线 性 代 数

(第二版)

牛少彰　刘吉佑　编

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北 京·

内 容 提 要

全书共分六章,内容包括:行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换.书末附有习题答案.本书第二章就引入矩阵概念,在以后其他问题中注重应用矩阵方法处理,使得表达简洁.本书内容符合教育部高等学校线性代数教学基本要求.

本书可供高等工科院校各专业作为教材使用,也可供科技工作者阅读和用作考研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/牛少彰,刘吉佑编.—2版.—北京:北京邮电大学出版社,2003
ISBN 7-5635-0681-0

Ⅰ.线... Ⅱ.①牛...②刘... Ⅲ.线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第006543号

出 版 者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路10号)
邮编:100876
发行部电话:(010)62282185 62283578(传真)
经 销:各地新华书店
印 刷:
开 本:850 mm×1 168 mm 1/32
印 张:7.875
字 数:203千字
印 数:1—5 000册
版 次:2003年3月第2版

ISBN 7-5635-0681-0/O·47 定价:14.00元

如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

线性代数是理工科学生的一门重要基础课，它主要讨论有限维空间的线性理论，具有较强的抽象性和逻辑性.线性代数既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具.随着计算机的日益普及，线性代数在理论和应用上的重要性越来越突出，从而对线性代数课程的内容从深度和广度上都相应提出了更高的要求.

本书根据教育部高等学校线性代数教学的基本要求，结合作者长期从事线性代数和考研辅导班的教学经验和体会，并在参考其他教材的基础上，为适合各专业对线性代数的不同需要而编写.本书第一至五章不含“ * ”标志的内容及 A 组习题适用于理工科本科生约 34 学时的教学，其内容符合教育部线性代数教学基本要求.每章后面的 B 组习题更具理科特色，以适应工科数学要“理化”的需要，供对线性代数要求较高的专业选用.全书内容和 A，B 组习题，适用于理工科本科生约 50 学时的教学，以满足对线性代数有更高要求的专业的需要.

根据近年来教学改革的需要，我们在内容、结构等方面做了精心编排，以适应目前教学内容多、学时少和要求高的新形势.本书较早引入矩阵的秩和初等变换的概念，从而使得对向量组线性相关性的论讨变得相对容易，达到了化难为易的目的，也使得教学难点分散，易于学生学习和掌握.本教材注意应用矩阵方法处理问题，显示了矩阵方法的简洁与精巧性.考虑到线性代数课程概念多、结论多和内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或以通

俗简单的实例引入概念,对重点定理和方法,提供较多的例题加以分析,以使学生较好地理解、掌握和运用.本书给出了较为丰富的习题,并附有答案,便于学生练习检验.

本书第五章由刘吉佑编写,其余各章均由牛少彰编写.

在本教材的编写过程中,得到了北京邮电大学理学院领导及教研室全体教师的大力支持.赵启松教授详细审阅了全稿,提出了许多宝贵的建议,在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平有限,书中疏漏错误难免,敬请读者批评指正.

编　者

2000 年 5 月

第二版前言

本书第一版经三届学生的使用,取得了较好的教学效果,为进一步体现“理工融合”的教学改革思想,配合我校承担的教育部21世纪初高等教育“理工融合”教改项目的实施,我们在第一版的基础上进行了修订,补充了一些定理的证明和例题.

在编写过程中,我们力求文字叙述简明易懂,结构严谨,系统性强,例题和习题丰富,便于阅读;继续坚持教学中突出重点、分散难点的原则,对基本概念和定理中的难点的介绍或引入尽量采用启发式,并且精选例题进行说明;定理和公式的证明尽可能采用简便的方法,使之更适合课堂教学和自学.

在本书的使用和修订过程中,理学院数学部的许多教师提出了具体的意见和建议.赵启松教授、闵祥伟教授、罗守山教授审阅了部分稿件.北京邮电大学出版社为本书的再版给予了大力支持,在此,我们表示衷心的感谢.

我们忠心期望使用和关心该教材的师生,继续对本书提出宝贵意见和建议.

编　者

2003年1月

目　　录

第一章　行列式

行列式是由解线性方程组产生的,它是一个重要的数学工具,在科学技术的各个领域内均有广泛的应用.本章先介绍二、三阶行列式,并把它推广到 n 阶行列式,然后给出行列式的性质和计算方法,最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

第一节　二、三阶行列式

一、二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1, x_2 为未知量;$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数;b_1, b_2 为常数项.下面用消元法解线性方程组(1.1).

为消去未知量 x_2,用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘两个方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

同样地,从(1.1)式中消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,求得线性方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于叙述和记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \tag{1.3}$$

称 D 为二阶行列式,简记为 $D = \det(a_{ij})$.

数 $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$称为行列式 D 的元素.元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式,可用对角线法则来记忆.二阶行列式是两项的代数和,第一项是从左上角到右下角的对角线上两元素的乘积,带正号;第二项是从右上角到左下角的对角线上两元素的乘积,带负号.

根据二阶行列式的定义,二元线性方程组的解(1.2)中的分子也可用二阶行列式来表示.若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21},$$

其中 $D_i(i = 1, 2)$表示把 D 中第 i 列换成(1.1)式右边的常数列所得到的行列式.

于是,当 $D \neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1)的解就惟一地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}. \tag{1.4}$$

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

解　计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times 3 = -5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times 0 = 1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 1\times 3 = -3 .$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5},\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} .$$

二、三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 . \end{cases} \tag{1.5}$$

为解此方程组,可由前两个方程消去 x_3,得到一个只含 x_1, x_2 的二元方程;再由后两个方程消去 x_3,得到另一个只含 x_1, x_2 的二元方程,这样得到了一个含两个未知量的二元线性方程组,再消去 x_2,得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ = {}& b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} . \end{aligned}$$

若把 x_1 的系数记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.6)$$

则称 D 为三阶行列式.

上面定义的三阶行列式含有 6 项,每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积,并按照一定的规则带有正号或负号.三阶行列式可用下面的对角线法则记忆.

从左上角到右下角的对角线叫做主对角线,从右上角到左下角的对角线叫做副对角线.在图 1.1 中,实线看作是平行于主对角线的联线,虚线看作是平行于副对角线的联线,实线上三个元素的乘积取正号,虚线上三个元素的乘积取负号.

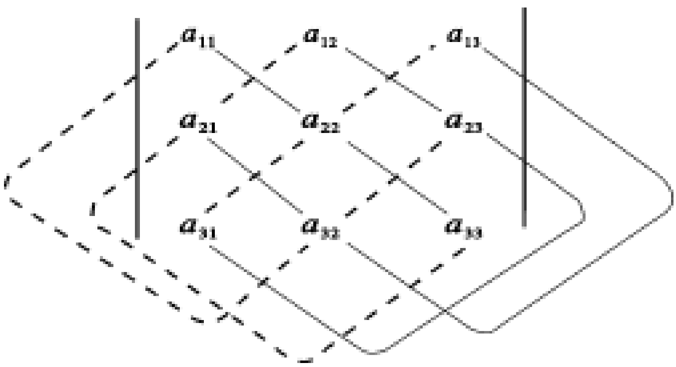

图 1.1

称式(1.6)中的 D 为三元线性方程组(1.5)的系数行列式.根据三阶行列式的定义,有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}.$$

若 $D \neq 0$,则 x_1 可表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},$$

同理可得

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$D_i(i = 1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 i 列去掉,换上线性方程组(1.5)的右边的常数列所得到的行列式.

与二元线性方程组一样,对于三元线性方程组,若其系数行列式 $D \neq 0$,可用三阶行列式求解三元线性方程组.

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式,得

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&1&8\\1&1&6\\1&2&8\end{vmatrix}=-6.$$

因此方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

第二节　全排列及其逆序数

用对角线法则计算行列式,虽然直观,但对于四阶及更高阶行列式,该方法就不适用了.为了求解四元及四元以上的线性方程组,需要把二、三阶行列式的概念进一步推广.下面先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

一、排列的逆序数

自然数 1,2,3,…,n 按一定次序排成一排,称为一个 n 元排列,记为 $p_1p_2\cdots p_n$.排列 $12\cdots n$ 称为自然排列.n 元排列总共有 $n!$ 个.例如自然数 1,2,3 共有 $3!=6$ 个排列,它们是

$$123,231,312,132,213,321.$$

我们将自然排列规定为标准次序.下面定义排列的逆序数.

定义 1　在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若一个大的数排在一个小的数的前面(即与标准次序不同时),则称这两个数有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如,在四元排列 4132 中出现的所有逆序为 41,43,42,32,所以 $\tau(4132)=4$.

在自然排列(标准次序)中没有逆序,其逆序数为 0.

下面给出逆序数的计算方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i,全体元素的逆序数的总和就是这个排列的逆序数,即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i. \qquad (1.7)$$

例 3　求下列排列的逆序数

(1) 31524;　　　　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解

(1) 在排列 31524 中:

3 排在首位,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有一个,它是 3,故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有两个,它们是 3,5,故逆序数为 2;

4 的前面比 4 大的数有一个,它是 5,故逆序数为 1.

因此这个排列的逆序数为

$$\tau(31524)=0+1+0+2+1=4.$$

(2) 同理可得:

$$\begin{aligned}\tau[n(n-1)\cdots 21]&=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

二、逆序数的性质

定义 2　逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如:自然数 1,2,3 的 6 个排列中,经计算可知偶排列为 123,231,312;奇排列为 321,132,213.

定义 3　将一个排列中的某两个数的位置互换,而其余的数

不动,就得到了一个新的排列,称这样的变换为一次对换 .将相邻两个数对换,称为相邻对换 .

定理1 对排列进行一次对换则改变其奇偶性 .

证 首先证明相邻对换的情形 .

设排列为 $a_1 \cdots a_l abb_1 \cdots b_m$,对换 a 与 b 得到新的排列 $a_1 \cdots a_l bab_1 \cdots b_m$.显然,元素 $a_1, \cdots, a_l; b_1, \cdots, b_m$ 的逆序数没有改变,只有元素 a 和 b 的逆序数改变了 .

当 $a < b$ 时,对换后, a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;

当 $a > b$ 时,对换后, a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1 .

因此,对换后新的排列与原排列的奇偶性不同 .

再证一般对换的情形 .

设排列为 $a_1 \cdots a_l ab_1 \cdots b_k bc_1 \cdots c_s$, a 和 b 之间相隔 k 个数,要实现 a 与 b 的对换,可先将 a 与 b_1 作相邻对换,再将 a 与 b_2 作相邻对换,照此继续下去,经 $k+1$ 次相邻对换,调成

$$a_1 \cdots a_l b_1 \cdots b_k bac_1 \cdots c_s,$$

然后再把 b 依次与 $b_k, \cdots, b_1$ 作 k 次相邻对换,调成

$$a_1 \cdots a_l bb_1 \cdots b_k ac_1 \cdots c_s .$$

这样,对换 a 和 b,可经过 $2k+1$ 次相邻对换而得到,所以这两个排列的奇偶性正好相反 .

由定理1 可得到下面的推论 .

推论1 奇排列调成自然排列的对换次数为奇数,偶排列调成自然排列的对换次数为偶数 .

证 因为自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列(自然排列的逆序数为0),由定理1 知,一次对换改变排列的奇偶性,当排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是奇(偶)排列时,必须作奇(偶)次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$,故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性 .

推论2 全体 n 元排列($n > 1$)的集合中,奇排列与偶排列各一半 .

第三节 n 阶行列式的概念

为了把二、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式,下面先研究三阶行列式的结构.

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.8)$$

可以看出:

(1) 三阶行列式的每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积;

(2) 每一项的三个元素的行标排成自然排列 123 时,列标都是 1,2,3 的某一排列,这样的排列共有 6 种,故三阶行列式共有 6 项;

(3) 带正号的三项的列标排列是

$$123, 231, 312,$$

经计算可知全为偶排列;

带负号的三项的列标排列是

$$132, 213, 321,$$

经计算可知全为奇排列.

因此,三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \qquad (1.9)$$

$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

用式(1.9),可以把行列式推广到一般情形.

定义 4　将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列,在其左右两侧加两条竖线,按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.10}$$

计算得到一个数,称为 n 阶行列式,简记作 $D=\det(a_{ij})$,其中$\sum$表示对所有 n 元排列求和.

式(1.10)右边的每一项$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$中的每一个元素取自 D 中不同的行和列,行标排成自然排列,相应的列标是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$.若 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列,则该排列对应的项取正号;若是奇排列,则取负号,每一项的符号用$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$表示.行列式 D 中共有 $n!$ 个乘积项.

定义 4 也适用于二、三阶行列式,按此定义的行列式与第一节中用对角线法则定义的二、三阶行列式是一致的.对于一阶行列式有$|a_{11}|=a_{11}$,注意这里的$|a_{11}|$不表示 a_{11}的绝对值.

对角线以下的元素都为 0 的行列式叫做上三角形行列式,对角线以上的元素都为 0 的行列式叫做下三角形行列式.上三角形行列式和下三角形行列式统称为三角形行列式.

例 4　证明上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由于当 $j<i$ 时 $a_{ij}=0$,故 D 中可能不为 0 的元素是 a_{ip_i},其下标应满足 $p_i\geq i$,即

$$p_1 \geq 1, p_2 \geq 2, \cdots, p_n \geq n.$$

在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.由于 $12\cdots n$ 是偶排列,此项的符号为正号,所以

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

同理,对于下三角形行列式有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特别地,对于对角形行列式 Λ(主对角线外的元素都为 0)有

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

下面讨论行列式的另一种定义,对于 n 阶行列式中的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

当把列标的排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 经 N 次对换变成自然排列 $12\cdots n$ 的同时,相应的行标排列 $12\cdots n$ 也经 N 次对换变成了排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 这样

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

根据定理 1 的推论 1,对换次数 N 与 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 有相同的奇偶性,而 $\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)$ 与 N 也有相同的奇偶性,从而 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 与 $\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)$ 有相同的奇偶性,即

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)},$$

所以

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又若 $p_i=j$,则 $q_j=i$(即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$),因此排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所惟一确定.

由此可得行列式的另一种等价定义.

定理2　n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 $\sum$ 表示对所有 n 元排列求和.

第四节　行列式的性质

用行列式的定义计算行列式,三阶行列式有6项,四阶行列式有24项,五阶行列式有120项……行列式的阶数越大,运算量就越大,其增长速度是惊人的.为此,下面将介绍行列式的基本性质,利用这些性质可简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换,得到新的行列式,记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

显然有

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = D.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等,即

$$D^{\mathrm{T}} = D.$$

证　设 $D = \det(a_{ij})$ **的转置行列式为**

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1,2, \cdots, n)$,**根据行列式的定义**

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}. \end{aligned}$$

由定理 2 得

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

从而

$$D^{\mathrm{T}} = D.$$

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位,因而凡是对行成立的性质,对列也一样成立,反之亦然.因此下面所讨论的行列式的性质,只对行的情形加以证明.

性质 2　对换行列式的任意两行(列),行列式变号.

证　设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换 i, j 两行得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为 D 中的任一项为

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots k \cdots l \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ik} \cdots a_{jl} \cdots a_{np_n},$$

与之对应的 D_1 中的一项为

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots l \cdots k \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jl} \cdots a_{ik} \cdots a_{np_n},$$

由定理 1 知

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots k \cdots l \cdots p_n)} = (-1)(-1)^{\tau(p_1 \cdots l \cdots k \cdots p_n)},$$

即 D 与 D_1 对应项的符号都相反,因此

$$D = -D_1 .$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} .$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则行列式为零 .

证 设行列式 D 中 i 行和 j 行完全相同,把 D 的 i 行与 j 行对换,由性质 2 有

$$D = -D,$$

即

$$D = 0 .$$

例如

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 .$$

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式 .

证　把行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的第 i 行乘以同一个数 k,得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式的定义

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= kD . \end{aligned}$$

推论 1　行列式中某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面 .

推论 2　如果行列式中某一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零 .

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零 .

证　如果行列式中有两行成比例,那么提出比例系数后则有两行完全相同,故行列式为零 .

性质 5　如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则该行列式可表示为两个行列式之和 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　由行列式的定义

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+a_{ip_i}')\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &\quad+\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}'\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

这正好是等式右边两个行列式之和.

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素都乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　由性质 5,

$$
\text{左边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .
$$

由性质 4 **知上面的第** 2 **个行列式为零,故左、右两边相等** .

利用行列式的这些性质可以简化行列式的计算 .

为了叙述方便,引进以下记号:

(1) **对换行列式的** i, j **两行(或列),记作** $r_i \backslash\ r_j$(**或** $c_i \backslash\ c_j$);

(2) **把行列式的第** i **行(或列)提出公因子** k,**记作** $r_i \div k$(**或** $c_i \div k$);

(3) **把行列式的第** j **行(或列)的** k **倍加到第** i **行(或列)上,记作** $r_i + kr_j$(**或** $c_i + kc_j$) .

例 5　**计算下面行列式的值**:

$$
D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 40 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} .
$$

解

$$
D \overset{r_1 \backslash\ r_2}{-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 40 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 10r_1}}{-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 32 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$\begin{array}{c} r_2 \backslash\ r_4 \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_3 + 15r_2 \\ r_4 + 7r_2 \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 81 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_3 \div 17 \\ r_4 \div 9 \end{array} \quad 17 \times 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$r_4 - r_3 \quad 153 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 153 \times 4 = 612 .$$

例 6　**计算**

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} .$$

解　**由于这个行列式各行的** 4 **个数之和都是** $a + 3b$, **把第** 2, 3, 4 **列都加到第** 1 **列**, **提出第** 1 **列的公因子** $a + 3b$, **然后第** 2, 3, 4 **行都减去第** 1 **行** .

$$D \quad \begin{array}{c} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \\ c_1 + c_4 \end{array} \quad \begin{vmatrix} a + 3b & b & b & b \\ a + 3b & a & b & b \\ a + 3b & b & a & b \\ a + 3b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 \div (a+3b)} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)(a-b)^3$$

例 7　**计算**

$$D = \begin{vmatrix} (a+4)^2 & (a+3)^2 & (a+2)^2 & (a+1)^2 \\ (b+4)^2 & (b+3)^2 & (b+2)^2 & (b+1)^2 \\ (c+4)^2 & (c+3)^2 & (c+2)^2 & (c+1)^2 \\ (d+4)^2 & (d+3)^2 & (d+2)^2 & (d+1)^2 \end{vmatrix}$$

解　**从第** 1 **列开始**,**前列减后列**,**然后再在前** 3 **列中**,**前列减后列**.

$$D \xlongequal[c_3 - c_4]{\substack{c_1 - c_2 \\ c_2 - c_3}} \begin{vmatrix} 2a+7 & 2a+5 & 2a+3 & (a+1)^2 \\ 2b+7 & 2b+5 & 2b+3 & (b+1)^2 \\ 2c+7 & 2c+5 & 2c+3 & (c+1)^2 \\ 2d+7 & 2d+5 & 2d+3 & (d+1)^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2 - c_3]{c_1 - c_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2a+3 & (a+1)^2 \\ 2 & 2 & 2b+3 & (b+1)^2 \\ 2 & 2 & 2c+3 & (c+1)^2 \\ 2 & 2 & 2d+3 & (d+1)^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

例 8　**计算** n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解　从第 n 行开始依次从下面一行减去上面一行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & x_2 - a_{12} & a_{23} - a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ 0 & 0 & x_3 - a_{23} & \cdots & a_{3n} - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23})\cdots(x_n - a_{n-1,n})$$

$$= x_1\prod_{i=2}^{n}(x_i - a_{i-1,i})$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积 .

第五节　行列式的展开定理

一、按一行(列)展开

一般来说,计算低阶行列式比计算高阶行列式简单,所以我们考虑把高阶行列式化为低阶行列式计算 .为此,首先引入余子式和代数余子式的概念 .

定义 5　在 n 阶行列式 D 中,划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列的元素,剩下的元素按原来的顺序构成一个 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij} .记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如:在四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

再如:元素 a_{31} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

定理 3　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

证　分三步证明此定理.

(1) 考虑行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D_1 中第 1 行除 a_{11} 外,其余的元素全为零,根据行列式的定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1 = 1} (-1)^{\tau(1 p_2 \cdots p_n)} a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &\quad + \sum_{p_1 \neq 1} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

由于当 $p_1 \neq 1$ 时, $a_{1p_1} = 0$, 故

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau(1 p_2 \cdots p_n)} a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &= a_{11} \sum (-1)^{\tau(p_2 \cdots p_n)} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &= a_{11} M_{11} = a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} A_{11} . \end{aligned}$$

(2) 设行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D_2 中第 i 行除 a_{ij} 外其余的元素都为零 .为了利用(1)的结果,可将行列进行调换,使得 a_{ij} 位于行列式的左上角 .首先把第 i 行依次与第 $i-1$, 第 $i-2$, …,第 1 行作相邻对换,这样就把第 i 行移到第 1 行上,对换的次数为 $i-1$ 次;再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列,第 $j-2$ 列, …,第 1 列作相邻对换,这样又作了 $j-1$ 次对换,把 a_{ij} 调换到行列式的左上角,总共作了 $i+j-2$ 次对换,根据行列式的性质有

$$D_2 = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i-1\,j} & a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,j} & a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

利用(1)**的结果得**

$$\begin{aligned} D_2 &= (-1)^{i+j-2} a_{ij} M_{ij} \\ &= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\ &= a_{ij} A_{ij} . \end{aligned}$$

(3) **由行列式的性质,可得**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再利用(2)的结果,有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则.

由定理3,可得下面重要推论.

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

证 设 $D = \det(a_{ij})$,把 D 的第 j 行元素换成第 i 行元素所得新的行列式记为

$$D_1 = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

将 D_1 按第 j 行展开,则

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn},$$

因 D_1 有两行完全相同,故 $D_1 = 0$,从而

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

同样,对列的情形有

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

综合定理3及其推论,有展开式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \tag{1.11}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (1.11)'$$

在计算上,若直接应用定理 3 展开行列式,一般情况并不能减少计算量,除非行列式中某一行(列)含有较多的元素为零.若将 n 阶行列式按第 i 行(列)展开,第 i 行(列)中多一个零元素,就少计算一个 $n-1$ 阶行列式,因此在具体计算时,总是先利用行列式的性质,将某一行(列)元素化成尽可能多的零元素,然后再应用定理 3 展开计算.

下面用行列式按行(列)展开法则再计算例 5.

例 9 计算

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 40 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 保留 a_{21},把第 2 行其余元素化为 0,然后按第 2 行展开.

$$D \overset{c_2 - 2c_1}{\underset{c_4 - 2c_1}{=}} \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 & 32 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 32 \\ -15 & 2 & -20 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 + 7r_3}{\underset{r_2 + 15r_3}{=}} - \begin{vmatrix} 0 & 9 & 81 \\ 0 & 17 & 85 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 9 & 81 \\ 17 & 85 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 \div 9}{\underset{r_2 \div 17}{=}} -9 \times 17 \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 612.$$

例 10　计算 2n 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$$

解　按第 1 行展开

$$D_{2n}=a\cdot\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$+\ b(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \\ c & 0 & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

把这两个 $2n-1$ 阶行列式再按最后一行展开,有

$$D_{2n}=adD_{2n-2}-bcD_{2n-2}$$
$$=(ad-bc)D_{2(n-1)},$$

以此作为递推公式,可得

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= (ad - bc) D_{2(n-1)} = (ab - bc)^2 D_{2(n-2)} \\
&= \cdots = (ad - bc)^{n-1} D_2 \\
&= (ad - bc)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&= (ad - bc)^n .
\end{aligned}
$$

上述行列式中未写出的元素全为 0 .

下面介绍一类重要的行列式 .

例 11　证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) .
$$

证　用数学归纳法 .

当 $n = 2$ 时

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (a_i - a_j) ,
$$

结论成立 .

假设结论对 $n - 1$ 阶范德蒙行列式成立,下面证明结论对 n 阶也成立 .

由 D_n 的最后一行开始,后行减去前行的 a_1 倍,得

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} ,
$$

然后按第 1 列展开,并提出各列的公因子,得

$$D_n=(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_2-a_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&a_3&\cdots&a_n\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式,根据归纳假设,得

$$D_n=(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_2-a_1)\prod_{2\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j).$$

例 12　证明

$$D_n=\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&x+a_1\end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

证　方法 1　将 D_n 按第 1 列展开,得

$$D_n=x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_{n-1}&a_{n-2}&a_{n-3}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$$

$$+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&x&-1\end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+a_n.$$

由此得到递推公式:$D_n=xD_{n-1}+a_n$,利用此递推公式可得

$$
\begin{aligned}
D_n &= xD_{n-1} + a_n \\
&= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\
&= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \\
&= \cdots \\
&= x^{n-1} D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^{n-1} \left| a_1 + x \right| + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n .
\end{aligned}
$$

方法 2　将 D_n 按最后一行展开,得

$$
\begin{aligned}
D_n = {} & a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\
& + a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + \cdots \\
& + a_2(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\
& + (x + a_1)(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \\
= {} & a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + a_{n-1}(-1)^{n+2}x \cdot (-1)^{n-2} + \cdots \\
& + a_2(-1)^{2n-1}x^{n-2}(-1) + (x + a_1)x^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n .$$

将行列式按行(列)展开计算时,一般选取零元素较多的行(或列),但有些情况要特别对待,如例 12 **证法二按最后一行展开就不用递推** .

例 13 **计算** n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解　将 D_n **按第** 1 **列展开,得**

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

再将右端第二个行列式按第 1 **行展开,得**

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2},$$

即

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} .$$

由此递推得

$$D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = \cdots$$

$$= D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1 .$$

因此

$$D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots$$

$$= D_1 + n - 1 = n + 1 .$$

行列式的计算方式灵活多样,技巧性也很强,前面的例题只是给出众多方法中的几种,要想能够熟练计算行列式,必须熟记行列式的性质及按行(列)展开法则,多做习题加以巩固.

* 二、拉普拉斯定理

前面介绍了怎样把行列式按一行(列)展开,下面把它推广到按 k 行(k 列)展开,这就是著名的拉普拉斯(Laplace)定理.

定义 6 在 n 阶行列式 D 中,任取 k 行,行数为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$;再任取 k 列,列数为 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$,这些行与列相交处的元素按原来次序构成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

称为该行列式的一个 k 阶子式,记为 N.在 D 中去掉这些行和列后剩下的元素按原来次序构成的一个 $n-k$ 阶子式,称为 N 的余子式,记为 M 称

$$A = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M$$

为 N 的代数余子式.

定理 4(拉普拉斯定理) 在 n 阶行列式 D 中,任取 k 行(列),设由这 k 行(列)元素所组成的所有 k 阶子式为 $N_1, N_2, \cdots, N_m$ $(m = \mathrm{C}_n^k)$,其所对应的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$,则有

$$D = N_1 A_1 + N_2 A_2 + \cdots + N_m A_m .$$

此定理的证明比较繁琐,略去.

例 14 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

证明 $D = D_1 D_2$.

证 选取 D 的前 k 行,则由前 k 行组成的所有 k 阶子式中,只有 D_1 可能不为零,根据定理 4 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+\cdots+k)+(1+\cdots+k)} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= D_1 \cdot D_2 .$$

例 15 证明两个 n 阶行列式的乘积公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.12}$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$(i, j = 1,2,\cdots, n),$$

即乘积行列式的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于左端第一个行列式的第 i 行元素与第二个行列式的第 j 列对应元素乘积之和.

