高等学校教材

工科数学分析

上　册

第　二　版

张宗达　主编

张宗达　刘锐　王勇　盖云英　唐余勇　编

高等教育出版社

策划编辑　李艳馥

编　　辑　李艳馥

封面设计　于文燕

责任绘图　吴文信

版式设计　胡志萍

责任校对

责任印制

内容简介

《工科数学分析(第二版)》是在第一版的基础上修改而成的,分上、下两册.上册共八章:函数,极限与连续,导数与微分,微分中值定理,不定积分,定积分,导数与定积分的应用,微分方程.下册共六章:多元函数微分学,多元函数积分学,第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场,无穷级数,复变函数初步,微分几何基础知识.每章后有供自学的综合性例题,并以附录形式开了一些新知识窗口.

本书可作为工科大学本科一年级新生数学课教材,也可作为准备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书.

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010 - 64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2001年6月第1版
印　　张		印　　次	年　月第　次印刷
字　　数		定　　价	元

前　　言

培养基础扎实、勇于创新型人才,历来是大学教育的一个重要目标 .随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出 .在工科大学教育中,数学课既是基础理论课程,又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用 .为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求,我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神,结合哈尔滨工业大学多年来教学改革的经验,编写了这本教材 .

本教材的编写力求具有以下特色:

1 .重视对学生能力的培养,注意提高学生基本素质 .对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入 .取材上,精选内容,突出重点,强调应用,注意为学生创新能力的培养奠定基础 .

2 .例题和习题丰富,特别是综合性和实际应用性的题目较多,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题和解决问题的能力 .

3 .为了拓宽知识面,培养复合型人才,增加了复变函数简介,微分几何基础知识,微分方程组与稳定性概念,以简介和附录的形式为进一步学习现代数学知识留下接口 .

4 .在内容编排上,统一处理了多元函数积分学的概念,以利于提高学生抽象思维能力,将第二型线、面积分与场论结合起来,突出了理论的物理背景 .

5 .在微分方程和多元函数微分学中加强了代数知识的运用 .

6 .由于计算机技术的发展,数学软件包已得到广泛的使用,因而全书适度淡化了一些计算技巧的训练 .

此外,考虑到后续课程的需要,调整了部分内容的顺序,如将微分方程主要内容放在上册,而将无穷级数放在第二型线、面积分之后 .

哈尔滨工业大学富景隆、杨克劭、金永洙、万大成教授和南京师范大学宣立新教授对本书的编写工作给予了热情的支持,提出了许多改进意见和建议 .作为教材,本书曾在哈尔滨工业大学、东北电力学院和东北林业大学等院校试用多年,任课的老师也提出了不少宝贵意见 .在此一并表示衷心的感谢 .本次修订主要调整了一小部分内容的次序,增补少量习题,修改已发现的错误 .

由于编者水平有限,书中错误、缺点和疏漏在所难免,恳请读者批评指正 .

编者

2002 年 9 月

目　　录

第一章　函　　数

在中学的数学课里,对函数的一些基本概念已经作了介绍,由于函数是大学数学分析的研究对象,所以有必要对有关的知识进行简要的复习和进一步的讨论 .

1 .1　函数的概念

1 .1 .1　实数与数轴

实数包括有理数和无理数(无限不循环小数),有理数又分为正、负整数、分数和零 .

取定了原点、长度单位和方向的直线叫做数轴(图 1 .1) .实数与数轴上的点是一一对应的,有理数对应的点叫有理点,无理数对应的点叫无理点 .

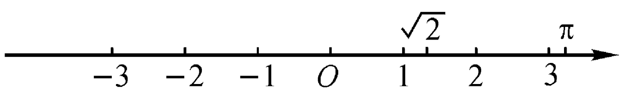


图 1 .1

实数具有如下两个性质:

1°　**有序性**　任意两个互异的实数 a, b 都可比较大小,或者 $a < b$,或者 $a > b$.实数按照由小到大的顺序排列在数轴上 .

2°　**完备性**　因为任何两个有理点 a, b 之间都有一个有理点 $\frac{a+b}{2}$,从而它们之间有无穷多个有理点,我们说有理点处处稠密 .但有理点并未充满整个数轴,比如还有 2,π 这样一些无理点 .因为有理数与无理数之和为无理数,所以无理点也处处稠密 .实际上,无理数远比有理数多得多 .实数充满整个数轴,没有空隙,这就是实数的完备性(或连续性) .

1 .1 .2　数集与界

以数为元素的集合叫做数集 .如自然数集、整数集、有理数集等 .所有实数构成的数集叫做实数集,习惯以 $\mathbf{R}$ 表示 .今后常常用到区间这一概念,它是 $\mathbf{R}$ 的一类子集 .

设 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $a < b$,以 a, b 为端点的有限区间包括:

开区间:$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$;

闭区间:$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;

半开区间:$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$.

在数轴上它们是介于点 a 与点 b 之间的线段,但开区间(a, b)不包含 a, b 两点,闭区间$[a, b]$包含 a, b 两点,半开区间$(a, b]$不包含 a 点,$[a, b)$不包含 b 点 称 $b - a$ 为上述有限区间的长度 .

此外,还有五种无穷区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a, x \in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b, x \in \mathbf{R}\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

上述各种区间统称为区间,有时也用相应的不等式表示区间,在没有必要指明哪种区间时,常常用一个大写的字母表示,如区间 I .

设 $\delta > 0$,称开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U_\delta(x_0)$.它是以 x_0 为中心,长为 2δ 的开区间(图 1 .2) .有时我们不关心 δ 的大小,常用“ 邻域 ”或“ x_0 附近 ”代替 x_0 的 δ 邻域 .

称集合$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$为 x_0 的去心 δ 邻域,即 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0,记为 $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

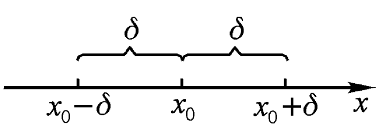


图 1 2

定义 1 .1 对数集 X,若有常数 $M(m)$,使得

$$x \leq M \quad (x \geq m), \quad \forall x \in X,$$

则说数集 X 有上(下)界,并称 $M(m)$为数集 X 的一个上(下)界 .

既有上界又有下界的数集叫做有界数集,否则称为无界数集 .

显然,如果某数集有上(下)界,就有无穷多个上(下)界 比如数集 $X = \{x \mid x < 1, x \in \mathbf{R}\}$,1 是它的上界,任何大于 1 的数都是它的上界 .有最大(小)值的数集(指数集中的数有最大(小)的),必有上(下)界,但有上(下)界的数集,未必有最大(小)值 .

公理 凡非空有上界的数集 X 一定有最小上界 μ,称为数集 X 的上确界,记为

$$\mu = \sup X .$$

显然,μ 是集合 X 的上确界等价于如下两条:

1° $\forall x \in X$,必满足 $x \leq \mu$;

2° $\forall \varepsilon > 0$,$\exists x \in X$,使得 $x > \mu - \varepsilon$.

命题 非空有下界的数集 X 一定有最大下界 γ.称为数集 X 的下确界,记为 $\gamma = \inf X$.

*证明 设 A 为 X 的所有下界构成的集合,则 $\forall x \in X$ 都是 A 的一个上界,所以 A 非空有上界.由公理知 A 有上确界(最小上界),记为 γ.显然,$\forall x \in X$,都有 $x \geq \gamma$,即 γ 是 X 的下界.由上确界的性质 1°,$\forall a \in A$ 都有 $a \leq \gamma$,即 γ 是 X 的最大下界.□

下确界也有类似上确界的等价定义,请读者叙述它.

数集 X 的上(下)确界可能属于 X,也可能不属于 X.比如,数值 1 是集合 $\{x \mid x < 1\}$和$\{x \mid x \leq 1\}$的上确界,但

$$1 \notin \{x \mid x < 1\}, \quad 1 \in \{x \mid x \leq 1\}.$$

1.1.3 绝对值

实数 x 的绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

就是说,$|x|$表示点 x 到原点 O 的距离,是非负实数.

绝对值有如下性质:

1° $|x| = x^2$; 2° $|x| \geq 0$;

3° $|-x| = |x|$; 4° $-|x| \leq x \leq |x|$;

5° $|x+y| \leq |x| + |y|$; 6° $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$;

7° $|xy| = |x||y|$; 8° $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

9° 当 $a > 0$ 时,$|x| < a \quad -a < x < a$;

10° 当 $b > 0$ 时,$|x| > b \quad x < -b$ 或 $x > b$.

要注意性质 4°,5°,6°在什么情况下才出现等号.

1.1.4 函数的概念

在一个过程中,保持数值不变的量叫做常量,习惯用英文字母表的前几个字母 a, b, c 等表示.在一个过程中,数值有变化的量叫做变量,习惯用英文字母表的后几个字母 x, y, z 等表示.

如一架飞机在飞行过程中,乘客人数、货物载重量都是常量,而燃料存余量、到目的地的距离都是变量.不难理解"变量是物质运动、变化的数量表现",所以要想掌握客观事物的运动、变化规律,从量的角度来说就必须研究变量.变量的变化不是孤立的,它与同一过程中的其他变量之间有确定的相依关系,研究变量就是要掌握这个相依关系.

例 1　在自由落体降落过程中,降落时间 t 和落下的距离 s 是两个变量,由物理的自由落体实验知,它们有如下依赖关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad \text{当 } 0\leq t\leq T \text{ 时},$$

其中 g 为重力加速度, T 是落地时间 .

例 2　金属杆受热时,杆长 l 和温度 τ 都是变量,有如下依赖关系:

$$l=l_0(1+\alpha_l\tau)\quad (\text{在常温 } 20\ ℃ \text{ 左右}) .$$

其中 l_0 为 0 ℃时的杆长, α 是线膨胀系数 .

例 3　某地某日的气温 T 和时间 t 两个变量,已由气象台用气温自动记录仪描成一条曲线(如图 1 .3) .这个图形表示出它们的对应关系 .时间范围是区间[0, 24) (时间从清晨 0 时开始计算) .

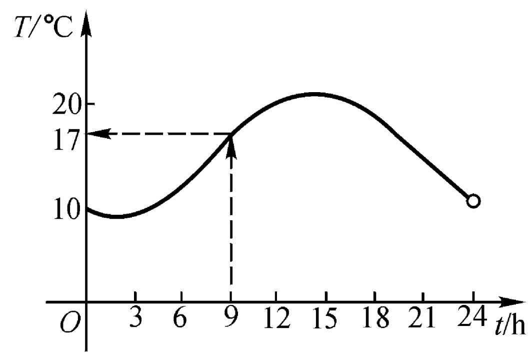


图 1 .3

例 4　某公司第四季度各月计算机销售量(台)如表 1 .1 .

月份 t 和销售量 S 两个变量有表 1 .1 中所示的依赖关系 .

表 1 .1

月　份 t	10	11	12
销售量 S	58	47	36

这些例子所表达的客观事物的实际意义及变量间的依赖关系虽然不同,但有一个共性:一个过程中的两个变量不能互不相干地任意取值,它们之间有确定的依赖关系,即数值上有确定的对应规律,使得其中一个变量在取值范围内每取得一个值时,另一个变量的值就按着这个规律确定了其对应值,把变量间的这种依赖关系叫做函数关系 .

定义 1 .2　如果两个变量 x 和 y 之间有一个数值对应规律,使变量 x 在其可取值的数集 X 内每取得一个值时,变量 y 就依照这个规律确定对应值,则说 y 是 x 的函数 .记作

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量 .

自变量 x 可取值的数集 X 称为函数的定义域 .所有函数值构成的集合 Y 称为函数的值域 .显然,函数 $y=f(x)$就是从定义域 X 到值域 Y 的映射,所以,有时把函数记为:

$$f:\quad X\rightarrow Y .$$

函数概念中有两个要素:其一是对应规律,即函数关系;其二是定义域.所以说函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数.

(1) 函数关系的表示方法

函数关系的表示方法是多种多样的,主要有:公式法(也叫解析法),如例 1,例 2 中的函数;图形法,如例 3;表格法,如例 4.

各种表示函数的方法,都有它的优点和不足.公式法给出的函数便于进行理论分析和计算.图形法给出的函数形象直观,富有启发性,便于记忆.表格法给出的函数便于查找函数值,但它常常是不完全的.今后我们以公式法为主,配合使用图形法和表格法.

公式法给出的函数,有时在定义域内由一个公式表达出函数关系,有时无法或很难用一个公式表达出函数关系,而在定义域的不同部分上用不同的公式来表达一个函数关系,这样的函数称为分段函数.

例 5 考虑将 1 kg 的 -10 ℃的冰在 101 325 Pa 下加热成 10 ℃的水的过程中,温度 t 和所需要的热量 Q 之间的函数关系.因冰的比热容为 2 302 J·kg^{-1}·℃$^{-1}$,冰的熔解热为 335 000 J·kg^{-1},而水的比热容是 4 186 J·kg^{-1}·℃$^{-1}$,因此函数关系是(如图 1.4):

$$Q=\begin{cases}2\,302t+23\,020, & \text{当 } -10\leq t<0,\\ 4\,186t+358\,020, & \text{当 } 0<t\leq 10.\end{cases}$$

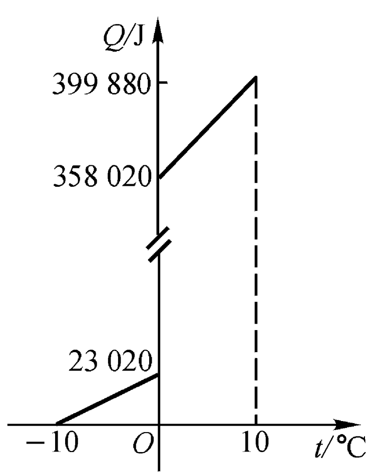


图 1.4

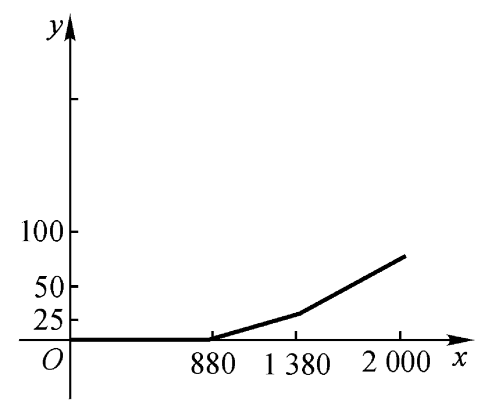


图 1.5

例 6 根据国家税收规定:个人月收入少于 880 元的部分不纳税,超过 880 元而少于 1 380 元的部分按 5% 纳税,而超过 1 380 元少于 2 000 元的部分按 10% 纳税.所以个人月收入 x 与应纳税 y 的函数关系是(图 1.5)

$$y=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leq 880,\\ (x-880)\cdot 5\%, & \text{当 } 880<x\leq 1\,380,\\ 25+(x-1\,380)\cdot 10\%, & \text{当 } 1\,380<x\leq 2\,000.\end{cases}$$

例 7　符号函数(克罗内克[①]函数)(图 1.6)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

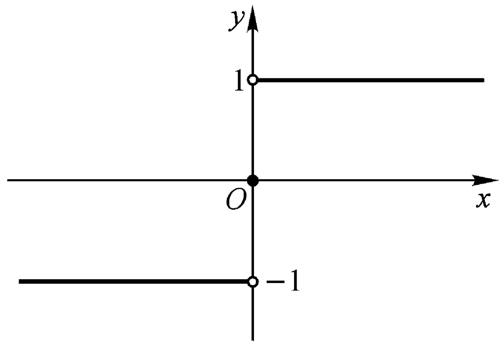


图 1.6

例 5,例 6,例 7 皆为分段函数.

(2)　定义域

函数的定义域是自变量的取值范围,也是函数关系的存在范围.在研究每个函数时,都应知道它的定义域.那么如何确定定义域呢?对于具有实际意义的具体函数,需由它的实际意义来确定;在纯数学的研究中,定义域是在实数范围内能合理地确定出函数值的自变量的所有值构成的集合.所以注意负数不能开偶次方,零不能作分母,负数与零不能取对数等是有益的.若函数表达式中含有若干项,则定义域应是各项中的自变量取值范围的交集.

例 8　函数

$$S=\pi r^2.$$

如果这是圆面积 S 和半径 r 之间的函数关系,则定义域应为$(0,+\infty)$.

如果这是半径为 1 的铜盘受热膨胀过程中面积与半径的关系,则定义域应为$(1,1+\delta)$,其中 δ 是一个较小的正数.

如果自变量 r 和因变量 S 都没有具体含义,那么这个函数的定义域应是$(-\infty,+\infty)$.

例 9　确定 $y=\sqrt{4x^2-1}+\arcsin x$ 的定义域.

解　因负数不能开平方,所以有

$$4x^2-1\geq 0,$$

它等价于$|x|\geq\frac{1}{2}$,又因 $\arcsin x$ 的定义域是$|x|\leq 1$,故所求的定义域是集合

$$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right].$$

例 10　确定 $y=\frac{1}{\lg(3x-2)}+\tan x$ 的定义域.

解　由负数和零不能取对数,零不能作分母,及正切函数的定义知

$$3x-2>0,\quad 3x-2\neq 1,\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

故定义域

$$X=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{2}{3},\text{且 } x\neq 1,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots),\ x\in\mathbf{R}\right\}.$$

---

① 克罗内克 Kronecker L.1823—1891,德国数学家.

(3) 函数值的记号

如果 a 是函数 $f(x)$ 的定义域内的一点,则说函数 $f(x)$ 在点 a 处有定义.当 $x=a$ 时,对应的 y 值记为 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$.

例 11 函数 $y=f(x)=\pi x^2$,则

$$y|_{x=2}=f(2)=\pi\cdot 2^2=4\pi,$$

$$y|_{x=\frac{1}{3}}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{\pi}{9},$$

$$y|_{x=a}=f(a)=\pi a^2,$$

$$y|_{x=a+b}=f(a+b)=\pi(a+b)^2,$$

$$y|_{x=\ln a}=f(\ln a)=\pi(\ln a)^2,$$

$$f(-a)=\pi(-a)^2=\pi a^2=f(a).$$

(4) 函数的图形

给定函数 $y=f(x)$, $x\in X$,将每一个 $x\in X$ 和它对应的 $y(=f(x))$ 作一个有序数组 (x,y),在坐标平面 xOy 上找对应点 $M(x,y)$,则点集 $G=\{M(x,y)\mid x\in X$,且 $y=f(x)\}$ 称为函数的图像或图形,通常为一条曲线.由平面解析几何知,作函数图形的基本方法就是描点法.另外,还有一些作图的技巧需要知道.

1° 平移作图

已知 $y=f(x)$ 的图形,求作 $y=f(x)+b$(b 为常数)的图形.当 $b>0$ 时,将 $y=f(x)$ 的图形向上平移 b 个单位即可,或者将坐标系向下平移 b 个单位.当 $b<0$ 时,图形向下平移 $|b|$ 个单位即可.

要作 $y=f(x+a)$(a 为常数)的图形.当 $a>0$ 时,将 $y=f(x)$ 的图形向左平移 a 个单位,或者将坐标系向右平移 a 个单位都可.当 $a<0$ 时,移动方向相反.

2° 放大、压缩作图

已知 $y=f(x)$ 的图形,求作 $y=af(x)$ 的图形.当 $a>1$ 时,把 $y=f(x)$ 的图形的纵坐标放大 a 倍,即得 $y=af(x)$ 的图形.求作 $y=f(ax)$ 的图形,当 $a>1$ 时,把 $y=f(x)$ 的图形的横坐标压缩 a 倍即可.对 $0<a<1$ 和 $a<0$ 情形,请读者自己考虑.

3° 叠加作图

已知 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形,求作 $y=f(x)+g(x)$ 的图形.将 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的纵坐标相加即可.

例 12 作函数 $y=\sin x+2\cos x$ 的图形.

此题可以利用 $y=\sin x$ 和 $y=2\cos x$ 的图形叠加作图,但这比较麻烦.我们先将函数作恒等变形.

$$y = \sin x + 2\cos x$$
$$= 5\left(\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x\right)$$
$$= 5\sin(x + x_0)\ (x_0 = \arctan 2).$$

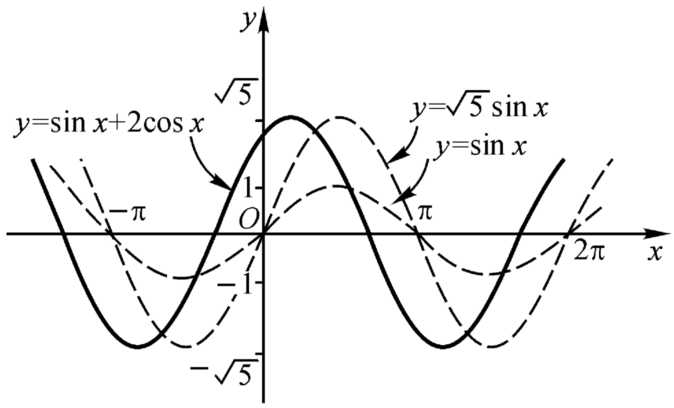


图 1 .7

因此,先将 $y = \sin x$ 的图形的纵坐标放大 5倍,得到 $y = 5\sin x$,然后将 $y = 5\sin x$ 的图形向左平移 arctan 2 个弧度,就得到 $y = \sin x + 2\cos x$ 的图形(见图 1 .7) .

1 .2 几个常用的概念

1 .2 .1 函数的几种特性

在研究函数时,注意到每个函数的特性,将带来许多便利 .

(1) 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$的定义域 X 关于原点对称,即当 $x \in X$ 时,必有 $-x \in X$,若对任何 $x \in X$,都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $y = f(x)$为奇函数;若对任何 $x \in X$,都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $y = f(x)$为偶函数 .

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称 .

