ordem do modelo aumenta, observamos uma melhoria geral nas métricas de ajuste, correlação e relação sinal-ruído. No entanto, mesmo nos modelos de ordem mais alta, a SNR permanece negativa ou próxima de zero, indicando que o ruído ainda é uma consideração importante na modelagem e previsão do sistema.

4.7 Resultados para os conjuntos 1 e 2

4.7.1 Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 1)

Os resultados gráficos dos modelos ARX encontrados para o **conjunto de dados 1** são apresentados abaixo.

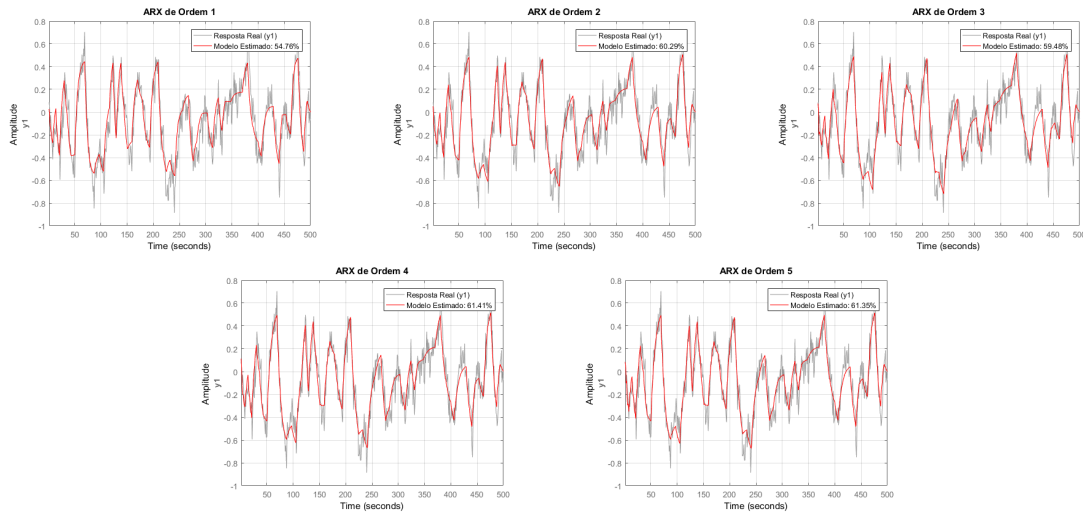


Figura 22: Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 1.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A e B, que geram as saídas presentes na Figura 21 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.1).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.84y(t-1) + 0.10u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 0.61y(t-1) + 0.25y(t-2) + 0.11u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 0.56y(t-1) + 0.09y(t-2) + 0.22y(t-3) + 0.13u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 0.59y(t-1) + 0.10y(t-2) + 0.34y(t-3) - 0.17y(t-4) + 0.12u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 0.60y(t-1) + 0.10y(t-2) + 0.33y(t-3) - 0.19y(t-4) + 0.02y(t-5) + 0.12u(t) + e(t)$$

4.7.2 Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 2)

Os resultados gráficos dos modelos ARX encontrados para o **conjunto de dados 2** são apresentados abaixo.

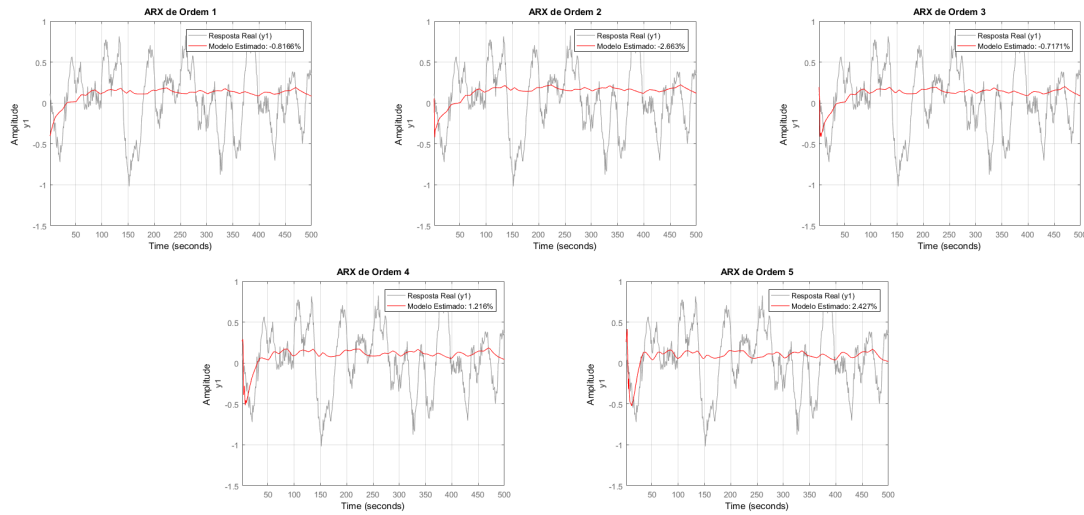


Figura 23: Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 2.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A e B, que geram as saídas presentes na Figura 22 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.1).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.96y(t-1) + 0.01u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 0.83y(t-1) + 0.14y(t-2) + 0.01u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 0.85y(t-1) + 0.27y(t-2) - 0.16y(t-3) + 0.01u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 0.85y(t-1) + 0.27y(t-2) - 0.16y(t-3) + 0.01u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 0.74y(t-1) + 0.36y(t-2) + 0.17y(t-3) - 0.13y(t-4) - 0.21y(t-5) + 0.01u(t) + e(t)$$