证　构造一个 $2n$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.13)$$

将行列式 D 的第 1 列的 b_{1i} 倍,第 2 列的 b_{2i} 倍,……,第 n 列的 b_{ni} 倍都加到 $n+i$ 列上($i=1,2,\cdots,n$),这样就把行列式 D 化为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} (i, j = 1,2,\cdots, n)$.

取 D 的第 $n+1, n+2,\cdots,2n$ 列,应用定理 4 展开得

$$D = \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+\cdots+2n} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式(1.13),根据例 14 的结果得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

从而结论成立.

第六节 克拉默法则

设含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.14}$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

与二、三元线性方程组类似,若 n 元线性方程组(1.14)的系数行列式 $D\neq 0$,它的解也可以用 n 阶行列式表示.

关于 n 元线性方程组(1.14)的解有下面的克拉默(Cramer)法则.

定理 5(克拉默法则) 若方程组(1.14)的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},\tag{1.15}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.\tag{1.16}$$

证 若方程组(1.14)有解,用 D 的第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 分别乘(1.14)式的 n 个方程,得

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j}x_1+a_{12}A_{1j}x_2+\cdots+a_{1n}A_{1j}x_n=b_1A_{1j}, \\ a_{21}A_{2j}x_1+a_{22}A_{2j}x_2+\cdots+a_{2n}A_{2j}x_n=b_2A_{2j}, \\ \cdots \\ a_{n1}A_{nj}x_1+a_{n2}A_{nj}x_2+\cdots+a_{nn}A_{nj}x_n=b_nA_{nj}. \end{cases}\tag{1.17}$$

然后把上面 n 个方程的左、右两边分别相加,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$$

由定理 3 及其推论知,上式左端 x_j 的系数等于 D,其余 $x_i\ (i\neq j)$ 的系数均为 0,而右端等于 D_j,从而

$$Dx_j = D_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.14)有惟一的解(1.15).

下面再证方程组(1.14)的确有解.

因为 $D\neq 0$,所以 $\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D}$ 为 n 个数,将其代入方程组(1.14)第 i 个方程($i = 1, 2, \cdots, n$)的左端得

$$\begin{aligned} & a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} \\ = & \frac{1}{D}(a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \cdots + a_{in}D_n), \end{aligned}$$

将 D_1 按第 1 列展开,D_2 按第 2 列展开,……,D_n 按第 n 列展开,则上面等式的左端等于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) \\ & + a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}) + \cdots \\ & + a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})] \\ = & \frac{1}{D}[(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{in}A_{1n})\cdot b_1 + \cdots \\ & + (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})\cdot b_i + \cdots \\ & + (a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \cdots + a_{in}A_{nn})\cdot b_n] \\ = & \frac{1}{D}[0\cdot b_1 + \cdots + D\cdot b_i + \cdots + 0\cdot b_n] = b_i, \end{aligned}$$

从而有

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

满足方程组中的每一个方程.

综上可得,当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.14)有惟一的解(1.15).

例 16　**解线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -6, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 10, \\ 12x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 12, \\ 9x_1 - 2x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

解　**由于**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 & -3 \\ 5 & -5 & -3 & 2 \\ 12 & 6 & -1 & -1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0,$$

从而方程组有惟一解.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 9 & 4 & -3 \\ 10 & -5 & -3 & 2 \\ 12 & 6 & -1 & -1 \\ 12 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -36,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 5 & 10 & -3 & 2 \\ 12 & 12 & -1 & -1 \\ 9 & 12 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -6 & -3 \\ 5 & -5 & 10 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & -1 \\ 9 & 0 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & -3 & 10 \\ 12 & 6 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & -2 & 12 \end{vmatrix} = -36.$$

所以方程组的解为

$$x_1 = 1,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = -1,\quad x_4 = 1.$$

若方程组(1.14)右端的常数列全为零,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

则称(1.18)为齐次线性方程组.当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,称方程组(1.14)为非齐次线性方程组.

显然,齐次线性方程组总有解,$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一组解,我们称其为零解;若有一组不全为零的数是方程组(1.18)的解,则称其为非零解.

若方程组(1.18)式的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组有惟一解.因 D_i 中有一列全为零,则 $D_i = 0$,这样

$$x_i = \frac{D_i}{D} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

从而齐次线性方程组(1.18)仅有零解.于是得到如下的结论:

定理 6 若齐次线性方程组(1.18)有非零解,则它的系数行列式 $D = 0$.

在下一章,将证明定理 6 的逆命题也成立,从而有结论:齐次线性方程组(1.18)有非零解当且仅当 $D = 0$.

习 题 一

A 组

1.利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. **用行列式解下列方程组**:

(1) $\begin{cases} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = a, \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = b; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 8x+3y=2, \\ 6x+2y=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=10, \\ 3x+2y+z=14, \\ 2x+3y-z=1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ x_1+4x_2-3x_3=6, \\ 3x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$

3. **求下列排列的逆序数,并确定排列的奇偶性**:

(1) 351426;　　(2) 7135246;

(3) 215479683;　　(4) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 4\ 2$.

4. **确定下列五阶行列式的项所带的符号**:

(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$;　　(2) $a_{24}a_{32}a_{15}a_{43}a_{51}$.

5. **用行列式定义确定下列行列式中项** x^3, x^4 **的系数**:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & x-2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & x & 0 \\ 5 & 3 & 1 & x-1 \end{vmatrix}.$$

6. **写出四阶行列式中含有因子** $a_{11}a_{23}$ **的项**.

7. **计算下列各行列式**:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

8．**证明**：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$.

9．**计算下列行列式**：

(1) $D_n = \begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & & \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & & & \\ & -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a_n \\ & & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix}$;

(5) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$;

(6) $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|$;

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$;

(8) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

提示:**利用范德蒙行列式的结果**.

10.**用克拉默法则解下列线性方程组**:

(1) $\begin{cases} x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0, \\ 2x_2+x_3+x_4=-8, \\ x_2+x_3+3x_4=-2, \\ x_1+x_3-x_4=1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 13, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

11 . **问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组**

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解 ?

12 . **问 λ 取何值时, 齐次线性方程组**

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解 ?

B 组

1 . **设平面上立方曲线** $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ **通过点** $(1,0)$, $(2,-2)$, $(3,2)$, $(4,18)$, **求系数** a_1, a_2, a_3, a_4 .

2 . **证明**: **奇数阶反对称行列式等于零**(**行列式** $D = \det(a_{ij})$ **中元素** $a_{ij} = -a_{ji}$ **时**, **称为反对称行列式**) .

3 . **用数学归纳法证明**:

(1) $D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos n\theta;$

(2) $$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta).$$

4．**一个函数** $\varphi(x)$ **在** $[0,1]$ **区间中** $n+1$ **个不同点** $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ **上，给定不全为零的函数值** $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \cdots, \varphi(t_{n+1})$，**是否可以找到惟一的一个** n **次多项式**

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n,$$

使

$$f(t_i) = \varphi(t_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

第二章　矩　　阵

上一章介绍了行列式,并用行列式解决了线性方程组在某种特殊情况下的求解问题.为了讨论一般线性方程组的求解问题,需要引入一个重要的工具——矩阵.矩阵是线性代数的主要研究对象,是学习以后各章的基础,在自然科学和工程技术的各个领域都有广泛的应用.本章讨论矩阵的加、减法,数乘,乘法,矩阵的求逆以及矩阵的初等变换,矩阵的秩和矩阵的分块运算等问题.

第一节　矩阵的概念

先看几个实际的例子.

例 1　在物资调运中,某产品从 m 个产地 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 运到 n 个销地 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,其运输的数量可用下面的数表表示,

销地 / 产地	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

表中数字 a_{ij}表示由产地 x_i 运到销地 y_j 的数量,这个按一定次序排列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

表示了物资的调运方案.

例 2 一个简单的通讯网络如图 2-1 所示，z_1，z_2，z_3，z_4 表示 4 个通讯点，连接线表示点 z_i 与点 z_j 相互有通讯联系，用 $a_{ij}=1$ 表示；若无联系，用 $a_{ij}=0$ 表示.又假设点自身不通讯，即 $a_{ii}=0$.该网络联系信息可用如下数表表示

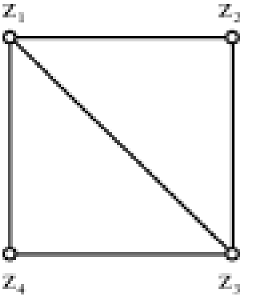

图 2.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 3 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

把它的系数按原来的次序排成数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

常数项也排成一个数表

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

有了这两个数表，方程组(2.1)就完全确定了.

类似这种矩形排列的数表，在自然科学及工程技术等领域经

常要用到.在数学上,这种数表叫做矩阵.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个 m 行 n 列的矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵.这 $m\times n$ 个数叫做矩阵的元素,a_{ij}称为该矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

矩阵常常用大写字母 $A,B,C,\cdots$来表示.如定义 1 中的 $m\times n$ 矩阵可记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$或 $A_{m\times n}$,有时简记作 $A=(a_{ij})$或 A.

当 $m=n$ 时,矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$称为 n 阶方阵.

只有一行的矩阵

$$A=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为行矩阵,即 $1\times n$ 矩阵.行矩阵又称为行向量.为避免元素间的混淆,行矩阵也记作

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵,即 $m\times 1$ 矩阵.列矩阵又称为列向量.

行矩阵和列矩阵也可用小写字母 $a,b,\cdots,x,y,\cdots$表示.

如果两个矩阵的行数、列数分别相等,则称它们是同型矩阵.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$,则 A 与 B 为同型矩阵.两个同型矩阵 A 与 B 的对应元素相等,则称 A 与 B 相等,即

$$A = B \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n.$$

所有元素都为零的矩阵称为零矩阵,记作 0 即

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

注意　不同型的零矩阵是不同的 .

如果 A 是 n 阶方阵,则从左上角到右下角的对角线称为主对角线 .

在 n 阶方阵中,如果主对角线以下的元素全为零,即

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称 A_1 为上三角形矩阵 .如果主对角线以上的元素全为零,即

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称 A_2 为下三角形矩阵 .

如果一个方阵主对角线以外的元素都为零,即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称 A 为对角矩阵 .

矩阵 A 中,未写出的元素表示零元素,以下类同 .

在 n 阶对角矩阵中，若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，则称此矩阵为 n 阶单位矩阵，用 E 表示，即

$$E=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

元素是实数的矩阵称为实矩阵；元素是复数的矩阵称为复矩阵．如无特别声明，本书中所讨论的矩阵均为实矩阵．

需要注意的是，矩阵与行列式在形式上有些相似，但在意义上则完全不同．一个行列式是一个数，而矩阵则是 m 行 n 列的一个数表．

在许多实际问题中，经常遇到一些变量要用另一些变量线性表示．设一组变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 用另一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示为

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{2.2}$$

把这种从一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到另一组变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的变换叫做线性变换．

给定了线性变换(2.2)，它的系数所构成的矩阵也就随之确定；反之，如果给出一个 $m\times n$ 矩阵，则可构造出线性变换(2.2)，即线性变换也就确定．在这个意义上，线性变换和矩阵之间存在着一一对应的关系，因而可利用矩阵来研究线性变换．

例 4　线性变换

$$\begin{cases} y_1=\lambda_1 x_1, \\ y_2=\lambda_2 x_2, \\ \qquad\cdots \\ y_n=\lambda_n x_n, \end{cases} \tag{2.3}$$

对应 n 阶对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ 时,称线性变换(2.3)为恒等变换,恒等变换对应单位矩阵.

矩阵作为数表本身是无运算含义的,为了使矩阵能有广泛的应用,根据实际需要赋予它某些运算.

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

在例 1 中,若上半年度和下半年度的运输数量用以下矩阵表示.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

则全年的运输数量为

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

这可视为矩阵 A 与 B 相加.

定义 2　设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 为两个 $m\times n$ 矩阵,矩阵 A 与

B 的和记作 $A+B$,规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

容易证明,矩阵加法适合下面运算律:

(1) 交换律:$A+B=B+A$;

(2) 结合律:$(A+B)+C=A+(B+C)$.

二、数乘运算

定义 3 数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$相乘记作 kA 或 Ak,规定

$$kA=Ak=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

于是有 $-A=(-1)A=(-a_{ij})_{m\times n}$,称 $-A$ 为 A 的负矩阵,即

$$A+(-A)=0.$$

矩阵 A 与 B 的减法定义为

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法与数乘运算称为矩阵的线性运算,满足下面的运算律.

设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵,k,l 为数.

(1) 结合律:$(kl)A=k(lA)$;

(2) 分配律:$k(A+B)=kA+kB$;

$$(k+l)A=kA+lA.$$

例 5 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 5\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix},$$

求 $3A-2B$.

解

$$\begin{aligned}3A-2B&=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3 & 2 & 5\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 9 & 0 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 4 & 10\\ 0 & 12 & 2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}9 & -4 & -4\\ 9 & -12 & -5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

三、矩阵的乘法

定义 4　设 A **是** $m\times s$ **矩阵,** B **是** $s\times n$ **矩阵,即**

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

规定 A **与** B **的乘积是一个** $m\times n$ **矩阵** C**,即**

$$C=AB=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

从定义可见,两个矩阵 A, B **相乘时,只有左边矩阵** A **的列数**

等于右边矩阵 B 的行数时,它们的乘积才有意义,并且乘积矩阵 C 的行数与 A 的行数相同, C 的列数与 B 的列数相同, C 的第 i 行第 j 列的元素等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列对应元素乘积之和,即

$$
i\text{行}\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}
\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{pmatrix}\\ j\text{列}\end{array}
= \begin{array}{c}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}\\ j\text{列}\end{array} i\text{行}
$$

下面用矩阵来表示线性变换 .

设有两个线性变换

$$
\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \end{cases} \tag{2.4}
$$

$$
\begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ x_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2; \end{cases} \tag{2.5}
$$

线性变换(2.4)和(2.5)的系数矩阵分别为

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},
$$

$$
B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.
$$

若要求出从 z_1, z_2 到 y_1, y_2 的线性变换,可将(2.5)代入(2.4),得

$$
\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2, \end{cases} \tag{2.6}
$$

而线性变换(2.6)的系数矩阵正好是矩阵 A 与 B 的乘积 AB.

例 6 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

求 AB.

解

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times1+(-1)\times0 & 3\times3+(-1)\times(-2) & 3\times1+(-1)\times1 \\ 0\times1+3\times0 & 0\times3+3\times(-2) & 0\times1+3\times1 \\ 1\times1+4\times0 & 1\times3+4\times(-2) & 1\times1+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 11 & 2 \\ 0 & -6 & 3 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

这里 A 为 3×2 矩阵, B 为 2×3 矩阵, 故 AB 为 3×3 矩阵, BA 为 2 阶方阵.

若取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 与 } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

由于 A 是 2×4 矩阵, B 是 4×3 矩阵, 乘积 AB 有意义.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{bmatrix},$$

而 BA 却没有意义.

在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序.若 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵,则 AB 与 BA 都有意义,但 AB 是 m 阶方阵, BA 是 n 阶方阵,当 $m\neq n$ 时, $AB\neq BA$.即使 $m=n$,即 A, B 是同阶方阵, AB 与 BA 仍然可以不相等.

例7 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

由上面的讨论可知:

(1) 矩阵的乘法不满足交换律,即一般 $AB\neq BA$;

(2) 若 $AB=0$,则未必有 $A=0$ 或 $B=0$(但在数的运算中,若 $ab=0$,必有 $a=0$ 或 $b=0$).

矩阵的乘法满足下列运算律(假设运算都是有意义的):

(1) 结合律: $(AB)C=A(BC)$;

(2) 左分配律: $A(B+C)=AB+AC$,

右分配律: $(B+C)A=BA+CA$;

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$;

(4) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则

$$E_mA=A,\quad AE_n=A.$$

其中 E_m, E_n 分别为 m 阶和 n 阶单位矩阵.

以上运算律可用乘法的定义直接验证.

对于方阵可定义幂运算.设 A 为 n 阶方阵,定义 A 的正整数

幂为

$$A^1 = A,\ A^2 = A^1 A,\ \cdots,\ A^{k+1} = A^k \cdot A,$$

其中 k 为正整数 .

由于矩阵乘法满足结合律, A^k 就是 k 个 A 连乘, 且幂运算满足以下运算律:

$$A^k A^l = A^{k+l},\ (A^k)^l = A^{kl},$$

其中 k, l 为正整数 .

由于矩阵乘法不满足交换律, 所以对两个 n 阶方阵 A 与 B, 一般来说

$$(AB)^k \neq A^k B^k .$$

设 x 的 m 次多项式

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m ,$$

A 为 n 阶方阵, 定义

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m E$$

为 A 的 m 次矩阵多项式 .

例 8 若 $f(x) = x^2 - 2x + 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $f(A)$.

解

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 2A + 2E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -7 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

下面进一步讨论例 2,**在例** 2 **中我们已经知道这个简单的通讯网络可用如下矩阵表示**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

下面讨论 A^2 **的意义**.**由矩阵乘法定义知**, A^2 **的第** i **行第** j **列元素为**

$$[A^2]_{ij}=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+a_{i3}a_{3j}+a_{i4}a_{4j}.$$

$a_{it}a_{tj}=1$ **的充要条件是** $a_{it}=a_{tj}=1$,**即第** i **点可传送信息至** t **点**,**且** t **点能传送信息至第** j **点**;**否则** $a_{it}a_{tj}=0$.**因此**$[A^2]_{ij}$**表示第** i **点经一个中间点** t **传送至第** j **点的通路数目**.**例如**$[A^2]_{24}=2$ **表示第** 2 **点经一中间点到第** 4 **点可通讯的通路数为** 2.**它们是** 2→1→4 **和** 2→3→4.**记**

$$M_2 = A + A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

矩阵 $M_2 = A + A^2$ 的第 i 行,第 j 列元素$[M_2]_{ij}$表示第 i 点直接或经一个点中转传送信息到第 j 点的通路数目.

四、转置矩阵、对称矩阵和反对称矩阵

定义 5 **把矩阵 A 的所有行换成相应的列所得到的矩阵,称为矩阵 A 的转置矩阵,记为 A^{T},即若**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

则

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

例如矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}.$$

矩阵的转置是一种运算,满足下面的运算律(假设运算都是有意义的):

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$, k 为数;

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证　以式(4)为例.设 A, B 分别为 $m\times s$ 和 $s\times n$ 矩阵,即

$$A=(a_{ij})_{m\times s},\ B=(b_{ij})_{s\times n}.$$

显然$(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 都是 $n\times m$ 矩阵.

为了叙述方便,记矩阵 M 的第 i 行第 j 列的元素为$[M]_{ij}$.要证式(4)成立,只要证明左右两端的对应元素相等.

由于

$$[(AB)^{\mathrm{T}}]_{ij}=[AB]_{ji}=\sum_{t=1}^{s}a_{jt}b_{ti}=\sum_{t=1}^{s}b_{ti}a_{jt},$$

而 $\sum\limits_{t=1}^{s}b_{ti}a_{jt}$ 正是 B^{T} 的第 i 行$(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{si})$与 A^{T} 的第 j 列$(a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{js})$对应元素的乘积之和,即

$$\sum_{t=1}^{s}b_{ti}a_{jt}=[B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}]_{ij},$$

从而有

$$[(AB)^{\mathrm{T}}]_{ij}=[B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}]_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m).$$

即式(4)成立.

式(4)可推广到 l 个矩阵乘积的情况:

$$(A_1A_2\cdots A_l)^{\mathrm{T}}=A_l^{\mathrm{T}}A_{l-1}^{\mathrm{T}}\cdots A_1^{\mathrm{T}}.$$

定义 6　设 A 为 n 阶方阵,若 $A^{\mathrm{T}}=A$,则称 A 为对称矩阵.若

$A^{\mathrm{T}} = -A$,则称 A 为反对称矩阵.

由定义可知:

n 阶矩阵 A 为对称矩阵的充分必要条件为

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

n 阶矩阵 A 为反对称矩阵的充分必要条件为

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

由于 $i = j$ 时, $a_{ii} = -a_{ii}$,故 $a_{ii} = 0$,即反对称矩阵的主对角线上的元素全为零.

例 2 中的矩阵为对称矩阵,如下矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

分别为三阶对称矩阵和反对称矩阵.

例 9　设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X = 1$, E 为 n 阶单位矩阵, $H = E - 2XX^{\mathrm{T}}$,证明 H 是对称矩阵,且 $HH^{\mathrm{T}} = E$.

证　注意到 $X^{\mathrm{T}}X = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是一阶方阵,即是一个数,而 XX^{T} 是 n 阶方阵.

由于

$$H^{\mathrm{T}} = (E - 2XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - 2(XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = E - 2XX^{\mathrm{T}} = H,$$

所以 H 是对称矩阵.

$$\begin{aligned} HH^{\mathrm{T}} &= H^2 = (E - 2XX^{\mathrm{T}})^2 \\ &= E - 4XX^{\mathrm{T}} + 4(XX^{\mathrm{T}})(XX^{\mathrm{T}}) \\ &= E - 4XX^{\mathrm{T}} + 4X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}} \\ &= E - 4XX^{\mathrm{T}} + 4XX^{\mathrm{T}} = E. \end{aligned}$$

五、方阵的行列式

n 阶方阵是 n^2 个数组成的一个数表,而 n 阶行列式是 n^2 个数按一定的运算法则所确定的一个数,这是两个不同的概念.但由

一个 n 阶方阵的 n^2 个数,按原有顺序排列,可以构成一个行列式 .

例如二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

中 4 个数按原顺序排列,可构成一个二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -1 .$$

定义 7 由 n 阶方阵 A 的元素按原来的位置构成的行列式叫做方阵 A 的行列式,记作 $|A|$ 或 $\det(A)$.

方阵的行列式有如下性质:

设 A, B 为 n 阶方阵, k 为数 .

(1) $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$;

(2) $|kA| = k^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$.

(1),(2)的证明可由行列式的性质直接得到,(3)的证明参见第一章的例 15 .

对于 n 阶方阵 A, B,一般来说 $AB \neq BA$,但由(3)可知总有

$$|AB| = |BA| .$$

例 10 设 A 是 n 阶方阵,满足 $AA^{\mathrm{T}} = E$,且 $|A| = -1$,求 $|A+E|$.

解 由于

$$\begin{aligned} |A+E| &= |A+AA^{\mathrm{T}}| = |A(E+A^{\mathrm{T}})| \\ &= |A||E+A^{\mathrm{T}}| = -|(E+A)^{\mathrm{T}}| \\ &= -|A+E|, \end{aligned}$$

所以
$$2|A+E| = 0,$$
即
$$|A+E| = 0 .$$

第三节　逆 矩 阵

在数的运算中,若 $ab=ba=1$,那么 b 就是 a 的逆元,即 $b=a^{-1}$.由此来定义矩阵的逆.

定义 8　设 A 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 B,使得

$$AB=BA=E,$$

则称 B 为 A 的逆矩阵,并称 A 为可逆矩阵.

若矩阵 A 可逆,则 A 的逆是惟一的.这是因为若 B, C 都是 A 的逆矩阵,由定义可知

$$AB=BA=E,$$

$$AC=CA=E,$$

从而

$$B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C.$$

由于矩阵 A 的逆是惟一的,记 A 的逆为 A^{-1},即

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

下面讨论矩阵 A 可逆的充分必要条件及逆矩阵的求法.

定理 1　若矩阵 A 可逆,则 $|A|\neq 0$.

证　若 A 可逆,则存在 A^{-1},使

$$AA^{-1}=E.$$

从而有

$$|A||A^{-1}|=|E|=1,$$

所以

$$|A|\neq 0.$$

定理 2　若 $|A|\neq 0$,则矩阵 A 可逆,且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

其中

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.它是 A 的每个元素换成其对应的代数余子式,然后再转置得到的矩阵.

证　由于

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

所以

$$AA^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|E.$$

又由于$|A|\neq 0$,**故**

$$A\left(\frac{A^{*}}{|A|}\right)=E.$$

同理可得

$$\left(\frac{A^{*}}{|A|}\right)A=E,$$

故定理 2 **成立.**

设 A 为 n 阶方阵,若 $|A|=0$,**则称 A 为奇异矩阵;否则称为非奇异矩阵.**

由定理 1 和定理 2 知: A 是可逆矩阵的充分必要条件是

$|A| \neq 0$,即可逆矩阵就是非奇异矩阵,而不可逆矩阵就是奇异矩阵.

由定理 2 可得下面的推论.

推论 设 A 为 n 阶方阵,若有 n 阶方阵 B,使 $AB = E$(或 $BA = E$),则 $B = A^{-1}$.

证 由 $AB = E$,得

$$|A||B| = |E| = 1,$$

所以 $|A| \neq 0$,由定理 2 知 A 可逆,故 A^{-1}存在.于是

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

由推论可知,对于两个 n 阶方阵 A, B,若 $AB = E$(或 $BA = E$),则 A, B 互为逆矩阵.不必再验证 $BA = E$(或 $AB = E$).

例 11 求下列矩阵 A 的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

解 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以 A 可逆.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 5 & -1 & 1\\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 12　**已知** n **阶矩阵** A **满足** $A^2-2A-4E=0$, **试证** $A+E$ **是可逆矩阵,并求** $(A+E)^{-1}$.

解　**由** $A^2-2A-4E=0$, **得**

$$A^2+A-3A-3E=E,$$

$$(A+E)A-3(A+E)=E,$$

$$(A+E)(A-3E)=E,$$

由定理 2 **的推论知** $A+E$ **可逆**, **且**

$$(A+E)^{-1}=A-3E.$$

方阵的逆矩阵满足下面的运算律:

(1) **若** A **可逆**, **则** A^{-1} **也可逆**, **且** $(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) **若** A **可逆**, **数** $k\neq 0$, **则** kA **可逆**, **且** $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$;

(3) **若** A **可逆**, **则** $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$;

(4) **若** A **可逆**, **则** A^{T} **也可逆**, **且** $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(5) **设** A, B **为** n **阶可逆方阵**, **则** AB **可逆**, **且**

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证　**仅证**(4) **和**(5).

(4) **由于**

$$A^{T}(A^{-1})^{T}=(A^{-1}A)^{T}=E^{T}=E,$$

所以

$$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}.$$

(5) **因为**

$$B^{-1}A^{-1}(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E,$$

所以

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

上式可推广到 l **个可逆矩阵乘积的情况**:

$$(A_1A_2\cdots A_l)^{-1}=A_l^{-1}A_{l-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

当 $|A|\neq 0$ **时**,**可定义**

$$A^{0}=E,\ A^{-k}=(A^{-1})^{k},$$

其中 k **为正整数**.**这样**,**可逆矩阵的幂运算可扩充到整数**,**即当** $|A|\neq 0$, λ, μ **为整数时**,**有**

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu};$$

$$(A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

对于 n **元线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

若设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

则 n **元线性方程组**(2.7)**可表示为**

$$Ax = b.$$

若 A 可逆,上式两边同乘以 A^{-1},得方程组的解为

$$x = A^{-1}b.$$

这与用克拉默法则求得的解是相同的,因为

$$x = A^{-1}b = \frac{A^*}{|A|}b$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{k1}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} A_{k2}b_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \cdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix}.$$

其中 $D = |A|$, $D_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$.