由定义不难证明: $y = x$, $y = x^3$, $y = 1\ x$, $y = \sin x$ 都是奇函数; $y = x^2$, $y = x^4$, $y = 1\ x^2$, $y = \cos x$ 都是偶函数 .还可以证明:

奇函数的和仍为奇函数,偶函数的和仍为偶函数;两个奇函数的积、或两个偶函数的积都是偶函数,一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数 .定义域 X 关于原点对称的任何函数 $y = f(x)$均可表示为一个奇函数和一个偶函数之和,因为

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

右边的第一项是奇函数,第二项是偶函数 .

(2) 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 X,若有常数 $T \neq 0$,使得当 $x \in X$ 时,必有 $x \pm T \in X$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则说 $y=f(x)$是周期函数,并称常数 T 为它的一个周期.

一个周期函数的周期有无穷多个,比如,常数 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0)$都是 $y=\sin x$ 的周期,2π 是它的最小正周期.一个周期函数,若有最小正周期 T_0,则称 T_0 为函数的基本周期.习惯上,说"这个函数的周期是 T_0".虽然 $2T_0$ 也是它的一个周期,但不能说"它的周期是 $2T_0$".在中学里已经知道 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期为 2π, $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期为 π.此外,并不是每个周期函数都有基本周期.

例 1 狄利克雷①函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

它是一个周期函数.因为任何非零有理数都是它的周期,所以它无基本周期.它是偶函数,它的图形是容易想象的,但实际上画不出来.

具有基本周期的周期函数的图形,可以由其一个基本周期上的图形沿 x 轴平移基本周期的整数倍距离得到,所以图形具有重复性.

(3) 函数的单调性

设 $x_1<x_2$ 是区间 I 上任意两点,若恒有

$$f(x_1)\leq f(x_2)\quad (f(x_1)\geq f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上单调增加(单调减少),简称单增(单减),或者称 $f(x)$在 I 上单调上升(单调下降).若上述不等式中不出现等号,则称 $f(x)$在区间 I 上严格单调增加(严格单调减少),简记为↑(↓).

在定义域上,单调增加或单调减少的函数统称为单调函数,严格单调增加或严格单调减少的函数统称为严格单调函数.

严格单调增加函数的图形,随着 x 增大图形的纵坐标也增大,严格单调下降函数的图形,随着 x 增大图形的纵坐标减小.

例如,在$[0,+\infty]$上 $y=\ \ x$↑;又例如,在$(-\infty,0]$上,$y=x^2$↓;在$[0,+\infty)$上,$y=x^2$↑,所以 $y=x^2$ 不是单调函数,但它有单调区间.而函数 $y=x^3$ 是严格单调增加的函数.

(4) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,若存在常数 $A(B)$,使得对所有 $x\in I$,都有

---

① 狄利克雷 Dirichlet P.G.L.(德)1805—1859,是高斯的学生,解析数论的创始人之一,最卓越的工作是对傅里叶级数收敛性的研究.

$$f(x) \leq A \quad (f(x) \geq B),$$

则说函数 $f(x)$在区间 I 上有上(下)界.若存在常数 $M>0$,使得对所有 $x\in I$,都有

$$|f(x)| \leq M,$$

则说 $f(x)$在 I 上有界.否则说 $f(x)$在 I 上无界.

显然,有界等同于既有上界又有下界.在定义域上有界的函数叫做有界函数.

例如,$y=\sin x$ 是有界函数;$y=1/x$ 是无界函数,但它在区间$(0,+\infty)$上有下界,在区间$(1,+\infty)$上有界.

1.2.2 隐函数和参数方程表示的函数

若变量 x,y 之间的函数关系是由一个含 x,y 的方程

$$F(x,y)=0$$

给定,则说 y 是 x 的隐函数.相应地,把由自变量的算式表示出因变量的函数叫做显函数.

例如,由方程 $3x-2y+6=0$, $x^2+y^2-1=0$, $xy=e^x-e^y$ 表示的函数都是隐函数;而 $y=\sin x$, $y=\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$ 都是显函数.

如果能从隐函数中将 y 解出来,就得到它的显函数形式.例如,$3x-2y+6=0$ 的显函数形式为 $y=1.5x+3$;$x^2+y^2=1$ 的显函数形式为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.但不要以为隐函数都能表示成显函数,如开普勒①方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0,$$

其中 ε为常数,$0<\varepsilon<1$,就不能将 y 表成 x 的显函数.更不要以为随便写一个含有 x,y 的式子就是一个隐函数,如 $x^2+y^2+1=0$ 就不是隐函数.什么条件下 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数,将在本书第九章定理 9.5 中给出.

两个变量 x,y 之间的函数关系,有时是通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in T$$

给出的,这样的函数叫做参数式的函数,t 叫做参数,也叫做参变量.

例如,隐函数 $x^2+y^2-a^2=0$(圆),既可表为显函数 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$,又可以用参数方程

---

① 开普勒 Kepler J.(德) 1571—1630,天文学家、数学家,他一生坎坷,病魔缠身,视力低下,双手残疾,家庭成员多有不幸.他的不可分量的思想,即用无数个同维无穷小元素之和来确定面积和体积,无穷远点的设想,以及类比方法的影响都是深远的.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

来表示.又如$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$(椭圆)可用参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

表示.摆线(图1.8)的参数方程是

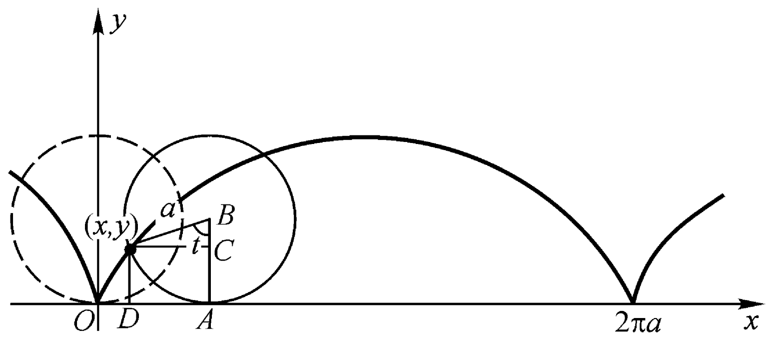


图1.8

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

如果能消去参数 t,就得到 x, y 的直接函数关系,这对有些函数是容易的,对有些函数是麻烦的,甚至是不可能的.

1.2.3 单值函数与多值函数、反函数

如果在定义域 X 内每取一个 x 值,函数 $y = f(x)$都仅有一个对应值,这样的函数称为单值函数,否则,称为多值函数.

例如,函数 $x^2 + y^2 = 1$ 是定义在区间[-1,1]上的多值函数,$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

多值函数可以拆成若干个单值函数,如上面的函数可拆成 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1 - x^2}$,所以,我们通常只讨论单值函数.

例 2 单摆的周期 T 是摆长 l 的函数

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

反之,摆长 l 也是周期 T 的函数

$$l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g.$$

这两个函数都表示了 T 与 l 的对应规律,只不过是自变量与因变量的取法不

同.从其中一个函数可以推出另一个函数.上述两个函数不但自变量与因变量对换了,而且涉及到的运算和运算顺序都是相反的,所以它们互称反函数.

一般地说,对函数 $y = f(x)$,如果将 y 当作自变量,x 作为因变量,则由 $y = f(x)$ 确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数.显然它们的图形是同一条曲线.

在纯数学研究中,大家关心的是变量间的相依关系,而不考虑变量的具体实际意义,因此习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改记为 $y = \varphi(x)$.这样,$y = \varphi(x)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数,中学已证明过,它们的图形关于直线 $y = x$ 对称(如图1.9).

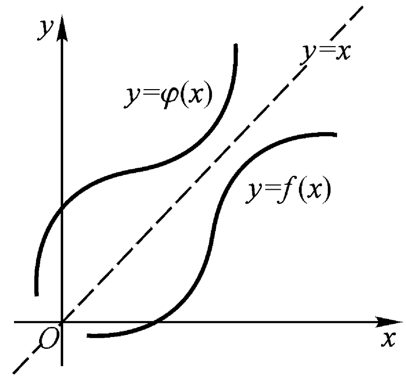


图 1.9

对于严格单调函数,因为不同的 x 值对应不同的 y 值,所以有如下结论:

单值严格单调的函数有反函数,其反函数也是单值严格单调的函数.

例如,$y = \sqrt{x}$ 是严格单增函数,其反函数 $y = x^2$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上也是严格单增函数.

1.3 初 等 函 数

1.3.1 基本初等函数及其图形

中学已经学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数五类函数及常数(常函数)统称为基本初等函数.由它们"组成"的函数是常见的,在大学数学课中占有重要的地位,所以需要熟悉这些函数的基本性质,并牢记它们的图形.

(1) 幂函数

形如

$$y = x^{\mu},$$

底数为自变量 x,指数 μ 为常数的函数叫做幂函数.其定义域与 μ 的取值有关.比如,μ 为正整数时,定义域为 $(-\infty, +\infty)$,μ 为负整数时,定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;$\mu = \frac{1}{3}$ 时,定义域为 $(-\infty, \infty)$;$\mu = \frac{1}{2}$ 时,定义域为 $[0, +\infty)$;μ 为无理数时,规定定义域为 $(0, +\infty)$.

所有的幂函数都在 $(0, +\infty)$ 上有定义.它们的图形都通过点 $(1,1)$.在 $(0, +\infty)$ 上,$\mu > 0$ 的幂函数都是单增的;$\mu < 0$ 的幂函数都是单减的.

图 1.10 给出一些幂函数的图形，应熟悉它们.

(2) 指数函数

形如

$$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1),$$

底为常数 a，指数为自变量 x 的函数叫做指数函数.其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$.当 $a > 1$ 时，它是单增函数；当 $0 < a < 1$ 时，它是单减函数.它们的图形都通过点$(0, 1)$，且以 x 轴为渐近线，见图 1.11.函数 $y = a^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称.

以无理数 e = 2.718 281 828 459 045…为底的指数函数 $y = \mathrm{e}^x$ 是最常见的指数函数.

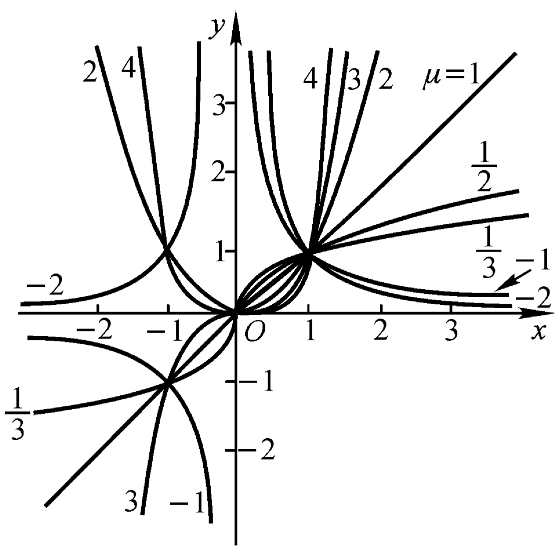


图 1.10

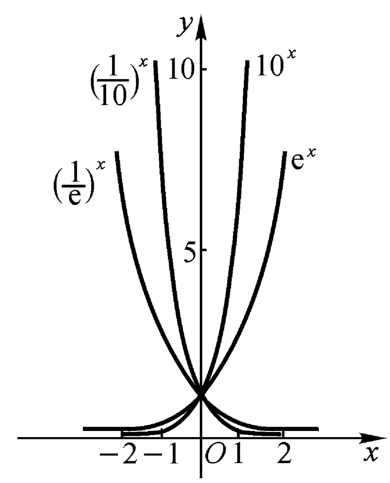


图 1.11

(3) 对数函数

形如

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

的函数称为对数函数，其定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$.它是指数函数的反函数.当 $a > 1$ 时它是单增函数，当 $0 < a < 1$ 时它是单减函数.图形都经过点$(1, 0)$（见图 1.12）.

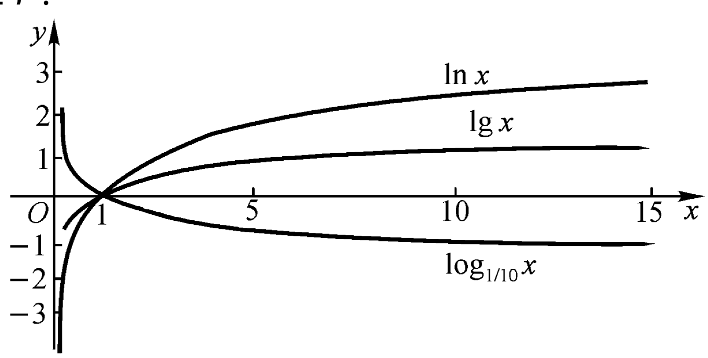


图 1.12

以 10 为底的对数叫常用对数,简记为 $\lg x$.以 e 为底的对数叫自然对数,简记为 $\ln x$.

(4)　三角函数

三角函数包括:正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$①,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$.在 1.2.1 中已经指出它们都是周期函数,正弦函数和余弦函数的周期是 2π,正切函数和余切函数的周期是 π,正割函数和余割函数的周期也是 2π.正弦函数和余弦函数是有界函数,其他三角函数是无界函数.三角函数间的关系是十分重要的,它们涉及到的公式也较多,不在这里罗列,请读者自行查看中学教科书或数学手册.三角函数的图形如图 1.13,1.14 及 1.15.

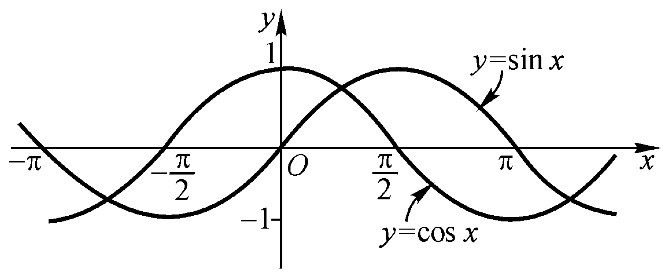


图 1.13

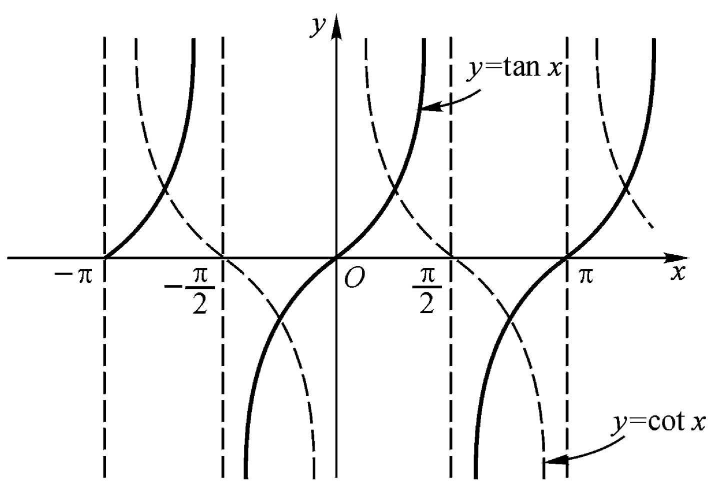


图 1.14

必须指出,在数学分析中,三角函数的自变量 x 作为角必须采用弧度制.

(5)　反三角函数

三角函数的反函数叫做反三角函数.由于三角函数都是周期函数,所以其反函数都是多值函数,显然只需讨论它的一个单值分支——即主值范围内的反三角函数:

---

① 根据国标规定,正切函数记为 $\tan x$,余切函数记为 $\cot x$,反正切函数记为 $\arctan x$,反余切函数记为 $\operatorname{arccot} x$.

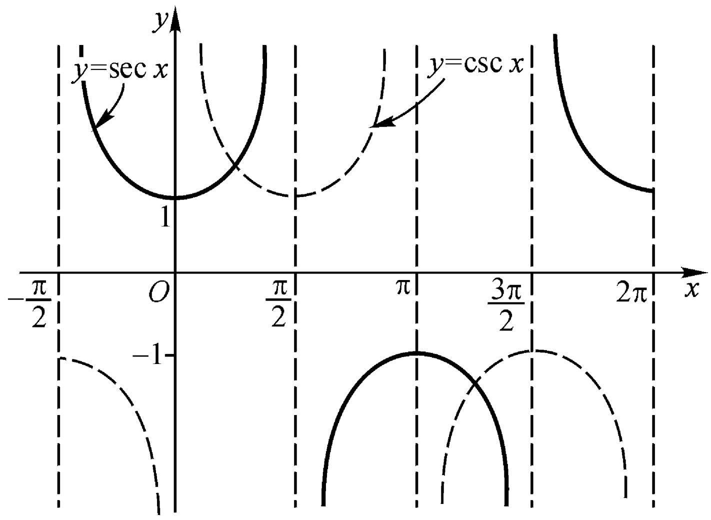


图 1.15

$$y = \arcsin x, \qquad -1 \leq x \leq 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$y = \arccos x, \qquad -1 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$y = \arctan x, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \operatorname{arccot} x, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad 0 < y < \pi.$$

它们的图形是图 1.16 和图 1.17 中的实线.另外两个反三角函数使用的较少,这里就不讨论它们了.

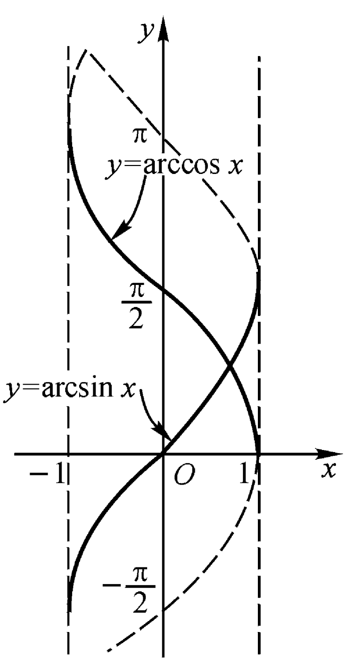


图 1.16

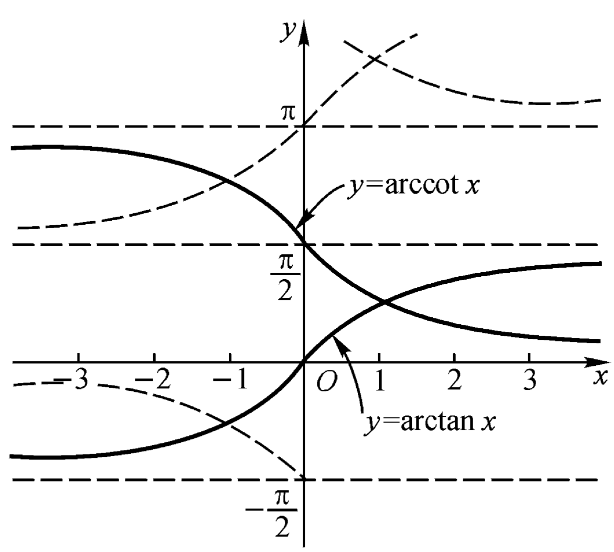


图 1.17

$\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 是单增的; $\arccos x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 是单减的.它们都是有界函数.

例 1 求函数 $y = \sin x \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ 的反函数.

解　为了使所给函数的自变量在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上取值,作变换,令 $x=\pi-t$,则

$$y=\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t,\qquad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}.$$

故

$$t=\arcsin y.$$

由于 $x=\pi-t$,所以 $x=\pi-\arcsin y$,从而,所求的反函数是

$$y=\pi-\arcsin x.$$

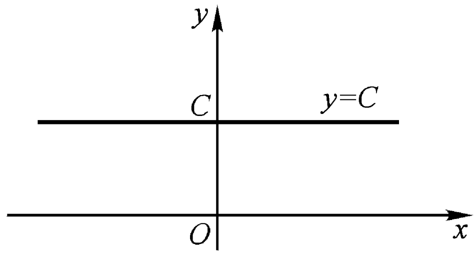


图 1.18

(6)　常函数

形如

$$y=C\quad(C\text{为某常数})$$

的函数叫做常函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形是与 x 轴平行且纵截距为 C 的直线,如图1.18.

1.3.2　复合函数与初等函数

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, $u\in U$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, $x\in X$,且 $D=\{x\mid x\in X,\text{且}\ \varphi(x)\in U\}\neq\varnothing$,则函数

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合成的复合函数,把 u 叫做中间变量.

如单摆的周期 T 是摆长 l 的函数 $T=2\pi\sqrt{l/g}$,而摆长 l 又是温度 τ 的函数 $l=l_0(1+\alpha\tau)$,所以周期 T 是温度 τ 的复合函数 $T=2\pi\sqrt{l_0(1+\alpha\tau)/g}$.

又如,物体运动的动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$,而自由落体的速度 $v=gt$,所以自由落体的动能是时间 t 的复合函数 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

函数 $y=\sin u$ 及 $u=\sqrt{x}$ 复合成 $y=\sin\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

"复合"是构成函数的重要形式,但不是任何两个函数都可以复合,比如 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合,因为后者的值域与前者的定义域的交集是空集,即 $D=\varnothing$.

能够熟练地分析复杂函数的构造是非常重要的,也就是说,必须能一眼看出一个复杂函数是由哪些简单函数如何构成的.

例 2　分解复合函数 $y=a^{x^2}$ 及 $y=\sin^2(\omega t+\varphi)$为简单函数.

解　$y=a^{x^2}$ 是由 $y=a^u$, $u=x^2$ 复合成的.

$y=\sin^2(\omega t+\varphi)$是由 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=\omega t+\varphi$ 复合成的.

复合函数的分解,形象地说是剥皮法——由函数的最外层运算一层层剥到最里边.

求复合函数的定义域时,要注意保证套在里边的函数的值要落在外边函数的定义域内.

例 3 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,求复合函数 $y=f(\sin x)$的定义域.

解 由于 $y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,所以要使 $f(\sin x)$有意义必须且只需

$$0<\sin x<+\infty.$$

因此

$$2k\pi<x<(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

故函数 $y=f(\sin x)$的定义域为$\{x\,|\,2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合所得到的,并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.例如,

$$y=\ln x+x^2e^{\sin x}-1$$

就是一个初等函数.初等函数是常见的函数,但它只是一小类函数,像狄利克雷函数和某些分段函数就不是初等函数.待学过积分、级数和微分方程后便可知道,还有大量的非初等函数存在.