4.7.3 Resultante EMQ para os modelos ARX

A Tabela abaixo apresenta os valores de EMQ para os 10 modelos testados durante as fases de estimação e validação.

Ordem	Conjunto de Dados 1	Conjunto de Dados 2
1	0.23846	0.80968
2	0.28225	1.1486
3	0.31012	0.76965
4	0.29363	0.33846
5	0.29493	0.20308

Tabela 3: Valores do EMQ para Modelos ARX nos Conjuntos de Dados 1 e 2

4.7.4 Justificativa da escolha do modelo ARX

Com base nos valores da tabela, podemos justificar a escolha dos modelos ARX da seguinte forma: Para o **Conjunto 1**, observamos que o modelo ARX de ordem 1 apresenta o menor Erro Quadrático Médio (EMQ) em comparação com os outros modelos testados. Isso sugere que o modelo ARX de ordem 1 se ajusta melhor aos dados do Conjunto 1 e é a escolha preferida. No caso do **Conjunto 2**, notamos

que o modelo ARX de ordem 5 exibe o menor EMQ entre todas as ordens testadas. Isso indica que o modelo ARX de ordem 5 é o mais adequado para representar os dados do Conjunto 2 com maior precisão.

Portanto, a escolha dos modelos ARX é guiada pelos valores de EMQ em cada conjunto de dados. O modelo ARX de ordem 1 é selecionado para o Conjunto 1, enquanto o modelo ARX de ordem 5 é preferido para o Conjunto 2.

4.7.5 Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 1)

Os resultados gráficos dos modelos ARMAX encontrados para o **conjunto de dados 1** são apresentados abaixo.

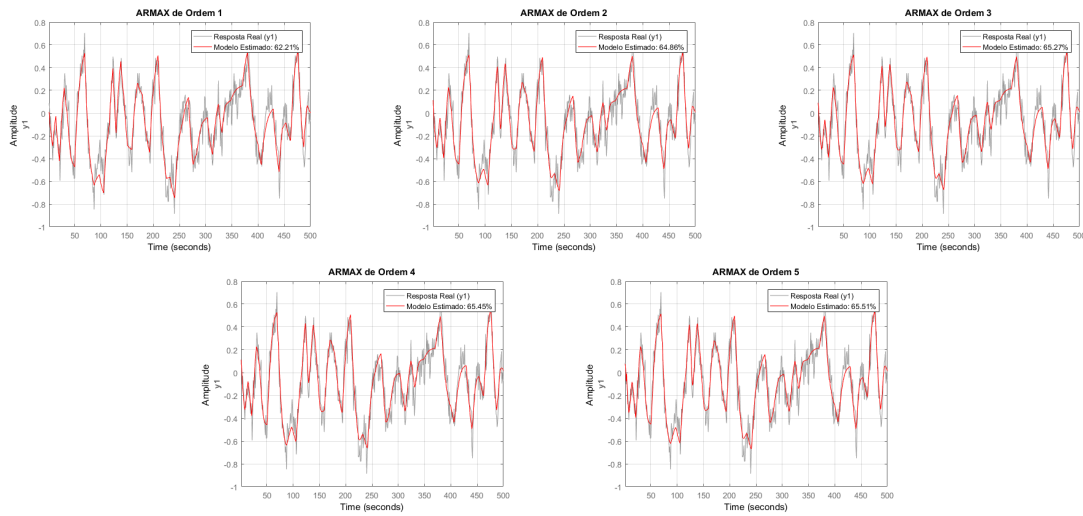


Figura 24: Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 1.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A, B e C, que geram as saídas presentes na Figura 23 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.2).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.90y(t-1) + 0.09u(t) - 0.58e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 1.29y(t-1) - 0.36y(t-2) + 0.06u(t) - 0.90e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 1.23y(t-1) - 0.21y(t-2) - 0.09y(t-3) + 0.06u(t) - 0.91e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 1.19y(t-1) - 0.29y(t-2) + 0.21y(t-3) - 0.18y(t-4) + 0.06u(t) - 0.89e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 1.23y(t-1) - 0.32y(t-2) + 0.27y(t-3) - 0.39y(t-4) + 0.13y(t-5) + 0.05u(t) - 0.91e(t)$$

4.7.6 Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 2)

Os resultados gráficos dos modelos ARMAX encontrados para o **conjunto de dados 2** são apresentados abaixo.