例 13　用逆矩阵求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解　设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

则
$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

由于
$$|A|=3\neq 0,$$
所以 A **可逆**,**且**
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{11}{3}&-\frac{7}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{7}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$
从而有
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{3}&-\frac{7}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{7}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix},$$
即
$$x_1=5,\ x_2=0,\ x_3=3.$$

同样,**若** A **是一个** n **阶可逆矩阵**,B **是任一** $n\times k$ **矩阵**,**对于矩阵方程**
$$AX=B$$
两边同乘以 A^{-1},**得解**
$$X=A^{-1}B.$$

例 14　**设**
$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix},$$

若矩阵 X 满足关系式 $AX=2X+A$,求 X.

解　由 $AX=2X+A$,得

$$(A-2E)X=A.$$

由于

$$|A-2E|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

故 $A-2E$ 可逆,且

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

从而有

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

第四节　矩阵的秩与初等变换

一、矩阵的秩

矩阵的秩是线性代数中的一个重要概念,它描述了矩阵的一个数值特征.

对于一般的矩阵,若行数与列数不相等,则不能构成行列式,下面介绍矩阵的子式.

设 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$,在 A 中任取 k 行$(i_1<i_2<\cdots<i_k)$,k

列$(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$,位于这些行和列相交处的 k^2 个元素按原次序构成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

叫做 A 的一个 k 阶子式 .

例如:对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

取第 1 行、第 3 行和第 2 列、第 3 列,位于这些行和列相交处的 4 个元素组成一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 33 .$$

定义 9　设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式,且所有的 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于零,则称矩阵 A 的秩为 r,记为 $\mathrm{r}(A) = r$,或秩$(A) = r$.零矩阵的秩规定为 0 .

由定义可以看出:

(1) 若 A 为 $m \times n$ 矩阵,则 A 的秩不会大于矩阵的行数,也不会大于矩阵的列数,即 $\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}$;

(2) $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(A)$, $\mathrm{r}(kA) = \mathrm{r}(A)$, k 为非零数;

(3) 若 $\mathrm{r}(A) = r$,则 A 中所有大于 r 阶的子式全为零,即 r 为 A 中不等于零的子式的最大阶数;

(4) 若 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为零,则 $\mathrm{r}(A) < r+1$;

(5) 若 A 中存在一个 r 阶子式不为零,则 $\mathrm{r}(A) \geq r$.

例 15　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

的秩 .

解　容易算出二阶子式

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 12\end{vmatrix}\neq 0 .$$

而矩阵 A 的所有三阶子式

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 8\\ 2 & 12 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & 12 & 12\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}-3 & 8 & 2\\ 12 & -2 & 12\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}2 & 8 & 2\\ 2 & -2 & 12\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=0,$$

所以 $\mathrm{r}(A)=2$.

一般来说, $m\times n$ 矩阵的所有 k 阶子式有 $C_m^k C_n^k$ 个 .

由上面的例子可以看出,按定义求矩阵的秩,需要计算很多行列式,非常麻烦,下面讨论通过初等变换求矩阵的秩 .

二、矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是线性代数中的基本运算,它在求矩阵的秩、求矩阵的逆和解线性方程组等方面起着重要的作用 .

定义 10　矩阵的初等行变换是指下列三种变换:

(1) 对换变换:对调两行(对调 i, j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 数乘变换:以数 $k(k\neq 0)$乘某一行中的所有元素(第 i 行乘 k,记作 kr_i);

(3) 倍加变换:把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的

元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$) .

若把定义 10 中的行换成列,即得到矩阵的三种初等列变换(所用记号是把 r 换成 c) .

矩阵的初等行变换和初等列变换统称初等变换 .

三种初等变换都是可逆的,且其逆是同一类型的初等变换 .以初等行变换为例,变换 $r_i \backslash r_j$ 的逆变换就是自身;变换 kr_i 的逆变换为$\frac{1}{k}r_i$;变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$(或记为 $r_i - kr_j$) .

定义 11　如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B,则称矩阵 A 与 B 等价,记作 $A \backslash B$.

矩阵的等价具有下列性质:

(1) 自反性: $A \backslash A$;

(2) 对称性:若 $A \backslash B$,则 $B \backslash A$;

(3) 传递性:若 $A \backslash B$, $B \backslash C$,则 $A \backslash C$.

定理 3　初等变换不改变矩阵的秩 .

证　仅证初等行变换的情形 .

(1) 将矩阵 A 的两行互换后得到矩阵 B,由行列式的性质知, B 的子式与 A 的相应子式或者相等,或者只差一个符号,从而有 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$.

(2) 将矩阵 A 的某一行乘以一个非零常数 k 得到矩阵 B,由行列式的性质知,矩阵 B 的子式或者是矩阵 A 相应子式的 k 倍,或者相等,因此 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$.

(3) 将矩阵 A 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上得到矩阵 B .设 $\mathrm{r}(A) = r$,为了证明 $\mathrm{r}(B) = r$,先证 $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A)$.

若矩阵 B 没有阶数大于 r 的子式,则它也没有阶数大于 r 的非零子式,因此 $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A)$.

若矩阵 B 有 $r+1$ 阶子式,对于 B 的任一 $r+1$ 阶子式 D_{r+1},分三种情况讨论:

① D_{r+1}不含 i 行元素，则 D_{r+1}也是矩阵 A 的 $r+1$ 阶子式，故 $D_{r+1}=0$；

② D_{r+1}含 i,j 两行元素，则 D_{r+1}是 A 中相应的 $r+1$ 阶子式将含 j 行元素的 k 倍加到 i 行元素上而得到的，由行列式的性质知 $D_{r+1}=0$；

③ D_{r+1}含 i 行的元素而不含 j 行的元素，即

$$D_{r+1}=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ij_1}+ka_{jj_1} \quad a_{ij_2}+ka_{jj_2} \quad \cdots \quad a_{ij_{r+1}}+ka_{jj_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ij_1} \ \cdots \ a_{ij_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{jj_{r+1}} \ \cdots \ a_{jj_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}=D_{r+1}^{(1)}+D_{r+1}^{(2)}$$

其中，$D_{r+1}^{(1)}$是矩阵 A 的一个 $r+1$ 阶子式，故 $D_{r+1}^{(1)}=0$；$D_{r+1}^{(2)}$是矩阵 A 的一个不含第 i 行元素的 $r+1$ 阶子式经对换后得到的行列式，故 $D_{r+1}^{(2)}=0$；从而 $D_{r+1}=0$．

以上证明了矩阵 B 的所有 $r+1$ 阶子式都等于零，所以有

$$\mathrm{r}(B)\leq r=\mathrm{r}(A).$$

同理将矩阵 B 的第 j 行的 $-k$ 倍加到第 i 行上得到矩阵 A，也有 $\mathrm{r}(A)\leq\mathrm{r}(B)$ 综上有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$．

经一次初等行变换矩阵的秩不变，则经有限次初等行变换后矩阵的秩仍不变．

定理 3 说明，若 A 经有限次初等变换变为 B（即 $A\to B$），则 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$．

三、用初等变换求矩阵的秩

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以可先用初等变换将矩阵化简，然后再求矩阵的秩．

例 16 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

求矩阵 A 的秩 .

解 用记号“ → ”表示对 A 做初等变换,则有

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 2 & -3 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & -4 & 4\\ 0 & -9 & 6 & -6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

在矩阵 B 中,易见 B 的所有三阶子式全为零(有一行元素全为零),且有一个二阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=6\neq 0,$$

所以 $r(B)=2$,由定理 3 知 $r(A)=2$.

上例中,矩阵 B 称为行阶梯形矩阵,其特点是:

(1) 若有零行,则零行全部在矩阵的下方;

(2) 从第一行起,每行第一个非零元素前面零的个数逐行增加 .

对于这样的矩阵,可画出一条阶梯线,线的下方全为 0;每个台阶只有一行,台阶数即是非零行数 .例如下面的矩阵都是行阶梯形矩阵 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

事实上,对行阶梯形矩阵,它的秩就是非零行的个数 .

在例 16 中,用初等行变换将矩阵化成行阶梯形矩阵的方法来求矩阵的秩,比在例 15 中用定义求矩阵的秩要简便得多 .

例 17 用初等行变换求下列矩阵的秩,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

解

$$A \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{\frac{1}{2}r_2\\ r_3-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{\frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1.$$

因为行阶梯形矩阵 B_1 有 3 个非零行,所以 $\mathrm{r}(A) = 3$.

如果继续施行初等行变换,还可以化为更简单的形式 .

$$B_1 \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2 .$$

行阶梯形矩阵 B_2 具有下述特点,非零行的第一个非零元素为 1,且 1 所在列的其他元素都为零,称矩阵 B_2 为行最简形矩阵 .

若再经初等列变换,还可化为更简单的形式 .

$$B_2 \xrightarrow[c_4 + 2c_1]{c_2 + 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4 - \frac{1}{2} c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 \backslash c_5]{c_2 \backslash c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_3 ,$$

矩阵 B_3 称为 A 的标准形,其特点是:B_3 的左上角是单位矩阵 .

由上面的讨论可知,对 $m \times n$ 矩阵 A,若 $\mathrm{r}(A) = r$,则 A 经初等行变换后可化为行阶梯形矩阵及行最简形矩阵;再经初等列变

换,还可化为如下的标准形.

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

其中 E_r 为 r 阶单位矩阵.

若矩阵 A 通过初等变换化为(2.8)的形式,则称 A 等价于标准形.若 $A\backslash\ B$,则 A 与 B 有相同的标准形.

若只求矩阵的秩,则将矩阵化为行阶梯形即可,不必化为行最简形,更不必化为标准形.若要将矩阵化为标准形,一般须经初等行变换和初等列变换才能完成.

定义 12　设 A 为 n 阶方阵,若 $A\backslash\ E$,则称 A 为满秩矩阵;否则称为降秩矩阵.

若 $A\backslash\ E$,则 $\mathrm{r}(A)=n$,从而 $|A|\neq 0$,即满秩矩阵就是可逆矩阵,又称非奇异矩阵;降秩矩阵就是不可逆矩阵,也是奇异矩阵.

四、线性方程组与矩阵的初等变换

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.9)$$

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

利用矩阵的乘法,可将方程组写成如下的矩阵方程

$$Ax = b. \tag{2.10}$$

矩阵 A 称为方程组(2.9)的系数矩阵.

若方程组(2.9)中的常数项全为零,即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$,则称方程组为齐次线性方程组,用矩阵表示为 $Ax = 0$.

用消元法求解线性方程组实际上就是对线性方程组进行初等行变换,简化未知量的系数,从而得到与原方程组同解且易直接求解的阶梯形方程组.下面以齐次线性方程组为例说明其解法.

例 18　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ① \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, & ② \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. & ③ \end{cases} \tag{2.11}$$

解　将①的(-1)倍分别加到②和③上,得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ④ \\ 2x_3 - 4x_4 = 0, & ⑤ \\ -x_3 + 2x_4 = 0. & ⑥ \end{cases}$$

先将⑤乘以$\frac{1}{2}$,然后加到⑥上,得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ⑦ \\ x_3 - 2x_4 = 0, & ⑧ \\ 0 = 0. & ⑨ \end{cases} \tag{2.12}$$

上式是 4 个未知量 2 个独立方程的阶梯形方程组,可设 x_2, x_4 为自由取值的量(称为自由未知量),用回代的方式解出

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4, \end{cases} \quad (x_2, x_4 \text{ 可取任意值}). \qquad (2.13)$$

每当 x_2, x_4 任取一组值,代入上式就得到方程组的一个解,故该方程组有无穷多个解.

下面用矩阵的初等行变换求解方程组(2.11),其过程可与上面的消元过程一一对照.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_2]{\frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1,$$

由 B_1 可以得到方程组(2.12).回代过程也可用矩阵的初等行变换来完成,即

$$B_1 \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2,$$

B_2 对应方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知量,令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$,方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 \\ 2k_2 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

即

$$x = k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

下面利用矩阵的秩给出齐次线性方程组有非零解的充分必要条件.

定理 4 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)<n$.

证 必要性:设方程组 $Ax=0$ 有非零解,要证 $\mathrm{r}(A)<n$.

(用反证法)假设 $\mathrm{r}(A)=n$,则 A 中必有一个 n 阶子式 $D_n\neq 0$,根据克拉默法则,D_n 所对应的 n 个方程只有零解.这与原方程组有非零解矛盾,从而 $\mathrm{r}(A)=n$ 不成立,即 $\mathrm{r}(A)<n$.

充分性:设 $\mathrm{r}(A)=r<n$,则 A 的行阶梯形矩阵只有 r 个非零行,从而方程组 $Ax=0$ 有 $n-r$ 个自由未知量,让自由未知量的值都取 1,即可得方程组的一个非零解.

定理 4 所述条件 $\mathrm{r}(A)<n$ 的必要性是克拉默法则的推广,克拉默法则只适用于 $m=n$ 的情形,其充分性包含了克拉默法则的逆命题.因而由定理 4 可得:

推论 含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是 $|A|=0$.

用矩阵的初等行变换也可以求解非齐次线性方程组.第四章将详细讨论线性方程组的求解问题.

第五节 初 等 方 阵

矩阵的初等变换可用一些特殊的矩阵表示,这些矩阵是通过单位矩阵作初等变换得到的.

例如把三阶单位矩阵第一行的 k 倍加到第三行上得到的矩阵为

$$E(3,1(k))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix},$$

$E(3,1(k))$ 左乘三阶方阵 A,得

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+ka_{11}&a_{32}+ka_{12}&a_{33}+ka_{13}\end{pmatrix},$$

结果是把 A 的第一行的 k 倍加到第三行,即初等变换可以通过矩阵的乘法得到 .

定义 13　单位矩阵 E 经一次初等变换得到的矩阵称为初等方阵 .

三种初等变换对应着三种初等方阵 .

(1) 对调两行或对调两列

将单位矩阵 E 中的第 i 行与第 j 行互换,记为

$$E(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&\cdots&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&\cdots&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\i\text{ 行}\\\\\\\\j\text{ 行}\\\\\\\\\end{array},$$

用 m 阶初等方阵 $E_m(i,j)$ 左乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\begin{array}{cc} E_m(i,j)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ , \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

其结果相当于对矩阵 A 施行第一种初等行变换：把 A 的第 i 行与第 j 行对调.

$AE_m(i,j)$ 相当于对矩阵 A 施行第一种初等列变换：把 A 的第 i 列与第 j 列对调.

(2) **以数 $k(k\neq 0)$ 乘某行或某列**

将 E 的第 i 行乘非零数 k，记为

$$E(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

容易验证：

$E_m(i(k))A$ 等于用数 k 乘 A 的第 i 行；

$AE_n(i(k))$ 等于用数 k 乘 A 的第 i 列.

(3) **将数 k 乘某行(列)再加到另一行(列)上**

将 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记为

$$E(i,j(k))=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccc}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array},$$

对于列变换来说,$E(i,j(k))$是将单位矩阵 E 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上.

可以验证:

$E_m(i,j(k))A$ 相当于将 A 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上;

$AE_n(i,j(k))$相当于将 A 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上.

综上所述,可得到下面的定理.

定理 5 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的左边乘上相应的 m 阶初等方阵;对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右边乘上相应的 n 阶初等方阵.

以初等行变换为例:

若 $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}A_1$,则 $A_1=E(i,j)A$,反之亦然;

若 $A\xrightarrow{kr_i}A_2$,则 $A_2=E(i(k))A$,反之亦然;

若 $A\xrightarrow{r_i+kr_j}A_3$,则 $A_3=E(i,j(k))A$,反之亦然.

初等矩阵是可逆矩阵,初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵,其逆为

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j),\quad E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

由上节例 17 的讨论知道矩阵 A 可经过若干次初等行、列变换化为标准形,由定理 5 可知,这些初等行、列变换相当于对矩阵

A 左、右乘有限个初等矩阵,将行变换对应的 m 阶初等矩阵和列变换对应的 n 阶初等矩阵分别记为

$$P_1, P_2, \cdots, P_t \text{ 和 } Q_1, Q_2, \cdots, Q_s .$$

若 $\mathrm{r}(A) = r$,则有

$$P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_s = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 E_r 为 r 阶单位矩阵 .

令

$$P = P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1, \quad Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_s,$$

由初等矩阵的可逆性知, m 阶矩阵 P 和 n 阶矩阵 Q 都是可逆矩阵 .上式可写成

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2 .14}$$

于是可得:

定理 6 设 A 为 $m \times n$ 矩阵,则存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q,使 A 等价于(2 .14)所示的标准形 .

若 A 是一个可逆的 n 阶方阵,则 A 必等价于单位矩阵,即存在有限个初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_r, Q_{r+1}, \cdots, Q_l$,使得

$$Q_r Q_{r-1} \cdots Q_1 A Q_l Q_{l-1} \cdots Q_{r+1} = E .$$

则

$$(Q_1^{-1} \cdots Q_{r-1}^{-1} Q_r^{-1})(Q_r Q_{r-1} \cdots Q_1 A Q_l Q_{l-1} \cdots Q_{r+1})(Q_{r+1}^{-1} \cdots Q_{l-1}^{-1} Q_l^{-1})$$
$$= (Q_1^{-1} \cdots Q_{r-1}^{-1} Q_r^{-1}) E (Q_{r+1}^{-1} \cdots Q_{l-1}^{-1} Q_l^{-1}),$$

即

$$A = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1} Q_{r+1}^{-1} \cdots Q_l^{-1} .$$

记 $P_1 = Q_i^{-1}(i = 1, 2, \cdots, l)$,则 P_i 为初等矩阵且

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l .$$

由此即得:

定理 7 可逆矩阵 A 可表示成有限个初等矩阵的乘积.

推论 $m\times n$ 矩阵 $A\backsim B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆方阵 P 及 n 阶可逆方阵 Q,使得 $PAQ=B$.

从定理 7 可以得到矩阵求逆的一个简便有效的方法——初等变换求逆法.

若 A 为 n 阶可逆矩阵,则 A^{-1} 可表示为有限个初等矩阵的乘积,即 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_m$.由 $A^{-1}A=E$,就有

$$(P_1P_2\cdots P_m)A=E,\ (P_1P_2\cdots P_m)E=A^{-1} \tag{2.15}$$

上面第一式表示 A 经有限个初等行变换化为单位矩阵 E,第二式表示 E 经这些初等行变换化为 A^{-1}.把上面的两个式子写在一起,则有

$$(P_1P_2\cdots P_m)(A\mid E)=(E\mid A^{-1}) \tag{2.16}$$

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\mid E)$ 施行初等行变换,使 A 化为 E,则 E 就化成了 A^{-1}.

例 19 用初等行变换求 A 的逆,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}.$$

解

$$(A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{4} r_3]{-\frac{1}{2} r_2}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - \frac{1}{2} r_3}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\
0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 + r_2}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\
0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{array}\right).
$$

从而

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix}
\frac{7}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\
\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\
\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}.
$$

第六节　矩阵的分块法

矩阵分块法的基本思想是把矩阵分成若干小块,把每一小块看作矩阵的一个元素,这样就把阶数较高的矩阵化为阶数较低的矩阵,从而简化表示,便于计算 .

我们用一些贯穿于矩阵的纵线和横线分矩阵 A 为若干块,每小块叫做矩阵 A 的子块(子矩阵),以子块为元素的形式上的矩阵叫做分块矩阵.例如:

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

其中子块

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

也可把 A 分成如下形式:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}.$$

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似.

一、分块矩阵的加法

设 A, B 为 $m\times n$ 矩阵,用相同分法把 A 与 B 分块为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij}($i=1,2,\cdots,r; j=1,2,\cdots,s$)的行数、列数相同,那么

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{bmatrix}.$$

二、数乘分块矩阵

$$kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs} \end{bmatrix}.$$

三、分块矩阵的转置

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r2}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1s}^{\mathrm{T}} & A_{2s}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

即转置一个分块矩阵时,在分块矩阵中除了做行、列位置互换外,还要对每一个子矩阵做转置.

四、分块矩阵的乘法

设 A **为** $m\times k$ **矩阵,** B **为** $k\times n$ **矩阵,对** A,B **作分块,使得** A **的列分法与** B **的行分法一致,即**

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sp} \end{bmatrix}$$

其中子块 A_{it} 为 $m_i \times k_t$ 阶，B_{tj} 为 $k_t \times n_j$ 阶．$\sum_{i=1}^{r} m_i = m$，$\sum_{t=1}^{s} k_t = k$，$\sum_{j=1}^{P} n_j = n$，则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rp} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = \sum_{t=1}^{s} A_{it}B_{tj}$ 是 $m_i \times n_j$ 阶子矩阵．这与普通矩阵乘法规则在形式上是相同的．

例 20 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

求 AB．

解 把 A, B 分块成

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & E \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\0&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_{12}\\0&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{11}B_{12}+B_{22}\\0&A_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

而

$$A_{11}B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix},$$

$$A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&5&-2\\0&1&2&-4\\\hline 0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{array}\right).$$

五、分块对角矩阵

设 A 为 n 阶方阵,若 A 的分块矩阵具有下面的形状:

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix},$$

其中主对角线上的每一个子块 $A_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 是方阵,对角线外的子块都是零矩阵,称 A 为分块对角矩阵.

设 A,B 为两个 n 阶分块对角矩阵,

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_s\end{pmatrix},$$

其中 $A_i,B_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 为同阶子块矩阵,则

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

分块对角矩阵 A **的行列式有如下的性质**:

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

由此可知, $|A|\neq 0$ **的充分必要条件是每一个** $|A_i|\neq 0$, **从而推得**:**分块对角矩阵** A **可逆的充分必要条件是每一个子矩阵** $A_i(i=1,2,\cdots,s)$**可逆**, **且**

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 21 **设**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

解 **对** A **做如下分块**

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

A_1, A_2 的逆矩阵分别为

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\-3&1\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2&0&0&0\\-3&1&0&0&0\\0&0&1&-4&-3\\0&0&1&-5&-3\\0&0&-1&6&4\end{pmatrix}.$$

例 22 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\A_3&A_4\end{pmatrix}$ 为 n 阶方阵, A_1 为 r 阶方子块, 称 A 为分块三角矩阵. 若 A 可逆, 求 A^{-1}.

解 由第一章例 14 知 $|A|=|A_1||A_4|$.

因 A 可逆, 所以 $|A|\neq 0$, 则 $|A_1|\neq 0$, 且 $|A_4|\neq 0$, 因而 A_1, A_4 可逆. 设 A 的逆矩阵为 X, 做如下分块:

$$X=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix},$$

其中 X_1 是 r 阶方阵. 由 $AX=E$, 有

$$\begin{aligned}AX&=\begin{pmatrix}A_1&0\\A_3&A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_1X_1&A_1X_2\\A_3X_1+A_4X_3&A_3X_2+A_4X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

比较上式最后两个分块矩阵, 得矩阵方程组

$$\begin{cases}A_1X_1=E_r,\\A_1X_2=0,\\A_3X_1+A_4X_3=0,\\A_3X_2+A_4X_4=E_{n-r}.\end{cases}$$

解这 4 个矩阵方程可得

$$X_1 = A_1^{-1},$$

$$X_2 = 0,$$

$$X_3 = -A_4^{-1}A_3A_1^{-1},$$

$$X_4 = A_4^{-1}.$$

所以 A 的逆为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ -A_4^{-1}A_3A_1^{-1} & A_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

对于矩阵的分块运算,首先要注意分法的合理性,使分块运算有意义.例如分块乘法应当使第一个矩阵的列分法与第二个矩阵的行分法一致,这样分块乘法运算才有意义.其次要根据矩阵元素分布的结构特点及实际的要求来全面考虑.

设 A 为 $m\times n$ 矩阵,常把矩阵按列分块:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

其中 $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^T$ 是一列的矩阵,又叫列向量.

若把 A 按行分块,则

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

其中 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 是一行的矩阵,又叫行向量.

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

其中 A 称为系数矩阵, x 称为未知量向量, b 称为常数项向量 .若记 $\overline{A} = (A \mid b)$, 称 $\overline{A}$ 为增广矩阵 .

如果把 A 按列分成 n 块, 则与 A 相乘的 x 应对应地按行分成 n 块, 则有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = b,$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b .$$

如果把 A 按行分成 m 块, 则有

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

按分块矩阵的乘法有

$$\begin{pmatrix} \beta_1 x \\ \beta_2 x \\ \cdots \\ \beta_m x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

这相当于把每个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m),$$

记作

$$\beta_i x = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$

矩阵的分块十分灵活,用处也非常广泛.上面这些分法在后面各章中有着重要的作用.

*六、分块矩阵的初等变换

下面仅以常用的 2×2 分块矩阵为例来讨论.对分块矩阵的初等变换,相应定义三种分块初等矩阵:

(1) 分块对换初等矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & E_s \\ E_r & 0 \end{pmatrix}, E_r, E_s \text{ 分别为 } r \text{ 与 } s \text{ 阶单位矩阵}.$$

(2) 分块倍乘初等矩阵

$$\begin{pmatrix} kE_r & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & kE_s \end{pmatrix}, k \text{ 为非零数}.$$

(3) 分块倍加初等矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ C_1 & E_s \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} E_r & C_2 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}.$$

将这些分块初等矩阵左(右)乘矩阵 A,则相当于对矩阵 A 做相应的行(列)块的初等变换.

例如,设 A 为 r 阶可逆矩阵, D 为 s 阶矩阵,对分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

为使其中的矩阵 C **和** B **化为零矩阵,令倍加分块初等矩阵为**

$$P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -CA^{-1} & E_s \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ 0 & E_s \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -CA^{-1} & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -CA^{-1} & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ 0 & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

例 23　**设** A, B, C, D **为** n **阶方阵**, A **为可逆矩阵**, **且** $AC = CA$, **证明**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证　**用倍加分块初等矩阵把** C **消为零矩阵**,

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

对两边的矩阵取行列式,并利用倍加分块初等矩阵的行列式等于 1 **及** $AC = CA$, **得**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$$

$$= |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

例 24　A, B **皆为** n **阶方阵,证明**

$$|E - AB| = |E - BA|.$$

证　(1) **若** A **或** B **可逆,不妨设** A **可逆,则**

$$|E - AB| = |A(E-BA)A^{-1}| = |A||A^{-1}||E - BA|$$

$$= |E - BA|.$$

(2) 若 A, B 皆不可逆,构造分块矩阵

$$\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix},$$

用倍加分块初等矩阵把 B 消为零矩阵,

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

对上面两式取行列式,得

$$\begin{vmatrix} E_n & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_n||E_n - BA| = |E_n||E_n - AB|,$$

故有

$$|E - BA| = |E - AB|.$$

习 题 二

A 组

1. 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $2A$, $A + B$, $2A - 3B$, AB, $A^3 + 2A^2 + A - E$.

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $3AB - 2A$ 及 $A^{T}B$.

3 . **计算下列矩阵的乘积**:

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a, b, c)$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $(1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,2)$;

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(7) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 . **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, **问**:

(1) $AB = BA$ **吗** ?