* 下面介绍工程技术上常遇到的双曲函数,它也是初等函数,它是由指数函数 e^x 和 e^{-x} 构成的①.

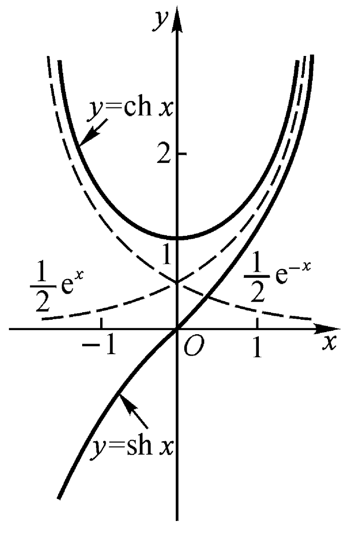


图 1.19

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $x\in(-\infty,+\infty)$,是单增的奇函数(图 1.19).

双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $x\in(-\infty,+\infty)$,是偶函数(图 1.19).

双曲正切 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,是单增有界的奇函数(图 1.20).

双曲余切 $\operatorname{coth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, $x\neq0$,是分别在(-

---

① 本书带 * 号的内容可依据具体情况确定讲或不讲.

$-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调下降的奇函数(图1.20).

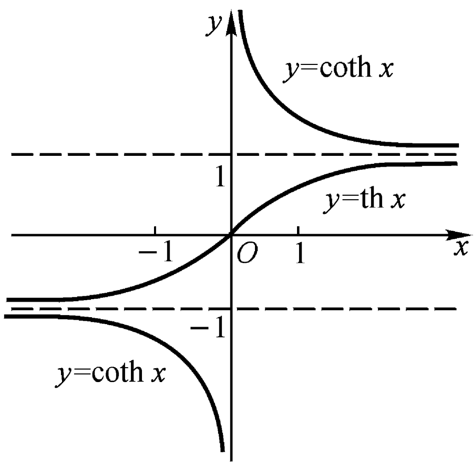


图1.20

根据双曲函数的定义,不难验证双曲函数有类似于三角函数的下列公式:

$$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1,$$
$$\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x,$$
$$\mathrm{sh}\,2x=2\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x,$$
$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y,$$
$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y.$$

由 $y=\mathrm{sh}\,x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,得到 $2y=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$,从而 $(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x-1=0$.解出 $\mathrm{e}^x=y+\sqrt{y^2+1}$,故 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$,即

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad -\infty<x<+\infty$$

是双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}\,x$ 的反函数,记为 $\mathrm{arsh}\,x$.

同样,双曲余弦 $y=\mathrm{ch}\,x$ 在$[0,+\infty)$上的反函数是

$$y=\mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad 1\leq x<+\infty.$$

双曲正切 $y=\mathrm{th}\,x$ 的反函数是

$$y=\mathrm{arth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1.$$

1.4 例　　题

本节通过一些例题,帮助读者深入理解本章的一些基本内容,并得到处理问题的一些方法和技巧.

例1　设 $f(x)$的定义域是 $x\neq 0$, $g(x)=\ln x$,求函数 $f(g(x))+\arcsin x$ 的定义域.

解　由于 $g(x)=\ln x$ 的定义域是区间$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,为使复合函数$f(g(x))$有意义,又需 $g(x)\neq 0$,即 $x\neq 1$,所以 $f(g(x))$的定义域是$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

因为 $\arcsin x$ 的定义域是$[-1,1]$,所以 $f(g(x))+\arcsin x$ 的定义域是区间$(0,1)$.

例2　设函数 $f(x)$满足关系

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},$$

其中 a,b,c 为常数,$|a|\neq|b|$,求函数 $f(x)$.

解 由所给关系式知,若 $f(x)$ 在点 x 处有定义,则在点 $\frac{1}{x}$ 处亦有定义.由所给关系式得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,$$

两式联立,解代数方程组得

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right).$$

例 3 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求函数 $f(x)$.

这里相当于已知 $y=f(u)$ 和 $u=x+\frac{1}{x}$ 复合成的复合函数是 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(u)$.

解法 1 设 $u=x+\frac{1}{x}$,由于 $u^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$,所以 $u^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$,故 $f(u)=u^2-2$,因此

$$f(x)=x^2-2.$$

解法 2 将 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 写成 $x+\frac{1}{x}$ 的函数,再确定 $f(x)$.由

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

得到

$$f(x)=x^2-2.$$

例 4 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 1,\\ 0, & x<1,\end{cases}$$

求复合函数 $\psi(\varphi(x))$.

解 由于

$$\psi(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 1,\\ 0, & x<1,\end{cases}$$

所以

$$\psi(\varphi(x))=\begin{cases}\sin\varphi(x), & \varphi(x)\geq 1,\\ 0, & \varphi(x)<1.\end{cases}$$

根据 $\varphi(x)$ 的表达式知:当 $x\leq -1$ 时,$\varphi(x)=x^2\geq 1$;当 $x\geq 0$ 时,$\varphi(x)=1$;而当 $-1<x<0$ 时,$\varphi(x)=x^2<1$.从而

$$\psi(\phi(x)) = \begin{cases} \sin x^2, & x \leq -1, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ \sin 1, & x \geq 0 . \end{cases}$$

例 5 $y = \arctan(\tan x)$**是否为周期函数,画出它的图形 .**

解 **因为** $\tan x$ **以** π **为周期,** $y = \arctan u$ **是单调函数,所以** $y = \arctan(\tan x)$**也以** π **为周期,且当** $x = k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$**时,函数无定义 .当** $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ **时,令** $t = x - k\pi$**,则** $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$**,所以**

$$\begin{aligned} y &= \arctan(\tan x) = \arctan[\tan(t + k\pi)] \\ &= \arctan(\tan t) = t = x - k\pi, \end{aligned}$$

故

$$y = x - k\pi, \quad \text{当 } x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \cdots,$$

其图形见图 1 .21 .

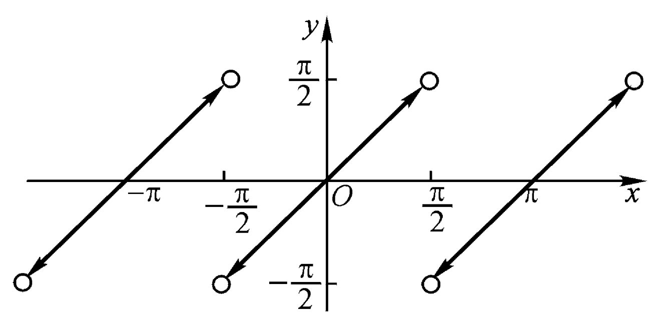


图 1 .21

例 6 **作** $y = x\cos x$ **的图形 .**

解 **因为** $y = x\cos x$ **是奇函数,图形关于原点对称 .下面先讨论** $x \geq 0$ **的情形,由于** $x \geq 0$ **时,有**

$$-x \leq x\cos x \leq x,$$

所以图形夹在直线 $y = -x$ **和** $y = x$ **之间 .当** $x = n\pi + \frac{\pi}{2}(n = 0, 1, 2, \cdots)$**时,** $y = 0$**;当** $x = (2k+1)\pi(k = 0, 1, 2, \cdots)$**时,因** $\cos((2k+1)\pi) = -1$**,所以曲线上对应点落在直线** $y = -x$ **上;当** $x = 2k\pi(k = 0, 1, 2, \cdots)$**时,因** $\cos 2k\pi = 1$**,所以曲线上对应点落在直线** $y = x$ **上 .总之,曲线在** $y = -x$ **与** $y = x$ **之间的角形域内上下摆动,摆动的幅度随** x **增大而增大 .**

利用对称性,就可作出 $y = x\cos x$ **的图形(图** 1 .22) .

例 7 **在极坐标系下,作** $r = a(1 + \cos\theta)$**的图形 .**

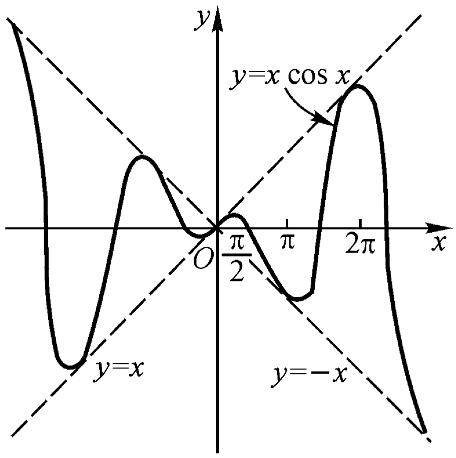


图 1 22

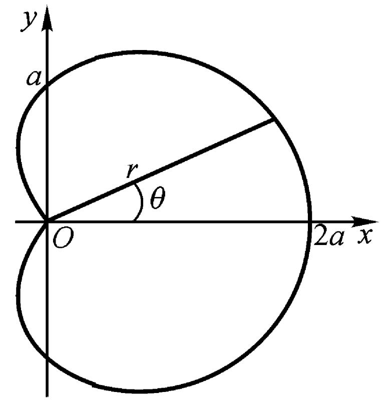


图 1 23

解 因为 r **是** θ **的偶函数,图形关于极轴对称**, r **又是以** 2π **为周期的函数** .**当** $0 \leq \theta \leq \pi$ **时,由于** $\cos\theta$ **单调下降,所以极半径** r **单调下降** .**图形通过点**$(0,2a)$, $(\pi\ 3, 3a\ 2)$, $(\pi\ 2, a)$, $(2\pi\ 3, a\ 2)$**及点**$(\pi,0)$,**在极坐标系下,用描点法画出图** 1 23 .

习 题 一

1 .1

1 . **用区间表示下列不等式中的** x **的取值范围**:

(1) $|x-2|<0.1$; (2) $0<|x-1|<0.01$;

(3) $|x| \geq 100$.

2 . **求下列函数的定义域**:

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$; (2) $y=\ \sin x+\ 16-x^2$;

(3) $y=(\ x^2-x)\arcsin x$; (4) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{|x|-1}$.

3 . **求函数值** .

(1) **设** $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$, **求** $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(a+b)$ $(a+b\neq -1)$;

(2) **设** $f(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ **求** $f(1)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f(-2)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) **设** $f(x)=2x-3$, **求** $f(a^2)$, $[f(a)]^2$.

4 . **下述函数** $f(x)$, $g(x)$**是否相等**? **为什么**?

(1) $f(x)=x$, $g(x)=(\ x)^2$; (2) $f(x)=\sin(\arcsin x)$, $g(x)=\arcsin(\sin x)$.

5．已知 $f(x)$是线性函数，即 $f(x)=ax+b$，且 $f(-1)=2$，$f(2)=-3$，求 $f(x)$，$f(5)$．

6．作下列函数的图形：

(1) $y=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|$；　　(2) $y=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ x^{-1}, & |x|>1;\end{cases}$

(3) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$；　　(4) $|\lg x|+|\lg y|=1$．

7．建立函数关系．

(1) 在一个半径为 r 的球内，嵌入一内接圆柱，试求圆柱体的体积 V 与圆柱高 h 的函数关系，并求出此函数的定义域；

(2) 底 $AC=b$，高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中(如图 1.24)内接矩形 $KLMN$，其高记为 x，将矩形周长 P 和面积 S 表为 x 的函数；

(3) 有三个矩形，其高分别等于 3 m，2 m，1 m，而底皆为 1 m，彼此相距 1 m 放着(如图1.25)，假定 $x\in(-\infty,+\infty)$连续变动(即直线 AB 连续地平行移动)，试将阴影部分的面积 S 表为 x 的函数；

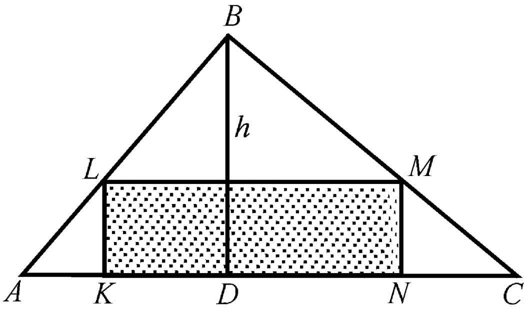


图 1.24

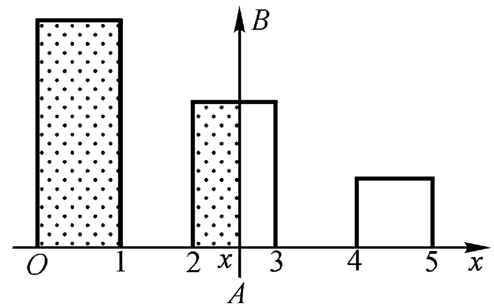


图 1.25

(4) 长为 l 的弦、两端固定，在 c 点处将弦提高 h 后呈图 1.26 中形状，设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连接线方向移动，以 x 表示弦上点的位置，y 表示 x 点处升高的高度，试建立 x 与 y 间的函数关系；

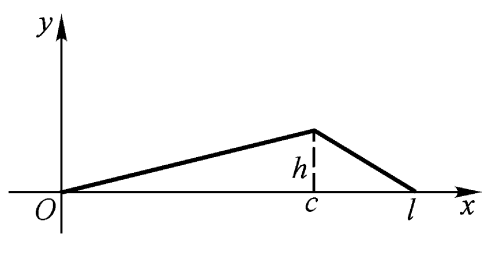


图 1.26

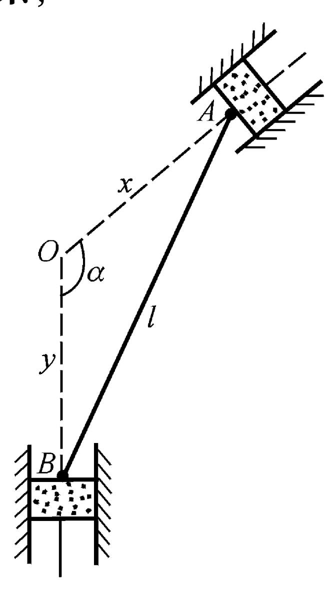


图 1.27

(5) 图 1.27 是机械中常用的一种既可改变运动方向又可调整运动速度的滑块机构,现设滑块 A, B 与 O 点的距离分别为 x 与 y, OA 与 OB 的夹角为 α(定值),连接滑块 A 与 B 之间的杆长为 l(定值),试建立 x 与 y 之间的函数关系;

(6) 某运输公司规定货物的吨公里运价为:在 a 公里以内每公里 k 元;超过 a 公里时,超过部分每公里为 $0.8k$ 元,求运价 m 和里程 x 的函数关系.

1.2

1. 指出下列函数中的奇偶函数和周期函数:

(1) $y = |\sin x|$;　　(2) $y = 2 + \tan \pi x$;

(3) $y = \log_a (x + \quad x^2 + 1)$;　　(4) $y = 3^{-x}(1 + 3^x)^2$.

2. 指出下列函数的单调区间及有界性:

(1) $y = \dfrac{1}{x}$;　　(2) $y = \arctan x$;

(3) $y = |x| - x$;　　(4) $y = \quad a^2 - x^2 (a > 0)$.

3. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$;　　(2) $y = \log_x 2(x > 0, x \neq 1)$;

(3) $y = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;　　(4) $y = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 + x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

4. 设 $y = f(x)$是以 2π 为周期的函数,当 $-\pi \leq x < \pi$ 时, $f(x) = x$,试求函数 $f(x)$.

5. 若 $f(x)$对一切 x 都满足 $f(a - x) = f(x)$,及 $f(b - x) = f(x)$, $a \neq b$,试证 $f(x)$是周期函数.

6. 将一物体以初速 v_0 与水平方向成 α 角斜抛出,试将它的运动轨迹表示为时间 t 的参数式函数(不计空气阻力).

7. 设 $f(x)$是奇函数,当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - x^2$,求 $x < 0$ 时, $f(x)$的表达式.

1.3

1. 下列函数是由哪些基本初等函数复合的?

(1) $y = \sin^3 \dfrac{1}{x}$;　　(2) $y = 2^{\arcsin x^2}$;

(3) $y = \lg \lg \lg \quad x$;　　(4) $y = \arctan e^{\cos x}$.

2. 设 $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$,求 $f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(1))$.

3．设 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，且 $|\varphi(x)|\leq\frac{\pi}{2}$，求 $\varphi(x)$及其定义域．

4．设 $f\ x+\frac{1}{x}\ =\frac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$．

5．设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 4,\\ e^x, & x>4,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & x\leq 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(x))$．

6．若函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，分别求 $f(\lg x)$和 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域．

7．求下列函数的定义域：

(1) $y=\arccos\ \lg(x^2-1)$；　　(2) $y=\ \cos x-1$．

8．设 $f(x)$，$\varphi(x)$互为反函数，求下列函数的反函数：

(1) $f\ 1-\frac{1}{x}$ ；　　(2) $f(2^x)$．

1.4

1．在极坐标系下，作 $r=\cos 3\theta$的图形．

2．已知 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(f(x))$的定义域．

3．已知 $f(x)$是以 1 为周期的函数，当 $0\leq x<1$ 时，$f(x)=x^2$，试写出 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的表达式．

4．延拓函数 $f(x)=x+1\ (x>0)$到整个数轴上去，使它分别为偶函数与奇函数．

5．若 $f(x)$满足关系 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，试证：

(1) $f(0)=0$；　　(2) $f(nx)=nf(x)$，

其中 n 为自然数．

6．设 $f(x)=\ x^2-1$，$g(x)=\frac{1}{x-1}$，$h(x)=\lg x$，求 $f(g(h(x)))$ 的定义域．

7．设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$f(x)$均为单调上升函数，且 $\varphi(x)\leq\psi(x)\leq f(x)$，若 $\varphi(\varphi(x))$，$\psi(\psi(x))$，$f(f(x))$都有意义，证明：

$$\varphi(\varphi(x))\leq\psi(\psi(x))\leq f(f(x)).$$

8．设函数 $y=f(g(x))$由 $y=f(u)$，$u=g(x)$复合而成，试证：

(1) 若 $g(x)$为偶函数，则 $f(g(x))$也是偶函数；

(2) 若 $g(x)$为奇函数，则当 $f(u)$是奇函数时，$f(g(x))$为奇函数；当 $f(u)$

为偶函数时，$f(g(x))$为偶函数；

(3) 若 $g(x)$为周期函数，则 $f(g(x))$也是周期函数；

(4) 若 $f(u)$，$g(x)$同是单调增加或减少的，则 $f(g(x))$是单调增加的；

(5) 若 $f(u)$，$g(x)$一个单调增加，一个单调减少，则 $f(g(x))$是单调减少的；

(6) 若 $f(u)$是有界函数，则 $f(g(x))$也是有界函数．

9．设 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有定义，且有常数 T，$B>0$，满足 $f(x+T)=Bf(x)$，证明 $f(x)=a^{x}\varphi(x)$，其中 a 为常数，$\varphi(x)$是以 T 为周期的函数．

第二章　极限与连续

很早以前，人们就产生了极限思想，比如，公元 3 世纪中国数学家刘徽的割圆术，就是用圆内接正多边形的周长的极限定义圆周长的.但是一直到 17 世纪牛顿(Newton I.(英) 1642—1727)①和莱布尼茨(Leibniz G.W.(德) 1646—1716)在前人工作的基础上建立微积分之时，由于极限思想尚未成熟，微积分建立在当时还含糊不清的无穷小基础上，在逻辑上引起了不少的争论和怀疑.到 19 世纪后期柯西(Cauchy A.L.(法)1789—1857)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass K.(德)1815—1897)②等人才给出了极限的定义，并给出了连续函数的概念，把微积分建立在严密的理论基础上.所以，极限方法经历了许多世纪的锤炼，是人类智慧的精华.极限方法不但是大学数学的基础，自然科学和社会科学中的许多基本概念都离不开它.因此，深入地理解和掌握这一辩证方法，对今后的学习和工作都是必要的.

2.1　数列的极限

例 1　求由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 及 x 轴围成的曲边三角形的面积 S.

解　如图 2.1 所示，将区间[0,1]分割为 n 等份，分点为

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{i}{n},\cdots,\frac{n}{n}=1.$$

并作直线 $x=\frac{i}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$，将曲边三角形分为 n 个窄条 $\Delta S_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$.在每个小区间 $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ 上作高为 $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ 的矩形，近似代替窄条 ΔS_i.这些窄矩形拼成的阶梯形的面积为

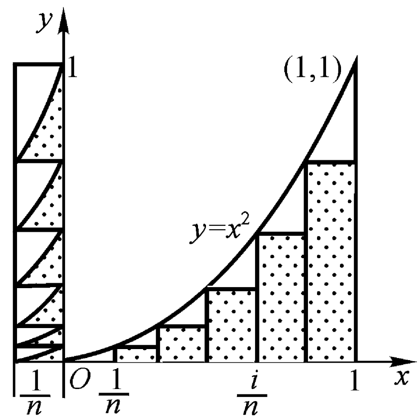


图 2.1

① 牛顿说:"我的成功当归功于精力的思索."又说:"没有大胆的猜想就作不出伟大的发现."

② 魏尔斯特拉斯是将分析学置于严密的逻辑基础之上的一位大师，被后人誉为"现代分析之父".他举出一个处处不可微的连续函数，使数学家们再也不敢直观地或想当然地对待某些问题了.

$$S_n=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+i^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right).$$

显然,S_n 与 n 有关,是定义在正整数集上的函数.由图 2.1 易见,n 越大,S_n 越近似于 S,其差不超过$\frac{1}{2n}$.为得到 S 的准确值,让 n 无限制地变大,看 S_n 的变化趋势:

$$S_n=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)\to\frac{1}{3},\qquad 当\ n\to\infty 时.$$

这样便得到了所求的曲边三角形的面积 $S=\frac{1}{3}$.

例 1 是引出定积分概念的典型实例.在解决问题的过程中,用到一个极重要的崭新方法,就是为了得到确定的量 S,我们把它视为一个变量 S_n 的变化趋势,这就是极限方法.