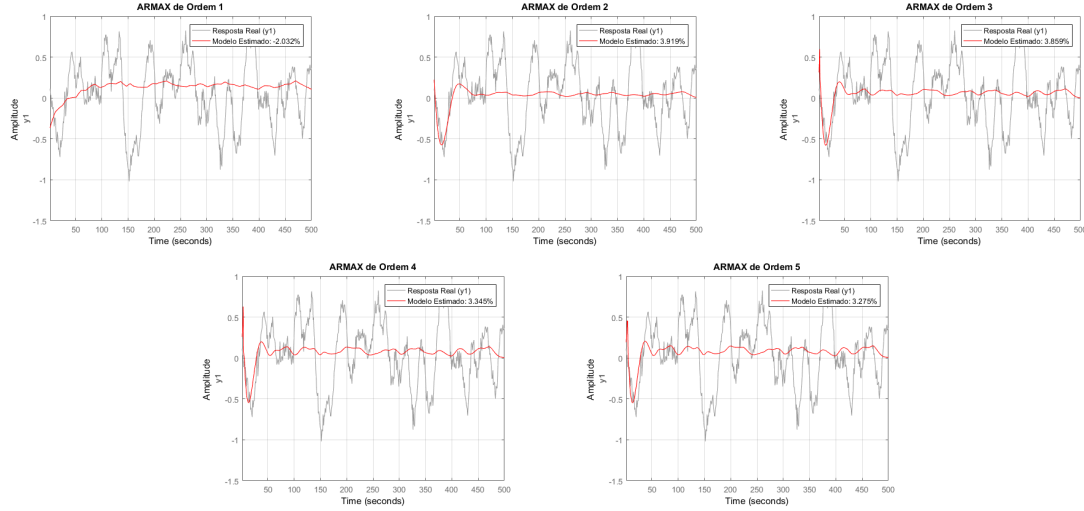


Figura 25: Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 2.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A, B e C, que geram as saídas presentes na Figura 24 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.2).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.97y(t-1) + 0.01u(t) - 0.10e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 1.91y(t-1) - 0.92y(t-2) + 0.00u(t) - 0.90e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 1.50y(t-1) - 0.18y(t-2) - 0.34y(t-3) + 0.00u(t) - 0.72e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 1.25y(t-1) - 0.03y(t-2) - 0.00y(t-3) - 0.25y(t-4) + 0.01u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 1.09y(t-1) + 0.08y(t-2) + 0.05y(t-3) - 0.15y(t-4) - 0.12y(t-5) + 0.01u(t) - 0.38e(t)$$

4.7.7 Resultante EMQ para os modelos ARMAX

A Tabela abaixo apresenta os valores de EMQ para os 10 modelos testados durante as fases de estimação e validação.

Ordem	Conjunto de Dados 1	Conjunto de Dados 2
1	0.29681	1.0563
2	0.27854	0.11792
3	0.27803	0.13838
4	0.28246	0.14864
5	0.27981	0.15112

Tabela 4: Valores do EMQ para Modelos ARMAX nos Conjuntos de Dados 1 e 2

4.7.8 Justificativa da escolha do modelo ARMAX

Com base nos valores da tabela, podemos justificar a escolha dos modelos ARMAX da seguinte forma: No **Conjunto de Dados 1**, observamos que os valores de EMQ variam ligeiramente entre as diferentes ordens dos modelos testados. O valor mínimo de é obtido para a **ordem 3**. A medida que a ordem aumenta, o EMQ tende a aumentar ligeiramente. Isso sugere que a ordem 3 pode ser a escolha preferida para o Conjunto de Dados 1. No **Conjunto de Dados 2**, há uma variação mais significativa nos valores de EMQ em relação à ordem dos modelos ARMAX. O valor mínimo de EMQ é obtido para a **ordem 2**, seguido pela ordem 3. As demais ordens têm valores de EMQ mais elevados. Isso sugere que o modelo ARMAX de ordem 2 é a escolha mais adequada para o Conjunto de Dados 2, uma vez que ele apresenta o menor erro médio quadrático em comparação com as outras ordens.

4.8 Resultados para os conjuntos 3 e 4

4.8.1 Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 3)

Os resultados gráficos dos modelos ARX encontrados para o **conjunto de dados 3** são apresentados abaixo.