(2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ **吗** ?

(3) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ **吗** ?

5 . **举反例说明下列命题是错误的**:

(1) **若** $A^2 = 0$, **则** $A = 0$;

(2) 若 $A^2 = A$,则 $A = 0$ 或 $A = E$;

(3) 若 $AX = AY$,且 $A \neq 0$,则 $X = Y$.

6.用数学归纳法证明:

若 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,则 $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

7.A 为 n 阶对称矩阵,B 为 n 阶反对称矩阵,证明:

(1) B^2 是对称矩阵;

(2) $AB - BA$ 是对称矩阵,$AB + BA$ 是反对称矩阵.

8.(1) 求与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵 B;

(2) 证明与对角线上元素相异的对角阵可交换的矩阵必是对角矩阵.

9.求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10.用求逆矩阵的方法解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

11. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. (1) $A^3 + 2A^2 + A - E = 0$,则 A 可逆,求 A^{-1};

(2) 若 $A^2 - A - 4E = 0$,则 $A + E$ 可逆,求 $(A + E)^{-1}$.

13. (1) A 为 n 阶方阵,$|A| = 2$,求 $\left| \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1} - 3A^* \right|$;

(2) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,求 $(A^*)^{-1}$.

14. 设 $A^k = 0$(k 为正整数),证明:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

15. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,$AB = A + 2B$,求 B.

16. 设 $P^{-1}AP = \Lambda$,其中 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,求 A^{11}.

17. 用初等变换求矩阵的秩:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & -4 & -10 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & -1 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

18. **用初等变换求下列矩阵的逆矩阵**:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

19. (1) **用分块法求** AB, **其中**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(2) **设** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, **求** $|A^{2k}|$, A^{2k}, k **为正整数**.

20．用分块法求下列矩阵的逆：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．

21．做下列分块矩阵的乘法，其中 A，B，E 都为 n 阶方阵．

(1) $A^{-1}\begin{bmatrix} A & \vert & E \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} A & \vert & E \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & \vert & E \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}A^{-1}$；　　(4) $\begin{bmatrix} A^{-1} \\ E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \vert & E \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$；　　(6) $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$．

22．设 A，B 皆有逆，求下列分块矩阵的逆：

(1) $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$．

B　　组

1．化简下列各式：

(1) $(AB^{\mathrm{T}})^{-1}(C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+E)^{\mathrm{T}}-(C^{\mathrm{T}}B^{-1})^{\mathrm{T}}$，其中 A，B 是可逆矩阵；

(2) $(E+BA)[E-B(E+AB)^{-1}A]$，其中$(E+AB)$可逆．

2．证明：A，B 为两个 n 阶方阵，则 AB 与 BA 的主对角线上元素之和相等．

3．A 为 n 阶矩阵，$A^{\mathrm{T}}A=E$，$|A|<0$，证明$|E+A|=0$．

4．A 为 n 阶可逆矩阵，且每一行元素之和都等于常数 $a(a\neq 0)$，证明 A 的逆矩阵的每一行元素之和为 a^{-1}．

5．$A=E-XX^{\mathrm{T}}$，$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为非零列矩阵，证明：

(1) $A^2=A$ 的充分必要条件是 $X^{\mathrm{T}}X=1$；

(2) 若 $X^{\mathrm{T}}X=1$，则 A 不可逆．

6 . A 为 n 阶可逆方阵, A^* 为 A 的伴随阵 .证明:

(1) $(A^*)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^*$;

(2) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$.

7 . 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* ,证明:

(1) 若 $|A| = 0$,则 $|A^*| = 0$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

8 . 设 A 为 n 阶($n > 2$)非零实矩阵, 且 $A_{ij} = a_{ij}$, A_{ij}是矩阵 A 的元素 a_{ij}对应的代数余子式 .证明:

(1) A 可逆; (2) $|A| = 1$.

第三章　向量组的线性相关性

本章讨论 n 维向量组的线性相关性、向量组的秩的概念，再利用矩阵的秩来研究向量组的线性相关性，最后介绍向量空间．这些问题是线性代数中最基本的问题，本章内容比较抽象，又是以后各章内容的理论基础，应该牢固掌握．

第一节　n 维向量的概念

在三维空间中，三个一组的有序实数表示空间中的点，记作 $M(x, y, z)$，设 i, j, k 分别表示空间直角坐标系的三个坐标轴 x 轴、y 轴和 z 轴上的单位向量，坐标依次为 $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$ 和 $(0,0,1)$．则起点为坐标原点的向量，称为向径，记作

$$OM = xi + yj + zk,$$

简记为

$$OM = \{x, y, z\},$$

或直接写成

$$OM = (x, y, z).$$

这样三维空间中的向量与三个实数之间就建立了一一对应的关系．下面我们把三维空间中的向量推广到 n 维空间．

一、n 维向量的定义

定义 1　由 n 个数组成的一个有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为一个 n 维向量,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为向量 α 的分量(或坐标).

有时根据问题的需要,向量 α 也可以竖起来写成

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

为了加以区别,前者称为行向量,后者称为列向量.它们的区别只是写法不同.本书下面所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时,都当作列向量.

n 维向量是解析几何中向量的推广,但当 $n > 3$ 时,n 维向量没有直观的几何意义,只是沿用了几何上向量的术语.

规定:分量全为零的向量,称为零向量,记作 0 即

$$0 = (0, 0, \cdots, 0).$$

向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$的各分量的相反数所组成的向量,称为 α 的负向量,记作 $-\alpha$ 即

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n).$$

设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$为两个 n 维向量,若 $a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,则称这两个向量相等,记作 $\alpha = \beta$.

n 维向量的全体所组成的集合记为 R^n.

n 维向量有着广泛的实际意义.

例 1 (1) 一批产品发运到 n 个地区的数量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,可记为一个 n 维向量

$$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

(2) 一个球的球心坐标为 x_0, y_0, z_0,半径为 r,则

$$\alpha = (x_0, y_0, z_0, r),$$

表示 4 维向量.

(3) 由 m 个方程组成的 n 元线性方程组 $Ax = b$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 其每一行

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

都是 n 维行向量.

由此可见, n 维向量的概念是客观事物在数量上的一种抽象.

二、n 维向量的加法和数乘运算

因为 n 维列向量是 $n\times 1$ 矩阵, n 维行向量是 $1\times n$ 矩阵, 所以矩阵的加法和数乘运算及运算规律, 都适合于 n 维向量的运算.

设两个 n 维向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

则两个向量的加法为

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).$$

数乘向量为

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n), k \text{ 为任意实数}.$$

n 维向量的加法和数乘运算满足下面的运算律:

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;

(4) $\alpha + (-\alpha) = 0$;

(5) $1\cdot\alpha = \alpha$;

(6) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$, k, l 为任意实数;

(7) $(K + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

例 2 设向量 $\alpha = (1, 0, 2, 3)$, $\beta = (-2, 1, -2, 0)$, 求满足 $\alpha + 2\beta - 3\gamma = 0$ 的向量 γ.

解　$\gamma=\frac{1}{3}(\alpha+2\beta)$

$$=\frac{1}{3}[(1,0,2,3)+2(-2,1,-2,0)]$$
$$=\frac{1}{3}[(1,0,2,3)+(-4,2,-4,0)]$$
$$=\left(-1,\frac{2}{3},-\frac{2}{3},1\right).$$

第二节　向量组的线性相关性

平面上两个非零向量 α,β 互相平行,则可表示为

$$\beta=k\alpha,\ k\text{ 为实数}.$$

若 α,β 不平行,那么平面上任一向量 γ 可由 α,β 表示为

$$\gamma=k_1\alpha+k_2\beta,\quad k_1,k_2\text{ 为实数},$$

称 γ 能由 α,β 线性表示或 γ 是 α,β 的线性组合(见图 3.1).

一般地有下面的

定义 2　设有 n 维向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

则称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合,或称 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

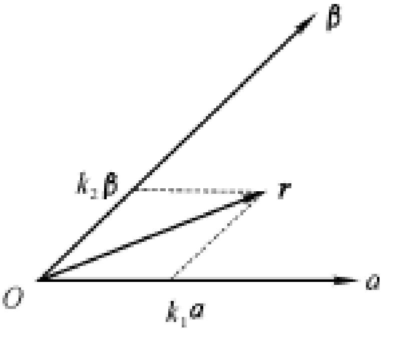

图 3.1

若干个同维数的向量所组成的集合叫做向量组.例如矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 可以看成由 n 个 m 维列向量

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

组成的向量组,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵 A 的列向量组.

矩阵 A 又可以看成由 m 个 n 维行向量

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

组成的向量组,称 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为矩阵 A 的行向量组.

对于线性方程组 $Ax=b$,视 A 为由列向量组成的向量组,那么方程组可写成

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

因而讨论方程组 $Ax=b$ 是否有解的问题实际上就是讨论 b 能否由 A 的列向量组线性表示.

例 3 设 $\alpha_1=(1,2,3)^T$, $\alpha_2=(2,3,1)^T$, $\alpha_3=(3,1,2)^T$, $\beta=(0,4,2)^T$,试问 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?若能,写出具体表示式.

解 令

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

即

$$\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

由此得线性方程组

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=0,\\2k_1+3k_2+k_3=4,\\3k_1+k_2+2k_3=2.\end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-18\neq0,$$

由克拉默法则,求出

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = -1.$$

所以

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3,$$

即 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

例 4　设 $\alpha = (2, -3, 0)$, $\beta = (0, -1, 2)$, $\gamma = (0, -7, -4)$, 试问 γ 能否表成 α, β 的线性组合?

解　设 $k_1\alpha^T + k_2\beta^T = \gamma^T$, 即

$$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{cases} 2k_1 = 0, \\ -3k_1 - k_2 = -7, \\ 2k_2 = -4. \end{cases}$$

由第一个方程得 $k_1 = 0$, 由第三个方程得 $k_2 = -2$, 但 $k_1 = 0$, $k_2 = -2$ 不满足第二个方程, 即方程组无解.所以, γ 不能表成 α, β 的线性组合.

向量组中有没有某个向量能由其余向量线性表示, 这是向量组的一个重要性质, 称为向量组的线性相关性.

定义 3　设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关; 否则称为线性无关.换言之, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 则上式当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 才成立.

定理 1　向量组线性相关的充分必要条件是向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

证　充分性

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中有一个向量(不妨假设 α_m)是其余 $m-1$ 个向量的线性组合,即有

$$\alpha_m = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1},$$

故 $$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + (-1)\alpha_m = 0.$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}, (-1)$ 这 m 个数不全为 0(至少 $-1\neq 0$),故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

因 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 中至少有一个不为零,不妨设 $k_1\neq 0$,则有

$$\alpha_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2 + \left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\alpha_3 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\alpha_m,$$

即 α_1 是 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合.

由定义 3 可知,仅由一个向量 α 组成的向量组,当 α 为零向量时,α 线性相关;当 α 为非零向量时,α 线性无关.

对于只有两个向量 α, β 组成的向量组,设

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

由定理 1 知,α, β 线性相关当且仅当 α, β 中至少有一个可由另一个线性表示.不妨设

$$\alpha = k\beta,$$

则有

$$a_i = kb_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

即 α 与 β 的对应分量成比例时线性相关,否则线性无关.

一般地,判断一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的基本方法和步骤是:

(1) 假定存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0;$$

(2) 应用向量的线性运算和向量相等的定义,找出含未知量 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 的齐次线性方程组;

(3) 判断方程组有无非零解;

(4) 如有非零解,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关;如仅有零解,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关 .

例 5 n 维向量组

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

称为 n 维单位坐标向量组,试讨论它的线性相关性 .

解 设有一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n = 0,$$

即

$$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

得 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}} = 0$,从而

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0,$$

故 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关 .

例 6 讨论向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

的线性相关性.

解　方法1　设有一组数 x_1, x_2, x_3,使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0,$$

即

$$x_1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = 0.$$

于是得线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 = 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

由于第一个方程加第三个方程正好等于第二个方程,所以第二个方程可以去掉,得同解方程组

$$\begin{cases}2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 = 0.\end{cases}$$

将上面两个方程中的 x_3 移到方程的右边,得

$$\begin{cases}2x_1 + x_2 = -3x_3,\\ x_1 + x_2 = x_3.\end{cases}$$

令 $x_3 = 1$,求出 $x_1 = -4$, $x_2 = 5$,故方程组的一个解为 $x_1 = -4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$.从而

$$(-4)\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

方法2　设有 x_1, x_2, x_3 使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$,则有方程组(3.1),将其系数矩阵化为行阶梯形矩阵,

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&5\\0&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&5\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由于 $r(A)=2<3$,根据第二章定理 4,方程组(3,1)有非零解,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

如果所讨论的向量组是行向量组,为了便于写出方程组,也可以写成列向量的形式.

例 7　判断向量组

$$\alpha_1=(2,1,0),\ \alpha_2=(1,2,1),\ \alpha_3=(0,1,2),$$

是否线性相关?

解　设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

即

$$k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases}2k_1+k_2=0,\\k_1+2k_2+k_3=0,\\k_2+2k_3=0.\end{cases}$$

因为方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=4\neq0,$$

所以方程组只有零解,即 $k_1=k_2=k_3=0$.从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

例 8　设向量组 α,β,γ 线性无关,求证 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$

也线性无关 .

证 设

$$x_1(\alpha+\beta)+x_2(\beta+\gamma)+x_3(\gamma+\alpha)=0,$$

则

$$(x_1+x_3)\alpha+(x_1+x_2)\beta+(x_2+x_3)\gamma=0 .$$

因为 α,β,γ 线性无关, 于是

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$$

因为上述线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以方程组只有零解

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

也就是说 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 是线性无关的 .

定理 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关, 则 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示, 且表示式是惟一的 .

证 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关, 故存在一组不全零的数 $k_1,\cdots,k_m,k_{m+1}$, 使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=0 .$$

假设 $k_{m+1}=0$, 则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零, 且有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾, 所以 $k_{m+1}\neq 0$.从而

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{m+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{m+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k_{m+1}}\alpha_m,$$

即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 .

再证表示式的惟一性.设有两个表示式

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m \text{ 及 } \beta = \mu_1 \alpha_1 + \cdots + \mu_m \alpha_m ,$$

两式相减,得

$$(\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m)\alpha_m = 0 .$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,所以

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots, m),$$

即

$$\lambda_i = \mu_i \quad (i = 1,2,\cdots, m),$$

从而表示式是惟一的.

第三节 线性相关性的判别定理

首先介绍向量组中部分向量与整个向量组线性相关性的关系.

定理 3 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关,则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关.

证 由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关,故存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,使

$$k_1 \alpha_1 + \cdots + k_r \alpha_r = 0,$$

从而

$$k_1 \alpha_1 + \cdots + k_r \alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_m = 0 .$$

由于 $k_1, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 这 m 个数不全为零,故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

定理 3 说明一个向量组若部分组线性相关,则整体线性相关;反之,若一个向量组线性无关,则它的任一部分组也线性无关.

例 9 讨论由向量 $\alpha = (1,2,2,1)$, $\beta = (2,4,4,2)$, 及 $\gamma = (0,2,4,5)$所组成的向量组的线性相关性.

解　因 $\alpha=\frac{1}{2}\beta$,所以 α,β 线性相关,由定理 3 知, α,β,γ 线性相关 .

推论　若向量组中含有零向量,则此向量组线性相关 .

由此推论可知,线性无关的向量组一定不含零向量 .

定理 4　设有两个向量组

$$A:\ \alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^T\qquad(j=1,2,\cdots,m);$$

$$B:\ \beta_j=(a_{p_1j},a_{p_2j},\cdots,a_{p_nj})^T\qquad(j=1,2,\cdots,m),$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某个确定的排列,则向量组 A 与向量组 B 的线性相关性相同 .

证　向量组 A 线性相关的充分必要条件是方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0,$$

即

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\cdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_m\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\cdots\\a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}\qquad(3.2)$$

有非零解 .

向量组 B 线性相关的充分必要条件是方程组

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0,$$

即

$$x_1\begin{pmatrix}a_{p_11}\\a_{p_21}\\\cdots\\a_{p_n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{p_12}\\a_{p_22}\\\cdots\\a_{p_n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_m\begin{pmatrix}a_{p_1m}\\a_{p_2m}\\\cdots\\a_{p_nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}\qquad(3.3)$$

有非零解 .

由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某个确定的排列,因而

方程组(3.2)和(3.3)只是方程的次序不同,因而这两个方程组是同解的.所以若向量组 A 线性无关,则向量组 B 也线性无关;若向量组 A 线性相关,则向量组 B 也线性相关.

定理 4 是对列向量叙述的,对行向量显然也有相同的结论.

定理 5 设有两个向量组

$$A:\ \alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj})^{T} \qquad (j = 1,2,\cdots, m);$$

$$B:\ \beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}, a_{r+1,j})^{T} \qquad (j = 1,2,\cdots, m),$$

即 β_j 是由 α_j 加上一个分量得到的.若向量组 A 线性无关,则向量组 B 也线性无关.

证 (证其逆否命题)设向量组 B 线性相关,则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m = 0,$$

即

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{r1} \\ a_{r+1,1}\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \cdots \\ a_{r2} \\ a_{r+1,2}\end{pmatrix} + \cdots + k_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \cdots \\ a_{rm} \\ a_{r+1,m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}.$$

取其前 r 个等式,即

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 亦线性相关.

定理 5 中由 α_j 添上最后一个分量得到 β_j,而由定理 4 可知,添上的分量可加在任何位置上.

推论 r 维向量组的每个向量添上 $n - r$ 个分量,成为 n 维向量组.若 r 维向量组线性无关,则 n 维向量组亦线性无关.

$n - r$ 次应用定理 5,每次添上一个分量即得推论.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 构成矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$,由前面的讨论知,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是线性

方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0,$$

即 $Ax=0$ 有非零解.再由上一章的定理4可得本章如下的主要定理.

定理6 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的秩小于向量的个数 m;该向量组线性无关的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)=m$.

由定理6可得下面的推论.

推论1 n 个 n 维向量线性无关的充分必要条件是它们所构成的方阵的行列式不等于零.

推论2 当 $m>n$ 时,m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性相关.

证 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.由于 $\mathrm{r}(A)\leq n$,当 $m>n$ 时,有 $\mathrm{r}(A)\leq n<m$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

特别地,$n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

例10 讨论下列向量组的线性相关性:

(1) $\alpha_1=(1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,9)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,-1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\alpha_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\alpha_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,2,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解 (1) 由于向量组所含向量的个数大于维数,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.由于 $|A|=2\neq0$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&2&1\\1&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因为 $r(A)=3$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

第四节　向量组的秩

一、向量组等价的概念

定义 4　设两个向量组为

$$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,$$
$$B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,$$

若向量组 A 中的每一个向量可由向量组 B 线性表示,则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示.又若向量组 B 也可由向量组 A 线性表示,则称两个向量组等价.

设向量组 A 可由向量组 B 线性表示为

$$\begin{cases}\alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{s1}\beta_s,\\ \alpha_2 = k_{12}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \cdots + k_{s2}\beta_s,\\ \qquad\cdots\\ \alpha_r = k_{1r}\beta_1 + k_{2r}\beta_2 + \cdots + k_{sr}\beta_s.\end{cases} \tag{3.4}$$

用矩阵乘法的形式可表示为

$$\alpha_i = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix}k_{1i}\\ k_{2i}\\ \cdots\\ k_{si}\end{pmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,r),$$

于是可把式(3.4)表示为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr}\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$, $K=(k_{ij})_{s\times r}$,则可把式(3.5)写成矩阵的形式

$$A = BK \tag{3.6}$$

可见向量组 A 由向量组 B 线性表示可简记为(3.6)所示的矩阵乘法;反之若有(3.6)的矩阵形式,则可把矩阵 A 的列向量看作矩阵 B 的列向量的线性表示.这种表示法在一些问题的处理和论证上非常有用.

向量组之间的线性表示具有传递性,即若向量组 A 可由向量组 B 线性表示,向量组 B 可由向量组 C 线性表示,则向量组 A 可由向量组 C 线性表示(证明留给读者作为练习).

等价向量组具有下列三个性质:

(1) 自反性:向量组 A 与自身等价;

(2) 对称性:若向量组 A 与向量组 B 等价,则向量组 B 与向量组 A 等价;

(3) 传递性:若向量组 A 与向量组 B 等价,向量组 B 与向量组 C 等价,则向量组 A 与向量组 C 等价.

在数学中,把具有上述三个性质的关系称为等价关系.

二、极大线性无关组与向量组的秩

定义 5 设向量组 A 的一个部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组 A 中每一个向量均可由此部分组线性表示,

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组(简称极大无关组);极大线性无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩.

只含零向量的向量组没有极大线性无关组,规定它的秩为 0.

向量组与它的极大线性无关组等价.这是因为若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组,由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 A 中的向量,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 A 线性表示;又由于向量

组 A 中每一个向量均可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，从而向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与向量组 A 可以互相线性表示．

向量组的极大无关组可能不止一个．例如在例 6 中，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，由于 α_1, α_2 的对应分量不成比例，所以 α_1, α_2 线性无关．又由于 $\alpha_3 = 4\alpha_1 - 5\alpha_2$，从而 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组．同样可知 α_2, α_3 也是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组．

若向量组 A 的极大无关组不止一个，由于向量组 A 与它的每一个极大无关组均等价，由等价关系的传递性可知：向量组 A 的不同的极大无关组之间也等价．

例 11 记全体 n 维向量所组成的集合为 R^n，求 R^n 的一个极大线性无关组．

解 由本章例 5 知，n 维单位坐标向量组 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$e_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的，任一 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 都可用 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表示，即

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n .$$

从而 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 R^n 的一个极大线性无关组．

当 $n = 2$ 时，平面向量组成向量组 R^2，二维单位坐标向量组 e_1, e_2 是 R^2 的一个极大线性无关组．事实上，平面上任意两个不平行的向量都是 R^2 的一个极大线性无关组．一个向量组中的极大线性无关组不是惟一的，但是每一个极大线性无关组所含向量的个数是惟一的．

定理 7 设向量组 A 的秩为 r，向量组 B 的秩为 s，若向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r \leq s$．

证 设向量组 A 的极大线性无关组为

$$A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r;$$

向量组 B 的极大线性无关组为

$$B_0: \beta_1, \cdots, \beta_s.$$

因向量组 A_0 **能由向量组** A **线性表示,向量组** A **能由向量组** B **线性表示,向量组** B **能由向量组** B_0 **线性表示,故向量组** A_0 **能由向量组** B_0 **线性表示,即存在矩阵** $K = (k_{ij})_{s\times r}$**,使**

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}.$$

假设 $r > s$**,则** $\mathrm{r}(K) \leq s < r$**,即方程组**

$$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$$

有非零解.设它的一组非零解为

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \cdots, x_r = \lambda_r,$$

则

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, a_r)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) K\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)0 = 0.$$

这与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ **线性无关矛盾,从而有** $r \leq s$.

推论　等价的向量组的秩相等.

证　设向量组 A **与向量组** B **的秩分别为** r **和** s**,由于向量组** A

和向量组 B 等价,即这两个向量组可以互相线性表示,故 $r\leq s$ 与 $s\leq r$ 同时成立,所以 $r=s$.

特别地,等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同 .

由于一个向量组的不同的极大无关组之间等价,因而它们所含向量的个数均相同,因此一个向量组的秩是惟一的 .

三、向量组的秩与矩阵的秩的关系

设 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则可把 A 看作 n 个列向量构成的矩阵,也可把 A 看作 m 个行向量构成的矩阵 .称矩阵 A 的 n 个列向量所组成的向量组的秩为 A 的列秩;称 A 的 m 个行向量所组成向量组的秩为 A 的行秩 .

矩阵的秩与它的列秩和行秩的关系有如下的定理:

定理 8 矩阵的秩等于它的列秩,也等于它的行秩 .

证 设 A 为 $m\times n$ 矩阵 .当 $\mathrm{r}(A)=0$ 时,即 $A=0$,定理显然成立 .

设 $\mathrm{r}(A)=r>0$,把 A 看作 n 个列向量构成的矩阵,令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.由矩阵秩的定义,存在一个 r 阶子式 $D_r\neq 0$,由定理 6 知 D_r 所在的 r 列线性无关 .又由于 A 中所有 $r+1$ 阶子式均为零,知 A 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关 .

不妨设 D_r 所在的列就是 A 的前 r 列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.对于 A 的任一列向量 α_k,当 $1\leq k\leq r$ 时,α_k 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示(向量组能由自身线性表示);当 $r<k\leq n$ 时,由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,而 $\alpha_1,\cdots,a_r,\alpha_k$ 线性相关,根据定理 2,α_k 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示 .因此 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个极大线性无关组 .

所以 A 的列秩等于 r .

由于 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$,又由上面的证明知,$A^{\mathrm{T}}$ 的秩等于 A^{T} 的列秩,而 A^{T} 的列秩就是 A 的行秩,所以 A 的行秩也等于 r .

将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩记作秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

例 12 求向量组 $\alpha_1=(1,4,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(2,5,-1,-3,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(-1,2,5,6,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(0,2,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 的秩 .

解 把向量按列排成矩阵 A,用初等行变换求 A 的秩 .

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\4&5&2&2\\1&-1&5&2\\0&-3&6&-1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-3&6&2\\0&-3&6&2\\0&-3&6&-1\\0&-2&4&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{r}(A)=3$,从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3 .

定理 9 矩阵 A 经过初等行变换化为矩阵 B,则 A 的列向量组与 B 对应的列向量组有相同的线性组合关系 .

证 对 $m\times n$ 矩阵 A 做初等行变换化为矩阵 B,相当于用一个可逆矩阵 P 左乘 A,即 $PA=B$.对 A 和 B 作列分块

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$$

则有

$$PA=(P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$$

即

$$\beta_i=P\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

设 A 的某些列 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$ 的线性组合为

$$x_1\alpha_{i_1} + x_2\alpha_{i_2} + \cdots + x_k\alpha_{i_k} = 0,$$

那么有

$$\begin{aligned}
& x_1\beta_{i_1} + x_2\beta_{i_2} + \cdots + x_k\beta_{i_k} \\
= & x_1 P\alpha_{i_1} + x_2 P\alpha_{i_2} + \cdots + x_k P\alpha_{i_k} \\
= & P(x\alpha_{i_1} + x_2\alpha_{i_2} + \cdots + x_k\alpha_{i_k}) \\
= & P \cdot 0 = 0 .
\end{aligned}$$

这就证明了 B 的列向量组 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_k}$ 与 A 的对应的列向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$ 有相同的线性组合关系 .

例 13　求例 12 中向量组的一个极大无关组,并把不属于极大无关组的向量用该极大无关组线性表示 .

解　把向量组按列排成矩阵 A,例 12 中已把 A 化成了行阶梯形矩阵,再利用初等行变换把 A 化为行最简形矩阵 B .

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B\,.} \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4
\end{array}
$$

可见 B **的第** 1,2,4 **列** $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ **线性无关,由于** A **的列向量组与** B **的对应的列向量组有相同的线性组合关系,故与其对应的矩阵** A **的** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ **线性无关,即** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ **是** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **的一个极大无关组**.