定义在正整数集上的函数 $x_n=f(n)$称为数列或整标函数.人们习惯按自变量由小到大的顺序列出函数值来表示它:

$$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n,\cdots,$$

数列中的每个数叫做数列的项,具有代表性的第 n 项 x_n 叫做数列的通项或一般项.通项也就是整标函数的函数关系式,所以,给定数列的通项,数列就完全确定了,因此,通常也把数列简记为$\{x_n\}$.

几何上,把数列$\{x_n\}$视为跳动的点在数轴 x 上的足迹.

我们先来考查下列数列的变化趋势:

$$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{5}{27},\ \cdots,\ \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right),\ \cdots \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots \tag{2}$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots \tag{3}$$

$$0.9,\ 0.5,\ 0.99,\ 0.95,\ 0.999,\ 0.995,\ \cdots \tag{4}$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots \tag{5}$$

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots \tag{6}$$

这些数列变化情况各异,随着 n 的无限变大(记为 $n\to\infty$,读作 n 趋于无穷大),数列(1)的项逐渐变大,且无限制地接近常数$\frac{1}{3}$;数列(2)逐项变小,无限制

地接近于 0;数列(3)的项正负相间,无限制地接近于 0;数列(4)忽大忽小,但总趋势接近于 1;数列(5)的项在 1 和 - 1 两个数上来回跳动;数列(6)无节制地变大下去.从变化趋势上看,数列分为两大类:一类是当 $n\to\infty$时, x_n 无限制地接近某一常数,如数列(1),(2),(3),(4);另一类是当 $n\to\infty$时, x_n 不趋于任何确定的数,如数列(5),(6).前者称为有极限的数列或收敛的数列,后者称为无极限的数列或发散的数列.

若随着 n 的无限变大, x_n 无限地接近某一常数 a,则说数列$\{x_n\}$有极限或收敛,并称 a 为数列的极限.

这个定义说明了极限的本质:看数列变化的总趋势.但它仅仅是一个动态的定性的描述.对于用"无限地接近"这种只能靠感觉,而没有定量的刻画的词句来下定义,在理论上不严密,在应用上不方便.所以必须有一个便于进行定量分析的严密的定义.

所谓"随着 n 的无限变大, x_n 无限地接近某一常数 a",其含义是"随着 n 的无限变大,$|x_n - a|$无限地变小".也就是说"无论你给一个怎样小的正数 ε,只要 n 变大到一定大的数 N 之后,$|x_n - a|$就变得永远比你给的数 ε 还小,即$|x_n - a| < \varepsilon$".

例如,对于数列(1),因为

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right| < \frac{1}{2n},$$

所以,若给 $\varepsilon = 0.1$,则当 $n > 5$ 时,就恒有$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < 0.1$.若给 $\varepsilon = 0.0001$,则当 $n > 5000$ 时,就恒有$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < 0.0001$.一般地说,无论你给怎样小的正数 ε,只要 n 大于$\frac{1}{2\varepsilon}$时,就恒有$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

定义 2.1 设 a 为常数,若对任意给定的正数 ε,都存在相应的正整数 N,使得当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则说数列$\{x_n\}$有极限(或收敛),极限值为 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或简记为 $x_n \to a\ (n\to\infty)$.

几何上, $x_n\to a$ 的意思是:数轴上跳动的点 x_n 与定点 a 之间的距离,随着 n 的无限变大而无限变小.无论 ε 是怎样小的正数,做点 a 的 ε 邻域$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$,跳动的点迟早有一次将跳进去,再也跳不出来,这个次数便

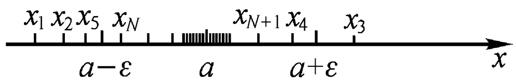


图 2.2

可做为 N.跳动的点 x_n 的足迹凝聚在定点 a 的近旁(图 2.2).

几点说明:1°数列极限是数列$\{x_n\}$变化的最终趋势,所以,任意改变数列中的有限项不影响它的极限值.2°定义中 ε的任意(小)性是十分必要的,否则$|x_n - a| < \varepsilon$就表达不出 x_n 无限接近 a 的含义.3° N 与给定的 ε有关,一般地说, ε越小, N 将越大,它标示变化的进程.

为了书写方便,人们将 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的定义缩写为“$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当 $n > N$ 时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$”.

例 2 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0, a \neq 1)$.

证明 当 $a > 1$ 时,对$\forall \varepsilon > 0$,要使

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon,$$

只需 $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$,两边取对数得$\dfrac{1}{n} < \log_a(1 + \varepsilon)$,即只需

$$n > \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)}.$$

故取 $N = \left[\dfrac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)}\right]$①,则当 $n > N$ 时,恒有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1).$$

当 $0 < a < 1$ 时,可类似地推证. ▯

* **例 3** 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 6}{n^2 + n + 1} = 2$.

证明 由于

$$\left|\frac{2n^2 - 6}{n^2 + n + 1} - 2\right| = \frac{2n + 8}{n^2 + n + 1} < \frac{10n}{n^2} = \frac{10}{n},$$

所以,$\forall \varepsilon > 0$,只要$\dfrac{10}{n} < \varepsilon$,即 $n > \dfrac{10}{\varepsilon}$,就恒有

$$\left|\frac{2n^2 - 6}{n^2 + n + 1} - 2\right| < \varepsilon,$$

故可取 $N = \dfrac{10}{\varepsilon}$.因此,所证极限式成立.

---

① 记号$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数,称$[x]$为 x 取整.如,$[2.5] = 2$,$[0.3] = 0$,$[-0.2] = -1$,$[-1.5] = -2$ 等.

如果限定 $n>8$,则 $\left|\frac{2n^2-6}{n^2+n+1}-2\right|=\frac{2n+8}{n^2+n+1}<\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}$.因此,对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{8,\frac{3}{\varepsilon}\right\}$,则当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{2n^2-6}{n^2+n+1}-2\right|<\varepsilon$. □

例 4 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 设 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$, $h_n\geq 0$,则 $n>2$ 时有

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

因此

$$h_n<\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$|\sqrt[n]{n}-1|=h_n<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

由此可见,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{2,\frac{2}{\varepsilon^2}\right\}$,则当 $n>N$ 时,恒有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \quad □$$

用定义证明极限,就是对 $\forall\varepsilon>0$,找满足定义要求的 N.找的方法是从不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 出发,通过解不等式,推出 n 应大于怎样的整数,这个整数就是所求的 N.由于我们不需要找最小的 N,为简化解不等式的运算,常常把 $|x_n-a|$ 做适当的放大,但要保证放大后还能趋于零,并便于解出 n,如例 3、例 4.只要能找到这样的 N,所要证的极限就成立.

在数列 $\{x_n\}$ 中依次任意抽出无穷多项:

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots$$

(其下标 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$)所构成的新数列 $\{x_{n_k}\}$ 叫做数列 $\{x_n\}$ 的子数列.这里 x_{n_k} 是原数列中的第 n_k 项,在子数列中是第 k 项,显然 $k\leq n_k$.

定理 2.1 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是它的所有子数列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛于 a.

证明 必要性.设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,使得当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

当 $k > N$ 时,因 $n_k \geq k > N$,故恒有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon .$$

因此

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a .$$

充分性是显然的,因为$\{x_n\}$也是自己的子数列 .

由此定理可知:仅从某一个子数列的收敛,一般不能断定原数列的收敛性;但若已知一个子数列发散,或有两个子数列收敛于不同的极限值,都可断定原数列是发散的 .还可以证明:数列$\{x_n\}$的奇子数列$\{x_{2k-1}\}$和偶子数列$\{x_{2k}\}$均收敛于同一常数 a 时,则$\{x_n\}$也收敛于 a(证明留给读者) .

例 5　试证数列$\{\cos n\pi\}$不收敛 .

证明　因为$\{\cos n\pi\}$的奇子数列

$$-1, -1, \cdots, -1, \cdots$$

收敛于 -1,而偶子数列

$$1, 1, \cdots, 1, \cdots$$

收敛于 1,所以数列$\{\cos n\pi\}$不收敛 .

2.2　函数的极限

对函数 $y = f(x)$,根据自变量的变化过程分两种情况讨论它的极限 .

2.2.1　$x \to \infty$时函数的极限

设对充分大的 x,函数 $f(x)$处处有定义 .如果随着 x 的无限变大,函数 $f(x)$无限地接近某一常数 A,则说 x 趋于正无穷大时 $y = f(x)$以 A 为极限 .严格的定义如下 .

定义 2.2　设 $f(x)$在 $x > a$ 上有定义, A 为常数 .若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,使得当 $x > X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则说 $x \to +\infty$时函数 $f(x)$有极限,极限值为 A,记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

或

$$f(x) \to A, \qquad \text{当 } x \to +\infty \text{时} .$$

它的几何意义是:当 $x \to +\infty$时,曲线 $y = f(x)$以直线 $y = A$ 为水平渐近线,即随着横坐标 $x \to +\infty$,曲线上点的纵坐标 $f(x)$无限接近于 A .按定义来说,就是不管给定一个怎样小的正数 ε,作一个以 $y = A$ 为中心线的宽为 2ε 的

条形域.我们顺着 x 轴的正向看下去,必有一个正数 X,使曲线上的动点 $(x, f(x))$ 的横坐标 $x > X$ 之后,动点就钻入这个条形域不出来了.由于 ε 可任意小,所以随着 x 的增大,动点还将钻入更窄的条形域,不断地向 $y = A$ 靠拢(参看图 2.3).

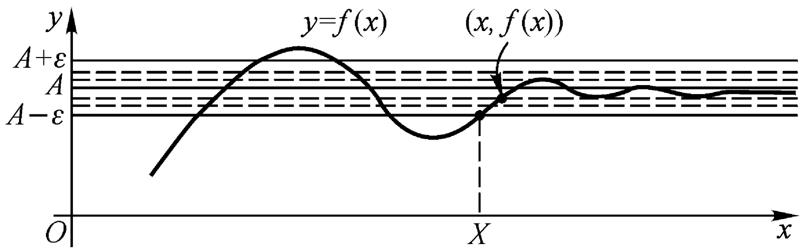


图 2.3

定义 2.3 设 $f(x)$ 在 $x < a$ 上有定义, A 为常数,若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,使得当 $x < -X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则说 $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 有极限,极限值为 A,记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A,$$

或

$$f(x) \to A, \qquad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时}.$$

如果在 x 的绝对值充分大时, $f(x)$ 处处有定义,且

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

则说 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

显然它等价于:

定义 2.4 设 $f(x)$ 在 $|x| > a\ (a > 0)$ 上有定义, A 为常数,若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则说 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 有极限,极限值为 A.

定义 2.3, 2.4 的几何意义,请读者自己给出.

例 1 试证 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

证明 由于

$$\left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 0 \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}},$$

所以只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$,即 $x > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$,就恒有

$$\left|\frac{\cos x}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

故 $\forall\ \varepsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$就满足定义 2.2 的要求, 因此有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0 . \qquad □$$

*例 2　试证 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x-1}=\frac{1}{3}$.

证明　因为这里考虑的是 $x\to\infty$时函数的极限, 所以可以限定在 $|x|>1$ 上考虑问题, 由于

$$\left|\frac{x}{3x-1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3|3x-1|}\leq\frac{1}{3(3|x|-1)}=\frac{1}{3(2|x|+|x|-1)}<\frac{1}{6|x|},$$

所以, $\forall\ \varepsilon>0$, 只要$\frac{1}{6|x|}<\varepsilon$, 即 $|x|>\frac{1}{6\varepsilon}$, 就恒有

$$\left|\frac{x}{3x-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

故可选取 $X=\max\left\{1,\frac{1}{6\varepsilon}\right\}$.　　□

2.2.2　$x\to x_0$ 时函数的极限

例 3　由物理实验知, 自由落体运动规律是 $s=\frac{1}{2}gt^2$, 求 t_0 时的瞬时速度 $v(t_0)$.

解　从时刻 t_0 到 t, 落体的平均速度

$$\bar{v}(t)=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0),\qquad t\neq t_0 .$$

它是时间 t 的函数, $t=t_0$ 时无意义 .平均速度表明这段时间间隔内运动快慢的平均值, 显然当 t 越接近 t_0 时, 这个平均速度就越接近 t_0 时的真实速度 .因此, 我们让 t 无限接近 t_0, 看平均速度 $\bar{v}(t)$的变化趋势:

$$\bar{v}(t)\to gt_0,\qquad \text{当 } t\to t_0 \text{ 时} .$$

由此得到 $v(t_0)=gt_0$, 物理学中就是这样定义瞬时速度的 .

这是引出微分学的一个典型实例, 解决问题的方法还是看函数的变化趋势 .

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域上有定义(在 x_0 处和邻域外是否有定义不作要求) .如果当 x 无限接近于 x_0 时, 函数 $f(x)$就无限接近于常数 A, 则说 x 趋于 x_0 时(记为 $x\to x_0$), $f(x)$以 A 为极限 .严格定义如下 .

定义 2.5 设 $y=f(x)$在 x_0 的某一去心邻域上有定义,A 为常数.若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则说 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$有极限,极限值为 A,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A,\qquad 当\ x\to x_0\ 时.$$

几何解释:曲线 $y=f(x)$上的动点 $M(x,f(x))$随着其横坐标趋于 x_0,其纵坐标 $f(x)$趋于 A.定义 2.5 是说,不管 $\varepsilon>0$ 如何小,画一个以 $y=A$ 为中心线,宽为 2ε 的条形域,则在 x 轴上一定可以找到 x_0 的一个去心邻域$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,使函数在这个邻域上的图形全部位于上述条形域内.也就是说,只要曲线上动点 $M(x,f(x))$的横坐标与 x_0 的距离小于 δ,它的纵坐标 $f(x)$就与 A 的距离小于 ε(见图 2.4).

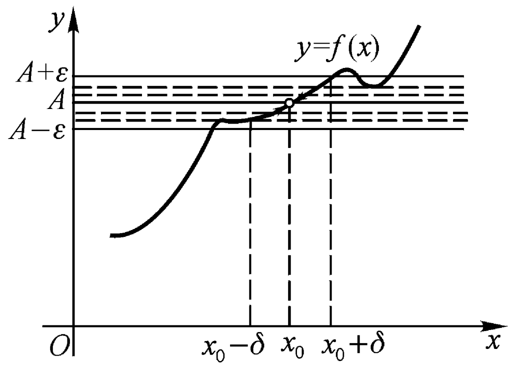


图 2.4

要强调指出:(i) 定义中 δ 标志 x 接近 x_0 的程度,它与 ε 有关,一般地说,ε 越小,δ 也将越小.(ii)"当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$"即在 x_0 的去心 δ 邻域上,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,对 x_0 处没有这个要求.所以函数在 x_0 处可以无定义,也可以有定义,可以满足,也可以不满足这个不等式.总之,当 $x\to x_0$ 时,函数的极限与函数在 x_0 处的状况无关.如果将"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$|x-x_0|<\delta$",就得到 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,它是比有极限更强的概念,称为函数在 x_0 处连续,将在后面讨论。

一般说来,论证极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,应从不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发,推导出$|x-x_0|$应小于怎样的正数,这个正数就是我们要找的与 ε 相应的 δ,找到 δ 就证明完毕.这个推导常常是困难的,但是,注意到我们不需要找最大的 δ,所以可以把$|f(x)-A|$适当放大些,变成易于解出$|x-x_0|$的式子,找到一个需要的 δ.

例 4 试证 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明 由于

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leq2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq|x-x_0|,$$

故 $\forall \varepsilon>0$,只要 $|x-x_0|<\varepsilon$,就有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,$$

因此,取 $\delta=\varepsilon$ 即可 . □

同样有 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$; $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0\ (x_0>0)$.表明这些函数连续 .

例 5 试证 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

证明 因为考虑的是 $x\to 1$ 的过程,所以仅需在 $x=1$ 附近讨论问题,比如限定 $0<x<2$, $x\neq 1$,即限定在 $0<|x-1|<1$ 范围内讨论问题 .这时

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x^2+x-2|=|x-1||x+2|<4|x-1|,$$

故 $\forall \varepsilon>0$,只要取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{4}\}$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon .$$

因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3 . \quad □$$

在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中,$x\to x_0$ 的方式不受任何限制 .就是说,不管 x 是连续地趋于 x_0,还是跳跃地按任一数列趋于 x_0,无论从左边或右边趋于 x_0,$f(x)$的极限都应是同一个常数 A .

当限定 x 小于 x_0 且趋于 x_0 时,如果函数 $f(x)$的极限存在,则称之为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x) \quad 或 \quad f(x_0^-) .$$

当限定 x 大于 x_0 且趋于 x_0 时,如果函数 $f(x)$的极限存在,则称之为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x) \quad 或 \quad f(x_0^+) .$$

左、右极限统称为单侧极限 .从极限及单侧极限的定义,显然有如下定理 .

定理 2.2 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是左极限 $f(x_0^-)$和右极限 $f(x_0^+)$均存在,且

$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.

例 6 试证函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & 当\ x<1\ 时, \\ \sin x, & 当\ x\geq 1\ 时 \end{cases}$$

当 $x\to 1$ 时,无极限 .

证明　当 $x\to 1$ 时函数 $f(x)$的左极限

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} e^x = e .$$

当 $x\to 1$ 时 $f(x)$的右极限

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\sin x=\sin 1 .$$

左、右极限不相等,故 $x\to 1$ 时, $f(x)$无极限 . ▯

2.3　极限的性质、无穷小与无穷大

2.3.1　极限的性质

定理 2.3　(惟一性)　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,必惟一 .

证明　反证法,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$, $A<B$.

对 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$,由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义,$\exists\ \delta_1>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\frac{B-A}{2},$$

即有

$$\frac{3A-B}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2} . \tag{1}$$

而由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$ 的定义,$\exists\ \delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,恒有

$$|f(x)-B|<\frac{B-A}{2},$$

即有

$$\frac{A+B}{2}<f(x)<\frac{3B-A}{2} . \tag{2}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式(1),(2)应同时成立 .但这是不可能的,因为(1),(2)两式是不相容的 .故有极限必惟一 . ▯

定理 2.4 (极限点[①]附近的保序性) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$.

(i) 如果 $A<B$,则有 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $f(x)<g(x)$;

(ii) 如果有 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $f(x)\leq g(x)$,则必有 $A\leq B$.

* **证明** (i) 对 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$,由于 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$,$\exists\ \delta_1>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\frac{B-A}{2},$$

即有

$$\frac{3A-B}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2}.\tag{3}$$

而由 $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$,$\exists\ \delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,恒有

$$|g(x)-B|<\frac{B-A}{2},$$

即有

$$\frac{A+B}{2}<g(x)<\frac{3B-A}{2}.\tag{4}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,(3),(4)同时成立,从而在 x_0 的去心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有

$$f(x)<g(x).$$

(ii) 若不然,设 $A>B$,则由(i)知在 x_0 的某一去心邻域内恒有 $f(x)>g(x)$,与假设矛盾.□

推论 (保号性) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$,

(i) 若 $A>0$,则有 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0$;

(ii) 若有 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)\geq 0$,则 $A\geq 0$.

定理 2.5 (极限点附近的有界性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$,则存在 $\delta>0$,使函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}_\delta(x_0)$ 内有界.

证明 由极限的定义,对 $\varepsilon=1$,$\exists\ \delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<1,$$

---

① 为方便计,在 $x\to x_0$ 的过程中,称 x_0 为极限点,$x\to\infty$ 的过程中,称 ∞ (这个无穷远点)为极限点.无穷远点 ∞ 的附近,就是 $|x|$ 充分大的点的集合,如 $|x|>X$,X 为正的常数.

即有

$$A-1<f(x)<A+1.$$

由此可见,$f(x)$在$0<|x-x_0|<\delta$内有界. □

极限的惟一性,极限点附近的保序性和有界性,对各种极限过程都成立,证明方法也是类似的.要说明的是:当$x\to+\infty$时,我们把$+\infty$视为一"正无穷远点",它的附近是指$x>X$部分,X可充分大.其他情况是类似的.请读者针对数列极限和函数的其他极限情形,正确的叙述这三条性质.

推论 有极限的数列必有界.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对$\varepsilon=1$,$\exists N>0$,使得当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<1$,即

$$a-1<x_n<a+1.$$

此外,最多有N个数$x_1,x_2,\cdots,x_N$不在这个范围内,因此,令

$$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|a-1|,|a+1|\},$$

则对所有的自然数n,都有

$$|x_n|\leq M,$$

故数列$\{x_n\}$有界. □

注意,由这个结论知,无界数列必发散.但有界数列不见得收敛,比如数列$\{(-1)^n\}$就是发散的有界数列.

2.3.2 无穷小与无穷大

在一个极限过程中,以零为极限的变量叫做这个极限过程中的无穷小.在理论上和应用上它都是很重要的.下面我们仅就两种极限过程($x\to x_0$与$x\to\infty$)中的无穷小给出严格的定义,其他情况是不言而喻的.

定义2.6 若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0(X>0)$,使得当$0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$时,恒有

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

则说函数$f(x)$是$x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小,或者说当$x\to x_0(x\to\infty)$时,$f(x)$是无穷小.

例如:

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,所以$n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n}$为无穷小.

由$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$知,$x\to+\infty$时,$\dfrac{\cos x}{x}$为无穷小.

由$\lim\limits_{x\to0}\sin x=\sin 0=0$知,$x\to0$时,$\sin x$是无穷小.但当$x\to\dfrac{\pi}{2}$时,$\sin x$不

是无穷小.

例 1 试证:$x \to -\infty$时,$a^x (a > 1)$为无穷小.

证明 只需证 $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.$\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < 1$,若要

$$|a^x| = a^x < \varepsilon,$$

只需 $x < \log_a \varepsilon (< 0)$,故取 $X = -\log_a \varepsilon$即可. □

无穷小是变化过程中趋于零的变量,千万不要把无穷小和很小的常数混为一谈.任何非零的常数都不是无穷小.下面关于无穷小的定理,我们仅就 $x \to x_0$ 的过程来证明.