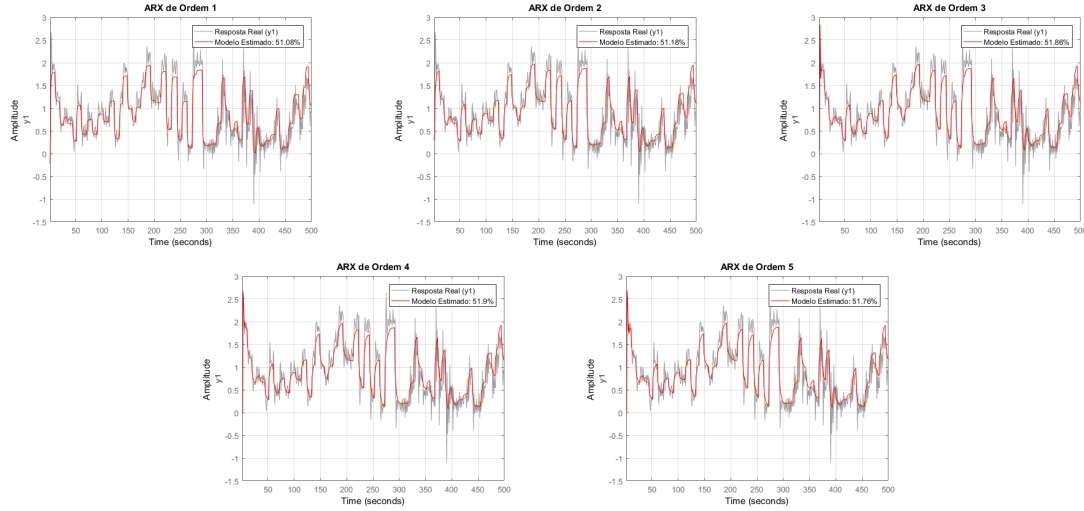


Figura 26: Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 3.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A e B, que geram as saídas presentes na Figura 25 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.1).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.34y(t-1) + 1.30u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 0.20y(t-1) + 0.18y(t-2) + 1.24u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 0.20y(t-1) + 0.14y(t-2) + 0.07y(t-3) + 1.16u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 0.17y(t-1) + 0.16y(t-2) + 0.08y(t-3) + 0.00y(t-4) + 1.16u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 0.17y(t-1) + 0.16y(t-2) + 0.06y(t-3) - 0.03y(t-4) + 0.06y(t-5) + 1.16u(t) + e(t)$$

4.8.2 Modelos matemáticos ARX e simulação(conjunto 4)

Os resultados gráficos dos modelos ARX encontrados para o **conjunto de dados 4** são apresentados abaixo.

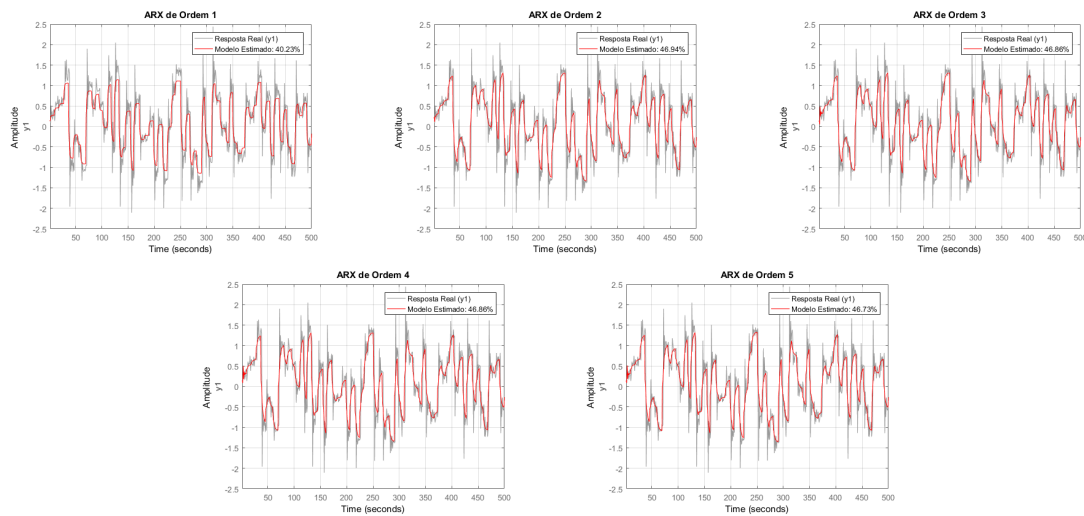


Figura 27: Resultados gráficos do modelo ARX para o conjunto 4.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A e B, que geram as saídas presentes na Figura 26 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.1).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.36y(t-1) + 0.37u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 0.16y(t-1) + 0.33y(t-2) + 0.34u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 0.16y(t-1) + 0.33y(t-2) + 0.01y(t-3) + 0.34u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 0.16y(t-1) + 0.33y(t-2) + 0.01y(t-3) + 0.00y(t-4) + 0.34u(t) + e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 0.16y(t-1) + 0.33y(t-2) - 0.00y(t-3) - 0.01y(t-4) - \\ - 0.01y(t-5) + 0.34u(t) + e(t)$$

4.8.3 Resultante EMQ para os modelos ARX

A Tabela abaixo apresenta os valores de EMQ para os 10 modelos testados durante as fases de estimação e validação.

Ordem	Conjunto de Dados 3	Conjunto de Dados 4
1	3.2763	0.22463
2	3.3623	0.47196
3	3.346	0.47603
4	3.3085	0.47733
5	3.3263	0.4808

Tabela 5: Valores do EMQ para Modelos ARX nos Conjuntos de Dados 3 e 4

4.8.4 Resultante do comportamento dos Regressores ARX

Os resultados gráficos do comportamento dos regressores para os 10 modelos testados durante as fases de estimação e validação são apresentados abaixo.

