

Jordan 标准形

定义 1.21 在上面的定义中 **J** 称为矩阵 **A** 的 **Jordan** 标准形,

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix} \quad \text{其中} \quad J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

我们称 $J_i(\lambda_i)$ 为 $(\lambda - \lambda_i I)^{m_i}$ 对应的 **Jordan** 块。

若当标准型的基本性质：

- 任意矩阵A若当标准型J可以写成 $J=D+R$ 的形式,
那么 $DR=RD$

证明：由于D和R为相同划分的块对角矩阵，因此乘积对应的块等于相应块的乘积，而D中相应分块为单位单位矩阵的数乘，即

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

因此结论成立.

Jordan 标准形(续)

定理1.29. 设矩阵A为复数域C的矩阵，特征多项式的分解

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

存在，则存在非奇异矩阵P使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{J}$.

(注：其中P不唯一.)

定理1.30 (基本定理) 每个n阶复矩阵A都与一个Jordan 标准形相似,这个Jordan 标准形除去其中Jordan块的排列次序外,是由A唯一确定的。

若当标准型的计算

1.首先，给出如下定义：

多项式矩阵（又称为 λ 阵）

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为 λ 的多项式矩阵，其中矩阵元素 $a_{ij}(\lambda)$ 为 λ 的多项式。

2. λ 矩阵的化简

- 多项式矩阵的初等变换

初等变换的目的是为了在保持矩阵原有属性的前提下形式上变得简单。

(1) 互换两行（列）

(2) 以非零常数乘以某行（列） [这里不能乘以 λ 的多项式或零，这样有可能改变原来矩阵的秩和属性]

(3) 将某行（列）乘以 λ 的多项式加到另一行（列）

- 多项式矩阵的标准形式：采用初等变换可将多项式矩阵化为如下形式：

$$A(\lambda) \rightarrow \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中，多项式 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式（首项系数为 1，即最高幂次项的系数为 1），且 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$ 、 $d_2(\lambda) \mid d_3(\lambda)$ 、 \cdots 、 $d_{r-1}(\lambda) \mid d_r(\lambda)$ ，即 $d_i(\lambda)$ 是 $d_{i+1}(\lambda)$ 的因式。

(1) 多项式矩阵的标准形式不随所采用的初等变换而变，故称 $d_i(\lambda)$ 为不变因子。

(2) 不变因子又可采用如下方法求得：设 $D_i(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的所有 i 阶子行列式的最大公因式，则 $d_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$ ， $D_0(\lambda) = 1$ 。 $D_i(\lambda)$ 称为 i 阶行列式因子。

(3) 将每个不变因子化为不可约因式，这些不可约因式称为 $A(\lambda)$ 的初等因子，全体初等因子称为初等因子组。例如：

$$d_1(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) \rightarrow (\lambda - 2)^2 \text{ 和 } (\lambda - 3)$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^5 \rightarrow (\lambda - 2)^2 \text{ 和 } (\lambda - 3)^5$$

初等因子组中应包括两个 $(\lambda - 2)^2$ 。

3. Jordan 标准形的求法

(1) 求出特征多项式 $(\lambda I - A)$ 的初等因子组, 设为 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$ 、

$$(\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}。$$

(2) 写出各 Jordan 块矩阵 (一个初等因子对应一个 Jordan 块矩阵) $(\lambda - \lambda_i)^{n_i} \rightarrow J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$

(3) 合成 Jordan 矩阵: $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$

方阵A的Jordan 标准形变换矩阵P的求法

- **目标：**求可逆矩阵P和Jordan矩阵 J_A ，使 $AP=PJ_A$
- **求法与步骤：**根据前面的计算求出初等因子组

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

➤ 矩阵A和 J_A 的特征值相等 \longrightarrow $J_A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & J_2(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$

$$AP_i = P_i J_i(\lambda_i)$$

- 细分矩阵 P_i 和 J_i ，在Jordan块上，有

• Jordan链条 $\{\alpha, y_2, \dots, y_{n_j}\}$

$$\begin{cases} (A - \lambda_1 I)\alpha = 0 & \text{特征向量} \\ (A - \lambda_1 I)y_2 = \alpha \\ (A - \lambda_1 I)y_3 = y_2 \\ \dots & \dots \\ (A - \lambda_1 I)y_{n_j} = y_{n_j-1} & \text{广义特征向量} \end{cases}$$

注意：这里使用的是 $(A - \lambda_1 I)y_{i+1} = y_i$
教材上使用的是 $(\lambda_1 I - A_i)y_{i+1} = -y_i$
另外，注意 α 的选择。观察上面的公式可以发现

$$\alpha \in R((A - \lambda_1 I)^{n_j-1}) \cap N(A - \lambda_1 I)$$

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & 2 & -2 & \\ & & & 2 & -3 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵P使得A相似