定理 2.6 有限个无穷小之和仍为无穷小.

证明 考虑 $x \to x_0$ 时两个无穷小 α, β之和

$$\omega = \alpha + \beta.$$

$\forall \varepsilon > 0$,因 α, β均为无穷小,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有

$$|\alpha| < \varepsilon, \qquad |\beta| < \varepsilon$$

同时成立,于是,当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有

$$|\omega| = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < 2\varepsilon. \quad □$$

定理 2.7 无穷小与极限点附近有界的函数的乘积是无穷小.

证明 设函数 $u = u(x)$在 x_0 的某一去心邻域 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 内有界,即有常数 M,使$|u| \leq M$;且 $x \to x_0$ 时,α是无穷小.于是,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta: 0 < \delta < \delta_0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有

$$|\alpha| < \varepsilon.$$

从而

$$|u\alpha| = |u| |\alpha| < M\varepsilon. \quad □$$

推论 1 无穷小与常数之积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小之积是无穷小.

定理 2.8 一个有极限、但极限不为零的函数去除无穷小所得的商是无穷小.

证明 设 $\lim\limits_{x \to x_0} u = a \neq 0$,由定理 2.7,只需证明$\dfrac{1}{u}$在 x_0 的某一去心邻域内有界.对 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有

$$|u - a| < \frac{|a|}{2}.$$

因为,此时

$$|u| = |a + u - a| \geq |a| - |u - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2},$$

所以,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{1}{u}\right|<\frac{2}{|a|},$$

即 $\frac{1}{u}$ 有界. $\square$

定理 2.9 (极限与无穷小的关系) 在一个极限过程中,函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 可表为常数 A 与一个无穷小之和.即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \qquad f(x)=A+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义:“$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$”.恰好是函数 $\alpha(x)=f(x)-A$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小的定义. $\square$

函数还有一种变化状态值得注意,就是在一个极限过程中,函数的绝对值无限变大的情形.

定义 2.7 若 $\forall M>0,\exists\delta>0(X>0)$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$ 时,恒有

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷大.

注意:

1° 定义中 M 可任意大.

2° 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时,若 $f(x)$ 为无穷大,这时 $f(x)$ 是没有极限的!为了表示函数的这种变化性态,我们仍借用极限符号,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty,$$

并且口是心非地说“函数 $f(x)$ 的极限是无穷大”.

3° 无穷大不是一个很大的数,不要与很大的数混为一谈.

4° 无穷大是一个无界函数,但无界函数不见得是某个过程的无穷大,例如 $y=x\sin x$ 是无界函数,但 $x\to+\infty$ 时它不是无穷大.

如果定义中的 $|f(x)|>M$,改为 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$),则 $f(x)$ 就是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的正(负)无穷大,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad \left(\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty\right).$$

同样可定义 $n\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$ 极限过程的无穷大.

例 2 试证 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$.

证明 $\forall M > 0$,若要 $\left| \dfrac{1}{x-1} \right| > M$,只需 $0 < |x-1| < \dfrac{1}{M}$,故取 $\delta = \dfrac{1}{M}$ 即可. □

直线 $x = 1$ 是双曲线 $y = \dfrac{1}{x-1}$ 的铅直渐近线(见图 2.5).

一般地说,如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,则说直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

* **例 3** 试证 $\{x_n\} = \dfrac{n^3 + 7n - 2}{n^2 + n}$ 在 $n \to \infty$ 时为正无穷大.

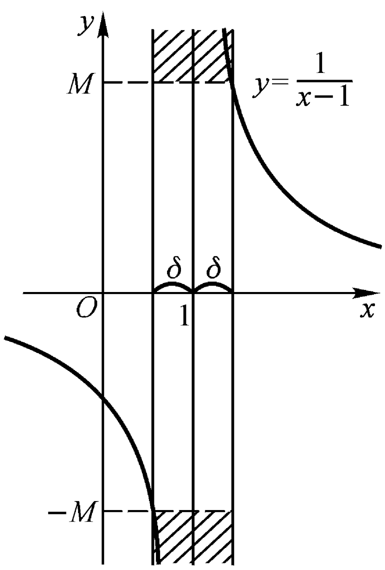


图 2.5

证明 由于 $n^2 \geq n$,故

$$\frac{n^3 + 7n - 2}{n^2 + n} > \frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2},$$

可见 $\forall M > 0$,只要 $\dfrac{n}{2} > M$,即 $n > 2M$,就有

$$\frac{n^3 + 7n - 2}{n^2 + n} > M,$$

故可取 $N = [2M]$,因此 $\{x_n\}$ 是正无穷大. □

定理 2.10 (无穷大与无穷小的关系)

(i) 若 $\lim f(x) = \infty$,则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

(ii) 若 $\lim f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$,则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = \infty$,

即无穷大的倒数是无穷小;非零的无穷小的倒数是无穷大.

* **证明** 仅对 $x \to x_0$ 情形证明.

(i) $\forall \varepsilon > 0$,由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,所以,对 $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x)| > M$,从而

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(ii) $\forall M > 0$,由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,所以,对 $\varepsilon = \dfrac{1}{M} > 0$,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |$

$x - x_0| < \delta$时,恒有$|f(x)| < \varepsilon$,从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M,$$

故

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty . \qquad \square$$

容易证明:两个正(负)无穷大之和仍为正(负)无穷大;无穷大与有界变量的和、差仍为无穷大;有非零极限的变量与无穷大之积或无穷大与无穷大之积仍为无穷大;用无零值有界变量去除无穷大仍为无穷大.

2.4 极限的运算法则

本节讨论极限的运算.

定理 2.11 如果 $\lim u = A, \lim v = B$,则

(i) $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v = A \pm B$;

(ii) $\lim(uv) = \lim u \cdot \lim v = AB$;

(iii) $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v} = \dfrac{A}{B}$,当 $B \neq 0$ 时.

极限号下可以是任何极限过程,但等式两边是同一极限过程.

证明 根据极限与无穷小的关系,有

$$u = A + \alpha, \quad v = B + \beta,$$

其中 α, β 是两个无穷小.

(i) 的证明.

$$u \pm v = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta),$$

由于 $\alpha \pm \beta$ 是无穷小,根据极限与无穷小的关系知

$$\lim(u \pm v) = A \pm B = \lim u \pm \lim v.$$

(ii) 的证明.

$$uv = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta),$$

而 $A\beta + B\alpha + \alpha\beta$ 是无穷小,故

$$\lim(uv) = AB = \lim u \cdot \lim v.$$

(iii) 的证明.

$$\frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)},$$

因为 $B \neq 0$,所以最后面的式子的分母 $B(B + \beta)$ 的极限为 $B^2 \neq 0$,而分子 $B\alpha - A\beta$ 为无穷小,因此最后的分式为无穷小.故

$$\lim \frac{u}{v}=\frac{A}{B}=\frac{\lim u}{\lim v} \quad (B\neq 0).$$

推论 1 若 $\lim u = A$,则

$$\lim Cu = C\lim u = CA \quad (C\text{为常数}).$$

推论 2 若 $\lim u = A$, m 为正整数,则

$$\lim u^m = (\lim u)^m = A^m .$$

推论 3 对多项式

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

及有理函数

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

当 $x\to x_0$ 时,有

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} R(x) = R(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad (Q(x_0)\neq 0).$$

定理 2.11 (i)与推论 1,说明极限运算具有线性性;

推论 3 说明多项式和有理函数是连续函数.

例 1 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$. (推论 3)

例 2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-4}{x^2-5x+3} = \dfrac{2\cdot 2^3-4}{2^2-5\cdot 2+3} = -4$. (推论 3)

例 3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{6}$.

像例 3 中的分子分母都趋于零的极限叫做$\dfrac{0}{0}$型未定式.由于它不满足定理 2.11 的条件 $B\neq 0$,所以不能直接使用定理 2.11.这里我们首先将函数作恒等变形,消去趋于零的因式(简称消去零因式),然后使用定理 2.11 求极限.

例 4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{2n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

像这样分子分母都趋于无穷大的极限叫做$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.不能直接用定理 2.11.我们先作恒等变形,消去无穷大因式,然后使用定理 2.11 及无穷大的倒数是无穷小即可.

例 5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\dfrac{5}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}} = \infty$.

这里用的是消去无穷大因式,利用无穷大与无穷小的关系及性质 .

由例 4,例 5 使用的方法可推得: $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ 时,在 $x\to\infty$时,有理函数的极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & \text{当 } n<m \text{ 时},\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n>m \text{ 时}.\end{cases}$$

例 6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ (有界函数 $\sin x$ 与无穷小$\dfrac{1}{x}$之积).

例 7 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

因为和式的项数随 n 增大而增加,所以不能用定理 2 .11,这时,通常先作恒等变形使函数化为固定项数和的形式,然后求极限 .

定理 2 .12 设 $y=f(\varphi(x))$是由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合成的函数,如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,且在 x_0 的某去心 δ_0 邻域内 $\varphi(x)\neq u_0$,又 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证明 $\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,$\exists\ \eta>0$,使得当 $0<|u-u_0|<\eta$时,恒有

$$|f(u)-A|<\varepsilon.$$

对这个 η,由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,$\exists\ \delta$: $0<\delta<\delta_0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$0<|\varphi(x)-u_0|<\eta.$$

由此可见,当 $0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(\varphi(x))-A|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$. □

将定理中 $x\to x_0$ 换为 $x\to\infty$,亦有同样的结果 此外,这个定理表明在极限运算中可以作变量代换 .

如果 $f(u)$在 u_0 处连续,即 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$,则定理 2 .12 中的条件 $\varphi(x)\neq u_0$ 可以去掉,从而有

推论 1 设 $y=f(\varphi(x))$是由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合成的复合函数,如

果 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$，又 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)).$$

推论 2 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B > 0$，则 $\lim g(x)^{f(x)} = B^A$.

证明 由极限的保号性，在极限点附近有 $g(x) > 0$，所以，

$$y = g(x)^{f(x)} = \mathrm{e}^{f(x)\ln g(x)} = \exp(f(x)\ln g(x))①$$

是由 $y = \mathrm{e}^u$，$u = f(x)\ln g(x)$ 复合成的复合函数. 因为

$$\lim f(x)\ln g(x) = A\ln B = u_0,$$

$$\lim_{u \to u_0} \mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{u_0} = \exp(A\ln B) = B^A,$$

所以

$$\lim g(x)^{f(x)} = B^A. \quad \square$$

证明中，$\lim \ln g(x) = \ln B$ 的根据何在，请读者考虑.

例 8 $\lim\limits_{x \to x_0} a^{\sin x} = a^{\sin x_0} \ (a > 0)$.

例 9 $\lim\limits_{x \to x_0} x^{\mu} = x_0^{\mu} \ (x_0 > 0)$.

当 $x_0 < 0$ 时，若 x^{μ} 在 x_0 的某去心邻域内有定义，令 $t = -x$，则 $x \to x_0$ 时，$t \to -x_0$，所以

$$\lim_{x \to x_0} x^{\mu} = \lim_{t \to -x_0} (-1)^{\mu} t^{\mu} = (-1)^{\mu}(-x_0)^{\mu} = x_0^{\mu}.$$

例 10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{2}.$$

这是所谓的$\infty - \infty$型未定式，这里我们是通过"根式转移"方法把它化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型计算的.

例 11 求 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$，($a$ 为常数).

解 当 $a < 0$ 时，分母趋于零，分子趋于 $-2a \neq 0$，利用无穷大与无穷小的关系有

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a} = \infty.$$

---

① $\exp(u)$ 表示 e^u，通常指数较复杂时用这一记号.

当 $a=0$ 时,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1.$$

当 $a>0$ 时,这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{ax-x^2}{(x-a)(\sqrt{ax}+x)}=\lim_{x\to a}\frac{-x}{\sqrt{ax}+x}=-\frac{1}{2}.$$

这里用到“根式转移”和消去零因式方法.

例 12 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

解 令 $u=(1+x)^{\frac{1}{6}}$,则 $x\to 0$ 时,$u\to 1$.故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u^3-1}{u^2-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u^2+u+1}{u+1}=\frac{3}{2}.$$

这样用变量代换方法求极限,实质就是复合函数求极限法.

2.5 极限存在准则,两个重要极限

定理 2.13 (两边夹挤准则) 如果

(i) $y_n\leq x_n\leq z_n\ (n=1,2,\cdots)$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}y_n=a,\ \lim_{n\to\infty}z_n=a$,

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

证明 由条件(ii),$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,使得当 $n>N$ 时,恒有

$$|y_n-a|<\varepsilon \text{ 及 } |z_n-a|<\varepsilon,$$

由此及条件(i),当 $n>N$ 时,有

$$a-\varepsilon<y_n\leq x_n\leq z_n<a+\varepsilon,$$

即有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

因此,$\lim_{n\to\infty}x_n=a$. $\square$

对函数极限也有同样的定理,证明方法也是一样的.

两边夹挤准则 如果

(i) 在极限点附近 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$;

(ii) $\lim g(x)=A,\quad \lim h(x)=A$,

则

$$\lim f(x) = A .$$

两边夹挤准则在判定极限的存在性和求极限时都是重要手段之一.通常做法是对复杂的函数 $f(x)$作适当的放大和缩小化简,找出有共同极限值又容易求极限的函数 $h(x)$和 $g(x)$.

作为这一准则的应用,下面介绍一个重要的极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 .$$

因为$\frac{\sin x}{x}(x\neq 0)$是偶函数,故只需考虑 $x\to 0^+$ 时的极限(右极限),并且限定在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$内讨论问题.

以点 O 为圆心作单位圆,设 x 表示圆心角$\angle AOB$ 的弧度数,参看图 2.6,则

$$\sin x = |BC|,\quad x = AB,\quad \tan x = |AD| .$$

因为$\triangle AOB$ 的面积 < 圆扇形 AOB 的面积 < $\triangle AOD$ 面积,故

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x .$$

由此得到重要的不等式

$$\sin x < x < \tan x,\qquad \text{当 } 0 < x < \frac{\pi}{2}\text{时},$$

同除以 $\sin x(>0)$,得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} .$$

取倒数有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$,所以,由两边夹挤准则有

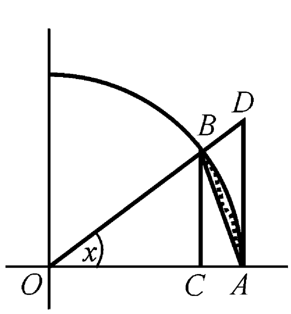


图 2.6

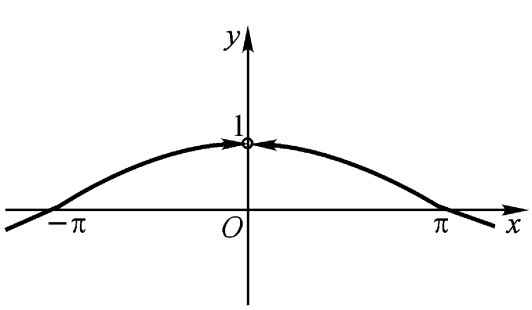


图 2.7

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1 .$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 .$$

结合变量代换,我们常把这一重要极限说成是“非零无穷小与其正弦之比的极限为 1”.

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cos x=1 .$

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\dfrac{\sin\dfrac{2}{n}}{\dfrac{2}{n}}=2 .$

例 3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{x}{2}\Big/\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2} .$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(\pi-x)^2} .$

解 令 $t=\pi-x$,则 $x\to\pi$ 时, $t\to 0$,故

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi-t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2} .$$

例 5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n^2}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2}\right)\sin\dfrac{\pi}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=2\sqrt{2}\pi .$

例 6 设 $a>b>c>0$, $x_n=\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由于

$$a<x_n=a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n}<a\sqrt[n]{3},$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty}a=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt[n]{3})=a$,由两边夹挤准则知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a .$$

* **例 7** 设 $a>1$,试证:对任何正整数 k,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 .$$

证明 设 $a=1+\lambda$, $\lambda>0$,则当 $n>k+1$ 时,恒有

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2+\cdots+$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\lambda^{k+1}+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\lambda^{k+1},$$

故

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{(k+1)!\,n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)\lambda^{k+1}}=\frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\lambda^{k+1}}\frac{1}{n}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\lambda^{k+1}}\frac{1}{n}=0,$$

因此,由两边夹挤准则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$ □

定理 2.14 (单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

证明 设数列$\{x_n\}$单调上升有上界,飒$=\sup\{x_n\}$.由上确界的性质知," ε >0,v $N>0$,使得 $x_N>$飒$-\varepsilon$.又因$\{x_n\}$单调上升,所以当 $n>N$ 时,恒有

$$飒-\varepsilon<x_n\leq 飒<飒+\varepsilon,$$

故$\{x_n\}$有极限,且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=飒=\sup\{x_n\}.$$

同法可证,单调下降有下界数列$\{x_n\}$有极限,且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=飒=\inf\{x_n\}.$$ □

对一般函数 $y=f(x)$,同样可以证明:“单调有界函数必有单侧极限.”

注意:函数的单调有界性只保证单侧极限 $f(x_0^-)$,$f(x_0^+)$及 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$的存在性,却不足以保证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$的存在性.

下面利用定理 2.14 介绍另一个重要的极限

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z.$$

分三步讨论:

1.当 z 为正整数 n 时.设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,由牛顿二项公式

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),\end{aligned}$$

而

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n\,!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$\frac{1}{(n+1)\,!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right),$$

比较 x_n 和 x_{n+1} 右边各项,各项均为正值,除前两项相等外, x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项,而且 x_{n+1} 比 x_n 还多了最后一项,因此

$$x_n < x_{n+1},$$

即$\{x_n\}$是单增的 .

由 x_n 的展开式易得

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

说明$\{x_n\}$有上界 .由单调有界准则判定极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

存在,用字母 e 表示这个极限值,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\ .$$

e 是一个无理数,将在下册 12 .8 .1 段例 1 中指出 e 的求法 .

2 . 当 $z\to+\infty$时 .不妨设 $z > 1$, 记$[z] = n$, 则 $n \leq z < n+1$, 从而有

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

即

$$x_{n+1}\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z < x_n\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

因为 $z\to+\infty$等价于 $n\to\infty$, 以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}\right) = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} x_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e},$$

由两边夹挤准则有

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \mathrm{e}\ .$$

3 . 当 $z\to-\infty$时 .不妨设 $z < -1$, 令 $z = -t$, 则 $z\to-\infty$等价于 $t\to+\infty$, 因此

$$\lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\mathrm{e}\ .$$

推论 $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\ .$$

这个重要极限对于底趋于 1,指数趋于无穷大的“ 1^{∞} ”型未定式是很有用的 .这个重要极限应灵活地记为“ 以 1 加非零无穷小为底,指数是这个无穷小的倒数,其极限为数 e”.

例 8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

例 10 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{2\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{2}$.

例 11 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^{2}+1}{n^{2}+2n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2-2n}{n^{2}+2n-1}\right)^{\frac{n^{2}+2n-1}{2-2n}}\right]^{\frac{(2-2n)n}{n^{2}+2n-1}}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 12 试证$\{x_n\}=\left\{\dfrac{a^{n}}{n!}\right\}$ $(a>0)$有极限,并求出该极限 .

证明 由等式

$$x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n \tag{1}$$

知,当 $n+1>a$ 时,恒有 $x_{n+1}<x_n$ 即数列$\{x_n\}$从第$[a]$项开始是单调下降的 .显然 $x_n>0$,即$\{x_n\}$有下界 .由单调有界定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 .

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,将(1)式两边取极限

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\lim_{n\to\infty}x_n ,$$

得到 $A=0\cdot A$,故 $A=0$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0 \qquad (a>0)\ . \qquad \square$$

例 13 设 $a>0$, $x_1>0$,且

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right),\quad n=2,3,4,\cdots, \tag{2}$$

试证数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限值 .

证明 由于 $a>0$, $x_1>0$ 及(2)式易知 $x_n>0$,故$\{x_n\}$有下界 .由平均值不等式知

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\geq\sqrt{x_{n-1}\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a},$$

从而 $x_n^2 \geq a$.又由(2)式知

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) x_n \leq x_n ,$$

即$\{x_n\}$是单调下降的 .由单调有界准则知$\{x_n\}$收敛 .设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A\ (A \geq \sqrt{a})$,在(2)式两边取极限得

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) ,$$

解得 $A = \pm\sqrt{a}$,由保号性知 $-\sqrt{a}$为增根,应舍去 .故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a} . \qquad \square$$

值得注意的是,像例 12,例 13 这样的题,首先判定数列收敛性是极为重要的,然后才能由关系式(1)或(2)两边取极限来确定数列的极限 .否则将导致荒谬的结果 .比如,满足关系 $x_{n+1} = 5x_n + 1\ (n = 1,2,\cdots)$,且 $x_1 = 1$ 的数列$\{x_n\}$是发散的,如果未判定收敛性就令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,而对 $x_{n+1} = 5x_n + 1$ 两边取极限,就将得到错误的结果 $A = -\frac{1}{4}$.

* **定理 2.15** (柯西收敛准则) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是:$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(x_0)$时,恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon .$$

2.6 无穷小的比较

同一个极限过程中的两个无穷小 α, β,虽然都以零为极限,但它们趋于零的快慢可能大不相同,导致它们在一些问题中的作用也不同 .

定义 2.8 设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$.

(i) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,则称 β是α的高阶无穷小,简记为 $\beta = o(\alpha)$.

(ii) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$,则称 β是α的低阶无穷小 .

(iii) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$,则称 α与β为同阶无穷小 .

特别,当 $C = 1$ 时,称 α与β是等价无穷小 .记为 $\alpha \sim \beta$.

(iv) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0,\ k > 0$,则称 β是α的 k 阶无穷小 .

显然,$k > 1$ 时,β是α的高阶无穷小,当 $k < 1$ 时,β是α的低阶无穷小;$k = 1$ 时,α与β为同阶无穷小 .