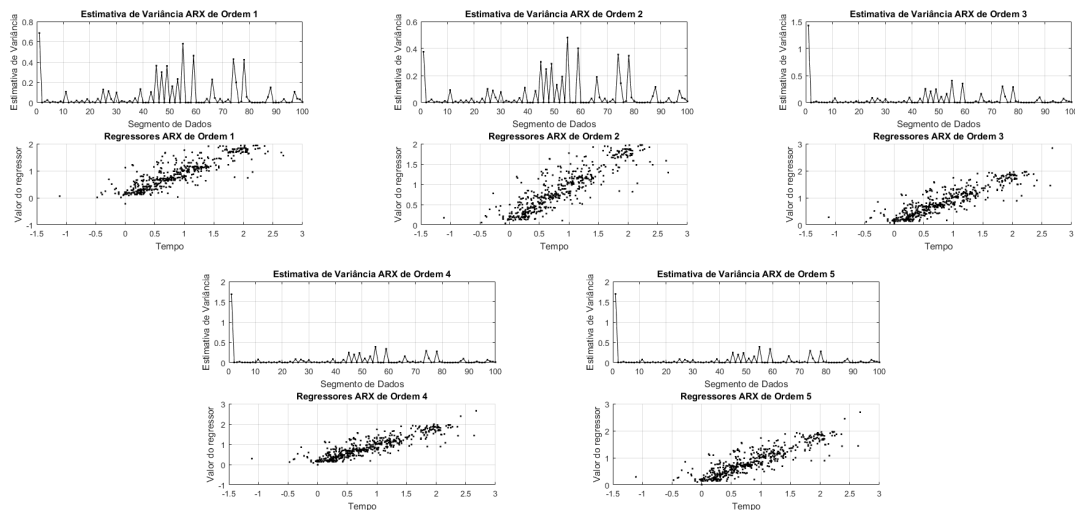


Figura 28: Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 3.

Podemos notar, através do gráfico de variância que os valores dos regressores apresentam um comportamento aceitável para atestar que os sistemas estimados

para o **conjunto de dados 3** não são variantes no tempo, uma vez que os mesmos estão muito próximos do valor médio.

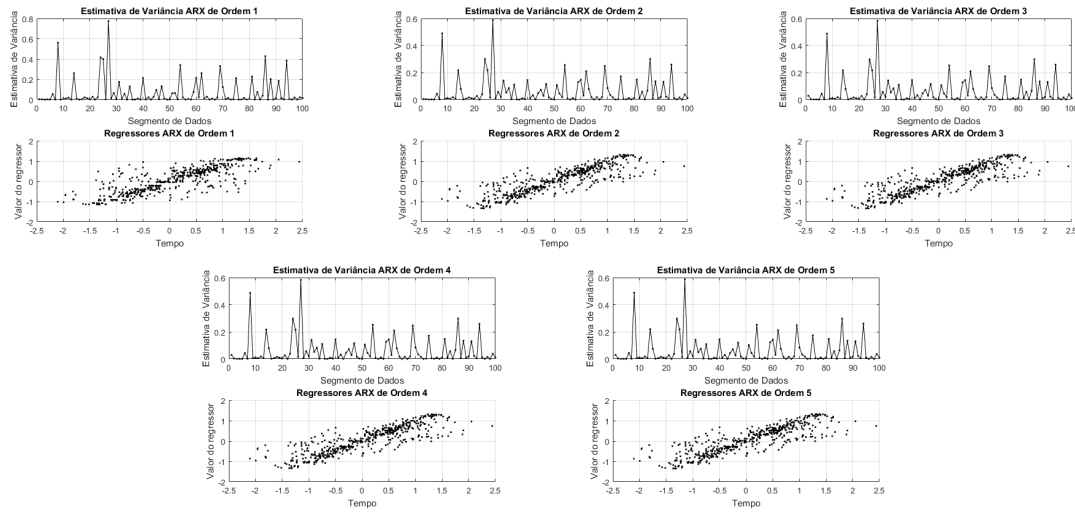


Figura 29: Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 4.

Podemos notar, através do gráfico de variância que os valores dos regressores apresentam um comportamento aceitável para atestar que os sistemas estimados para o **conjunto de dados 4** não são variantes no tempo, uma vez que os mesmos estão muito próximos do valor médio.

4.8.5 Justificativa da escolha do modelo ARX

Com base nos valores da tabela de Erro Quadrático Médio (EMQ), podemos justificar a escolha do melhor modelo da seguinte maneira: No **Conjunto de Dados 3**, observamos que os valores de EMQ aumentam gradualmente à medida que a ordem dos modelos ARX aumenta. O valor mínimo de EMQ é obtido para a **ordem 1**. À medida que a ordem aumenta, os valores de EMQ continuam aumentando, sugerindo que modelos mais complexos podem estar se ajustando demais aos dados de treinamento, resultando em piores desempenhos de predição em dados não vistos. Portanto, a escolha do melhor modelo para o Conjunto de Dados 3 seria o modelo ARX de ordem 1, devido ao menor valor de EMQ, indicando uma melhor capacidade de generalização.