由矩阵 B **易得** $\beta_3 = 3\beta_1 - 2\beta_2$,**所以有**

$$
\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2\,.
$$

求向量组的极大无关组时,如果所给的是行向量组,那么也要按列排成矩阵再做初等行变换.

例 14　**求向量组** $\alpha_1 = (2,1,4,3)$, $\alpha_2 = (-1,1,-6,6)$, $\alpha_3 = (-1,-2,2,-9)$, $\alpha_4 = (1,1,-2,7)$, $\alpha_5 = (2,4,4,9)$**的一个极大无关组**.

解　**把向量组按列排成矩阵** A,**用初等行变换化为行阶梯形矩阵** B.

$$
A = (\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \alpha_3^{\mathrm{T}}, \alpha_4^{\mathrm{T}}, \alpha_5^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{2} r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}
$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\ r_4-3r_1}]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+5r_2\\ r_4-3r_2}]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

由于 B **的** 1,2,4 **列线性无关,故** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ **是** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ **的一个极大无关组.**

由于没有要求将其余的向量用所求的极大无关组线性表示,所以不必将 A **化为行最简形矩阵.**

例 15 **用矩阵的秩与向量组的秩的关系证明**

$$\mathrm{r}(AB)\leq\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}.$$

证 设 A,B **分别为** $m\times n$ **矩阵和** $n\times k$ **矩阵,** $AB=C$,**则** C **是** $m\times k$ **矩阵.先证** $\mathrm{r}(AB)\leq\mathrm{r}(A)$.

将 A **和** C **看成是列向量构成的矩阵,设**

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k),$$

则

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1k}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2k}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nk}\end{pmatrix},$$

即 C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示.由定理7得

$$\text{秩}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)\leq\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

即 $r(AB)\leq r(A)$.

因 $C^T=B^TA^T$,由上面的证明知 $r(C^T)\leq r(B^T)$,所以 $r(AB)\leq r(B)$.故 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$.

类似地可证明两矩阵和的不等式:

$$r(A+B)\leq r(A)+r(B).$$

例16 设向量组A能由向量组B线性表示,且它们的秩相等,证明向量组A与向量组B等价.

证 只要证明向量组B能由向量组A线性表示.

设两个向量组的秩都为 r,并设A组和B组的极大无关组分别为

$$A_0:\ \alpha_1,\cdots,\alpha_r$$

和

$$B_0:\ \beta_1,\cdots,\beta_r.$$

因A组能由B组线性表示,故 A_0 组能由 B_0 组线性表示,即有 r 阶方阵 K_r,使

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)K_r.$$

因 A_0 组线性无关,故秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$.由例15,得

$$r(K_r)\geq\text{秩}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r.$$

但 $r(K_r)\leq r$,因此 $r(K_r)=r$,于是矩阵 K_r 可逆,并有

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)K_r^{-1},$$

即 B_0 组能由 A_0 组线性表示,从而B组能由A组线性表示.所以向量组A与向量组B等价.

第五节　向 量 空 间

一、向量空间的概念

定义 6　设 V 是 n 维向量构成的非空集合,且满足

(1) 若 $\alpha, \beta \in V$,则 $\alpha + \beta \in V$;

(2) 若 $\alpha \in V$, $k \in \mathrm{R}$,则 $k\alpha \in V$,

则称集合 V 是向量空间 .

上述定义中(1)和(2)两个条件称为集合 V 对加法和数乘两种运算封闭 .由定义 6 知,一个 n 维向量的集合 V 要构成一个向量空间,必须满足对加法和数乘运算的封闭性 .

例 17　n 维向量的全体所构成的集合,记为

$$\mathrm{R}^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathrm{R}, i = 1,2,\cdots, n\} .$$

R^n 构成一个向量空间,因为任意两个 n 维向量之和仍然是 n 维向量,数 k 乘 n 维向量也仍然是 n 维向量,它们都属于 R^n .

当 $n > 3$ 时, R^n 没有直观的几何意义 .

单独一个零向量构成一个向量空间,称为零空间 .

例 18　集合

$$V = \{x = (0, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathrm{R}\}$$

是一个向量空间 .

证　若 $\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \in V$, $\beta = (0, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}} \in V$,则

$$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^{\mathrm{T}} \in V,$$

$$k\alpha = (0, ka_2, \cdots, ka_n)^{\mathrm{T}} \in V, k \text{ 为实数},$$

即 V 对向量加法和数乘有封闭性,故 V 是一个向量空间 .

例 19　集合

$$V = \{x = (1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathrm{R}\}$$

不是向量空间.因为若 $\alpha=(1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in V$,则

$$2\alpha=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^{\mathrm{T}}\overline{\in}V.$$

例 20 设 α,β 是两个已知的 n 维向量,集合

$$V=\{x=\lambda\alpha+\mu\beta\,|\,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$$

是一个向量空间.因为若 $x_1=\lambda_1\alpha+\mu_1\beta,\ x_2=\lambda_2\alpha+\mu_2\beta\in V$,则有

$$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\mu_1+\mu_2)\beta\in V$$

$$(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2\in\mathbf{R}),$$

$$kx_1=(k\lambda_1)\alpha+(k\mu_1)\beta\in V\quad(k\lambda_1,k\mu_1\in\mathbf{R}).$$

这个向量空间称为由向量 α,β 生成的向量空间.

一般地,由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合构成的集合是一个向量空间,记为

$$V=\{x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\,|\,k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbf{R}\},$$

称 V 为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间.

二、向量空间的基与维数

除零空间外,向量空间含有无穷多个向量,我们希望用有限个向量来表示整个向量空间的向量.例如,在 $\mathbf{R}^3$ 中,通常选用 3 个线性无关的 3 维单位坐标向量组 $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ e_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,对任意的 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$,都可表为 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$,称 e_1,e_2,e_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的基.

定义 7 V 是向量空间,若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$,满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中的任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基,r 称为 V 的维数,记为 $\dim V=r$,并称 V 是 r 维向量空间.

零空间的维数规定为 0.

例如在 $\mathbf{R}^n$ 中, n 维单位坐标向量组 $e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $e_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.因为对任意的 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,有

$$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,$$

故 $\dim\mathbf{R}^n=n$,即 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维向量空间.

将基的定义与本章第四节中极大无关组的定义比较,不难发现,若把向量空间 V 看作向量组 V,则向量空间 V 的基就是向量组 V 中的极大线性无关组,向量空间 V 的维数就是向量组 V 的秩.

例 21 $\mathbf{R}^n$ 中任意 n 个线性无关的向量都是 $\mathbf{R}^n$ 的基.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 n 个线性无关的向量,对任意的 $\alpha\in\mathbf{R}^n$,则 $n+1$ 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 线性相关,根据定理 2, α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.由定义 7 知, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

例 22 证明 $\alpha_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,3,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

证 根据例 21 的结论,只要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关即可.

把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 排成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,则

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=-3\neq0,$$

由定理 6 的推论 1 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

三、向量空间中向量的坐标

定义 8 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基,向量

空间 V 中任一向量 α 可惟一表为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$的系数构成的有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为向量 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标．

例 23　设 $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基，并将 $\beta_1=(1,3,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-1,0,3)^{\mathrm{T}}$ 表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合．

解　设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2)$．

要证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基，只要证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即只要证 $A\backslash\ E$．

设 $\beta_1=x_{11}\alpha_1+x_{21}\alpha_2+x_{31}\alpha_3$，$\beta_2=x_{12}\alpha_1+x_{22}\alpha_2+x_{32}\alpha_3$，即

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},$$

记作

$$B=AX.$$

对矩阵$(A\mid B)$施行初等行变换，若能将 A 化为 E，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，且当 A 化为 E 时，B 化为 $X=A^{-1}B$．

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&-1\\0&1&2&3&0\\1&0&2&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&-1\\0&1&2&3&0\\0&0&1&-1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&2&-5\\0&1&0&5&-8\\0&0&1&-1&4\end{array}\right).$$

因有 $A\backslash\ E$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，且

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&-5\\5&-8\\-1&4\end{pmatrix},$$

即

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3,$$
$$\beta_2 = -5\alpha_1 - 8\alpha_2 + 4\alpha_3.$$

由上式可知,β_1 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标为 2,5,-1,β_2 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标为 -5,-8,4.

习 题 三

A 组

1.已知 $\alpha=(2,1,0,4)$,$\beta=(-1,0,2,4)$.求 $-\alpha$,2β,$\alpha+\beta$,$3\alpha-2\beta$.

2.设 $\alpha=(-5,1,3,2,7)$,$\beta=(3,0,-1,-1,2)$.求 ξ,使 $\alpha+\xi=\beta$.

3.试问下列向量 β 能否由其余向量线性表示,若能,写出线性表示式:

(1) $\beta=(4,3)$,$\alpha_1=(2,1)$,$\alpha_2=(-1,1)$;

(2) $\beta=(1,1,1)$,$\alpha_1=(0,1,-1)$,$\alpha_2=(1,1,0)$,$\alpha_3=(1,0,2)$;

(3) $\beta=(1,2,0)$,$\alpha_1=(2,-11,0)$,$\alpha_2=(1,0,2)$;

(4) $\beta=(2,3,-1,-4)$,$e_1=(1,0,0,0)$,$e_2=(0,1,0,0)$,$e_3=(0,0,1,0)$,$e_4=(0,0,0,1)$.

4.举列说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

成立,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为 0 时,等式

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

才能成立,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关,则有不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0,\quad \lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

同时成立.

5. 判别下列向量组的线性相关性:

(1) $(1,2),(2,3),(4,3)$;

(2) $(1,2,3),(1,1,1),\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$;

(3) $(1,-1,0),(2,1,1),(1,3,-1)$;

(4) $(1,1,3,1),(4,1,-3,2),(1,0,-1,2)$;

(5) $(1,1,2,2,1),(0,2,1,5,-1),(2,0,3,-1,3),(1,1,0,4,-1)$.

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,证明向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_r,\beta_2=\alpha_2+\alpha_r,\cdots,\beta_{r-1}=\alpha_{r-1}+\alpha_r,\beta_r=\alpha_r$ 线性无关.

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,问 l,m 满足什么条件,向量组 $l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性相关.

8. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关,而其中任意 $r-1$ 个向量线性无关,证明:要使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

成立,$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 必全不为零或全为零.

9. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$,证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

10. 求下列向量组的秩,并求一个极大无关组:

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$;

(2) $\alpha_1=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(4,-1,-5,-6)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_3=(1,-3,-4,-7)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\alpha_1=(1,3,6,2), \alpha_2=(2,1,2,-1)$,

$\alpha_3=(3,5,10,2), \alpha_4=(-2,1,2,3)$;

(4) $\alpha_1=(1,0,-2,1), \alpha_2=(3,1,0,-1)$,

$\alpha_3=(1,1,4,-3), \alpha_4=(3,0,10,3)$;

(5) $\alpha_1=(1,-2,-1,0,2), \alpha_2=(1,-2,-1,-3,3)$,

$\alpha_3=(2,-1,0,2,3), \alpha_4=(3,3,3,3,4)$.

11 . **设** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **是一组** n **维向量**, **已知** n **维单位坐标向量** $e_1,e_2,\cdots,e_n$ **能由它们线性表示**, **证明** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性无关** .

12 . **设** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **是一组** n **维向量**, **证明它们线性无关的充分必要条件是**: **任一** n **维向量都可由它们线性表示** .

13 . **证明** $\mathrm{r}(A+B)\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

14 . **判别下面集合是否构成向量空间**, **若构成向量空间**, **求一个基及维数**:

(1) **平面上不平行于某一向量的所有向量的集合**;

(2) $V=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$;

(3) $V=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$;

(4) $V=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1$ **为整数**$\}$;

(5) $V=\{\alpha=(x_1,x_2,x_3) \mid x_1=5x_2\}$.

15 . **证明向量组** $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(0,0,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(0,3,2)^{\mathrm{T}}$ **是** R^3 **上的一个基** .

16 . **证明向量组** $\alpha_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ **构成** R^4 **的一个基**, **并把向量** $\beta=(2,2,4,1)^{\mathrm{T}}$ **用这个基线性表示** .

17 . **在** R^3 **中求一个向量** γ, **使它在下面两个基**:

(1) $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(-1,0,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\beta_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\beta_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$

下有相同的坐标.

18.设 R^n 的一个基为 $\alpha_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,求向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标.

B 组

1.设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,又向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合,即

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}b_{ij}\alpha_j\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

证明:$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sr}\end{pmatrix}$$

的秩小于 s.

2.设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 为互不相同的数,向量组 $\alpha_i=(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{n-1}),i=1,2,\cdots,k$.证明:

(1) $k\leq n$ 时,向量组线性无关;

(2) $k>n$ 时,向量组线性相关.

3.设 A,B 分别为 $m\times n,n\times m$ 矩阵,$n>m$ 且 $AB=E_m$,证明 B 的 m 个列向量线性无关.

4.设在向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中,$\alpha_1\neq 0$,并且每一个 α_i 都不能由前面的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示,证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

5.设向量组 B: $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 能由向量组 A: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K,$$

其中 K 为 $s \times r$ 矩阵,且向量组 A 线性无关 .证明向量组 B 线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $\mathrm{r}(K) = r$.

6 .用矩阵的秩讨论下面三个平面的位置关系:

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0,$$

$$\pi_3 : a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 .$$

第四章　线性方程组

在工程技术领域中,大量的问题都可归结为解线性方程组,因而研究线性方程组的解法和解的理论是线性代数的一个重要内容.

第一节　齐次线性方程组

设有 m 个方程的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则方程组(4.1)可写成矩阵乘积的形式

$$Ax = 0. \tag{4.2}$$

齐次线性方程组总是有解,零解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一个解.

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 为(4,1)的一个解,则

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \cdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组(4.1)的解向量,它也是(4.2)的一个解.

若把 A 看作由列向量组构成的矩阵,设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则方程组 $Ax = 0$可表示为向量组合的形式

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = 0. \tag{4.3}$$

上面给出了齐次线性方程组三种不同的形式,它们表示同一个线性方程组.

由第二章第四节的讨论知道 $Ax = 0$有非零解的充分必要条件是 $r(A) < n$.

为了研究齐次线性方程组解集合的结构,先讨论这些解的性质,并给出基础解系的概念.

性质 1　若 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$的解,则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是 $Ax = 0$的解.

证　由于 $A\xi_1 = 0$, $A\xi_2 = 0$,从而

$$A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0,$$

所以 $\xi_1 + \xi_2$ 是 $Ax = 0$的解.

性质 2　若 ξ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$的解, k 为任意实数,则 $k\xi$ 也是 $Ax = 0$的解.

证　$A(k\xi) = k(A\xi) = k \cdot 0 = 0$.

记 S 为齐次线性方程组 $Ax = 0$的全体解所组成的集合,由性质 1,2 可得:

(1) 若 $\xi_1, \xi_2 \in S$,则 $\xi_1 + \xi_2 \in S$;

(2) 若 $\xi \in S$, $k \in \mathrm{R}$,则 $k\xi \in S$.

这说明集合 S 对向量的加法和数乘两种运算是封闭的,所以集合 S 构成一个向量空间,称为解空间.

定义 1 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 S 的基称为该方程组的基础解系.即若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l$ 为齐次线性方程组的一个基础解系,则满足下列两个条件:

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l$ 是线性无关的解向量;

(2) 该方程组的任一解 ξ 可表为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l$ 的线性组合,即

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_l\xi_l .$$

下面来求解空间 S 的基和维数.

设 $Ax=0$ 的系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=r$,不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关,对 A 做初等行变换把它化为行最简形矩阵 B,设

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

以 B 为系数矩阵的线性方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n . \end{cases} \tag{4.4}$$

则方程组(4.1)与(4.4)同解.在(4.4)中,任给 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 一组值,则惟一确定 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值,于是就得到(4.4)的一个解,也就是(4.1)的解.现在令 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 取下列 $n-r$ 组数:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

由(4.4)依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \cdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \cdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \cdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

从而求得(4.1)的 $n-r$ 个解

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \cdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \cdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \cdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证明 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是解空间 S 的一个基.

由于 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 的后 $n-r$ 个分量构成的向量组线性无关,所以在每个向量前面添加 r 个分量而得到的 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 也线性无关.

设

$$\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

是方程组(4.1)的任一解,令

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_{n-r},$$

则 η 是(4.1)的解,比较 η 和 ξ 知,它们的后 $n-r$ 个分量对应相等,由于它们都满足方程组(4.4),从而知它们的前 r 个分量必对应相等,因此 $\xi=\eta$,即

$$\xi = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_{n-r}.$$

这样就证明了 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是解空间 S 的一个基,即基础解系.因此有

$$\dim S = n - r.$$

根据以上证明,得到下面的定理.

定理 1 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的全体解所构成的集合 S 是一个向量空间,当系数矩阵的秩 $\mathrm{r}(A)=r$ 时,解空间 S 的维数为 $n-r$.

当 $\mathrm{r}(A)=n$ 时,方程组 $Ax=0$ 只有零解.这时解空间 S 只含一个零向量,为 0 维向量空间,因而没有基础解系.

当 $\mathrm{r}(A)=r<n$ 时,方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个向量.设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系,则该方程组的任一解可表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意实数.上式称为方程组 $Ax=0$ 的通解.

若解空间 S 的维数为 $n-r$,则 S 中任意 $n-r$ 个线性无关的向量都是 $Ax=0$ 的基础解系,基础解系不是惟一的,因而通解的表达式也不是惟一的.

上面的证明过程提供了一种求基础解系的方法.

例 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解 .

解 将系数矩阵 A 通过初等行变换化为行最简形:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&-8&7\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1-8x_3+7x_4=0,\\x_2+6x_3-5x_4=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=\ \ 8x_3-7x_4,\\x_2=-6x_3+5x_4,\end{cases}(x_3,x_4\text{ 为自由未知量}).\qquad(4.5)$$

令

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

代入(4 .5)得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix},$$

从而得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故方程组的通解为

$$x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,\quad k_1,k_2\text{ 为任意实数}.$$

求基础解系和通解除了上述方法外,用下面的方法更简便 .

将(4 .5)改写为

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4 . \end{cases}$$

再将它改写成向量的形式,并令 $x_3 = k_1$, $x_4 = k_2$,**得到方程组的通解**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

例 2　**求齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

的通解 .

解　**将系数矩阵** A **通过初等行变换化成行最简形**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = x_5 . \end{cases}$$

方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k_1, k_2, k_3 为任意实数．

例 3　求 λ，使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 0, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，并求其通解．

解　首先计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1),$$

当 $D=\lambda^2(\lambda-1)=0$，即 $\lambda=0,1$ 时，有非零解．

将 $\lambda=0$ 代入原方程，得

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

方程组的系数矩阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为任意实数}.$$

将 $\lambda = 1$ 代入原方程组,得

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

方程组的系数矩阵

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 2x_3, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为任意实数}.$$

例 4　设 B 是一个三阶非零矩阵,它的每一列是齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解,求 λ的值和$|B|$.

解 由于 B 是一个三阶非零矩阵,所以 B 中至少有一列向量不是零向量,又由于 B 的每一列都是上面齐次方程组的解,故该齐次方程组有非零解,从而系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda - 5 = 0,$$

得 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$时,$\mathrm{r}(A) = 2$,解空间 S 的维数 $\dim S = 3 - 2 = 1$,即基础解系只有一个解向量,因而 B 的三个列向量必线性相关,得$|B| = 0$.

定理1不仅是齐次线性方程组求解的理论基础,也可用于向量组线性相关性及矩阵秩的讨论.

例5 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵,证明

$$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{r}(A).$$

证 设 x 为 n 维列向量.

若 x 满足 $Ax = 0$,则有 $A^{\mathrm{T}}(Ax) = 0$,即$(A^{\mathrm{T}}A)x = 0$;

若 x 满足$(A^{\mathrm{T}}A)x = 0$,则

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x = 0,$$

即

$$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = 0.$$

令 $Ax = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$, b_i 为实数,于是有

$$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2 = 0,$$

从而得

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

所以有

$$Ax = 0.$$

综上可知方程组 $Ax = 0$与$(A^{\mathrm{T}}A)x = 0$同解,因而它们的解空

间的维数相同,所以 $n - \mathrm{r}(A) = n - \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$,得

$$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{r}(A).$$

第二节　非齐次线性方程组

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.6}$$

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组(4.6)也可写作矩阵乘积的形式

$$Ax = b, \tag{4.7}$$

把 A 看作由列向量组构成的矩阵,设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则方程组(4.5)可写成向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b, \tag{4.8}$$

A 称为方程组的系数矩阵, $B = [A \mid b]$ 称为方程组的增广矩阵.

求解非齐次线性方程组首要的问题是要判断该方程组是否有解.若方程组有解,称该方程组是相容的;否则称为不相容的.

下面给出非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

定理 2　非齐次线性方程组(4.6)有解的充分必要条件是:它

的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩相等.

证　必要性　若 $Ax=b$ 有解,则(4.8)式成立,这表明 b 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示,从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价,A 的列秩等于 B 的列秩,故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

充分性　若 A 与 B 的秩相等,即 A 的列向量组的极大线性无关组也是 B 的列向量组的极大线性无关组,则 b 可由 A 的列向量组的极大线性无关组线性表示,因而可由 A 的 n 个列线性表示,有如(4.8)的表示式,故 $Ax=b$ 有解.

在非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中令 $b=0$ 得到的齐次线性方程组 $Ax=0$,称为与方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组,或者称为方程组 $Ax=b$ 的导出组.

下面给出非齐次线性方程组解的性质.

性质 3　若 η_1,η_2 是方程组 $Ax=b$ 的解,则 $\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

证　　$$A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0,$$
即 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

性质 4　若 η 是方程组 $Ax=b$ 的解,ξ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的解,则 $\xi+\eta$ 仍是方程组 $Ax=b$ 的解.

证　　$$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b,$$
即 $\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.

定理 3(结构定理)　设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解,则其一般解(通解)为

$$x=\xi+\eta^*,$$

其中 η^* 是 $Ax=b$ 的一个特解,ξ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的一般解.

证　由性质 4 知 $\xi+\eta^*$ 是 $Ax=b$ 的解.

设 x 是方程组 $Ax=b$ 的任一解,由性质 3 知 $x-\eta^*$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解,设 $x-\eta^*=\xi$,于是就有

$$x = \xi + \eta^* .$$

设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,齐次方程组 $Ax = 0$的一个基础解系为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$,则 $Ax = 0$的通解为

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

从而非齐次方程组 $Ax = b$ 的一般解(通解)为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^* . \tag{4.9}$$

非齐次线性方程组 $Ax = b$ 解的情形归纳如下:

(1) 若 $\mathrm{r}(A)\neq\mathrm{r}(B)$,则方程组 $Ax = b$ 无解;

(2) 若 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = r$,则方程组 $Ax = b$ 有解:

① 当 $r = n$ 时,方程组 $Ax = b$ 有惟一解;

② 当 $r < n$ 时,方程组 $Ax = b$ 有无穷多解,其通解为(4.9)式.

例 6　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

解　对增广矩阵 B 施行初等行变换

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_2]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

易见 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$,所以方程组有解.得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 + 2, \\ x_3 = x_4 + 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

即 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = 2$, $x_3 = 1$,方程组的一个解为

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

对应的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_4, \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

的通解为

$$k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意实数}.$$

若把同解方程组(4.10)改写成如下形式:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 + 2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_4 + 1, \\ x_4 = x_4, \end{cases}$$

可直接写出通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例 7　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_4 = 4. \end{cases}$$

解

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 + 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - r_2 \\ r_4 + 3r_2}]{\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - r_3]{\frac{1}{5}r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

因此, $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, $r(A) \neq r(B)$, **故方程组无解**.

例 8　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$$

的通解.

解 $B=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\2&3&1&1&-3&0\\1&0&2&2&6&6\\4&5&3&3&-1&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&-1&1&1&5&4\\0&1&-1&-1&-5&-4\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{\substack{r_1-r_2\\r_3+r_2}}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&2&6&6\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-2x_4-6x_5+6,\\x_2=x_3+x_4+5x_5-4,\\x_3=x_3,\\x_4=x_4,\\x_5=x_5.\end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-6\\5\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

k_1,k_2,k_3 **为任意实数**.

例 9 λ **取何值时,线性方程组**

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

(1)**有惟一解**;(2)**无解**;(3)**有无穷多解,并求其解**.

解 **方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right),$$

$$|A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

(1) **当** $\lambda \neq 1$ **且** $\lambda \neq -2$ **时**, $|A| \neq 0$, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 3$,**所以方程组有惟一解**.

(2) **当** $\lambda = -2$ **时**,

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$\mathrm{r}(A) = 2$, $\mathrm{r}(B) = 3$, $\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}(B)$,**所以方程组无解**.

(3) **当** $\lambda = 1$ **时**,

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 1$,**方程组有无穷多解**.

由同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + 1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意实数 }.$$

习 题 四

A 组

1 . **解下列齐次线性方程组**:

(1) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 17x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 . \end{cases}$

2 . **解下列非齐次线性方程组**:

(1) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 6; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 \qquad\quad - 4x_3 + 5x_4 = -1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 2; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

3 . **非齐次线性方程组**

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

当 λ 取何值时有解？并求出它的解 .

4 . **设**

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$$

问 λ 为何值时,此方程组有惟一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求解 .

5 . a, b **取何值时,方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有惟一解;无解;无穷多解,并求出有无穷多解时的一般解.

6. **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,**求做一个秩为 2 的方阵** B,**使** $AB = 0$.

7. **设** $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)^T$, $\beta = (1, 1, b+3, 5)^T$.

(1) a, b **为何值时**, β **不能表示为** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **的线性组合**;

(2) a, b **为何值时**, β **可以由** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **线性表示,且表法惟一.写出表示式.**

8. A **为** n **阶方阵,证明存在** n **阶非零矩阵** B,**使** $AB = 0$ **的充要条件是** $|A| = 0$.

9. **求一个齐次线性方程组,使它的基础解系为**

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

10. **设非齐次线性方程组** $Ax = b$,**系数矩阵** A **为** 5×3 **阶**, $r(A) = 2$,**且** η_1, η_2 **是该方程组的两个解,有** $\eta_1 + \eta_2 = (1, 3, 0)^T$, $2\eta_1 + 3\eta_2 = (2, 5, 1)^T$,**求该方程组的一般解.**

B 组

1. **判别下列命题的正误,试说明你判断的理由.**

(1) **若齐次线性方程组** $Ax = 0$ **有无穷多解,则非齐次线性方程组** $Ax = b$ **有解**;

(2) **非齐次线性方程组** $Ax = b$ **的解集构成一个解空间**;

(3) **设** A **为** $m \times n$ **矩阵**, $r(A) = m$,**则非齐次线性方程组** $Ax = b$ **有解**;

(4) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,齐次方程组 $Ax=0$仅有零解的充要条件是 A 的 n 个列向量线性无关;

(5) A,B 为 n 阶方阵,齐次线性方程组 $ABx=0$与 $Bx=0$同解,则 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$.

2 .设 A,B 都是 n 阶方阵,且 $AB=0$,证明 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$.

3 .若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$,证明 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=n$.