于Jordan 标准型。

解：可计算A的包含阶数为2和3的两个Jordan块。可计算得：

$$A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & -2 & \\ & & & 0 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (A - 2 \cdot I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 6 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$R((A-2 \cdot I)) = \{(\mathbf{x}, 0, y, z, 0)^T \mid \mathbf{x}, y, z \in \mathbb{C}\}$$

$$R((A-2 \cdot I)^2) = \{\mathbf{x} \cdot (0, 0, 1, 0, 0)^T \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}\}$$

$$N((A-2 \cdot I)) = \{(\mathbf{x}, 0, y, 0, 0)^T \mid \mathbf{x}, y \in \mathbb{C}\}$$

先求二阶Jordan对应的特征向量和广义特征向量。显然取

$$p_1 \in R((A-2 \cdot I)) \cap N(A-2 \cdot I), p_1 = (a, 0, b, 0, 0)^T, a \neq 0 \text{ 或 } b \neq 0$$

这时

$$\begin{aligned} p_2 &= (x, -a, z, -b/2, 0)^T \\ &= (x, 0, z, 0, 0)^T + (0, -a, 0, -b/2, 0)^T \end{aligned}$$

很明显前一个向量属于 $N(A-2 \cdot I)$ ，因此可以去除的。

再求三阶Jordan对应的特征向量和广义特征向量。显然取

$$\mathbf{p}_3 \in \mathbf{R}((\mathbf{A}-2 \cdot \mathbf{I})^2) \cap \mathbf{N}(\mathbf{A}-2 \cdot \mathbf{I}), \mathbf{p}_3 = (0, 0, \mathbf{c}, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \mathbf{c} \neq 0$$

这时由 $(\mathbf{A}-2 \cdot \mathbf{I})\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_4 &= (\mathbf{x}, 0, \mathbf{z}, -\mathbf{c} / 2, 0)^{\mathrm{T}} \\ &= (\mathbf{x}, 0, \mathbf{z}, 0, 0)^{\mathrm{T}} + (0, 0, 0, -\mathbf{c} / 2, 0)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

很明显前一个向量属于 $\mathbf{N}(\mathbf{A}-2 \cdot \mathbf{I})$ ，因此可以去除的。

再由 $(\mathbf{A}-2 \cdot \mathbf{I})\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_4$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_5 &= (\mathbf{x}, 0, \mathbf{z}, 0, \mathbf{c} / 6)^{\mathrm{T}} \\ &= (\mathbf{x}, 0, \mathbf{z}, 0, 0)^{\mathrm{T}} + (0, 0, 0, 0, \mathbf{c} / 6)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

很明显前一个向量属于 $\mathbf{N}(\mathbf{A}-2 \cdot \mathbf{I})$ ，因此可以去除的。

综合前面的两步可得

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5) \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{b}/2 & \mathbf{0} & -\mathbf{c}/2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}/6 \end{pmatrix}$$

从前面的计算可以看出，如果先取 $\mathbf{a}=0$,那么后面的计算将无法进行。因此我们应该在求Jordan块对应特征值的时候先求阶数比较高的，然后在同阶数的可以随便进行。依此类推。可总结如下

• 方法步骤:

- 由特征值 λ_i 对应的线性无关的特征向量的个数确定 $J(\lambda_i)$ 中 Jordan 块的个数
- 由特征值 λ_i 的代数重数确定主对角线元素是 λ_i 的 Jordan 矩阵 $J(\lambda_i)$ 的阶数。
- 由特征向量求得的Jordan 链条的长度确定Jordan块的阶数
- 链条中的向量合起来构成可逆矩阵 P , Jordan块构成 J_A

• 基于Jordan标准形的矩阵多项式 $g(A)$ 的计算

$$A = p \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & J_2(\lambda) & \\ & & \ddots \\ & & & J_k(\lambda) \end{bmatrix}_{n \times n} \xrightarrow{P^{-1}} g(A) = p \begin{bmatrix} g(J_1) & & \\ & g(J_2) & \\ & & \ddots \\ & & & g(J_k) \end{bmatrix}_{n \times n} p^{-1}$$

Jordan块

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{r \times r} \xrightarrow{m \geq r} g(J) = \begin{bmatrix} g(\lambda) & g'(\lambda) & \frac{g''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{g^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ & g(\lambda) & g'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & g(\lambda) & \ddots & \frac{g''(\lambda)}{2!} \\ & & & \ddots & g'(\lambda) \\ & & & & g(\lambda) \end{bmatrix}$$

$m \geq r$

$g(J)$ 的结构特点: 由第一行的元素生成

• **例题1** 设 $g(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 1$
对下列矩阵A, 计算g(A)。

解

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$g(A) = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 15 & 23 \\ & & 15 \end{bmatrix} P^{-1}$$

关于Jordan标准形的计算

由于计算涉及的内容偏多，有兴趣或需要的可以参见教材。另外很多定理的证明可参见北京大学出版社出版的<<高等代数>>教材的相关内容即可。