No **Conjunto de Dados 4**, também observamos um aumento nos valores de EMQ à medida que a ordem dos modelos aumenta. O valor mínimo de EMQ é obtido novamente para a **ordem 1**. Assim como no Conjunto de Dados 3, as ordens mais altas têm valores de EMQ maiores. Isso reforça a ideia de que escolher um modelo mais simples, como o de ordem 1, pode ser mais vantajoso, uma vez que ele pode evitar o *overfitting* e proporcionar uma melhor generalização para dados não vistos.

4.8.6 Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 3)

Os resultados gráficos dos modelos ARMAX encontrados para o **conjunto de dados 3** são apresentados abaixo.

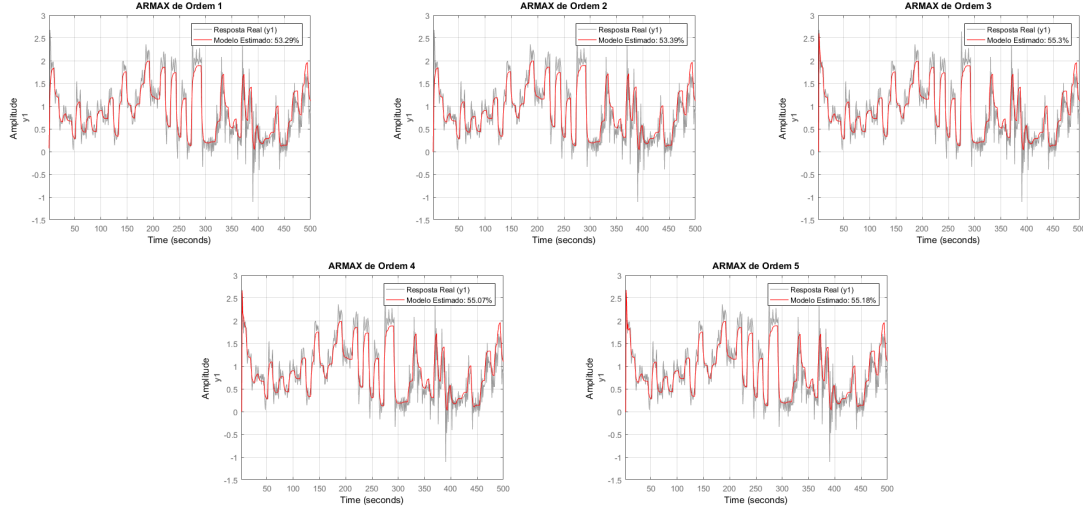


Figura 30: Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 3.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A, B e C, que geram as saídas presentes na Figura 29 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.2).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.54y(t-1) + 0.92u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 0.53y(t-1) - 0.01y(t-2) + 0.96u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 0.57y(t-1) + 0.01y(t-2) - 0.02y(t-3) + 0.89u(t) - 0.53e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 0.55y(t-1) + 0.04y(t-2) + 0.00y(t-3) - 0.03y(t-4) + 0.89u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 0.55y(t-1) + 0.04y(t-2) + 0.00y(t-3) - 0.06y(t-4) + 0.02y(t-5) + 0.89u(t) - 0.52e(t)$$

4.8.7 Modelos matemáticos ARMAX e simulação(conjunto 4)

Os resultados gráficos dos modelos ARMAX encontrados para o **conjunto de dados 3** são apresentados abaixo.