例如, $n\to\infty$时, $\frac{1}{n^2}$是$\frac{1}{n}$的高阶无穷小, $\frac{1}{n^2}=o\ \frac{1}{n}$; $x\to\infty$时, $\frac{1}{x}$与$\frac{100}{x}$是同阶无穷小; $x\to0$ 时, 下列各对无穷小是等价的 .

$$\sin\ x\sim x,\quad \tan\ x\sim x,\quad (\quad 1+x-1)\sim\frac{1}{2}x,\quad (1-\cos\ x)\sim\frac{1}{2}x^2\ .$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos\ x}{x^2}=\frac{1}{2}$, 所以当 $x\to0$ 时, $1-\cos\ x$ 是 x 的二阶无穷小 . $x\to0$ 时, x^3 是 x 的三阶无穷小, x是 x 的$\frac{1}{2}$阶无穷小 .

下面介绍两个关于等价无穷小的定理 .

定理 2 .16　$\alpha\sim\beta$的充要条件是$\beta-\alpha=o(\alpha)$ (或 $\beta-\alpha=o(\beta)$) .

证明　$\alpha\sim\beta$, 即 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, 它等价于 $\lim\ \frac{\beta}{\alpha}-1\ =0$, 即

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=0,$$

故 $\beta-\alpha=o(\alpha)$. □

这个定理说明: 两个等价无穷小的差, 比它们中的任何一个都是高阶无穷小; 或者说, 一个无穷小 α 与它的高阶无穷小 $o(\alpha)$ 之和, 仍与原无穷小 α 等价, $\alpha+o(\alpha)\sim\alpha$.例如, 当 $x\to0$ 时,

$$(x+2x^2-x^3)\sim x,\quad (\quad x-x)\sim\quad x,\quad (\sin\ x+x^2)\sim x\ .$$

定义 2 .9　设 α, β为两个无穷小, 若 $\beta-\alpha=o(\alpha)$, 则称 α是β的主部 .

两个等价无穷小可互为主部 .

定理 2 .17　设 $\alpha\sim\hat{\alpha}$, $\beta\sim\hat{\beta}$, 且 $\lim\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}=A$(或$\infty$), 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}=A(\text{或}\infty)\ .$$

证明　因为

$$\lim\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}=1,\quad \lim\frac{\beta}{\hat{\beta}}=1,$$

所以

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\ \frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\frac{\beta}{\hat{\beta}}\ =A(\text{或}\infty)\ .\qquad □$$

这个定理说明, 两个无穷小之比的极限, 可由它们的等价无穷小之比的极限代替 .这个求极限的方法, 通常称为等价无穷小代换法, 它给$\frac{0}{0}$型未定式的极限运算带来方便 .

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1}{x^3+\sin 2x}$.

解 因为 $x\to 0$ 时, $(1+x+x^2-1)\sim\dfrac{1}{2}(x+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x$, 以及 $(x^3+\sin 2x)\sim\sin 2x\sim 2x$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x^3+\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{2x}=\frac{1}{4}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3+x^4}$.

解 因为两个无穷小之积与它们的等价无穷小之积等价 .$x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$, 所以, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^3$.又 $x\to 0$ 时, $(x^3+x^4)\sim x^3$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

有一种错误的做法, 认为 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$, 因此

$$\text{“}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0\text{”}.$$

产生错误的原因是: 误认为 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 是等价无穷小 .其实, 两个无穷小的和差未必与它们的等价无穷小的和差等价 .

2 .7 函数的连续性

2 .7 .1 连续与间断

自然界中许多事物的变化是连续的, 如气温变化很小时, 单摆摆长变化也很小 .时间变化很小时, 生物生长变化也很少 .研究函数时必须注意到这种现象 .

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 当自变量从 x_0 变到 x 时, 函数随着从 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$.称差 $\Delta x=x-x_0$ 为自变量在 x_0 处的增量, 称差

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\tag{1}$$

为函数(对应)的增量 .显然当 x_0 固定时, 函数增量是自变量增量的函数 .自变量增量与函数增量的几何意义如图 2 .8 所示 .

定义 2 .10 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域上有定义, 如果 $f(x)$ 在 x_0 处也有定义, 且

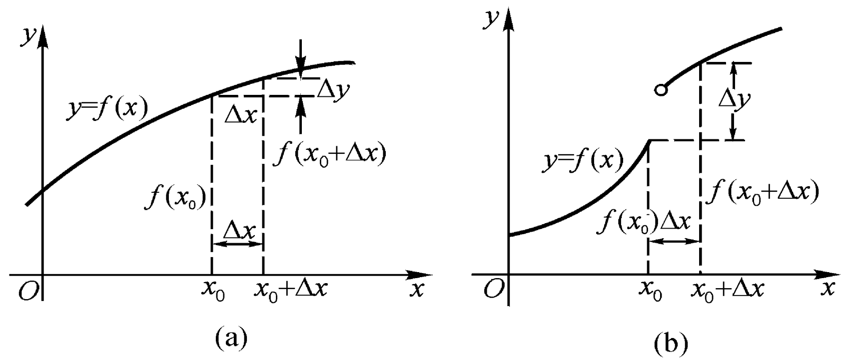


图 2.8

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{2}$$

则说函数 $y = f(x)$在点 x_0 处连续,并称 x_0 是 $f(x)$的连续点.否则,称 x_0 是函数 $f(x)$的间断点.

图 2.8(a)中,x_0 点是连续点;(b)中,x_0 点是间断点.函数的连续反映一种连绵不断的变化状态:自变量的微小变动只能引起函数值的微小变动.

(2)式等价于

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3}$$

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

(3),(4)式也是函数 $f(x)$在 x_0 处连续的定义式.由此可见,若 $f(x)$在 x_0 处连续,则 $x \to x_0$ 时有极限,且等于 $f(x_0)$.但有极限却不能保证连续,即有如下关系:

$$\boxed{连续} \nLeftarrow \boxed{有极限}.$$

例如,$y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$,当 $x \to 1$ 时有极限为 2,但它在 $x = 1$ 处不连续,因为 $x = 1$ 时函数无定义.

(3)式又等价于

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0). \tag{5}$$

如果 $f(x_0^-) = f(x_0)$,则说 $f(x)$在 x_0 处左连续;如果 $f(x_0^+) = f(x_0)$,则说 $f(x)$在 x_0 处右连续.图 2.8(b)中函数 $f(x)$在 x_0 处左连续,但不右连续.显然 $f(x)$在 x_0 处连续的充要条件是它在 x_0 处左、右都连续.

如果 $f(x)$在区间(a, b)内每一点处都连续,则说 $f(x)$在开区间(a, b)内连续,记为 $f(x) \in C(a, b)$.如果 $f(x) \in C(a, b)$,且 $f(a^+) = f(a)$,$f(b^-) = f(b)$,则说 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续,记为 $f(x) \in C[a, b]$.在定义域上连续的函数称为连续函数.

一个区间上连续函数的图形是一条无缝隙的连绵不断的曲线.

由前几节中的例题和习题知: x^{μ}, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$ 及多项式函数 $P(x)$ 和有理函数 $R(x)$ 都是连续函数.

例 1 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0,\end{cases}$$

讨论: $1°$ a, b 为何值时, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在; $2°$ a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 因为

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+b\right)=b,$$

所以

$1°$ 要 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 必须且只需 $f(0^-)=f(0^+)$, 即 $b=1$ (a 可任取).

$2°$ 要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必须且只需 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$, 即 $a=b=1$.

如果 x_0 是间断点, 则(5)式受到破坏, 据此间断点又分为两大类.

第一类 左、右极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在的间断点 x_0, 称为第一类间断点.

$1°$ $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$, 即左、右极限都存在, 但不相等. 不管在 x_0 处函数是否有定义, 这种第一类间断点叫做跳跃间断点. $f(x_0^+)-f(x_0^-)$ 称为其跃度. 这种量的突变往往伴随着质的变化.

例 2 1.1.4 段例 5 中的函数

$$Q(t)=\begin{cases}2\,302\,t+23\,020, & \text{当 } -10\le t<0 \text{ 时},\\ 4\,186\,t+358\,020, & \text{当 } 0<t\le 10 \text{ 时}.\end{cases}$$

因 $Q(0^+)=358\,020$, $Q(0^-)=23\,020$, 所以 $t=0$ 为 $Q(t)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点, 其跃度 335 000 是冰的熔解热.

例 3 函数 $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{(x-1)}}}$, 因 $f(1^-)=2$, $f(1^+)=0$, 所以 $x=1$ 是函数第一类间断点中的跳跃间断点(图 2.9).

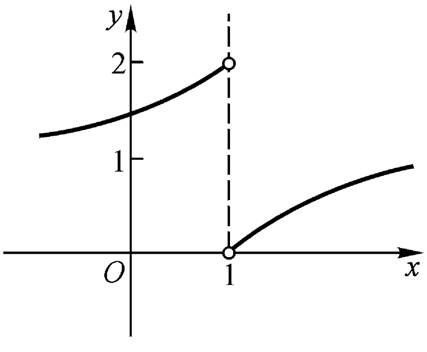


图 2.9

$2°$ $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 但不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 不存在. 即有极限而不连续. 这种第一类间断点叫做可去间断点. 这个词的来源在于只要补充或修改函数在

x_0 处的定义,令 $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$,就可以得到在 x_0 处连续的函数.务必注意,“可去”二字只说明间断点的性质,不要把可去间断点误认为不是间断点.

例 4 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,在 $x=0$ 处无定义.因为 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以 $x=0$ 是可去间断点.只要补充定义 $f(0)=1$,函数就在 $x=0$ 处连续.

第二类 左、右极限至少有一个不存在的间断点,叫做第二类间断点.

例 5 因为 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$,所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$是函数 $\tan x$ 的第二类间断点.由于 $x\to\dfrac{\pi}{2}$时.曲线伸向无穷远,所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$也叫做无穷间断点.

例 6 因为 $\lim_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,所以 $x=0$ 是 $\sin\dfrac{1}{x}$的第二类间断点.在 $x=0$ 附近,函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$的图形在 -1 与 1 之间反复振荡,所以 $x=0$ 也叫做振荡间断点(见图 2.10).

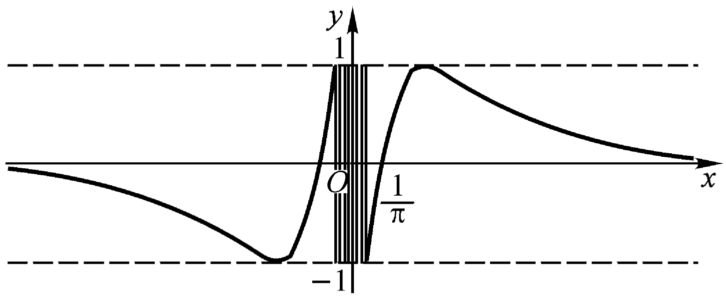


图 2.10

2.7.2 函数连续性的判定定理

判定函数的连续性最基本的方法是用定义判定.下面介绍几个常用的定理,以便从已知函数的连续性来推断它们构成的函数的连续性.

定理 2.18 如果 $f(x)$和 $g(x)$都在点 x_0 处连续,则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x_0)\neq 0)$$

都在 x_0 处连续.

定理 2.19 如果 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续,$u_0=\varphi(x_0)$,又 $y=f(u)$在点 u_0 处连续,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在点 x_0 处也连续.

根据函数连续的定义式(3)及极限的运算法则,定理 2.17,定理 2.18 是显然成立的.

定理 2.20 严格单调的连续函数的反函数是严格单调的连续函数.

从图 2.11 看,结论是明显的,不予证明.

例 7 因为 $\sin x, \cos x \in C(-\infty, +\infty)$,所以

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

在分母不为零的点处都是连续的,即在它们的定义域上连续.

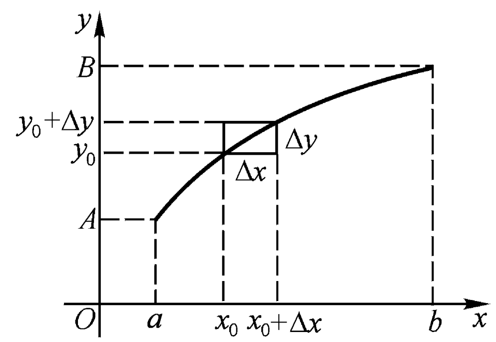


图 2.11

因函数$\frac{1}{x}$在除 $x = 0$ 处以外处处连续,所以复合函数 $y = \sin \frac{1}{x}$在除 $x = 0$ 外处处连续.

因为 $\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ 上严格单调上升连续,所以反函数 $y = \arcsin x \in C[-1,1]$,且严格单调上升.

定理 2.21 初等函数在其有定义的"区间内"处处连续.

这是定理 2.17,2.18 和基本初等函数是定义域上的连续函数的直接推论.要注意的是:定理 2.20 不是说初等函数在定义域上处处连续,而是说"若初等函数在 x_0 的某邻域上有定义,则它在 x_0 处就连续".比如函数

$$y = x\sin^2 \frac{1}{x},$$

定义域是$\{x \mid x > 0$ 及 $x = -\frac{1}{k\pi}, k = 1,2,\cdots\}$,但它只在 $x > 0$ 上连续,$x = -\frac{1}{k\pi}$的这些点上不能考虑函数的连续性,因为自变量这时是离散的(参看函数连续与间断的定义).

初等函数无定义的孤立点是间断点;分段函数的分段点可能是间断点,也可能是连续点,需要判定.例如:

函数 $y = \ln \sin^2 x$ 无定义的点是 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$,它们都是孤立的,因此都是间断点;

函数 $y = e^{\frac{1}{x+2}} \Big/ \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right)$ 无定义的点是 $x = -2,0,1,2$,它们都是孤立的,因此都是间断点;

符号函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 是分段函数,它的分段点 $x = 0$ 是间断点;

而分段函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

的分段点 $x=0$ 是连续点.

此外,狄利克雷函数 $y=D(x)$处处有定义,但处处是第二类间断点;函数 $y=xD(x)$处处有定义,仅在 $x=0$ 处连续.

2.7.3 连续在极限运算中的应用

定理 2.22 设 $f(u)$在 u_0 处连续,又 $\lim \varphi(x)=u_0$,则

$$\lim f(\varphi(x))=f(\lim \varphi(x))=f(u_0).$$

这是定理 2.12 的推论 1 的推广.说明极限运算可取到连续函数内.下面几个极限也是很重要的.

例 8 试证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$.

证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e$$

$$=\frac{1}{\ln a}.\quad \square$$

特别有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

即当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)\sim x$.

例 9 试证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

证明 作变换,令 $a^x-1=t$,则 $a^x=1+t$, $x=\log_a(1+t)$,且 $x\to 0$ 等价于 $t\to 0$,于是由例 8 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.\quad \square$$

特别有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

即当 $x\to 0$ 时,$(e^x-1)\sim x$.

例 10 试证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$($\mu$ 为实数).

证明 令$(1+x)^\mu-1=y$,则$(1+x)^\mu=1+y$,有

$$\mu\ln(1+x)=\ln(1+y),$$

所以

$$\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}.$$

因 $x\to 0$ 等价于 $y\to 0$,于是由例 8 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu.$$ □

这个结果说明:当 $x\to 0$ 时,$[(1+x)^{\mu}-1]\sim\mu x$.

2.7.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有几个重要性质,是研究许多问题的基础.它们的证明要用到附录 I 的知识,未读过这部分内容的读者可以略去本节定理证明,而通过几何直观来认识它们.附录 I 和本节定理的证明仅供学有余力的读者作阅读材料或进一步学习的参考.

定理 2.23 (有界性) 闭区间上连续函数必有界.

* 证明 反证法,设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,但无界,则对任何正整数 n,都有点 $x_n\in[a,b]$,使得$|f(x_n)|>n$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.于是,从有界数列$\{x_n\}$中抽出一个收敛的子数列 $x_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$,此处 $x_0\in[a,b]$,亦有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$.

另一方面,由于 $f(x)\in C[a,b]$,所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,而 $x_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$,故有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$.

这个矛盾的结论,说明反证的假设是错误的. □

定义 2.11 如果在区间 I 上存在点 ξ,使得当 $x\in I$ 时,恒有

$$f(\xi)\le f(x)\quad(f(x)\le f(\xi)),$$

则称 $f(\xi)$为 $f(x)$在 I 上的最小(大)值,记为

$$f(\xi)=\min_{x\in I}f(x)\quad(f(\xi)=\max_{x\in I}f(x)).$$

定理 2.24 (最大最小值存在定理) 闭区间上连续函数必有最小值和最大值.

* 证明 设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界,因此有上确界和下确界.下面仅证明 $f(x)$有最大值,即证 $f(x)$可以达到上确界 β.事实上,由上确界性质,对每个 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,都有 $x_n\in[a,b]$,使

$$\beta-\frac{1}{n}<f(x_n)\le\beta,\quad n=1,2,\cdots,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\beta.$$

从有界数列$\{x_n\}$中抽取一个收敛的子数列$\{x_{n_k}\}$,设 $x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$,亦有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \beta,$$

而由 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 特别有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

根据极限的惟一性知 $f(x_0) = \beta$, 即在 $x_0 \in [a, b]$ 处达到了最大值.

类似地可以证明 $f(x)$ 有最小值. □

开区间上的连续函数或闭区间内有间断点的函数都不一定有界,不一定有最大值和最小值.比如, $x^2 \in C(-1,1)$, 在 $(-1,1)$ 内 x^2 虽然有界,但无最大值.函数 $\tan x$ 在闭区间 $[0,\pi]$ 上无界,也无最大值和最小值,因为 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 是它的第二类间断点.

定理 2.25 (零点存在定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

证明留给读者(提示:作出端点函数值异号的区间套,利用函数连续性).

直观上,曲线上的动点从直线 $y = 0$ 的一侧连续爬到另一侧,至少要通过直线 $y = 0$ 一次,交点的横坐标就是 ξ, $f(\xi) = 0$, 见图 2.12.

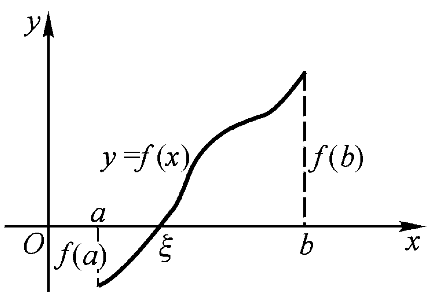


图 2.12

这个定理常常用来确定方程

$$f(x) = 0$$

解的存在性及存在范围.比如,方程

$$x^5 + x - 1 = 0,$$

设 $P(x) = x^5 + x - 1$, 由于 $P(x) \in C[0,1]$, $P(0) = -1$, $P(1) = 1$, 所以在区间 $(0,1)$ 内方程有解.又 $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = -0.468\ 75$, 所以在区间 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内有解, 又 $P\left(\dfrac{3}{4}\right) = -0.012\ 7$, 所以在区间 $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$ 内有解, ……, 这样算下去,直到区间的长度在精度要求范围内,取其中点作方程的近似解,误差不超过区间长度的一半.这样每次将区间缩小一半寻找方程近似解的方法叫做二分法,是求方程解近似值的常用方法.

定理 2.26 (介值定理) 闭区间上连续函数一定能取得介于最小值和最大值之间的任何值.即如果 $f(x) \in C[a, b]$, 数值 μ 满足

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) < \mu < \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

则至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \mu$.

这是定理 2.25 的推论.介值定理实质上是说连续函数能取尽任何两个函数值之间的一切数值,这是连续的本性.

2.8 例 题

例 1 设 $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx$，且对所有 x 满足 $|f(x)| \leq |\sin x|$，试证 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

证明 设

$$g(x) = \left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| = \left|a_1 + a_2\frac{\sin 2x}{\sin x} + \cdots + a_n\frac{\sin nx}{\sin x}\right|,$$

则由条件知 $g(x) \leq 1$，而

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left|a_1 + a_2\frac{\sin 2x}{\sin x} + \cdots + a_n\frac{\sin nx}{\sin x}\right|,$$

$$= |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n|.$$

由极限的保序性知

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1. \qquad \square$$

例 2 确定实数 a, b，使得当 $x \to a$ 时，函数 $f(x) = \frac{x-1}{\ln|x|}$ 是无穷小；当 $x \to b$ 时，$f(x)$ 为无穷大.

解 当 $x \to a$ 时，$f(x)$ 是无穷小，有两种可能，其一，分子 $x - 1$ 为无穷小；其二，分母 $\ln|x|$ 为无穷大.

当 $x - 1$ 为无穷小时，即 $x \to 1$ 时，有

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln|x|} \overset{\text{令 } t = x-1}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

当 $\ln|x|$ 为无穷大时，即 $x \to 0$ 时(因 a 为实数，$x \to \infty$ 情况应舍去)，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\ln|x|} = 0.$$

故 $a = 0$.

当 $x \to b$ 时，$f(x)$ 为无穷大，也有两种可能，其一，分子 $x - 1$ 是无穷大，此时须 $x \to \infty$，因为 b 是实数，$b \neq \infty$；其二，分母是无穷小，即有 $\ln|x| \to 0$，此时须 $x \to -1$ 或 $x \to 1$. 而

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\ln|x|} = \infty, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln|x|} = 1,$$

故 $b = -1$.

例 3 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \frac{c-1}{4}e^{2c}$，求常数 c.

解 显然 $c \neq 0$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}\right)^{\frac{x}{c}\cdot c} = e^{2c},$$

故$\dfrac{c-1}{4}=1$,从而有 $c=5$.

例 4 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\quad x^2+x+1-ax-b)=0$,求 a, b .

解 由极限与无穷小的关系有

$$x^2+x+1-ax-b=\alpha,\qquad \alpha\to 0(\text{当 } x\to\infty\text{时}) .$$

因此, $\quad x^2+x+1=ax+b+\alpha$,故有

$$\frac{\quad x^2+x+1}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{\alpha}{x} .$$

两边取极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\quad x^2+x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\quad a+\frac{b}{x}+\frac{\alpha}{x} ,$$

得 $a=1$.而

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\quad x^2+x+1-ax)=\lim_{x\to+\infty}(\quad x^2+x+1-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\quad x^2+x+1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\quad 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{2},$$

即 $b=\dfrac{1}{2}$.