4 .设 A 为 n 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,证明:

$$\mathrm{r}(A^*)=\begin{cases} n, & \mathrm{r}(A)=n, \\ 1, & \mathrm{r}(A)=n-1, \\ 0, & \mathrm{r}(A)<n-1 . \end{cases}$$

5 .设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系 .证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关 .

6 .设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r, $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解(由题 5 知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解) .试证它的任一解可表示为

$$x=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\quad(\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1) .$$

第五章　相似矩阵及二次型

第一节　向量组的正交规范化

为了讨论向量的正交规范化问题,先引入下面的定义:

定义 1　设有 n 维向量

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

令

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

$[x, y]$称为向量 x 与 y 的内积.

内积是向量的一种运算,用矩阵记号表示,当 x 与 y 都是列向量时,有

$$[x, y] = x^{T} y.$$

内积满足下列运算律(其中 x, y, z 为 n 维向量,λ 为实数):

(1) $[x, y] = [y, x]$;

(2) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$;

(3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$.

一、向量的长度

利用向量的内积概念,可以定义 n 维向量的长度.

定义 2　设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个 n 维实向量,令

$$\| x \| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

$\| x \|$ 称为 n 维向量 x 的长度(或范数).

向量的长度具有下述性质:

(1) 非负性　当 $x \neq 0$ 时, $\| x \| > 0$;当 $x = 0$ 时, $\| x \| = 0$;

(2) 齐次性　$\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$;

(3) 三角不等式　$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

当 $\| x \| = 1$ 时, x 称为单位向量.对任一 n 维向量 x 及实数 k,有

$$\| kx \| = \sqrt{[kx, kx]} = |k| \cdot \| x \|.$$

由此知,当 $x \neq 0$ 时, $\left\| \frac{1}{\| x \|} x \right\| = \frac{1}{\| x \|} \cdot \| x \| = 1$,即 $\frac{1}{\| x \|} x$ 为一单位向量,称它为 x 的单位化.

二、向量的夹角

为了定义向量的夹角,还需要下面的命题:

命题1　对于任意两个 n 维列向量 x, y,有

$$[x, y]^2 \leq [x, x][y, y].$$

等号成立的充分必要条件是: x 与 y 线性相关.

证　$x = 0$ 或 $y = 0$ 时命题显然成立.现设 $x \neq 0, y \neq 0$,令 $z = tx + y$,则

$$\begin{aligned} 0 \leq [z, z] &= [tx + y, tx + y] \\ &= [x, x] t^2 + 2[x, y] t + [y, y]. \end{aligned}$$

上式右端是 t 的二次多项式,其值恒大于或等于 0,故它没有相异的实数根.因而,其判别式

$$\{2[x, y]\}^2 - 4[x, x][y, y] \leq 0,$$

$$[x, y]^2 \leq [x, x][y, y].$$

显然等号成立(即判别式等于零)的充分必要条件是:上述二次多项式有一个实根(二重根) $t = k$,这等价于

$$[kx + y, kx + y] = 0 .$$

由上述向量长度的性质知,后者等价于 $kx + y = 0$.

上述不等式称为施瓦兹(Schwarz)不等式,由此可得

$$\left| \frac{[x, y]}{\| x \| \cdot \| y \|} \right| \leq 1 \quad (x, y \text{ 是非零向量}) .$$

于是有下面的定义:当 $x \neq 0$, $y \neq 0$ 时,

$$\theta = \arccos \frac{[x, y]}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

称为 n 维向量 x 与 y 的夹角 .这样定义的两向量的夹角总介于 0 与 π 之间 .零向量与其他任何向量的夹角认为是不确定的 .

当 $[x, y] = 0$ 时,称向量 x 与 y 正交 .显然,若 $x = 0$,则 x 与任何向量都正交 .

定义 3 如果向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中任意两个向量都正交,而且每个 $x_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 都不是零向量,那么这个向量组就称为正交向量组 .

下面证明正交向量组的一个重要性质 .

定理 1 正交向量组一定是线性无关的 .

证 设 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是一个正交向量组,如果

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r = 0,$$

那么以 x_1^{T} 左乘上式两端,得

$$\lambda_1 x_1^{\mathrm{T}} x_1 = 0 .$$

因 $x_1 \neq 0$,故 $x_1^{\mathrm{T}} x_1 = \| x_1 \|^2 \neq 0$,从而必有 $\lambda_1 = 0$.类似可证 $\lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_r = 0$.于是向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性无关 .

我们常采用正交向量组作为向量空间的基,称为向量空间的正交基 .显然任意 n 个两两正交的 n 维非零向量都可以构成向量空间 R^n 的一个正交基 .

例 1　已知 3 维向量空间 R^3 中的两个向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交,试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$,**使** $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ **两两正交** .

解　记

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\alpha}_3$ **应满足齐次线性方程组** $Ax = 0$,**即**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

由

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

从而有基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,**取** $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **即可** .

三、规范正交基

定义 4　设 n **维向量** $e_1, e_2, \cdots, e_r$ **是向量空间** $V(V \quad \mathrm{R}^n)$ **的一个基,如果** $e_1, e_2, \cdots, e_r$ **两两正交,且都是单位向量,则称** $e_1, e_2, \cdots, e_r$ **是** V **的一个规范正交基** .

例如 $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

就是 R^4 **的一个规范正交基.**

若 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ **是** V **的一个规范正交基,那么** V **中任一向量** α **应能由** $e_1,e_2,\cdots,e_r$ **线性表示,设表示式为**

$$\alpha=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_r e_r.$$

为求其中的系数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$,**可用** e_i^{T} **左乘上式,有**

$$e_i^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda_i e_i^{\mathrm{T}}e_i=\lambda_i,$$

即

$$\lambda_i=e_i^{\mathrm{T}}\alpha=[\alpha,e_i].$$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **是向量空间** V **的一个基,要求** V **的一个规范正交基,也就是要找一组两两正交的单位向量** $e_1,e_2,\cdots,e_r$,**使** $e_1,e_2,\cdots,e_r$ **与** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **等价.这个过程称为把** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **这个基规范正交化.于是有下面的定理:**

定理2 **设** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **是一组线性无关的向量,那么,可以找到一组正交的向量** $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$,**使得** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ **与** $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i(i=1,2,\cdots,r)$ **等价.**

证 **只要令**

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1,\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1,\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\dfrac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,\\ \qquad\cdots\\ \beta_r=\alpha_r-\dfrac{[\alpha_r,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\cdots-\dfrac{[\alpha_r,\beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}\end{cases}$$

即可 .

这个证明过程给出了求与已知线性无关向量组等价的正交向量组的方法 .通常称为施密特(Schimidt)正交化方法 .如果再将所得的正交向量组单位化,即令

$$e_i = \frac{\beta_i}{\| \beta_i \|} \quad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

就得到一组与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价的正交单位向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_r$.

例 2　设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,试用施密特正交化方法把这组向量规范正交化 .

解　取 $\beta_1 = \alpha_1$;

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{\| \beta_1 \|^2} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{\| \beta_1 \|^2} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{\| \beta_2 \|^2} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再把它们单位化,取

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\| \beta_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{\beta_2}{\| \beta_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{\beta_3}{\| \beta_3 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e_1, e_2, e_3 即为所求 .

例 3 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量 α_2,α_3,使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交.

解 α_2,α_3 应满足方程 $\alpha_1^{\mathrm{T}}x=0$,即

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

它的基础解系为

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

把基础解系正交化,即为所求.即

$$\alpha_2=\beta_1,\quad \alpha_3=\beta_2-\frac{[\beta_1,\beta_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1,$$

其中 $[\beta_1,\beta_2]=1,[\beta_1,\beta_1]=2$,于是得

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

四、正交矩阵

定义 5 如果 n 阶方阵 A 满足

$$AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E,$$

那么称 A 为正交矩阵.

例如,实矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 都是正交矩阵.

正交矩阵有以下性质:

性质 1　正交矩阵的行列式等于 1 或 -1.

证　设 A 是正交矩阵,则

$$A^{\mathrm{T}}A = E.$$

两边取行列式得

$$|A^{\mathrm{T}}||A| = |E| = 1,$$

于是 $|A|^2 = 1$,由此即得 $|A| = \pm 1$.

性质 2　如果 A 是正交矩阵,则 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

性质 3　如果 A 是正交矩阵,则 A^{-1} 也是正交矩阵.

性质 4　如果 A, B 是同阶正交矩阵,则它们的乘积 AB 也是正交矩阵.

这些性质都可以简单地验证.

设 A 是一个 n 阶正交矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 A 的 n 个列向量,由式 $A^{\mathrm{T}}A = E$,得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = E,$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_j) = (\delta_{ij}),$$

亦即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

这说明: n 阶方阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是它的 n 个列向量恰好是两两正交的单位向量组,因而可以构成向量空间 R^n 的一个规范正交基.类似地, A 的 n 个行向量也构成向量空间 R^n 的一个规范正交基.

例4　已知正交单位向量

$$\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \alpha_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

(1) **求** α_3,α_4 **使** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **是正交单位向量组**;

(2) **求一个以** $\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}}$ **为第** 1,2 **列的正交矩阵**.

解　(1) **由于** α_1,α_2 **是线性无关的,所以可取两个向量**

$$\beta_3=(1,0,0,0),\quad \beta_4=(0,0,1,0),$$

使 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\beta_4$ **线性无关**.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\beta_4$ **正交化得到一个正交向量组**:

$$\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\alpha_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\gamma_3&=\beta_3-\frac{[\beta_3,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1-\frac{[\beta_3,\alpha_2]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2\\&=\beta_3-\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2\\&=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4&=\beta_4-\frac{[\beta_4,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1-\frac{[\beta_4,\alpha_2]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2-\frac{[\beta_4,\gamma_3]}{[\gamma_3,\gamma_3]}\gamma_3\\&=\beta_4-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2\\&=\left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

再将这组向量单位化,即得到一个正交单位向量组:

$$\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad \alpha_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$\alpha_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\qquad \alpha_4=\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

其中向量 α_3,α_4 **即为所求**.

(2) **以** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **的转置为列作一个矩阵**

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

这个矩阵即为所求.

这个例题表明:正交单位向量 α_1 与 α_2 在正交化和单位化的过程中都不会改变.这说明任意 $r(r\leq n)$个 n 维正交的单位向量都可以作为某个 n 阶正交矩阵的 r 个行(或列).

定义 6　若 T 为正交矩阵,则线性变换 $y=Tx$ 称为正交变换.

设 $y=Tx$ 为正交变换,则有

$$\|y\|=\sqrt{y^{\mathrm{T}}y}=\sqrt{x^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}Tx}=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}=\|x\|.$$

由于 $\|x\|$ 表示向量的长度,所以 $\|y\|=\|x\|$ 说明正交变换保持向量的长度不变.

第二节　相似矩阵

这一节讨论矩阵的相似问题.矩阵 $P^{-1}AP$ 与 A 称为相似.矩阵的相似关系可以用来简化运算.例如,如果 $B=P^{-1}AP$,那么 $B^k=P^{-1}A^kP$, $A^k=PB^kP^{-1}$.因此,当 B 比较简单时,可以利用 B^k 来计算 A^k.相似矩阵还可以用来简化线性方程组及微分方程组,相似矩阵也还有其他方面的应用.找出与 A 相似的矩阵中最简单的矩阵,这就是求矩阵的标准形问题.矩阵的标准形不仅可以用来简化运算,在其他学科中也有极广泛的应用.

定义 7　设 A, B 都是 n 阶方阵,若有可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 是 A 的相似矩阵,或称矩阵 A 与 B 相似,记作 $A \sim B$.对 A 进行运算 $P^{-1}AP$,称为对 A 进行相似变换,可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵 .

“相似”是矩阵之间的一种关系,这种关系具有下面 3 个性质:

(1) 自反性: $A \sim A$.

(2) 对称性:如果 $A \sim B$,那么 $B \sim A$.

这是因为,如果 $A \sim B$,那么有 P,使得 $B = P^{-1}AP$.令 $Q = P^{-1}$,则有 $A = Q^{-1}BQ$,所以 $B \sim A$.

(3) 传递性:如果 $A \sim B$, $B \sim C$,那么 $A \sim C$.

这是因为,已知 $A \sim B$, $B \sim C$,则有 P 和 Q,使 $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$,于是

$$C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ) .$$

因此, $A \sim C$.

由于相似关系具有对称性,当 $A \sim B$ 时,既可以说 A 与 B 相似,也可以说 B 与 A 相似 .

相似矩阵还有下面的一些性质:

(1) 相似矩阵有相同的行列式 .

证　设 $A \sim B$,那么有 P,使 $B = P^{-1}AP$.于是

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A| .$$

因为矩阵可逆的充分必要条件是它的行列式不等于零 .由此可知:

(2) 相似矩阵或者同时可逆,或者同时不可逆 .而且如果 $B = P^{-1}AP$,那么,当它们可逆时,它们的逆也相似,即 $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

(3) 如果 $B_1 = P^{-1}A_1P$, $B_2 = P^{-1}A_2P$,那么

$$B_1 + B_2 = P^{-1}(A_1 + A_2)P;$$

$$B_1 B_2 = P^{-1}(A_1 A_2) P;$$

$$kB_1 = P^{-1}(kA_1) P.$$

如果 $B = P^{-1} AP$, $f(x)$是一个多项式,那么

$$f(B) = P^{-1} f(A) P.$$

这 4 个等式都可以根据矩阵的运算律直接验证.这里留下的一个问题是:给了一个矩阵 A,如何去找矩阵 P,使 $P^{-1} AP$ 最简单?最简单的矩阵是数量矩阵 kE.但是与数量矩阵相似的矩阵只有它自己:$P^{-1}(kE) P = kE$.由此可知,不是每个矩阵都与某个数量矩阵相似 比数量矩阵稍为复杂的是对角矩阵,但也不是每个矩阵都与对角矩阵相似,下面先分析矩阵 A 与对角阵相似的条件.

为了简便起见,用 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$表示对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

设 A 是一个 n 阶矩阵, $A = (a_{ij})$, P 是一个 n 阶可逆矩阵, $P = (p_{ij})$.并设

$$P^{-1} AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

是对角矩阵.

用 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 表示 P 的 n 个列向量,并将 P 表示成分块矩阵:

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

于是从 $P^{-1} AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$得到

$$AP = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

即 $$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n).$$

等式左右两边的列向量依次相等,所以

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1,2,\cdots, n).$$

这说明:若存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 成为对角阵,那么 P 的列向量必须满足上述条件.满足这个条件的向量就是特征向量,其性质和求法将在下节讨论.

第三节　方阵的特征值与特征向量

定义 8　设 A 是 n 阶方阵,如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式

$$Ax = \lambda x \tag{5.1}$$

成立,那么,数 λ 称为方阵 A 的特征值,非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

(5.1)式也可以写成

$$(A - \lambda E)x = 0. \tag{5.2}$$

这是一个含有 n 个未知数、n 个方程的齐次线性方程组,它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|A - \lambda E| = 0, \tag{5.3}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

上式是以 λ 为未知数的一元 n 次方程,称为方阵 A 的特征方程.其左端 $|A - \lambda E|$ 是 λ 的 n 次多项式,记作 $f(\lambda)$,称为方阵 A 的特征多项式.显然,A 的特征值就是其特征方程的解.特征方程

在复数范围内恒有解,其个数为方程的次数(重根按重数计),因此,n 阶方阵 A 有 n 个特征值.

设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

事实上由于方阵 A 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 等价于

$$|\lambda E-A|=0.$$

当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值时,有

$$\begin{aligned}|\lambda E-A|&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned}\qquad(5.5)$$

令 $\lambda=0$,得 $|-A|=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,即 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

又由于在行列式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

的展开式中,主对角线上元素的乘积是其中一项:

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}).$$

由行列式定义,展开式中的其余项至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素,因此行列式 $|\lambda E-A|$ 的展开式中含 λ^n 与 λ^{n-1} 的项只能在主对角线元素乘积项中出现,因此有

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|.$$

将它与式(5.5)比较即得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

由 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 可得到结论:n 阶方阵 A 可逆的充要条件是

A 的 n 个特征值全不为零,即 $\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

一个 n 阶方阵 A 的对角线上的元素之和,称为矩阵的迹,记作 $\mathrm{tr}(A)$,即

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

亦即

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n .$$

设 $\lambda = \lambda_i$ 为方阵 A 的一个特征值,则由方程

$$(A - \lambda_i E)x = 0$$

可求得非零解 $x = p_i$,那么 p_i 便是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量(若 λ_i 为实数,则 p_i 可取实向量;若 λ_i 为复数,则 p_i 可取复向量).

例 5 求 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量 .

解 A 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 8 - 6\lambda + \lambda^2$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时,对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0 . \end{cases}$$

解得 $x_1 = x_2$,所以对应的特征向量可取为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 4$ 时,对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $x_1=-x_2$,所以对应的特征向量可取为 $p_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

显然,若 p_i 是方阵 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量,则 kp_i $(k\neq 0)$也是对应于 λ_i 的特征向量.

例 6　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解　A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时,解方程 $(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系
$$p_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

所以 $k_1p_1(k_1\neq 0)$是对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,解方程 $(A-E)x=0$.由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系
$$p_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$
所以 $k_2p_2(k_2\neq0)$是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

例 7 求矩阵 A 的特征值与特征向量:
$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}.$$

解 先求 A 的特征多项式
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+1),$$
所以 A 的特征值为 2(2 重), -1.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时,由
$$(A-2E)x=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$
即
$$-4x_1+x_2+x_3=0,$$
得它的一个基础解系
$$p_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}.$$
对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k_1p_1+k_2p_2(k_1,k_2$ 不同时为零).

当 $\lambda_3=-1$ 时,由
$$(A+E)x=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得基础解系为

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对应于 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量为 $k_3 p_3 (k_3 \neq 0)$.

例 8 设 λ 是方阵 A 的特征值,证明 λ^2 是 A^2 的特征值.

证 因 λ 是 A 的特征值,故有 $p \neq 0$ 使 $Ap = \lambda p$. 于是

$$A^2 p = A(Ap) = A(\lambda p) = \lambda(Ap) = \lambda^2 p,$$

所以 λ^2 是 A^2 的特征值.

以此类推,不难证明:若 λ 是 A 的特征值,则 λ^k 是 A^k 的特征值;$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值(其中 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m$, $\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$).

定理 3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值, $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 各不相等,则 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

证 设有常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m = 0,$$

则 $A(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m) = 0$,即

$$\lambda_1 x_1 p_1 + \lambda_2 x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m x_m p_m = 0.$$

类推之,有

$$\lambda_1^k x_1 p_1 + \lambda_2^k x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m p_m = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m-1).$$

把以上各式合写成矩阵形式,得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \cdots, 0).$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙行列式,当 λ_i 各不相

等时该行列式不等于0,从而该矩阵可逆.于是有

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m) = (0,0,\cdots,0),$$

即
$$x_j p_j = 0 \quad (j = 1,2,\cdots, m).$$

但 $p_j \neq 0$,故 $x_j = 0$ $(j = 1,2,\cdots, m)$.

所以向量组 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

定理4 若 n 阶方阵 A 与 B 相似,则 A 与 B 的特征多项式相同,从而 A 与 B 的特征值亦相同.

证 因 A 与 B 相似,即有可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = B$.故

$$\begin{aligned}|B - \lambda E| &= |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| \\ &= |P^{-1}||A - \lambda E||P| = |A - \lambda E|.\end{aligned}$$

推论 若 n 阶方阵 A 与对角阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似,则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值.

证 因 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值,由定理4知 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也就是 A 的 n 个特征值.

容易推证:若 $A = PBP^{-1}$,则 $A^k = PB^kP^{-1}$.A 的多项式

$$\varphi(A) = P\varphi(B)P^{-1}.$$

特别地,若有可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵,则

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1}, \varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

而对于对角阵 Λ,有

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\Lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

由此可方便地计算 A 的矩阵多项式 $\varphi(A)$.

定理 5 n 阶矩阵 A 与一个对角矩阵相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证 必要性 如果 A 与对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 相似,那么有可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

P 的列向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 满足

$$Ap_j = \lambda_j p_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 当然都不是零向量,所以都是 A 的特征向量.因为 P 是可逆矩阵,所以这 n 个特征向量都是线性无关的.

充分性 如果 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,它们所对应的特征值依次为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,所以

$$A\alpha_j = \lambda_j \alpha_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为列向量做一矩阵 P:

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的,所以 P 是可逆矩阵,而且

$$AP = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

此即
$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

所以 A 与一个对角矩阵相似.

联系定理 3,可得下面的推论.

推论 如果 n 阶方阵 A 的 n 个特征值各不相等,则 A 与对角矩阵相似.

例 9 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ **的一个特征向量为** $p=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

(1) **求参数** a, b **的值及** A **的与特征向量** p **对应的特征值**;

(2) A **与对角阵是否相似**?

解 (1) **设** A **的与特征向量** p **相对应的特征值为** λ, **可得方程组** $(A-\lambda E)p=0$, **即**

$$\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & a-\lambda & 3\\ -1 & b & -2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

即 $\begin{cases}-\lambda-1=0,\\ -\lambda+a+2=0,\\ \lambda+b+1=0,\end{cases}$ **解得** $\begin{cases}\lambda=-1,\\ a=-3,\\ b=0.\end{cases}$

(2) **由** $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0$ **知**, A **有三重特征值** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

由于

$$A+E=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -5 & 2 & -3\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可知 $r(A+E)=2$, $n-r=3-2=1$,因而三阶方阵 A 的与 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量仅有一个,所以 A 不与对角阵相似.

由定理 5 可知,前面的例 5 和例 7 中的矩阵由于有与其阶相同个数的线性无关的特征向量,于是这两个矩阵可以对角化;例 6 和例 9 中的矩阵所有的线性无关的特征向量的个数小于矩阵的阶数,所以这两个矩阵不能对角化.

第四节　实对称矩阵的对角化

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的向量,称 $\overline{x}=(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})^{\mathrm{T}}$ 为 x 的共轭向量,其中 $\overline{x_i}$ 表示 x_i 的共轭复数.

定理 6　实对称矩阵的特征值为实数.

证　设复数 λ 为实对称矩阵的特征值,复向量 x 为对应的特征向量,即 $Ax=\lambda x$, $x\neq 0$.

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数,$\overline{x}$ 表示 x 的共轭向量,则

$$A\overline{x}=\overline{A}\,\overline{x}=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\overline{\lambda}\,\overline{x}.$$

于是有

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax=\overline{x}^{\mathrm{T}}(Ax)=\overline{x}^{\mathrm{T}}(\lambda x)=\lambda\overline{x}^{\mathrm{T}}x,$$

及
$$\overline{x}^{\mathrm{T}}Ax=(\overline{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})x=(A\overline{x})^{\mathrm{T}}x=(\overline{\lambda}\,\overline{x})^{\mathrm{T}}x=\overline{\lambda}\,\overline{x}^{\mathrm{T}}x.$$

两式相减,得
$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{x}^{\mathrm{T}}x=0,$$

但因 $x\neq 0$,所以

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}x=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0.$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$,即 $\lambda=\overline{\lambda}$,这说明 λ 是实数.

显然,当特征值 λ_i 为实数时,齐次线性方程组

$$(A-\lambda E)x=0$$

是实系数方程组,由 $|A-\lambda_i E|=0$ 知其基础解系由实向量组成,所以对应的特征向量可以取实向量.

定理 7 设 A 是一个实对称矩阵.那么属于 A 的不同的特征值的特征向量是正交的.

证 设 α_1, α_2 分别是 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的实特征向量:

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2, \lambda_1 \neq \lambda_2 .$$

于是
$$[A\alpha_1, \alpha_2] = [\lambda_1 \alpha_1, \alpha_2] = \lambda_1 [\alpha_1, \alpha_2] .$$

而
$$[A\alpha_1, \alpha_2] = (A\alpha_1)^{\mathrm{T}} \alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}} A\alpha_2 = [\alpha_1, A\alpha_2]$$
$$= [\alpha_1, \lambda_2 \alpha_2] = \lambda_2 [\alpha_1, \alpha_2],$$

所以
$$\lambda_1 [\alpha_1, \alpha_2] = \lambda_2 [\alpha_1, \alpha_2] .$$

但是 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,所以

$$[\alpha_1, \alpha_2] = 0,$$

即 α_1 与 α_2 是正交的.

定理 8 设 A 为 n 阶对称矩阵,λ 是 A 的特征方程的 r 重根,则方阵 $A - \lambda E$ 的秩 $\mathrm{r}(A - \lambda E) = n - r$,从而对应的特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

证明从略.

定理 9 设 A 为 n 阶对称矩阵,则必有正交阵 P,使 $P^{-1} AP = \Lambda$,其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角阵.

证 设 A 的互不相等的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$,它们的重数依次为

$$r_1, r_2, \cdots, r_s \qquad (r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n) .$$

根据定理 6 及定理 8 知,对应的特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 恰有 r_i 个线性无关的特征向量,把它们正交化并单位化,可得 r_i 个单位正交的特征向量.由 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$ 知,这样的特征向量共可得 n 个.

根据定理 7 知对应于不同特征值的特征向量正交,故这 n 个单位特征向量两两正交.于是以它们为列向量构成正交阵 P,并有

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

其中对角阵 Λ 的对角元素含 r_1 个 λ_1, r_2 个 λ_2, $\cdots$, r_s 个 λ_s,恰是 Λ 的 n 个特征值 .

定理 9 说明了使 A 化为对角形矩阵的正交矩阵 P 的存在性 . 下一个问题是具体的 P 怎么找出 ? 因为 $P^{-1}AP$ 是对角形,所以 P 的每个列向量都是 A 的特征向量 .又因为 P 是一个正交矩阵,所以 P 的 n 个列向量组成一个正交的单位向量组 .因此在求出了 A 的 n 个线性无关的特征向量以后,还要再把这 n 个特征向量正交化和单位化 .定理 7 保证属于 A 的不同特征值的特征向量是正交的,所以只要先把属于 A 的不同特征值的各组特征向量正交化,然后再把所有正交向量单位化就行了 .可按以下步骤求出具体的正交矩阵 P:

(1) 求出特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ 的全部根, 即 A 的特征值,设 A 的全部不同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$.

(2) 对每个 λ_i($i = 1,2, \cdots, t$)解齐次线性方程组

$$(A - \lambda E)x = 0,$$

求出一个基础解系 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{is_i}$.

(3) 将 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{is_i}$ 正交化、单位化,得到一组正交的单位向量 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{is_i}$.它们是 A 的属于 λ_i 线性无关的特征向量 .

(4) 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 各不相同,所以向量组

$$\eta_{11}, \cdots, \eta_{1s_1}, \eta_{21}, \cdots, \eta_{2s_2}, \cdots, \eta_{t1}, \cdots, \eta_{ts_t}$$

仍是正交的单位向量组,它们总共有 n 个 .以这一组向量为列向量,做一个矩阵 P,则 P 就是所要求的正交矩阵 .

例 10 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求一个正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解　由于

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2(2-\lambda) & \frac{1}{2}(3+\lambda)(2-\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)^2(\lambda+7),$$

得特征值 $\lambda_1 = 2$(二重根)和 $\lambda_2 = -7$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时,解方程组 $(A-2E) = 0$,即

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得到两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

用施密特正交化方法将 α_1, α_2 正交化,得

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

再将 β_1, β_2 单位化得

$$p_1=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\-\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=7$ 时,解方程组$(A+7E)=0$,即

$$\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得到一个线性无关的特征向量

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\text{单位化得 } p_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

于是得正交矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

可以验证

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-7\end{pmatrix}.$$

例 11 **设**

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1\\-1&2&1&-1\\-1&1&2&-1\\1&-1&-1&2\end{pmatrix},$$

求正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形 .