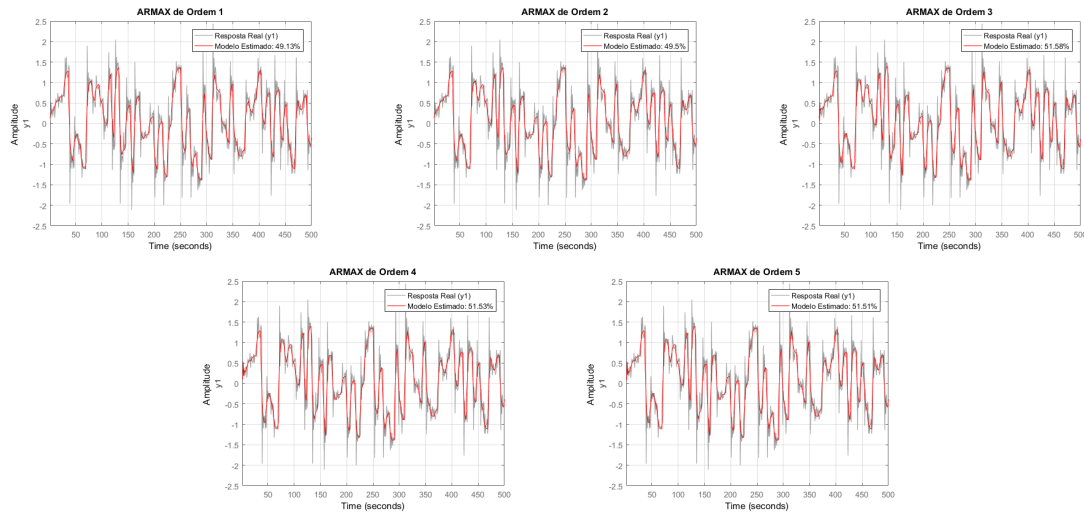


Figura 31: Resultados gráficos do modelo ARMAX para o conjunto 4.

Os modelos matemáticos estimados, com os coeficiente A, B e C, que geram as saídas presentes na Figura 30 são apresentados abaixo. Os modelos seguem a representação descrita na equação (3.7.2).

- Modelo de Ordem 1:

$$y(t) = 0.54y(t-1) + 0.92u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 2:

$$y(t) = 0.53y(t-1) - 0.01y(t-2) + 0.96u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 3:

$$y(t) = 0.57y(t-1) + 0.01y(t-2) - 0.02y(t-3) + 0.89u(t) - 0.53e(t)$$

- Modelo de Ordem 4:

$$y(t) = 0.55y(t-1) + 0.04y(t-2) + 0.00y(t-3) - 0.03y(t-4) \\ + 0.89u(t) - 0.52e(t)$$

- Modelo de Ordem 5:

$$y(t) = 0.55y(t-1) + 0.04y(t-2) + 0.00y(t-3) - 0.06y(t-4) \\ + 0.02y(t-5) + 0.89u(t) - 0.52e(t)$$

4.8.8 Resultante EMQ para os modelos ARMAX

A Tabela abaixo apresenta os valores de EMQ para os 10 modelos testados durante as fases de estimação e validação.

Ordem	Conjunto de Dados 3	Conjunto de Dados 4
1	3.0398	0.44987
2	3.042	0.44118
3	3.0338	0.43517
4	3.0226	0.4354
5	3.0287	0.43491

Tabela 6: Valores do EMQ para Modelos ARMAX nos Conjuntos de Dados 3 e 4

4.8.9 Resultante do comportamento dos Regressores ARMAX

Os resultados gráficos do comportamento dos regressores para os 10 modelos testados durante as fases de estimação e validação são apresentados abaixo.

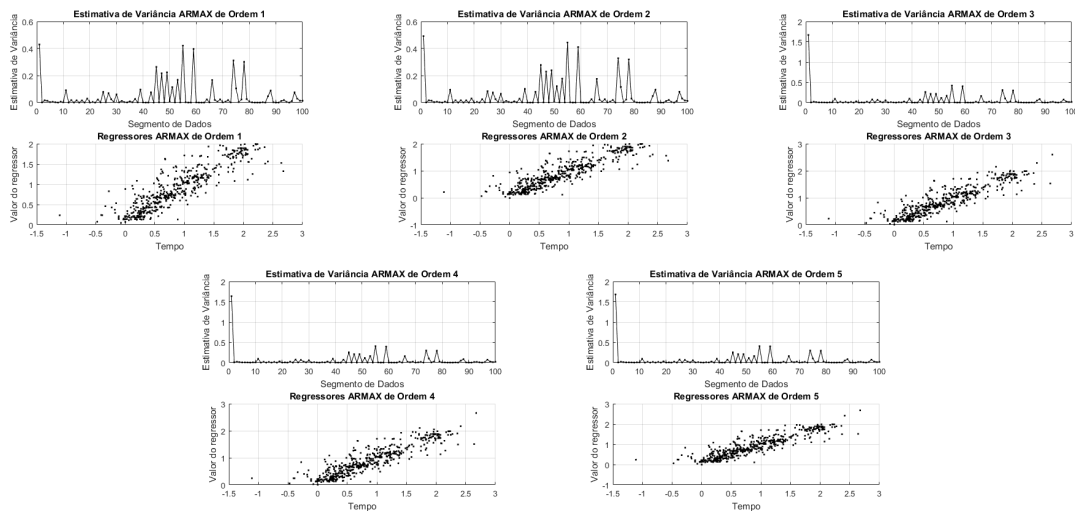


Figura 32: Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 3.

Podemos notar, através do gráfico de variância que os valores dos regressores, para os modelos de ordem 3, 4 e 5 apresentam um comportamento aceitável para atestar que o sistema estimado para o **conjunto de dados 3 não é variante no tempo**, uma vez que os mesmos estão muito próximos do valor médio. Contudo, os valores para os modelos de ordem 1 e 2, apresentam uma maior instabilidade, desta forma, podemos atestar que os modelos em questão são variantes no tempo.