例 5 设 $f(x)\in C(a, b)$,且 $f(a^+)$和 $f(b^-)$都存在,试证 $f(x)$在(a, b)上有界 .

证明 (方法一)设 $f(a^+)=A, f(b^-)=B$,对取定的 $\varepsilon_0=1$,存在 $\delta: 0<\delta<\dfrac{b-a}{2}$,使得当 $x\in(a, a+\delta)$时,恒有

$$|f(x)-A|<1,$$

从而有

$$|f(x)|<|A|+1 .$$

当 $x\in(b-\delta, b)$时,恒有

$$|f(x)-B|<1,$$

从而有

$$|f(x)|<|B|+1 .$$

由于 $f(x)\in C[a+\delta, b-\delta]\quad C(a, b)$,故 $x\in[a+\delta, b-\delta]$时,有常数 $M_1>0$,使得

$$|f(x)|<M_1 .$$

令 $M=\max\{M_1, |A|+1, |B|+1\}$,则当 $x\in(a, b)$时,恒有

$$|f(x)|<M,$$

即 $f(x)$在(a,b)上有界.

(方法二)令 $F(a)=f(a^{+})$, $F(b)=f(b^{-})$,当 $x\in(a,b)$时, $F(x)=f(x)$,则 $F(x)\in C[a,b]$.因此存在 $M>0$,使得当 $x\in[a,b]$时,恒有

$$|F(x)|<M,$$

从而 $x\in(a,b)$时,恒有

$$|f(x)|<M. \quad \square$$

例 6 设 $f(x)\in C[a,b]$, A, B 为任意两个正数,试证对任意二点 x_1, $x_2\in[a,b]$,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$Af(x_1)+Bf(x_2)=(A+B)f(\xi).$$

证明 因为 $f(x)\in C[a,b]$,所以在$[a,b]$上 $f(x)$有最大值 M 和最小值 m,因此有

$$m\leq f(x_1)\leq M,\quad m\leq f(x_2)\leq M.$$

因 $A,B>0$,故

$$Am\leq Af(x_1)\leq AM,\qquad Bm\leq Bf(x_2)\leq BM.$$

两式相加得

$$(A+B)m\leq Af(x_1)+Bf(x_2)\leq(A+B)M,$$

因此

$$m\leq\frac{Af(x_1)+Bf(x_2)}{A+B}\leq M.$$

再由介值定理知,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{Af(x_1)+Bf(x_2)}{A+B},$$

故

$$Af(x_1)+Bf_2(x_2)=(A+B)f(\xi). \quad \square$$

例 7 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,并且此函数在$[0,1]$区间上的最小值是 0,最大值是 1,试证方程 $f(x)=x$ 在$[0,1]$上必有根.

证明 若 $f(0)=0$,则 0 就是方程 $f(x)=x$ 的根.若 $f(1)=1$,则 1 就是方程 $f(x)=x$ 的根.

若 $f(0)\neq0$ 且 $f(1)\neq1$.设 $F(x)=f(x)-x$,有 $F(0)=f(0)>0$, $F(1)=f(1)-1<0$,从而 $F(x)=0$ 在$(0,1)$上有根,即 $f(x)=x$ 有根. $\square$

例 8 若 $f(x)$对一切正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,试证在区间$(0,+\infty)$内, $f(x)$只要在一点连续就处处连续.

证明 令 $x_1=x_2=1$,则有 $f(1)=f(1)+f(1)$,故 $f(1)=0$.

设 $x_0\in(0,+\infty)$, $f(x)$在 x_0 处连续,则由于

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}[f(x_0) + f(1+h) - f(x_0)]$$
$$= \lim_{h\to 0}[f(x_0 + x_0 h) - f(x_0)] = 0 .$$

故 $f(x)$在 $x=1$ 处连续 ."$x\in(0,+\infty)$,由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x) + f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) - f(x)\right]$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = 0 .$$

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内处处连续 . □

习 题 二

2.1

1 . 观察下列数列,指出变化趋势——极限 .

(1) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$;　　(2) $x_n = (-1)^n n$;

(3) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$;　　(4) $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$.

2 . 预测下列数列的极限 a,指出从哪一项开始能使$|x_n - a|$永远小于 0 .01,0 .001 .

(1) $x_n = \frac{n}{n+1}$;　　(2) $x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$.

3 . 用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$.

4 . 设数列$\{x_n\}$有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

2.2

1 . 用极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x} = 2$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$;　　(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$.

2 . 用左、右极限证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0\ (x_0 > 0)$.

3 . 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$不存在 .

4．在函数极限定义中，

(1) 将“$0<|x-x_0|<\delta$”换为“$0<|x-x_0|\leq\delta$”或“$0\leq|x-x_0|<\delta$”；

(2) 将“$|f(x)-A|<\varepsilon$”换为“$|f(x)-A|\leq\varepsilon$”或“$|f(x)-A|<2\varepsilon$”，

该定义与原定义是否等价，为什么？

*5．深刻理解极限的定义，用精确的数学语言给出数列$\{x_n\}$不以 a 为极限的定义．

2.3

1．指出下列各题中的无穷小与无穷大．

(1) 2^{-x}，当 $x\to+\infty$时；　　(2) $\ln x$，当 $x\to0^+$ 时；

(3) $\dfrac{1+x}{x^2-9}$，当 $x\to3$ 时；　　(4) $\dfrac{\sin x}{1+\sec x}$，当 $x\to0$ 时．

2．设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，用极限定义证明：

(1) 若 $A>0$，则有 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$；

(2) 若有 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\geq0$，则 $A\geq0$．

3．根据无穷小、无穷大的定义证明：

(1) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时为无穷小；

(2) $x_n=\dfrac{n^2}{2n+1}$，当 $n\to\infty$时为无穷大．

4．函数 $f(x)=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？当 $x\to\infty$时，$f(x)$是否为无穷大？为什么？

5．下列函数当 $x\to\infty$时均有极限，把它分别表示为一个常数与一个当 $x\to\infty$时的无穷小之和的形式．

(1) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2}{2x^2+1}$；　　(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$．

6．怎样证明一个数列不是无穷大？论证你的方法．

2.4

1．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；

(3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}$

$\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)^{25}(2x-1)^{20}}{(2x+1)^{45}}$; (8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2．**计算下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ ($p>0$, $q>0$);

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; (4) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

3．**计算下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ ($a>0$, $m\geq 2$ **且** m **为整数**);

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ($a>0$);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$ ($|x|<1$);

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

4．**已知** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right)=0$,**求常数** a, b.

5．**若** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $x_n\neq 0$ ($n=1,2,\cdots$),**按** $a\neq 0$ **与** $a=0$ **两种情况讨论**: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$ **是否成立**.

2.5

1．**求下列极限**:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}]$, $0 < \alpha < 1$.

2 . **求下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x + x^2}{\tan 2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to n\pi}\frac{\sin x}{x - n\pi}$(n **为正整数**);

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{1}{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$; (8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1 - 2\cos x}{\sin x - \frac{\pi}{3}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x + 2 - 2}$; (10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x}$.

3 . **通过圆的内接正多边形的面积求证圆的面积公式** $S = \pi R^2$.

4 . **求下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x - 1}{2x + 1}^{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1 + x}^{x}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}^{-n}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$; (8) $\lim\limits_{X\to 1}(3 - 2x)^{\frac{1}{x-1}}$

5 . **已知** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x + a}{x - a}^{x} = 9$, **求常数** a .

6 . **若** $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$($a < b$), **且**

$$x_{n+1} = x_n y_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

7 . **设** $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + 2$, $\cdots$, $x_n = 2 + x_{n-1}$, **求** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

8 . **若** $|x_n| \leq q|x_{n-1}|$, $q < 1$, **试证** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2 .6

1 . **当** $x\to 1$ **时**, **无穷小** $1 - x$ **和**(1) $1 - {}^{3}x$;(2) $2(1 - x)$ **是否是同阶的**? **是否是等价的**?

2 . **当** $x\to 0$ **时**, **试确定下列各无穷小对于** x **的阶数**, **并写出其幂函数形的**

主部.

(1) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\ (x>0)$;　　(2) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\ (a>0)$;

(3) $\ln(1+x)$;　　(4) $\tan x-\sin x$.

3. **用等价无穷小代换求下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\arcsin 3x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x^3\tan x(1-\cos x)}{(x+\sqrt[3]{x})\sqrt[6]{x^5}\sin^5 x}$.

4. **若** $\alpha\sim\hat{\alpha}$, $\beta\sim\hat{\beta}$, **试证**:

(1) $\lim \alpha f(x)=\lim \hat{\alpha} f(x)$;　　(2) $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim(1+\hat{\alpha})^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$.

2.7

1. **求下列函数的连续区间、间断点及其类型,如果是可去间断点,如何补充或修改这一点处函数的定义使它连续**.

(1) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\ (x>-1)$;　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$;

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$;　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ x^2-1, & x\geq 0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\left(2-3e^{\frac{1}{x}}\right)$.

2. **对函数** $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$, **能否在** $x=0$ **处补充定义函数值,使函数连续**?**为什么**?

3. **设**

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0,\end{cases}$$

试问: (1) a, b **为何值时**, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **存在**? (2) a, b **为何值时**, $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续**?

4. **计算下列极限**:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a, b, c>$

0）.

5．若函数 $f(x)$，$g(x)$都在 $x=x_0$ 点处不连续，问 $f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$是否在 $x=x_0$ 点处也不连续．

6．若 $f(x)$连续，$|f(x)|$，$f^2(x)$是否也连续？又若$|f(x)|$，$f^2(x)$连续，$f(x)$是否也连续？

7．试证任何三次多项式至少有一个零点．

8．证明方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根．

9．试证方程 $x=a\sin x+b$ $a>0,\ b>0$ 至少有一个正根并且它不超过 $a+b$．

10．若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在$[x_1,x_n]$中必有 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

11．证明：若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，则 $f(x)$必有界．

12．若 $f(x)\in C[0,2a]$，且 $f(0)=f(2a)$，试证在区间$[0,a]$内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$．

13．设$|f(x)|\leq|g(x)|$，$g(x)$在 $x=0$ 处连续，且 $g(0)=0$，试证 $f(x)$在 $x=0$ 处连续．

14．设 $f(x)\in C[a,b]$，对(a,b)内任意两点 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，证明 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调．

15．证明：

（1）$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0\end{cases}$是初等函数；

（2）符号函数 $\mathrm{sgn}\ x$ 不是初等函数．

16．设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上单调上升，且其值域为区间$[f(a),f(b)]$，证明 $f(x)$在$[a,b]$上连续．

2.8

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdot\cdots\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})\ (|x|<1)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-x^{\frac{1}{n}})\ (x>0)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]\,x$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$;　　(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2．设 $f(x)$在 $x=0$ 附近连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3．已知 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求 a．

4．已知 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)=0(x\sin x^n)$，$x\sin x^n=0(e^{x^2}-1)$，则正整数 n 等于(　　)．

(A) 1，　　(B) 2，　　(C) 3，　　(D) 4．

5．设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

6．指出函数 $y=\left[1-\exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]^{-1}$ 的间断点，并说明其类型．

7．设 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$，问 a 取简值时，$x=1$ 是可去间断点，此时 $x=0$ 是哪类间断点？

8．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$，$|a|<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$．

9．设 $f(x)$对任何实数 x_1，x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，而且 $f(x)$在 $x=a$ 点处连续，证明 $f(x)$是连续函数．

10．若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，且 $f[f(x)]=x$，证明必有点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$．

11．如果 $f(x)$在区间$[a,b]$内除有有限个第一类间断点外处处连续，试证 $f(x)$在$[a,b]$上有界．

12．单调有界函数的间断点是哪一类间断点，证明你的结论．

13．设函数 $f(x)\in C[0,1]$，且 $0\leq f(x)\leq x$．任取一点 $x_1\in(0,1)$，并令 $x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在；(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $f(a)=a$．

14．设点 P 为椭圆内任一点(不在边界线上)，证明椭圆过 P 点的弦中至少有一条以 P 点为中点．

附录Ⅰ　几个基本定理

附录Ⅰ中的几个基本定理是进一步学习数学分析的基础,提供给学有余力的同学参考 .

一个闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}$称为区间套,如果它满足条件:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \quad [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

定理 1　(区间套定理)　对一个区间套,必有惟一一点属于所有区间 .

证明　由条件(i)知数列$\{a_n\}$单增有上界 b_1,数列$\{b_n\}$单降有下界 a_1,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在,再由条件(ii)知

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

设 ξ 为它们的共同极限值,由数列的单调性有

$$a_n \leq \xi \leq b_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

即 ξ 在区间套的所有区间内 .

再证惟一性,如果还有 $a_n \leq \xi' \leq b_n$, $n = 1, 2, \cdots$,则有

$$b_n - a_n \geq |\xi' - \xi|, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

由保序性有

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geq |\xi' - \xi|,$$

根据条件(ii)知

$$|\xi' - \xi| \leq 0 .$$

故必有 $\xi' = \xi$. □

定理 2　(致密性定理)　有界数列必有收敛的子数列 .

证明　设$\{x_n\}$为有界数列,于是存在常数 a, b,使

$$a \leq x_n \leq b, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

将区间$[a, b]$等分为两个子区间,则至少有一个子区间含有$\{x_n\}$中的无穷多项 把这个区间记为$[a_1, b_1]$(若两个子区间都含有无穷多项,则任取一个) . 再等分$[a_1, b_1]$,取一个含有$\{x_n\}$中无穷多项的子区间记为$[a_2, b_2]$.如此不断地作下去,得到一个区间套$\{[a_n, b_n]\}$:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \quad [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n} \to 0 \, (n \to \infty)$;

(iii) 每个区间$[a_n, b_n]$内都含有$\{x_n\}$中无穷多项 .

在$\{x_n\}$中,首先任意抽取含在$[a_1, b_1]$中的一项 x_{n_1};再在 n_1 项后任意抽取含在$[a_2, b_2]$中的一项 x_{n_2},如此抽下去,得到$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,即

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k .$$

由区间套定理知 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$,故

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi,$$

即$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的收敛子数列. □

无界数列没有这一性质,但有一个相仿的性质:在无界数列$\{x_n\}$中必有一个子数列 $x_{n_k} \to \infty (k\to\infty)$(留作练习).

下面的定理给出判定数列收敛性的充要条件,称为“柯西收敛原理”或完备性定理.

定理 3 (完备性定理) 数列$\{x_n\}$有极限的充要条件是:对任给的 $\varepsilon > 0$,都存在序号 N,使得当 $n, m > N$ 时,恒有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon .$$

证明 必要性,设 $x_n \to a$,于是,$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$,当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $n, m > N$ 时,有

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

充分性,首先证明$\{x_n\}$是有界的,取 $\varepsilon = 1$,由假设条件有 N_0,当 $n, m > N_0$ 时,$|x_n - x_m| < 1$,特别当 $n > N_0$ 时,有$|x_n - x_{N_0+1}| < 1$.从而当 $n > N_0$ 时,恒有

$$|x_n| < |x_{N_0+1}| + 1 .$$

令 $M = \max \{ |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_0}|, |x_{N_0+1}| + 1 \}$,则对一切 n 恒有

$$|x_n| \leq M .$$

可见$\{x_n\}$有界,于是有收敛的子数列$\{x_{n_k}\}$,设

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a .$$

下面证明,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\forall \varepsilon > 0$,由 $x_{n_k} \to a$,$\exists K$,当 $k > K$ 时,恒有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon .$$

对此 K 及定理条件中的 N,取定序号 $k_0 = \max\{K+1, N+1\}$,于是 $k_0 > K$,且 $n_{k_0} \geq n_{N+1} \geq N+1 > N$.由此及定理假设,当 $n > N$ 时,有

$$\left| x_n - x_{n_{k_0}} \right| < \varepsilon,$$

所以

$$|x_n - a| \leq \left| x_n - x_{n_{k_0}} \right| + \left| x_{n_{k_0}} - a \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

例 1 设 $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$,试证$\{x_n\}$收敛.

证明 设 $n > m$,于是

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}.$$

故 $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$,取 $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n, m > N$ 时,有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

由柯西收敛原理知数列$\{x_n\}$敛收. □

定理 4 (有限覆盖定理) 设开区间的集合 E 覆盖了闭区间$[a, b]$(即 $\forall x \in [a, b]$,都有 E 中的开区间 Δ,使 $x \in \Delta$),则一定可以从 E 中选出有限个开区间覆盖$[a, b]$.

证明 反证法,设$[a, b]$不能被 E 中任何有限个区间覆盖.将$[a, b]$等分为两个闭子区间,则至少有一个不能被 E 中有限个区间覆盖,记此区间为$[a_1, b_1]$.再等分$[a_1, b_1]$,取其中一个不能被 E 中有限个区间覆盖的闭子区间记为$[a_2, b_2]$,如此不断分割下去,得到一个区间套$\{[a_n, b_n]\}$:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty)$;

(iii) 每个$[a_n, b_n]$都不能被 E 中有限个区间所覆盖.

由区间套定理,有惟一一点 $\xi \in [a, b]$,且 $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$,由于 E 覆盖了$[a, b]$,所以 E 中应有一个区间(α, β)使 $\xi \in (\alpha, \beta)$.取 $\varepsilon_0 = \min\{\xi - \alpha, \beta - \xi\} > 0$,则有 N,当 $n > N$ 时,$\xi - a_n < \varepsilon_0$ 且 $b_n - \xi < \varepsilon_0$.于是

$$\alpha < a_n < \xi < b_n < \beta, \quad \text{当 } n > N \text{ 时}.$$

即当 $n > N$ 时,有

$$[a_n, b_n] \quad (\alpha, \beta).$$

也就是 E 中一个开区间 (α, β) 就覆盖了区间 $[a_n, b_n]$ $(n > N)$，与(iii)矛盾. □

下面介绍函数在区间上一致连续的概念.

回忆函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续的定义：在区间 I 上每一点 x_0 处都连续，即对 I 上每个点 x_0，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 这里需先指定 x_0，给定 ε，才能找相应的 δ.一般地说，δ 不但与 ε 有关，而且与 x_0 有关：$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.函数值变化快的地方 δ 较小，变化慢的地方 δ 较大 如果只考虑两个点 x_{01}，x_{02}，对给定的 $\varepsilon > 0$，找到两个相应的 δ_1，δ_2，可以取其中较小的作为两点处通用的 δ.由于区间 I 上有无穷多个点，对给定的 ε，未必能找到对 I 上所有点都通用的 δ.

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对任给的 $\varepsilon > 0$，都存在仅与 ε 有关的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使区间 I 内任意两点 x_0，x，只要 $|x - x_0| < \delta$，就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则说 $f(x)$ 在 I 上一致连续或均匀连续.

就是说，只要 $|\Delta x| < \delta$，无论在区间 I 的哪一点处都有 $|\Delta y| < \varepsilon$.

函数在 I 上一致连续必在 I 上连续，但反过来，在区间 I 上连续不能保证一致连续.

例 2 函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上连续，但不一致连续.事实上，当 x 取下列点：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

时，相邻二点的函数值之差均为 1，所以当 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ 时，无论正数 δ 取得多么小，在上述点列中都可找到两个相邻的点，它们的距离小于 δ，但函数值之差为 1，大于 $\dfrac{1}{2}$.所以 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上不一致连续(见图 I .1).

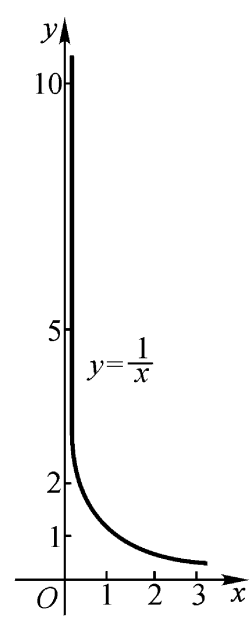


图 I .1

定理 5 (康托①定理) 闭区间上的连续函数必一致连续.

证明 设 $f(x) \in C[a, b]$，$\forall \varepsilon > 0$，$\forall x \in [a, b]$，$\exists \delta_x > 0$，

---

① 康托 Cantor G.(德)1845—1918，是魏尔斯特拉斯的学生，是近代数学基础——集合论的创建者.生前他的学术观点受到保守派数学家的反对和非难，说他"神经质".他对所有反对意见作了分析，坚信自己的理论.他那富有哲理的观点，对问题大胆而缜密的构思，以及在证明上高超的技巧，在他犯精神分裂症死后才得到后人高度的评价.

使当 $x'\in[a,b]$,且$|x'-x|<2\delta_x$ 时,有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对此 x 作开区间$\Delta_x=(x-\delta_x,x+\delta_x)$,所有这样的开区间 Δ_x 完全覆盖了闭区间$[a,b]$,由有限覆盖定理知,其中有限个开区间

$$\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\cdots,\Delta_{x_k}$$

就能覆盖$[a,b]$,令

$$\delta=\min\{\delta_{x_1},\delta_{x_2},\cdots,\delta_{x_k}\}>0,$$

则 $\forall x',x''\in[a,b]$,只要$|x'-x''|<\delta$,由于 x'必在某一 Δ_{x_i}中,从而$|x'-x_i|<\delta_{x_i}<2\delta_{x_i}$,$|x''-x_i|\le|x'-x''|+|x'-x_i|<\delta+\delta_{x_i}\le2\delta_{x_i}$,因此

$$|f(x')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(x_i)|+|f(x'')-f(x_i)|<\varepsilon.$$

所以 $f(x)$在$[a,b]$上一致连续. □

附录 II　上、下极限

我们知道,收敛数列必有界,那么有界数列收敛的充分必要条件是什么?