解 首先求 A 的特征值 .因为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1&1\\-1&2-\lambda&1&-1\\-1&1&2-\lambda&-1\\1&-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda-5),$$

所以 A 的特征值为 1(3 重),5 .

当 $\lambda_1=1$ 时,把 $\lambda_1=1$ 代入齐次线性方程组$(A-\lambda E)x=0$,得

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求得一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

把它正交化,得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

再单位化,得

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2 = 5$ 时,把 $\lambda_2 = 5$ 代入齐次线性方程组$(A - \lambda E)x = 0$,**得**

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求得基础解系为

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

α_4 一定与 p_1, p_2, p_3 正交,再将 α_4 单位化,得 $p_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

p_1, p_2, p_3, p_4 是 A 的一组正交的单位特征向量.以它们为列,作一个矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

则 P 是一个正交矩阵,而且有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}.$$

这一例中求 A 的对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量时,由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不是两两正交的单位向量,所以必须先对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 施

行施密特正交化过程,再单位化后得到两两正交的单位向量组 p_1, p_2, p_3.

第五节　二次型及其标准形

二次型的问题起源于化二次曲线和二次曲面为标准型的问题.在解析几何中,当坐标原点与中心重合时,有心二次曲线的一般方程是:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f. \tag{5.6}$$

为便于研究这个二次曲线的几何性质,可以用适当的坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

把方程化为标准形

$$mx'^2 + ny'^2 = 1.$$

式(5.6)左端是一个二次齐次多项式,从代数学的观点看,化标准形的过程就是通过变量的线性变换化简一个二次齐次多项式,使它只含有平方项.这样一个问题,不但在几何中常会遇到,而且在数学的其他分支以及物理、力学中也常会遇到.在这一节里介绍二次齐次多项式的一些重要性质及其化简问题.

定义 9　含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \tag{5.7}$$

称为二次型.

为方便起见,二次型常简记为 f.取 $a_{ji} = a_{ij}$,则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ij}x_jx_i$,于是(5.7)式可以写成

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n +$$

$$
\begin{aligned}
& a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j .
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

定义 10 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组变量,则下面一组关系式

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\
x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\
\cdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n,
\end{cases}
\tag{5.9}
$$

称为由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个线性变换,简称线性变换.如果系数矩阵

$$
C = \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}
\end{pmatrix}
$$

是可逆的,就称线性变换(5.9)是可逆的(可逆的线性变换也称为非退化的线性变换).当 C 是实系数的正交矩阵时,就称(5.9)是正交的线性变换.正交的线性变换简称正交变换.

对于二次型,我们讨论的主要问题是:寻求可逆的线性变换(5.9)使二次型(5.7)能简化为只含平方项,也就是用(5.9)式代入(5.7)式时,能使

$$
f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 .
$$

这种只含平方项的二次型,称为二次型的标准形(或法式).

当 a_{ij} 为复数时,f 称为复二次型;当 a_{ij} 为实数时,f 称为实二次型.下面,只讨论实二次型,所求的线性变换(5.9)也限于实系数

范围 .

在讨论二次型时,矩阵是一个有力的工具,因此先把二次型用矩阵来表示 .由(5 .8)式,利用矩阵二次型可表示为

$$
\begin{aligned}
f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\
& a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
= {} & (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
= {} & (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

记

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},
$$

则二次型可记为

$$
f = x^{\mathrm{T}} A x, \tag{5 .10}
$$

其中 A 为对称矩阵 .

例 12 用矩阵表示二次型

$$
f = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 .
$$

解 由二次型的一般形式可知,二次型 f 中 $a_{11} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -2$, $a_{21} = a_{12} = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$, $a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$, $a_{23} =$

$a_{32}=\frac{1}{2}\times 8=4$.记

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

得

$$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x^{\mathrm{T}}Ax .$$

任给一个二次型,就惟一地确定一个对称阵;反之,任给一个对称阵,也可以惟一地确定一个二次型 .这样,二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系 .因此,我们把对称阵 A 叫做二次型 f 的矩阵,也把 f 叫做对称阵 A 的二次型 .对称阵 A 的秩就叫做二次型 f 的秩 .

还容易看出,二次型(5 .8)的矩阵 A 的对角线上的元素 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}正好就是(5 .8)式中 $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$ 的系数;而 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i\neq j)$正好就是 x_ix_j 的系数的一半 .由此看出,若已知二次型 f,可以容易地写出它对应的矩阵 A;反之,若已知实对称矩阵 A,也可以容易地写出它对应的二次型 f .

记 $C=(c_{ij})$,把可逆变换(5 9)记作

$$x=Cy,$$

代入(5 .8)式,有

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y .$$

定理 10 任给可逆矩阵 C,令 $B=C^{\mathrm{T}}AC$,如果 A 为对称阵,则 B 也是对称阵,且 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

证 A 为对称矩阵,于是有 $A^{\mathrm{T}}=A$,从而

$$B^{\mathrm{T}}=(C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C=C^{\mathrm{T}}AC=B,$$

即 B 为对称阵 .

再证 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A)$.

因 $B=C^{\mathrm{T}}AC$,故

$$\mathrm{r}(B)\leq\mathrm{r}(AC)\leq\mathrm{r}(A).$$

因 $A=(C^{\mathrm{T}})^{-1}BC^{-1}$,故

$$\mathrm{r}(A)\leq\mathrm{r}(BC)^{-1}\leq\mathrm{r}(B).$$

于是

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B).$$

这个定理说明经可逆变换 $x=Cy$ 后,二次型 f 的矩阵由 A 变为 $C^{\mathrm{T}}AC$,但二次型的秩不变.

定义 11 设 A、B 为 n 阶方阵,若存在 n 阶可逆矩阵 P,使

$$C^{\mathrm{T}}AC=B,$$

则称 A 合同于 B,记作 $A\simeq B$.

合同是方阵之间的一种关系,具有下列性质:

(1) 自反性 $A\simeq A$;

(2) 对称性 若 $A\simeq B$,则 $B\simeq A$;

(3) 传递性 若 $A\simeq B$, $B\simeq C$,则 $A\simeq C$.

由定理 10 可知:合同变换不改变矩阵的秩,也不改变矩阵的对称性.要使二次型 f 经可逆变换 $x=Cy$ 变成标准形,就是要使

$$
\begin{aligned}
y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy &= k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2\\
&=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

也就是要使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 成为对角阵.因此,下面的主要问题就是:对于对称矩阵 A,寻求可逆矩阵 C,使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角阵,或者说是寻找与 A 合同的对角阵.

定理 11 任给二次型 $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$,总存在正

交变换 $x=Py$,使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值 .

证　由本章第四节定理 9 知,任给一个实对称矩阵 A,总可以找到一个正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵,即

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) .$$

因为 P 是正交矩阵,所以 $P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$,于是

$$P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) .$$

由于一个二次型经可逆线性变换后得到的仍是二次型,且当一个二次型的系数矩阵是对角矩阵时,这个二次型就是平方和的形式 .

例 13　用正交变换 $x=Py$ 化实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形 .

解　$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix} .$$

下面先求一个正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形 .

A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&4-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)^2(\lambda+4),$$

所以 A 的特征值是 5(2 重)和 -4 .

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时,解齐次线性方程组$(A-5E)x=0$,即

$$\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得基础解系:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

正交化后,得

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-4$ 时,解齐次线性方程组 $(A+4E)x=0$,即

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得基础解系:

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

单位化 β_1,β_2,α_3 后得

$$p_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{6}\\-\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

由 p_1,p_2,p_3 组成正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

则二次型经正交变换

$$x=Py,$$

即
$$\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}y_2+\frac{2}{3}y_3,\\ x_2=-\frac{2\sqrt{2}}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3,\\ x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}y_2+\frac{2}{3}y_3,\end{cases}$$

化为标准形

$$f=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2.$$

例 14　**设二次型** $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$, **通过正交变换可化为标准形**: $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. **求参数** a **及所用的正交变换**.

解　f **对应的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & a & 3\end{pmatrix},$$

标准形对应的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

设有正交阵 T **使得** $T^{-1}AT=B$, **两边取行列式得** $|A|=|B|=$

10,即

$$2(9-a^2)=10.$$

由 $a>0$,得 $a=2$.

因为 $T^{-1}AT=B$,所以 A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=1$ 时,由$(A-E)x=0$,即

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得一个基础解系为

$$p_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_2=2$ 时,由$(A-2E)x=0$,即

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得一个基础解系为

$$p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=5$ 时,由$(A-5E)x=0$,即

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得一个基础解系为

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

显然 p_1, p_2, p_3 是两两正交的单位向量,以 p_1, p_2, p_3 为列即得所求的正交矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

第六节　用非退化的线性变换化二次型为标准形

二次型中最简单的一种是只包含平方项的形式,即平方和的形式

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2 . \tag{5.11}$$

在用正交变换化二次型成标准形时,标准形中各项的系数恰好是二次型的矩阵的特征值.除了可以用正交变换化二次型为标准形外,也可以用可逆线性变换化二次型为标准形.这里介绍拉格朗日配方法.

例 15　化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

成标准形,并求出所用的可逆线性变换.

解　由于 f 中含有变量 x_1 的平方项,故把含 x_1 的项归并起来,配方可得

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2, \end{aligned}$$

上式右端除第一项外已不再含有 x_1,继续配方,可得

$$f = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 .$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3 . \end{cases}$

这就把 f 化成标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$,所用的变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (|C| = 1 \neq 0) .$$

例 16 化二次型

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$$

为标准形,并写出所用的可逆变换 .

解 作可逆线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则 $$\begin{aligned} f &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)y_3 - 3(y_1 - y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 4y_2y_4 \\ &= (y_1 - y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 + 4y_2y_3 . \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} y_1 - y_3 = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$

得

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 4z_2z_3 = z_1^2 - (z_2 - 2z_3)^2 + 3z_3^2,$$

最后,令

$$\begin{cases} z_1 = w_1, \\ z_2 - 2z_3 = w_2, \\ z_3 = w_3, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} z_1 = w_1, \\ z_2 = w_2 + 2w_3, \\ z_3 = w_3, \end{cases}$$

就得到
$$f(x_1, x_2, x_3) = w_1^2 - w_2^2 + 3w_3^2,$$

也就是将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成了平方和的形式.

把上面所作的几个线性变换复合起来就得到总的线性变换:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

所用的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = w_1 - w_2 + 3w_3, \\ x_2 = w_1 + w_2 - w_3, \\ x_3 = w_3. \end{cases}$$

一般地,任何二次型都可用上面两例的方法找到可逆线性变换,把二次型化为标准形.由定理 10 知,标准形中含有的项数就是二次型的秩.应该注意的是,当所用的可逆线性变换不同时,得到的标准形可能不同.

第七节　正定二次型

一个二次型化为标准形时,由于所用的可逆线性变换不同,得到的标准形也可能不同.例如,二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

经可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

化为

$$f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2;$$

而经可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = z_2, \\ x_2 = 3z_1 - z_2 - 2z_3, \\ x_3 = 3z_1 - z_2 + 2z_3, \end{cases}$$

化为

$$f = 9z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2.$$

这就是说,二次型的标准形不是惟一的,但是一个二次型化为标准形后,标准形中的项数是惟一的(这个项数就是二次型的秩).当限定二次型的系数为实数,且所用的可逆线性变换为实变换时,标准形中正系数的个数是不变的,从而负系数的个数也是不变的.

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个实系数二次型.经过一个非退化的线性变换,再适当排列变量的次序(这也可以看成是作可逆线性变换),可使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$变成标准形

$$d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2,$$

其中 $d_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$, r 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的秩.因为实数可以开平方,而且其平方根不等于 0,所以可再作一次可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \quad\cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \quad\cdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

前面的标准形又变成

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2 .$$

这个式子称为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形.显然,规范形由 r, p 两个数决定.

定理 12 设有实二次型 $f = x^{\mathrm{T}} Ax$,它的秩为 r,有两个实的可逆变换

$$x = Cy \text{ 及 } x = Pz$$

使 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r)$,

及 $f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r)$,

则 $k_1, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.

这个定理通常称为惯性定理.证明从略.

推论 任何一个实系数的二次型都可以通过可逆的线性变换化成规范形.

定义 12 在实系数二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形中,正平方项的个数 p 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数;负平方项的个数 $r - p$ 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的负惯性指数;它们的差 $p - (r - p) = 2p - r$ 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的符号差.

定义 13 设有实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^{\mathrm{T}} Ax$,如果对任何 $x \neq 0$,都有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$,则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次

型,并称对称矩阵 A 是正定的,记作 $A>0$;如果对任何 $x\neq 0$,都有 $f(x)<0$,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为负定二次型,并称对称矩阵 A 是负定的,记作 $A<0$.

常常将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$简记为 $f(x)$.

定理 13 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的充分必要条件是它的标准形中的 n 个系数全为正.

证 设可逆变换 $x=Cy$ 使

$$f(x)=f(Cy)=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2.$$

充分性

设 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.任给 $x\neq 0$,则 $y=C^{-1}x\neq 0$,故

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2>0.$$

必要性(用反证法)

假设有 $k_s\leq 0$,则当 $y=e_s$(n 维单位坐标向量)时,$f(Ce_s)=k_s\leq 0$.显然 $Ce_s\neq 0$,这与 f 为正定相矛盾.这就证明了 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

推论 1 对称阵 A 为正定的充分必要条件是 A 的特征值全为正.

推论 2 正定二次型的规范形是

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

定义 14 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$是一个 n 阶矩阵.行标和列标相同的子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$$

称为 A **的主子式;其中,主子式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

称为 A **的顺序主子式**.

例如,设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**,那么**

$$1, 2, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

都是 A **的主子式;而** A **的顺序主子式共有** 4 **个,即**

$$1, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

定理 14　**对称阵** A **为正定的充分必要条件是** A **的各阶主子式都为正,即**

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0;$$

对称阵 A 为负定的充分必要条件是奇数阶主子式为负,而偶数阶主子式为正,即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0 \quad (r=1,2,\cdots,n).$$

该定理称为霍尔维茨定理.证明从略.

例 17　**判别实二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

是否正定.

解　$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

$$=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2-3x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} x_1+x_2=y_1, \\ x_2+2x_3=y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

这是一个可逆的线性变换,经过这个变换,$f(x_1,x_2,x_3)$**化为**

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-3y_3^2.$$

因为 f **的正惯性指数为** 2,**由定理** 13 **知,**$f(x_1,x_2,x_3)$**不是正定的.**

例 18　**判别二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$$

是否正定.

解　$f(x_1,x_2,x_3)$**的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

A 的顺序主子式

$$3>0,\ \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=8>0,$$

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix}=28>0,$$

由定理 14 知, $f(x_1, x_2, x_3)$是正定二次型 .

判别一个二次型是否正(负)定,可以从其正惯性指数来判别;也可以判别其对应的矩阵是否正(负)定,从而判别所讨论的二次型是否是正(负)定的 .

习　题　五

A　组

1 . 计算$[a, b]$:

(1) $a=(-1,0,3,-5)$, $b=(4,-2,0,1)$;

(2) $a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -1\right)$, $b=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -2, \sqrt{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2 . 试用施密特方法把下列向量组正交化:

(1) $(a_1, a_2, a_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$;

(2) $(a_1, a_2, a_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3 . 下列矩阵是不是正交矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$;　　　(2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

4. **设** x **为** n **维列向量**, $x^{\mathrm{T}}x = 1$, **令** $H = E - 2x^{\mathrm{T}}x$. **求证**: H **是对称的正交阵**.

5. **试证**: **若** A, B **是同阶的正交矩阵**, **则**

(1) A^{T} **是正交矩阵**;

(2) AB **也是正交矩阵**.

6. **试证**:

(1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;

(2) $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$;

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

7. **求下列矩阵的特征值和特征向量**:

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$;　　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$;　　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

8. **设** A, B **都是** n **阶方阵且** $|A| \neq 0$, **证明** AB **与** BA **相似**.

9．A 是一个3阶方阵，已知它的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$；对应的特征向量依次为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求矩阵 A．

10．设6，3，3为实对称矩阵 A 的特征值，属于3的特征向量为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求属于6的特征向量；

(2) 求矩阵 A．

11．求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵：

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$； (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$；

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$．

12．写出下列二次型的矩阵表示式：

(1) $f = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$；

(2) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_3^2$；

(3) $f = x_1 x_2 - x_3 x_4$;

(4) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4$.

13．**用正交变换化下列二次型为标准形，并写出所作的线性变换**：

(1) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$;

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

14．**用配方法化下列二次型为标准形，并写出所作的线性变换**：

(1) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;

(2) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

(3) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

15．**判别下列二次型的正定性**：

(1) $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

(2) $f = x_1^2 + 3x_1^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4$.

B 组

1．**求与向量组**$(1,0,1,1)$，$(1,1,1,-1)$，$(1,2,3,1)$**等价的正交单位向量组**．

2．**试证：若** n **维实向量** p **与任意** n **维实向量都正交，则** p **必为零向量**．

3．**设方阵** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **与** $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ **相似，求** x, y．

4．**设** A **与** B **相似，**C **与** D **相似，证明** $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ **与** $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ **相**

似.

5.证明:设 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的一组线性无关的特征向量;$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是一组不全为零的数,则 $k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_s p_s$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

6.设 p_1, p_2 分别是矩阵 A 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量,且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.试证:

(1) p_1, p_2 线性无关;

(2) $p_1 + p_2$ 不可能是 A 的特征向量.

7.计算:$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^k$ ($k > 0$, k 为整数).

8.证明:若 A 是 n 阶实对称矩阵,并且 $A^2 = A$,则存在正交阵 T,使得

$$T^{-1} AT = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

9.证明:若 A 是 n 阶实对称矩阵,并且 $A^2 = E$,则存在正交矩阵 T,使得

$$T^{-1} AT = \begin{pmatrix} E_r & \\ & -E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

10.试证:如果 A, B 都是 n 阶正定矩阵,则 $A + B$ 也是正定矩阵.

11.设 A 是一个 n 阶实对称矩阵,如果对任一 n 维列向量 x 都有 $x^{\mathrm{T}} Ax = 0$,则 $A = 0$.

12.设 U 为可逆矩阵,$A = U^{\mathrm{T}} U$.证明:$f = x^{\mathrm{T}} Ax$ 为正定二次型.

13.设对称矩阵 A 为正定矩阵,证明:存在可逆矩阵 U,使 $A = U^{\mathrm{T}} U$.

14. **设有二次型**

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3,$$

问 λ 取何值时,**该二次型为正定二次型**.

15. **已知二次型** $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ **的秩为** 2.

(1) **求参数** c **及二次型对应矩阵的特征值**;

(2) **指出方程** $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ **表示何种曲面**.

*第六章　线性空间与线性变换

线性空间是线性代数的研究对象之一,在第三章曾介绍过向量空间的概念,在这一章中,我们要把向量空间的概念推广,给出一般线性空间的概念,并给出线性变换的矩阵表示式,同一线性变换在两个不同基下矩阵的关系等.本章的内容比较抽象.

第一节　线性空间的概念

线性空间是向量空间 R^n 的推广,在第三章第五节关于 R^n 的定义中,抽象地看,向量空间是在一个非空集合中定义了加法和数乘两种运算,并且满足一定的运算法则.

定义1　设 V 是一个非空集合,R 是实数域,在 V 中定义两种运算,一种称为加法," $\alpha, \beta \in V$, $\alpha + \beta \in V$;另一种称为数乘向量," $k \in \mathrm{R}$, " $\alpha \in V$,有 $k\alpha \in V$.并且这两种运算满足下面8条运算法则(" $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $k, l \in \mathrm{R}$):

(1) 加法交换律　$\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) 加法结合律　$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) V 中存在零元素 0, " $\alpha \in V$,都有 $\alpha + 0 = \alpha$;

(4) V 中每个元素有负元素,即 " $\alpha \in V$,存在 V 中元素 β,使 $\alpha + \beta = 0$, β 称为 α 的负元素,记为 $\beta = -\alpha$;

(5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;

(6) 数乘结合律　$(kl)\alpha = k(l\alpha)$;

(7) 分配律　$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(8) 分配律　$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

则称 V 为(实数域 R 上的)线性空间, V 中元素称为向量 .

简言之,线性空间就是定义了加法和数乘运算并满足上述 8 条算律的集合 .

下面举一些例子 .

例 1　向量空间 $\mathbf{R}^n$ 为线性空间 .

例 2　$\mathbf{R}^{m\times n}=\{A=(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R}\}$ 对矩阵的加法和数乘矩阵的运算构成线性空间,称为实矩阵空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$.

例 3　次数不超过 n 的多项式的全体,记作 $P_n[x]$,即

$$P_n[x]=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\,\middle|\,a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}\right\}.$$

对通常的多项式加法和数乘多项式运算构成线性空间,称为多项式空间 $P_n[x]$.

上面的例子可用定义直接验证 .

例 4　n 次多项式的全体

$$Q_n[x]=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\,\middle|\,a_i\in\mathbf{R}\text{ 且 }a_n\neq0\right\}$$

对于通常的多项式加法和数乘运算不构成向量空间 .因为取 $p(x)\in Q_n[x]$,则 $0p(x)=0\cdot x^n+\cdots+0\cdot x+0\overline{\in}Q_n[x]$,即 $Q_n[x]$ 对数乘运算不封闭 .

例 5　$V=C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)\text{ 是 }[a,b]\text{ 上的连续函数}\}$ 对于函数的加法和数乘函数的运算构成线性空间 .因为由连续函数的性质知满足定义 1 中的 8 条算律 .

从上面的例子可见,线性空间是一个很广泛的概念,它使得许多常见的研究对象都可归入线性空间,作为向量来研究 .

下面讨论线性空间的性质 .

(1) 零元素是惟一的 .

证　设 $0_1,0_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素,即对任何 $\alpha\in V$,由定义 1 的法则(3),有

$$\alpha + 0_1 = \alpha, \quad \alpha + 0_2 = \alpha .$$

在第一式中取 $\alpha = 0_2$,在第二式中取 $\alpha = 0_1$,则有

$$0_2 + 0_1 = 0_2, \quad 0_1 + 0_2 = 0_1,$$

从而有 $0_1 = 0_2$.

(2) 任一元素的负元素是惟一的 .

证　设 β_1, β_2 是 α 的两个负元素,则由定义 1 法则(4),有

$$\alpha + \beta_1 = \beta_1 + \alpha = 0, \quad \alpha + \beta_2 = \beta_2 + \alpha = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) \\ &= (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2, \end{aligned}$$

故 α 的负元素惟一 .

(3) 设 0 为数零,0 为零向量,则

① $0\alpha = 0$;

② $k0 = 0$, k 为实数;

③ $(-1)\alpha = -\alpha$.

证明留给读者作为练习 .

下面定义线性空间的子空间 .

定义 2　设 V 是一个线性空间, W 是 V 的一个非空子集,若 W 关于 V 中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间,则称 W 为 V 的子空间 .

任何线性空间都有两个子空间,一个是它自身 $V \quad V$,另一个是零空间 $W = \{0\}$.

下面给出一个非空子集构成子空间的充分必要条件 .

定理 1　设 W 是线性空间 V 的非空子集,则 W 是 V 的子空间的充分必要条件是:

(1) 若 $\alpha, \beta \in W$,则 $\alpha + \beta \in W$;

(2) 若 $\alpha \in W$, $k \in \mathrm{R}$,则 $k\alpha \in W$.

证　必要性是显然的,只证充分性 .

设 W 满足(1),(2),则只须验证定义 1 中 8 条算律在 W 中也成立.

因为 $k\alpha\in W$,取 $k=0$,则

$$0\alpha=0\in W,$$

即 W 中存在零元素.又取 $k=-1$,则 $-\alpha=(-1)\alpha\in W$, W 中存在负元素.

因为 $W\subseteq V$, W 中元素的加法与数乘就是 V 中元素的加法和数乘,故定义 1 中其余 6 条算律在 W 中也成立,所以 W 是线性空间,从而是 V 的子空间.

例 6　在线性空间 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中取集合:

(1) $W_1=\{A\mid A\in\mathrm{R}^{n\times n}, A^{\mathrm{T}}=A\}$;

(2) $W_2=\{B\mid B\in\mathrm{R}^{n\times n}, |B|\neq 0\}$,

判断它们是否为子空间?

解　(1) $\forall A\in W_1$, $k\in\mathrm{R}$,由于

$$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}=kA,$$

所以 $kA\in W_1$;又 $\forall A_1, A_2\in W_1$,

$$(A_1+A_2)^{\mathrm{T}}=A_1^{\mathrm{T}}+A_2^{\mathrm{T}}=A_1+A_2,$$

所以 $A_1+A_2\in W_1$.

从而由定理 1 知, W_1 是 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 取 $B\in W_2$,则

$$0B=0_{n\times n}\notin W_2,$$

所以 W_2 不是 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 的子空间.

第二节　线性空间的基、维数和坐标

由于线性空间是向量空间 R^n 的推广,因而在第三章中定义的向量组的线性相关、线性无关、极大线性无关组、等价等概念以

及与上述概念相关的性质、结果在线性空间中都适用,故不再重述,以后将直接引用这些概念和性质.

下面讨论线性空间的基、维数、坐标及其有关问题.

定义 3 设 V 是线性空间,若存在 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) V 中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为线性空间 V 的一个基, n 称为线性空间 V 的维数.记为 $\dim V = n$.

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间,记作 V_n.

定理 2 n 维线性空间 V_n 的任意 n 个线性无关的向量都是 V_n 的基.

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V_n 的任意 n 个线性无关的向量.任取 $\beta \in V$,则 $n+1$ 个向量 $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 必线性相关,因而存在不全为零的数 $k_0, k_1, \cdots, k_n$,使得

$$k_0 \beta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n = 0$$

成立,必有 $k_0 \neq 0$,否则就有 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.故得

$$\beta = -\frac{k_1}{k_0}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_0}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_0}\alpha_n,$$

由 β 的任意性及基的定义知, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V_n 的一个基.

例 7 求矩阵空间

$$\mathrm{R}^{2\times 2} = \{ A = (a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{ij} \in \mathrm{R}, i, j = 1, 2\}$$

的维数和一个基.

解 任取矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{2\times 2},$$

则

$$A = a_{11}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

令

$$E_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{R}^{2\times 2}$中任一矩阵均可由 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$线性表示.

又任取一组数 x_1, x_2, x_3, x_4,由

$$x_1E_{11} + x_2E_{12} + x_3E_{21} + x_4E_{22} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix} = 0,$$

得 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, 故 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关.因此 $\dim \mathrm{R}^{2\times 2} = 4$, $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$是 $\mathrm{R}^{2\times 2}$的一个基.