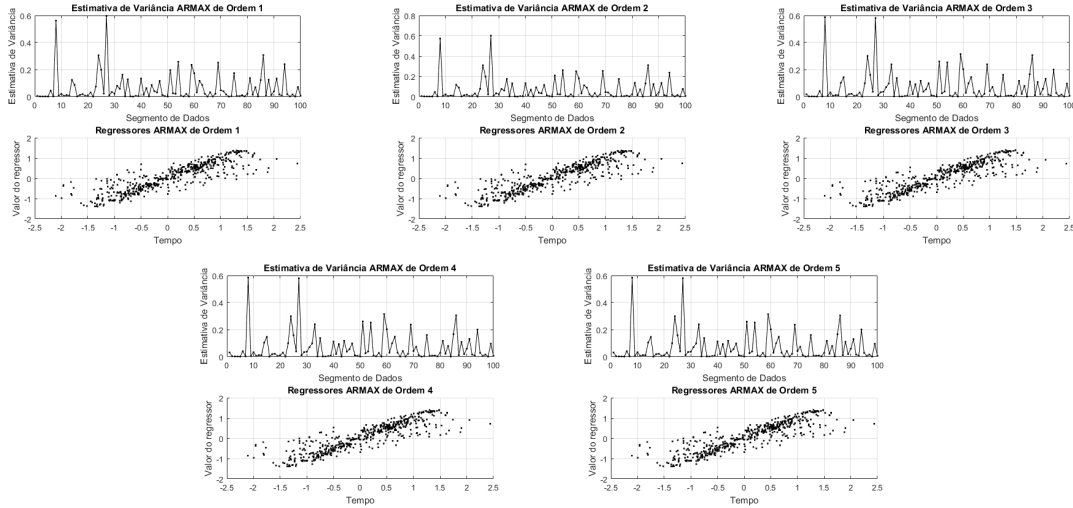


Figura 33: Comportamento dos regressores do modelo ARX para o conjunto 4.

Podemos notar, através do gráfico de variância que os valores dos regressores apresentam um comportamento aceitável para atestar que os sistemas estimados para o **conjunto de dados 4 não são variantes no tempo**, uma vez que os mesmos estão muito próximos do valor médio.

4.8.10 Justificativa da escolha do modelo ARMAX

Com base nos valores da tabela de Erro Quadrático Médio (EMQ) para os conjuntos de dados 3 e 4, podemos justificar a escolha do melhor modelo da seguinte forma: No **Conjunto de Dados 3**, observamos que os valores de EMQ apresentam pouca variação à medida que a ordem dos modelos ARMAX aumenta. Isso sugere que a complexidade do modelo não está impactando significativamente o desempenho de predição. Desta forma, usando como critério o a variação temporal, podemos atestar que o modelo de **ordem 3** se adéqua para estimar o sistema.

No **Conjunto de Dados 4**, também observamos uma variação relativamente pequena nos valores de EMQ à medida que a ordem aumenta. Isso indica que, sem informações adicionais, escolher o melhor modelo com base apenas nos valores de EMQ pode não ser conclusivo. Contudo, levando em conta a variação temporal dos modelos estimados, podemos adotar o modelo de **ordem 1** para para simular o sistema real.

5 Conclusão

Neste relatório, investigamos sistemas de controle em malha aberta, analisando respostas a entradas degrau e a influência dos polos. Utilizando mínimos quadrados, identificamos modelos de ordens variadas, considerando diferentes ruídos. Validamos os modelos por simulações com diversos conjuntos de dados, usando métricas como erro quadrático e coeficiente de correlação. Também selecionamos os melhores modelos para cada conjunto de dados, baseando-nos nos menores erros médios quadráticos durante a estimação e validação. Em suma, o estudo ressaltou a importância da escolha precisa de modelos, considerando variações temporais e impacto do ruído, através de métodos analíticos e estatísticos.

Referências

- [1] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*,. John Wiley & Sons, 2007.
- [2] A. Coelho and L. dos Santos Coelho, *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*. Editora da UFSC, 2004.
- [3] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals & Systems (2Nd Ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [4] M. Meza, *Controle de sistemas por computador: projeto e identificação*. Editora Blucher, 2022.
- [5] S. Cavassila, S. Deval, C. Huegen, D. van Ormondt, and D. Graveron-Demilly, “Receiver operating characteristic (roc) analysis of svcs and csi spectroscopy in evaluating malignancy in brain tumours,” *Proceedings of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine (ISMRM)*, vol. 8, p. 462, 2000.
- [6] P. H. A. Konzen, *Equações e Diferenças*. Universidade Federal do Paraná, 2021.
- [7] “Página da wikipedia sobre relação sinal-ruído.” https://pt.wikipedia.org/wiki/Rela%C3%A7%C3%A3o_sinal-ru%C3%ADdo. Acessado em 16 de agosto de 2023.
- [8] “MATLAB Documentation.” <https://www.mathworks.com/help/matlab/>. Acessado em 09 de agosto de 2023.

Apêndices

Apêndice A: [Repositório com as implementações em MATLAB](#)