类似地可得 $\dim \mathrm{R}^{m\times n} = m\cdot n$, $\{E_{ij} \mid i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\}$为 $\mathrm{R}^{m\times n}$的一个基,其中 E_{ij}表示第 i 行第 j 列的元素为 1,其余元素都为 0 的 $m\times n$ 矩阵.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维线性空间 V_n 的一个基,则对任何 $\alpha\in V_n$,都有一组有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

并且这组数是惟一的.

反之,任给一组有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,总有惟一的元素

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \in V_n.$$

这样, V_n 的元素 α 与有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$之间存在着一一对应的关系,因此可以用这组有序数来表示元素 α,于是有:

定义 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性空间 V_n 的一个基,对于任一 $\alpha\in V_n$,总有且仅有一组有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \qquad (6.1)$$

则数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标,并记作

$$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

(6.1)式中第二个等式是用矩阵乘法运算表示的.虽然对于一般的线性空间,$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$已不再是矩阵,但这种表示非常方便.

例 8 在线性空间 $P_3[x]$中,$p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$, $p_4(x) = x^3$ 是它的一个基,任一不超过 3 次的多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

都可表示为

$$p(x) = a_0 p_1(x) + a_1 p_2(x) + a_2 p_3(x) + a_3 p_4(x),$$

因此 $p(x)$在这个基下的坐标为$(a_0, a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$.

又 $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x - 1$, $q_3(x) = (x-1)^2$, $q_4(x) = (x-1)^3$是 $P_4[x]$的另一个基,利用 $p(x)$在 $x = 1$ 处的泰勒公式:

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3,$$

得到 $p(x)$在这个基下的坐标为

$$\left(p(1), p'(1), \frac{p''(1)}{2!}, \frac{p'''(1)}{3!}\right)^{\mathrm{T}}.$$

当在 n 维线性空间 V_n 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 后, V_n 中向量 α 就与 R^n 中的向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 之间建立了一一对应关系,且这种对应关系保持线性组合的表示式.因此,可以说 V_n 和 R^n 有相同的结构,我们称 V_n 与 R^n 同构.任何 n 维线性空间都与 R^n 同构,即维数相等的线性空间都同构.从而可知线性空间的结构完全被它的维数所决定.

第三节　基变换与坐标变换

线性空间 V_n 的基给定后, V_n 中向量在该基下的坐标是惟一确定的.由例 8 知,同一向量在不同基下有不同的坐标,下面讨论 V_n 中不同基之间的关系和同一向量在不同基下坐标的关系.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性空间 V_n 中的两个基,则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示,设表示式为

$$\begin{cases}\beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n,\\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{n2}\alpha_n,\\ \qquad\cdots\\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \cdots + c_{nn}\alpha_n.\end{cases} \tag{6.2}$$

利用矩阵的分块运算,(6.2)式可写为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C,$$

其中 $C = (c_{ij})_{n\times n}$.

定义 5　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维线性空间 V_n 的两个基,若有矩阵 $C_{n\times n}$,使

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C, \tag{6.3}$$

则称矩阵 C 为从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵,称(6.3)式为基变换.

V_n 的两个基是由过渡矩阵建立联系的,过渡矩阵 C 具有如下性质:

(1) 满足(6.3)式矩阵 C 的第 i 列是 β_i 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标.

(2) C 是可逆矩阵,并且 C^{-1} 是从基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V_n 的两个基,对向量 $\alpha\in$

V_n,α 在两个基下的坐标分别为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$,即

$$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)x \tag{6.4}$$

$$\alpha=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)y \tag{6.5}$$

则

$$\alpha=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)y=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)Cy. \tag{6.6}$$

由于 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是惟一的,比较(6.4)和(6.6)式得

$$x=Cy,$$

因而有下面的定理.

定理 3 设 V_n 中的向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标为 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$,基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 C,则有坐标变换公式

$$x=Cy. \tag{6.7}$$

例 9 设 R^3 的两个基为 $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\beta_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 C.

解 设 $C=(c_{ij})_{3\times 3}$为所求的过渡矩阵,则

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C,$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}C,$$

求得

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

例 10 设 4 维线性空间 V_4 的基变换是把基

$$\alpha_1 = (1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2 = (1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_3 = (-1,2,1,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_4 = (-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

变为基

$$\beta_1 = (2,1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \beta_2 = (0,1,2,2)^{\mathrm{T}},$$
$$\beta_3 = (-2,1,1,2)^{\mathrm{T}},\ \beta_4 = (1,3,1,2)^{\mathrm{T}},$$

试求 V_4 的坐标变换.

解 令 $A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $B = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 且

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)C,$$

其中 C 为过渡矩阵, 这样 $C = A^{-1}B$.

坐标变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (A^{-1}B)^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} y_1 = x_2 - x_3 + x_4, \\ y_2 = -x_1 + x_2, \\ y_3 = x_4, \\ y_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

第四节　线 性 变 换

下面讨论线性空间上的对应关系．

定义 6　设 V_n 是一个线性空间，若有对应关系 T，使得对 V_n 中每一个向量 α，都有 V_n 中惟一确定的向量 $\alpha' = T(\alpha)$ 与之对应，称 T 为 V_n 上的一个变换，α' 称作 α 的像，α 称作 α' 的原像．如果变换 T 又满足：

(1) **可加性**　" $\alpha, \beta \in V_n$，$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$；

(2) **齐次性**　" $k \in \mathrm{R}$，" $\alpha \in V_n$，$T(k\alpha) = kT(\alpha)$，

则称 T 为 V_n 上的一个线性变换．

定义 6 中的两个条件(1)和(2)可合写为一个条件：" $k_1, k_2 \in \mathrm{R}$，" $\alpha, \beta \in V_n$，T 满足：

$$T(k_1 \alpha + k_2 \beta) = k_1 T(\alpha) + k_2 T(\beta) .$$

例 11　在 R^3 中，把向量 $\alpha = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$ 向坐标平面 xOy 投影，得到向量 $\alpha' = (a, b, 0)^{\mathrm{T}}$ 是一个投影变换．易证它也是线性变换．

例 12　易证 R^3 中向量 $\alpha = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$ 对坐标平面 xOy 的反射 $T(\alpha) = \alpha' = (a, b, -c)^{\mathrm{T}}$ 也是一个线性变换．

例 13　在线性空间 R^n 中，定义变换 T_A 如下：

$$" \ x \in \mathrm{R}^n,\ T_A(x) = Ax,$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个给定的矩阵，证明 T_A 是 R^n 上的线性变换．

证　由于 " $x \in \mathrm{R}^n$，$Ax \in \mathrm{R}^n$，所以 T_A 是 R^n 上的变换．

又由于 " $x, y \in \mathrm{R}^n$，$k_1, k_2 \in \mathrm{R}$，有

$$\begin{aligned} T_A(k_1 x + k_2 y) &= A(k_1 x + k_2 y) = k_1 Ax + k_2 Ay \\ &= k_1 T_A(x) + k_2 T_A(y) . \end{aligned}$$

从而 T_A 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换.

例 14 $P_n[x]$上的微分变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是线性变换.

证 $\forall f(x), g(x) \in P_n[x], k_1, k_2 \in \mathbf{R}$,则由微分性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k_1 f(x) + k_2 g(x)] = k_1 \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + k_2 \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x},$$

所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是 $P_n[x]$上的线性变换.

线性变换具有下述性质:

(1) $T(0) = 0$;

(2) $T(-\alpha) = -T(\alpha)$;

(3) $T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) = k_1 T(\alpha_1) + k_2 T(\alpha_2) + \cdots + k_s T(\alpha_s)$;

(4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,则 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_m)$ 也线性相关.

这些性质请读者自己证明.

定理 4 设 T 是线性空间 V_n 上的线性变换,则

(1) 线性变换 T 的像集 $T(V_n) = \{y \mid \exists\ x \in V_n, 使\ y = T(x)\}$ 是 V_n 的子空间,称为 V_n 的像空间.

(2) $N(T) = \{x \mid T(x) = 0\}$是 V_n 的子空间,称为 T 的零空间,或线性变换 T 的核.

证 (1) 设 $\beta_1, \beta_2 \in T(V_n)$,则有 $\alpha_1, \alpha_2 \in T(V_n)$,使 $T(\alpha_1) = \beta_1, T(\alpha_2) = \beta_2$,从而

$$\begin{aligned} k_1\beta_1 + k_2\beta_2 &= k_1 T(\alpha_1) + k_2 T(\alpha_2) \\ &= T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2). \end{aligned}$$

由 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in V_n$,得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 \in T(V_n)$.故 $T(V_n)$是 V_n 的子空间.

(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2 \in N(T)$,即 $T(\alpha_1) = 0, T(\alpha_2) = 0$,则

$$T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=T(k_1\alpha_1)+T(k_2\alpha_2)$$
$$=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)=k_1\cdot 0+k_2\cdot 0=0,$$

所以 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\in N(T)$, $N(T)$**是** V_n **的子空间**.

例15 **求例**13**中给出的线性变换** T_A **的像空间和零空间** $N(T_A)$.

解 **设** $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,**其中** $\alpha_i=(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\cdots,\alpha_{ni})^{\mathrm{T}}$,**则**

$$T_A(\mathrm{R}^n)=\{y\mid \forall\ x\in\mathrm{R}^n, y=Ax\}$$
$$=\left\{y\,\middle|\,y=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i, x_i\in\mathrm{R}\right\}.$$

即 $T_A(\mathrm{R}^n)$**就是由** A **的列向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **生成的向量空间**.

$$N(T_A)=\{x\mid T_A(x)=0\}$$
$$=\{x\mid Ax=0\},$$

即 $N(T_A)$**就是齐次线性方程组** $Ax=0$**的解空间**.

第五节 线性变换的矩阵表示式

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **是** n **维线性空间** V_n **的一个基**, T **是** V_n **的线性变换**,**则基向量** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **的像** $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$**可由基** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性表示**:

$$\begin{cases}T(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n,\\T(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n,\\\qquad\cdots\\T(\alpha_n)=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n.\end{cases}$$

用矩阵表示,**即**

$$[T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)]=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为 $n\times n$ 矩阵 .

记 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left[T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)\right]$.

定义 7 设 T 是线性空间 V_n 上的线性变换, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基,若有矩阵 $A_{n\times n}$,使

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A, \tag{6.8}$$

则称 A 为线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 .

对于给定的线性变换 T, A 的第 i 列是 $T(\alpha_i)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标,坐标的惟一性决定了矩阵的惟一性;反之,给定矩阵 A,由(6.8)式,基的像 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$被完全确定,从而就惟一确定了一个线性变换 T,故在给定基下,线性变换 T 与 n 阶矩阵 A 之间是一一对应的 .

例 16 求 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 上的线性变换 $T(A)=A^{\mathrm{T}}$ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵(其中 E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素为 0 的二阶方阵) .

解 因为 $T(E_{11})=E_{11}$, $T(E_{12})=E_{21}$, $T(E_{21})=E_{12}$, $T(E_{22})=E_{22}$,因此

$$T(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以线性变换 T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 17 **设** 4 **维线性空间** $P_3[x]$**上的线性变换** T**定义如下**:

$$T[f(x)] = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x), \ \forall f(x) \in P_3[x],$$

求 T **在基**$\{1, x, x^2, x^3\}$**下的矩阵** A.

解　由于

$$T(1) = \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} - 1 = 0 - 1 = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} - x = 1 - x = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(x^2) = \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} - x^2 = 2x - x^2 = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(x^3) = \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} - x^3 = 3x^2 - x^3 = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

所以 T **在基**$\{1, x, x^2, x^3\}$**下的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

例 18 设 T 是 3 维线性空间 V_3 的线性变换,设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V_3 的基,线性变换 T 为

$$T(3,2,1)^{\mathrm{T}}=(0,0,2)^{\mathrm{T}},$$
$$T(0,1,1)^{\mathrm{T}}=(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$T(2,0,1)^{\mathrm{T}}=(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中括号内向量是关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标向量,求 T 在该基下的矩阵 A.

解 V_3 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 未具体给出,若设线性变换 T 在此基下的矩阵为 A,由变换的坐标公式 $y=Ax$,所给条件可写为

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

利用矩阵分块乘法,可得矩阵方程

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3&0&2\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&2\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&-2&7\\-2&1&4\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

线性变换的矩阵是对选定的基而言的.基变化时,线性变换的矩阵一般也会相应变化,下面讨论不同基下矩阵之间的关系.

设 T 为 V_n 上的线性变换,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V_n 的两个基,C 为过渡矩阵,则

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C.$$

又设 T 在上述两个基下的变换矩阵分别为 A 和 B,则

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

$$T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B,$$

从而有

$$\begin{aligned}T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)&=T[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C]\\&=T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AC\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)C^{-1}AC.\end{aligned}$$

这样

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)(C^{-1}AC-B)=0.$$

由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关,得 $C^{-1}AC-B=0$,即

$$B=C^{-1}AC.$$

定理 5 设线性空间 V_n 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 C, V_n 中的线性变换在这两个基下的矩阵分别为 A 和 B,则

$$B=C^{-1}AC.$$

这个定理表明 V_n 的线性变换在两个基下的矩阵 B 与 A 相似,且两个基之间的过渡矩阵 C 就是相似变换矩阵.由于线性变换 T 在不同基下的矩阵是相似的,而相似矩阵有相同的秩,由此得如下定义.

定义 8 设 T 是线性空间 V 的线性变换, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基,且 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$,则矩阵 A 的秩称为线性变换 T 的秩.特别当矩阵 A 为满秩矩阵时,也称 T 为满秩线性变换.

由此得,若 A 为线性变换 T 的矩阵,则 T 的秩为 $\mathrm{r}(A)$,若 T 的秩为 r,则 T 的零空间的维数为 $n-r$.

例 19 在 4 维线性空间 $P_3[x]$ 中,设线性变换 T 在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

求 T 在基 $\{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$ 下的矩阵 B .

解 由基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 到基 $\{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$ 下的过渡矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从而有

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

n 维线性空间 V_n 上的线性变换可用矩阵表示,且它们和矩阵有相同的运算 .

习　题　六

1 . 判断下列各集合对指定的运算是否构成线性空间:

(1) $V_1 = \{A = (a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{11} + a_{22} = 0\}$,对矩阵的加法和数乘运算;

(2) $V_2 = \{A \mid A \in \mathbf{R}^{n\times n}, A^{\mathrm{T}} = -A\}$,对矩阵的加法和数乘运算;

(3) $V_3 = \mathbf{R}^3$,对 $\mathbf{R}^3$ 中向量的加法和如下定义的数乘向量:$\forall \alpha \in \mathbf{R}^3, k\alpha = 0$;

(4) $V_4 = \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$,通常的函数加法和数乘运算.

2.求下列向量生成空间的维数与一个基:

(1) $\alpha_1 = (-1,3,4,7)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (2,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,
$\alpha_3 = (1,2,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4 = (-4,1,5,6)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\alpha_1 = (1,4,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (2,5,-1,-3,2)^{\mathrm{T}}$,
$\alpha_3 = (1,0,-3,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4 = (0,5,5,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

3.设 $\alpha_1 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (2,-3,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$.证明由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间和 β_1,β_2 生成的子空间相同.

4.设 $\mathbf{R}^3$ 中两个基为

$$\alpha_1 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (2,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

和

$$\beta_1 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_3 = (1,2,1)^{\mathrm{T}},$$

(1) 求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(2) 求 $\alpha = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

5.设 $\mathbf{R}^3$ 中的两个基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3,且 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$.

(1) 求 $\alpha = 2\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标;

(2) 求 $\alpha = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

6.判断下列变换哪些是线性变换:

(1) $\mathbf{R}^2$ 中:$T(x_1,x_2)^{\mathrm{T}} = (x_1 + 1, x_2^2)^{\mathrm{T}}$;

(2) R^3 中: $T(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_3^3)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\mathrm{R}^{n\times n}$中: A 为给定的 n 阶方阵, " $X\in\mathrm{R}^{n\times n}$,

$$T(X) = AX + A;$$

(4) $\mathrm{R}^{2\times 2}$中: $T(A) = A^*$, A^* 为 A 的伴随矩阵 .

7 . 设 T 是 R^2 中的线性变换,

$$T(1,3)^{\mathrm{T}} = (5, -1)^{\mathrm{T}}, T(2, -1)^{\mathrm{T}} = (3, -2)^{\mathrm{T}},$$

求 T 在自然基 e_1, e_2 下的矩阵 .

8 . T 是 R^3 上的线性变换, $T(x, y, z)^{\mathrm{T}} = (2x + y, x - y, 3z)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 T 在自然基 $e_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, e_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, e_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵;

(2) 求 T 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵 .

9 . 设 R^3 上的线性变换 T 由下面的关系确定:

$$\alpha_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}} \to \beta_1 = (2,3, -1)^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_2 = (1, -1,1)^{\mathrm{T}} \to \beta_2 = (3,0, -2)^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_3 = (1,2, -1)^{\mathrm{T}} \to \beta_3 = (-2,7, -1)^{\mathrm{T}},$$

(1) 求变换 T 在自然基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵;

(2) 求 R^3 中向量 $\alpha = (2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 在 T 下的像 .

10 . 取 $\mathrm{R}^{2\times 2}$中标准基

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

设 T 是 $\mathrm{R}^{2\times 2}$中如下定义的线性变换:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{" } X\in\mathrm{R}^{2\times 2}, T(X) = AX - XA,$$

求 T 在上述标准基下的矩阵 .

11．在线性空间 V_4 中，线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 2\\ -1 & -5 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

当基改为 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_4$ 时，T 的矩阵是什么？

12．n 阶对称矩阵的全体 V 对于矩阵的线性运算构成一个 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间，给出 n 阶矩阵 P，以 A 表示 V 中的任一元素，变换

$$T(A)=P^{\mathrm{T}}AP$$

称为合同变换，试证合同变换 T 是 V 中的线性变换．

习题答案

习题一

A 组

1.(1) 0;　　(2) $3abc-a^3-b^3-c^3$;

(3) $1+a+b+c$;　　(4) $-2(x^3+y^3)$.

2.(1) $x_1=a\cos\theta+b\sin\theta$, $x_2=b\cos\theta-a\sin\theta$;

(2) $x=\frac{5}{2}$, $y=-6$;

(3) $x=1$, $y=2$, $z=7$;

(4) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=-\frac{1}{2}$.

3.(1) 6,偶排列;　　(2) 9,奇排列;

(3) 11,奇排列;　　(4) $n(n-1)$,偶排列.

4.(1) 负号;　(2) 负号.

5.x^4 的系数为 1;　x^3 的系数为 -4.

6.$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

7.(1) 0;　(2) 0;　(3) $4abcdef$;

(4) $abcd+ab+cd+ad+1$.

9.(1) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$;　　(2) $-2(n-2)!$;

(3) 1;　　(4) $\lambda^{n-1}\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$;

(5) $\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$;　　(6) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$;

(7) $a_1 a_2 \cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$; (8) $\prod_{1\le j<i\le n+1}(i-j)$.

10. (1) $x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=-1,\ x_4=1$;

(2) $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=-1,\ x_4=2$.

11. $\lambda=1$ 或 $\mu=0$.

12. $\lambda=0,2$ 或 3.

B 组

1. $a_1=1,\ a_2=-3,\ a_3=0,\ a_4=2$.

习 题 二

A 组

1. $2A=\begin{pmatrix}2&6\\4&-2\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}4&3\\3&1\end{pmatrix}$, $2A-3B=\begin{pmatrix}-7&6\\1&-8\end{pmatrix}$,

$AB=\begin{pmatrix}6&6\\5&-2\end{pmatrix}$, $A^3+2A^2+A-E=\begin{pmatrix}21&24\\16&5\end{pmatrix}$.

2. $3AB-2A=\begin{pmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{pmatrix}$, $A^{T}B=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ba&b^2&bc\\ca&cb&c^2\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\ka_{11}+a_{31}&ka_{12}+a_{32}\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$; (4) 10; (5) $\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\\-3&6\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}6&-7&8\\20&-5&-6\end{pmatrix}$;

(7) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$;

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.(1) 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\neq 0$,而 $A^2=0$;

(2) 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,有 $A\neq 0$, $A\neq E$,而 $A^2=A$;

(3) 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,有 $X\neq Y$,而 $AX=AY$.

8.(1) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$,其中 a, b, c 为任意常数.

9.(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -11 & 4 & -8 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; (4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=0, \\ x_3=0. \end{cases}$

11.(1) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -18 & -4 \end{pmatrix}$; (2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

12 . (1) $(A+E)^2$; (2) $\frac{1}{2}(A-2E)$.

13 . (1) $(-1)^n \frac{4^n}{2}$; (2) $\frac{1}{2}A$.

15 . $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

16 . $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2^{13} & 4+2^{13} \\ -1-2^{11} & -4-2^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,731 & 2\,732 \\ -683 & -684 \end{bmatrix}$.

17 . (1) $r(A)=4$; (2) $r(A)=3$;

(3) $r(A)=3$; (4) $r(A)=2$.

18 . (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$.

19 . (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; (2) 200^{2k}, $\begin{bmatrix} 5^{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k & k4^{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. (1) $\left(E \mid A^{-1}\right)$; (2) $\begin{pmatrix} A^{T}A & A^{T} \\ A & E \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} E & A^{-1} \\ A & E \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$.

22. (1) $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

B 组

1. (1) $(B^{-1})^{T}A^{-1}$; (2) E.

习 题 三

A 组

1. $-\boldsymbol{\alpha}=(-2,-1,0,-4)$, $2\boldsymbol{\beta}=(-2,0,4,8)$,

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,1,2,8)$, $3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}=(8,3,-4,4)$.

2. $\boldsymbol{\xi}=(8,-1,-4,-3,-5)$.

3. (1) $\boldsymbol{\beta}=\frac{7}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$;

(2) $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;

(3) **不能**;

(4) $\boldsymbol{\beta}=2e_1+3e_2-e_3-4e_4$.

5. (1) **线性相关**; (2) **线性相关**; (3) **线性无关**;

(4) 线性无关; (5) 线性相关.

7. $ml = 1$.

10. (1) 秩为 2, α_1, α_2; (2) 秩为 2, α_1, α_2;

(3) 秩为 2, α_1, α_2; (4) 秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$;

(5) 秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

14. (2) $\dim V = n-1$, 基: $(-1,1,0,\cdots,0), (-1,0,1,0,\cdots,0), \cdots, (-1,0,\cdots,0,1)$;

(5) $\dim V = 2$, 基: $(5,1,0), (0,0,1)$.

16. $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4$.

17. $\gamma = (1,3,2)^{\mathrm{T}}$(答案不惟一).

18. $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots, a_{n-1} - a_n, a_n$.

B 组

6. (1) $r(A) = 3$, 三平面交于零点.

(2) $r(A) = 2$, 三平面交一直线.

(3) $r(A) = 1$, 三平面重合.

习 题 四

A 组

1. (1) $x = k_1(2,1,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(2,0,-5,7)^{\mathrm{T}}$;

(2) $x = k_1(-3,7,2,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(3) $x = k_1(0,1,1,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(0,1,0,1,0)^{\mathrm{T}} + k_3(1,-5,0,0,3)^{\mathrm{T}}$;

(4) $x = k_1(-2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-6,5,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

2. (1) $x = k(-3,-1,1,0)^{\mathrm{T}} + (1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) 无解;

(3) $x = k(5,-7,5,6)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)^{\mathrm{T}}$;

(4) $x = k_1(1, -2, 1, 0, 0)^T + k_2(1, -2, 0, 1, 0)^T +$
$k_3(5, -6, 0, 0, 1)^T + (-16, 23, 0, 0, 0)^T$.

3. $\lambda = 1$ 时有解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\lambda = -2$ 时有解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $\lambda \neq 1$, 且 $\lambda \neq 10$ 时有惟一解; $\lambda = 10$ 时无解; $\lambda = 1$ 时有无穷多解, 解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. (1) $a \neq 1$ 有惟一解;

(2) $a = 1, b \neq 1$, 无解;

(3) $a = 1, b = -1$ 有无穷多解, 一般解为

$k_1(1, -2, 1, 0)^T + k_2(1, -2, 0, 1)^T + (-1, 1, 0, 0)^T$

(k_1, k_2 为任意实数).

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. (1) $a = -1, b \neq 0$, β 不能表为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合;

(2) $a \neq -1$, $\beta = \dfrac{-2b}{a+1}\alpha_1 + \dfrac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \dfrac{b}{a+1}\alpha_3$.

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

10. $x = k(1, 5, -2)^T + (0, -1, 1)^T$ (k 为任意实数).

B 组

1. 正确的为(3), (4), (5).

习 题 五

A 组

1．(1) -9; (2) 0．

2．(1) $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $p_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$;

(2) $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $p_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $p_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$．

3．(1) **是**; (2) **是**; (3) **不是**．

7．(1) $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-2$, **对应** $\lambda_1=7$ **的特征向量为** $k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$, **对应** $\lambda_2=-2$ **的特征向量为** $l\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ $(l\neq 0)$;

(2) $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$, **对应** $\lambda_1=\lambda_2=1$ **的特征向量为**

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 不同时为零}),$$

对应 $\lambda_3=-1$ **的特征向量为**

$$l\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad(l\neq 0);$$

(3) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=9$, $\lambda_3=0$, **对应** $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ **的特征向量分别为** $k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $k_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $k_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $(k_1, k_2, k_3$ **为不等于零的任意常**

数);

(4) $\lambda=-1$,特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(k\neq0)$.

9. $A=\begin{pmatrix}5&-1&-2\\16&-4&-6\\2&0&-1\end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}$.

11. (1) $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$;

(2) $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-3&&\\&-3&\\&&6\end{pmatrix}$;

(3) $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}3&&&\\&3&&\\&&5&\\&&&1\end{pmatrix}$;

(4) $T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

12. (1) $f=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(2) $f=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(3) $f=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

(4) $f=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

13. (1) $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

(2) $f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_2^2 + y_4^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

14. (1) $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

(2) $f = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4}y_4^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix};$$

(3) $f = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

15. (1) 负定; (2) 正定.

B 组

1. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{33}}{33}, \frac{\sqrt{33}}{11}, \frac{2\sqrt{33}}{33}, -\frac{4\sqrt{33}}{33}\right),$

$\left(-\frac{7\sqrt{110}}{110}, \frac{3\sqrt{110}}{55}, \frac{2\sqrt{110}}{55}, \frac{3\sqrt{110}}{110}\right)$(答案不惟一).

3. $x = 4, y = 5$.

7. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^k \cdot 2 + 5^k & (-1)^{k+1} + 5^k & (-1)^{k+1} + 5^k \\ (-1)^{k+1} + 5^k & (-1)^k \cdot 2 + 5^k & (-1)^{k+1} + 5^k \\ (-1)^{k+1} + 5^k & (-1)^{k+1} + 5^k & (-1)^k \cdot 2 + 5^k \end{pmatrix}$.

14. $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$.

15. (1) $c = 3, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$;

(2) $f = 4y_2^2 + 9y_3^2$, $f = 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$ 时表示椭圆柱面.

习　题　六

1. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 不是.

2. (1) 2 维,基 α_1, α_2;

(2) 3 维,基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

5. $(3, 4, 4)^T$; $\left(\frac{11}{2}, -5, \frac{13}{2}\right)^T$.

6 . (1) **不是**; (2) **是**; (3) **不是**; (4) **是** .

7 . $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8 . $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9 . $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10 . $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

11 . $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.