设$\{x_n\}$是一有界数列,令

$$h_n=\sup\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots\},$$

$$l_n=\inf\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots\},$$

则

$$h_1\ge h_2\ge h_3\ge\cdots\ge h_n\ge\cdots\ge l_n\ge\cdots\ge l_3\ge l_2\ge l_1,$$

即数列$\{h_n\}$是单调下降有下界的,数列$\{l_n\}$是单调上升有上界的.由单调有界准则知$\{h_n\}$,$\{l_n\}$都有极限,设

$$\lim_{n\to\infty}h_n=\lim_{n\to\infty}\sup\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}=h,$$

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}\inf\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}=l,$$

将其依次称为数列$\{x_n\}$的上极限和下极限,记为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=h,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=l.$$

由 $l_n\le h_n$, $n=1,2,\cdots$,及极限的保序性知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

因为 $l_n \le x_n \le h_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 由两边夹挤准则知,当上、下极限相等时,有界数列有极限,且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

反之亦然(用数列极限定义不难证明) .

有界数列的上极限和下极限就是有界数列中的所有收敛的子数列的极限的最大值与最小值 .它们相等是数列有极限的充要条件 .

同样地,定义 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 的上、下极限为

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{ y \mid y = f(x), 0 < |x - a| < \delta\},$$

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{ y \mid y = f(x), 0 < |x - a| < \delta\} .$$

例如,对有界函数 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$,有

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \sin \frac{1}{x} = 1, \quad \underline{\lim_{x\to 0}} \sin \frac{1}{x} = -1 .$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$不存在 .

第三章　导数与微分

前两章介绍了工科数学分析的研究对象——函数,特别是连续函数,以及研究问题的基本方法——极限方法.

在生产实践和科学研究中,仅仅了解变量之间的函数关系是很不够的,常常需要考虑由于自变量的变化所引起的函数变化中的以下两个基本问题:

1.函数随自变量变化的变化速度(比率)问题,即函数对自变量的变化率问题.

2.自变量的微小变化导致函数变化多少的问题.

这就是本章所要讨论的两个中心内容:导数与微分.它们反映了物质运动变化的瞬时性态和局部特征,是研究运动和变化过程必不可少的工具.

3.1　导数概念

3.1.1　几个实例

例 1　直线运动的速度问题:一质点做直线运动,已知路程 s 与时间 t 的函数关系 $s=s(t)$,试确定 t_0 时的速度 $v(t_0)$.

从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$,质点走过的路程

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$

这段时间内的平均速度

$$瑓(\Delta t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

若运动是匀速的,平均速度就等于质点在每个时刻的速度.

若运动是非匀速的,平均速度 瑓(Δt)是这段时间内运动快慢的平均值,Δt 越小,它越近似地表明 t_0 时运动的快慢.因此,人们把 t_0 时的速度 $v(t_0)$定义为

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

并称之为 t_0 时的瞬时速度.上式既是它的定义式,又指明了它的计算方法.瞬时速度是路程对时间的变化率.

例 2　电流问题:已知通过导体横截面的电荷量 Q 与时间 t 的关系 $Q=Q(t)$,试确定电流 $I(t_0)$.

从 t_0 到 $t_0+\Delta t$，流过截面的电荷量

$$\Delta Q = Q(t_0+\Delta t) - Q(t_0) .$$

平均电流

$$\overline{I}(\Delta t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} .$$

对恒定电流(如直流电)，$\overline{I}(\Delta t)$就是各个时刻的电流 .

对非恒定电流(如交流电)，Δt 很小时，$\overline{I}(\Delta t)$近似地表达了 t_0 时电流的强弱，Δt 越小，近似程度越高，所以把 t_0 时的电流 $I(t_0)$定义为

$$I(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t},$$

它是电荷量对时间的变化率 .

例 3 比热容问题：已知单位质量的某种物体从某一温度开始，变到温度 t 时，所吸收的热量 $Q = Q(t)$，试确定其比热容 $C(t_0)$.

温度由 t_0 变到 $t_0+\Delta t$，吸收的热量

$$\Delta Q = Q(t_0+\Delta t) - Q(t_0) .$$

平均比热容，即温度升高一摄氏度所吸收的热量的平均值

$$C(\Delta t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} .$$

令 $\Delta t\to 0$，称平均比热容 $C(\Delta t)$的极限为物体在温度 t_0 时的比热容，即

$$C(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t},$$

它是热量对温度的变化率 .

例 4 切线斜率：已知曲线 l 的方程 $y = f(x)$，确定曲线 l 上点 $M_0(x_0, y_0)$处切线的斜率 .

什么是曲线 l 在点 M_0 处的切线呢？在曲线 l 上任取一个异于 M_0 的点 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，过 M_0，M 的直线称为曲线 l 的割线 .当点 M 沿曲线 l 趋于点 M_0 时，若割线有极限位置 M_0T，则称直线 M_0T 为曲线 l 在点 M_0 处的切线(图 3 .1) .

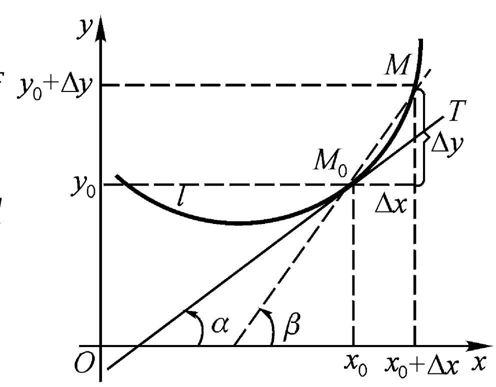


图 3 .1

割线 M_0M 的斜率，即其倾角 β 的正切

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

由于 $M \xrightarrow{l} M_0$ 时，$\Delta x\to 0$，$\angle\beta\to\angle\alpha$，故切线的斜率 k 即其倾角 α 的正切

$$k=\tan\alpha=\lim_{M\to M_0}\tan\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

它是曲线上动点的纵坐标对横坐标的变化比率.

上述几个实例,就其实际意义来说各不相同,分别属于运动学、电学、热学和几何学中的问题,但在数量关系上却有如下的共性:

1. 在问题提法上,都是已知一个函数 $y=f(x)$,求 y 关于 x 在 x_0 处的变化率.

2. 在计算方法上,

1°当 y 随 x 均匀变化时,用除法;

2°当变化是非均匀的时候,需作平均变化率的极限运算

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

在现实生活中,凡涉及变化率的问题,其精确描述和计算都离不开上式所规定的这一运算.

3.1.2 导数的定义

定义 3.1 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义,当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,函数 $y=f(x)$ 的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

与自变量的增量 Δx 之比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

称为 $f(x)$的平均变化率.如果 $\Delta x\to 0$ 时,平均变化率的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在,则称 $f(x)$在 x_0 处可导或有导数,并称此极限值为函数 $f(x)$在 x_0 处的导数.可用下列记号

$$y'\Big|_{x=x_0},\quad f'(x_0),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0},\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

中的任何一个表示,如

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

若记 $x_0+\Delta x=x$,则 $f(x)$在 x_0 处的导数也可写为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

当极限(1)式不存在时,就说函数 $f(x)$在 x_0 处不可导或导数不存在.特别当(1)式的极限为正(负)无穷大时,有时也说在 x_0 处导数是正(负)无穷大,但这时导数不存在.

这样,前面的实例就可写成

$$v(t_0)=s'(t_0),\quad I(t_0)=Q'(t_0),\quad C(t_0)=Q'(t_0),\quad k(x_0,f(x_0))=f'(x_0),$$

导数概念在许多领域都有它的用处.

导数 $f'(x_0)$的几何意义是曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,f(x_0))$处的切线斜率;导数 $f'(x_0)$的物理意义是变量 $y=f(x)$随变量 x 在 x_0 处的瞬时变化(比)率.

按定义求给定函数的导数分三步:求差——求函数的增量;作商——作自变量增量与函数增量的比;取极限.

例 5 求 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数.

解 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+\Delta x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

$$y'\Big|_{x=1}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

例 6 求曲线 $y=x^2$ 在点(1,1)处的切线方程及法线方程(过切点且垂直于切线的直线称为法线).

解 由例 5 及导数的几何意义知,曲线 $y=x^2$ 在点(1,1)处的切线斜率 $k_{切}=2$,故切线方程为

$$y-1=2(x-1),$$

即

$$2x-y-1=0.$$

由于 $k_{法}=-\dfrac{1}{k_{切}}=-\dfrac{1}{2}$,所以法线方程是

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1),$$

即

$$x+2y-3=0.$$

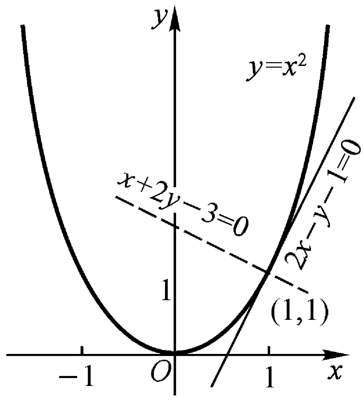


图 3.2

如图 3.2 所示.

定义 3.2 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $f(x)$在 x_0 处的左导数,记为 $f'_-(x_0)$;如果

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $f(x)$在 x_0 处的右导数,记为 $f'_+(x_0)$.

显然,函数 $f(x)$在点 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)$在 x_0 处的左、右导数都存在,且相等.这时

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

在研究分段函数分段点处的可导性时,常常要分左、右导数来讨论.

定理 3.1 如果函数 $f(x)$在 x_0 处有导数 $f'(x_0)$,则 $f(x)$在 x_0 处必连续.

事实上,因为 $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x(\Delta x \neq 0)$,故

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

但是函数的连续性不能保证可导性.

例 7 试证函数 $y = |x|$在 $x = 0$ 处连续,但不可导.

证明 因为

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|,$$

显然 $\Delta x \to 0$ 时,$\Delta y \to 0$,即 $y = |x|$在 $x = 0$ 处连续.但由于

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

故 $y = |x|$在 $x = 0$ 处不可导.几何上易知曲线 $y = |x|$在(0,0)处无切线(图 3.3).

当 $x \neq 0$ 时,有 $|x|' = \operatorname{sgn} x$.

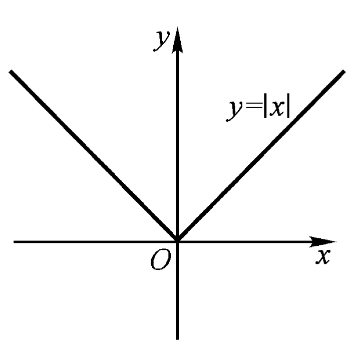


图 3.3

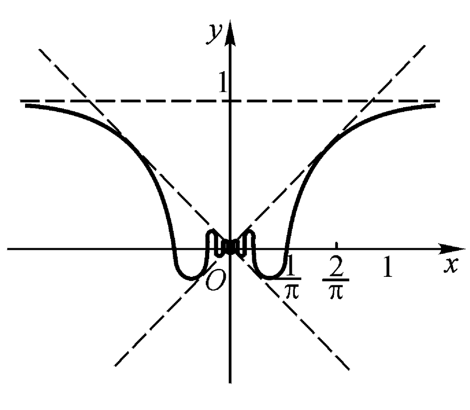


图 3.4

例 8 试证函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0, \\ 0, & \text{当 } x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ **处连续,但不可导 .**

证明　因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以函数在 $x=0$ **处连续 .**

但因

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

在 $\Delta x\to 0$ **时,无极限,所以该函数在** $x=0$ **处不可导 .图** 3 .4 **给出这个函数的图形 .** ▯

例 9　试证函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **在点** $x=0$ **处连续,但不可导 .**

证明　因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0=f(0),$$

所以函数在 $x=0$ **处连续 .但由于**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$$

所以函数在 $x=0$ **处不可导 .**

使函数连续但不可导的点,其函数图形在其对应点处,或者无切线,或者切线是垂直于 x **轴的,对后一种情况,有时也说导数为无穷大 .**

例 10　设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{当 } x\leq x_0, \\ ax+b, & \text{当 } x>x_0, \end{cases}$$

为了使 $f(x)$ **在** x_0 **处可导,应如何选取** a,b ?

解　首先,函数必须在 x_0 **处连续 .由于**

$$f(x_0)=x_0^2,\quad f(x_0^-)=x_0^2,\quad f(x_0^+)=ax_0+b,$$

所以应该有

$$ax_0+b=x_0^2 .$$

又因

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0,$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(x_0+\Delta x)+b-x_0^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(x_0+\Delta x)+b-(ax_0+b)}{\Delta x}=a,$$

于是有

$$a=2x_0 .$$

从而,当 $a=2x_0$, $b=-x_0^2$ 时, $f(x)$在 x_0 处可导 .

定义 3.3 如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一点处都有导数,则说 $f(x)$在区间(a,b)内可导,简记为 $f(x)\in D(a,b)$. 这时对(a,b)内每一个点 x 都有一个确定的导数值

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

与之对应,故在区间(a,b)内确定一个新函数,称之为函数 $y=f(x)$的导函数,记为 $f'(x)$, y', $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$,即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad x\in(a,b) .$$

例如,路程函数 $s(t)$的导函数 $s'(t)$就是速度函数 $v(t)$.

显然,导函数 $f'(x)$在 x_0 处的值,就是函数 $f(x)$在 x_0 处的导数,即

$$f'(x)\Big|_{x=x_0}=f'(x_0) .$$

所以人们习惯地将导函数简称为导数 .

3.2 导数的基本公式与四则运算求导法则

用定义求函数 $y=f(x)$在点 x 处的导数的三个步骤是:

1°计算函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

2°求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

3°取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$,如果这个极限存在,它就是所求的导数 $f'(x)$.

3.2.1 导数的基本公式

1 . 常数 $y=C$ 的导数为零 .

$$\Delta y = C - C = 0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 .$$

2 . **幂函数** $y = x^{\mu}$ **的导数为** $\mu x^{\mu - 1}$.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{\mu} - x^{\mu} = x^{\mu}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\mu} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} = x^{\mu - 1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

$$(x^{\mu})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu - 1} .$$

最后一式用到第二章 2 .7 **例** 10 .

幂函数 x^{μ} **的导数等于幂指数** μ **乘以低一次幂函数** $x^{\mu - 1}$.**例如**

$$(x)' = 1 \cdot x^{1 - 1} = x^{0} = 1 .$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^{2}} .$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

3 . **正弦函数** $y = \sin x$ **的导数为** $\cos x$; **余弦函数** $y = \cos x$ **的导数是** $-\sin x$.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

利用 $\cos x$ **的连续性及重要的极限得到**

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x .$$

正弦函数的导数是余弦函数 .

类似地可推出,余弦函数的导数是负的正弦函数:

$$(\cos x)' = -\sin x .$$

4 . **指数函数** $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$**的导数为** $a^{x} \ln a$.

$$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^{x} = a^{x}(a^{\Delta x} - 1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^{x} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

由第二章 2.7 例 9 得到:

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

特别地,有

$$(e^x)'=e^x,$$

即以 e 为底的指数函数的导数等于它自己.

5. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$的导数为$\dfrac{1}{x\ln a}$.

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

由第二章 2.7 节例 8 得到:

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别有

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},$$

即自然对数函数的导数等于自变量的倒数.

我们把基本初等函数的导数公式列成下表,其中公式(9)～公式(16)将在后面几节给出证明.请读者务必熟记这些公式.

导数的基本公式

(1) $(C)'=0$; (2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$;

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$; (4) $(e^x)'=e^x$;

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; (6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(7) $(\sin x)'=\cos x$; (8) $(\cos x)'=-\sin x$;

(9) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$; (10) $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$;

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$; (12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (14) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; (16) $(\text{arccot}\, x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$.

3.2.2 四则运算求导法则

我们已经看到许多问题都将用到导数,但根据导数的定义计算导数,一般地说,是很麻烦、很困难的,因为它是一个$\frac{0}{0}$型未定式的极限运算.所以有必要研究求导方法.下面先讨论四则运算的求导法则.

定理 3.2 如果函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$在点 x 处均有导数,则函数

$$y=u\pm v,\quad y=uv,\quad y=\frac{u}{v}\ (v\neq 0)$$

在同一点 x 处均有导数,且

(i) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

(ii) $(uv)'=u'v+uv'$;

(iii) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

证明 对应于 x 的增量 Δx,函数 $u(x)$, $v(x)$的增量

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x),\quad \Delta v=v(x+\Delta x)-v(x),$$

从而

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u,\ v(x+\Delta v)=v(x)+\Delta v.$$

(i)的证明:函数 $y=u\pm v$ 的增量

$$\Delta y=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]=\Delta u\pm\Delta v,$$

故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

取极限得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v',$$

此即

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

(ii)的证明:函数 $y=uv$ 的增量

$$\begin{aligned}\Delta y&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=[u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v]-u(x)v(x)\\&=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

由于 $u(x)$, $v(x)$均可导,又 $v(x)$连续,故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$
$$=uv'+vu',$$

即

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

(iii)**的证明**:**函数** $y=\frac{u}{v}$**的增量**

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}$$
$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

这里用到了 $v\neq 0$,**以及由** $v(x)$**的连续性所得的当** Δx **充分小时**, $v(x+\Delta x)\neq 0$,**因此**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

利用 $u(x)$, $v(x)$**的可导性及** $v(x)$**的连续性知**,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2},$$

即

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0).\quad\square$$

推论 1 **若** u, v, w **在点** x **处均可导**,**则** $u+v+w$, uvw **在同一点** x **处也可导**,**且**

$$(u+v+w)'=u'+v'+w',$$
$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

推论 2 **常数因子可以提到导数符号外**,**即**

$$(Cu)'=Cu'.$$

例 1 $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-3\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)'-(3)'$

$$=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}-0=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

例 2 $(x^2a^x)'=(x^2)'a^x+x^2(a^x)'=2xa^x+x^2a^x\ln a=xa^x(2+x\ln a)$.

例 3 $(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{1}{\cos^2 x}$.

所以,有公式(9)

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同样可推出公式(10),(11),(12):

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x.$$

$$(\csc x)' = -\csc x\cot x.$$

例 4 $(\sec x\tan x\ln x)' = (\sec x)'\tan x\ln x + \sec x(\tan x)'\ln x + \sec x\tan x(\ln x)'$

$$= \sec x\tan^2 x\ln x + \sec^3 x\ln x + \frac{1}{x}\sec x\tan x.$$

3.3 其他求导法则

3.3.1 反函数与复合函数求导法则

定理 3.3 (反函数求导法则) 设 $x=\varphi(y)$ 在某区间内严格单调连续,在该区间内点 y 处可导,且 $\varphi'(y)\neq 0$,则其反函数 $y=f(x)$ 在 y 的对应点 x 处亦可导,且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

证明 由定理 2.20 知 $y=f(x)$ 也是严格单调、连续的,给 x 以增量 $\Delta x\neq 0$,显然

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0,$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

由于这里 $\Delta x\to 0$ 等价于 $\Delta y\to 0$,又 $\varphi'(y)\neq 0$,故

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\varphi'(y)}. \quad \square$$

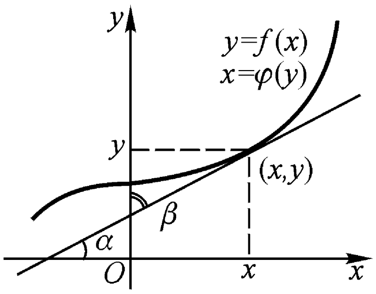


图 3.5

从导数的几何意义上看(参见图 3.5),有 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,所以 $\tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta}$,这个结果便是十分明显了.简单地说:反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例 1　在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内，由于 $x=\sin y$ 严格单调增加且连续、可导，且 $(\sin y)'=\cos y>0$，于是由定理 3.3 有导数公式(13)

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad -1<x<1.$$

同样可得公式(14)，(15)，(16)：

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad -1<x<1.$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad -\infty<x<\infty.$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=\frac{-1}{1+x^2},\qquad -\infty<x<\infty.$$

复合是构成函数的重要方式，所以复合函数求导是十分重要的.

定理 3.4　(复合函数求导法则)　如果

(i) 函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x'=\varphi'(x)$；

(ii) 函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u(u=\varphi(x))$ 处也有导数 $y_u'=f'(u)$，

则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在该点 x 处有导数，且有公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

即

$$\{f[\varphi(x)]\}_x'=f_u'[\varphi(x)]\varphi_x'(x).$$

证明　给 x 以增量 Δx，设函数 $u=\varphi(x)$ 对应的增量为 Δu，此 Δu 又引起函数 $y=f(u)$ 的增量 Δy.

由条件(ii)知，有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),$$

据极限与无穷小的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,$$

当 $\Delta u\to 0$ 时，其中 $\alpha=\alpha(\Delta u)\to 0$.上式中的 $\Delta u\neq 0$，两边同乘 Δu，得到

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u.\tag{1}$$

因为 u 是中间变量，所以 Δu 有等于零的可能.而当 $\Delta u=0$ 时，必有 $\Delta y=0$，粗看它可以包含在(1)式中，但这时 α 无定义.为简便计，当 $\Delta u=0$ 时补充定义 $\alpha(0)=0$.这样，无论 Δu 是否为零，函数 y 的增量 Δy 都可统一由(1)式表达.

用 $\Delta x\neq 0$ 去除(1)式两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

令 $\Delta x\to 0$,由条件(i)知 $\Delta u\to 0$,从而 $\alpha\to 0$,于是有

$$y_x' = f'(u)\varphi'(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \qquad \square$$

这个定理说明:复合函数对自变量的导数等于它对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.这个法则常常被形象地称为链导法则.

用数学归纳法,容易将这一法则推广到有限次复合的函数上去.例如,设

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x)$$

均可导,则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$也可导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x).$$

例 2 求 $y = \mathrm{e}^{-x}$的导数.

解 将 $y = \mathrm{e}^{-x}$分解为 $y = \mathrm{e}^{u}$, $u = -x$,则

$$(\mathrm{e}^{-x})' = (\mathrm{e}^{u})'(-x)' = -\mathrm{e}^{-x}.$$

例 3 求 $y = \sqrt{1+x^2}$的导数.

解 将 $y = \sqrt{1+x^2}$分解为 $y = u^{\frac{1}{2}}$, $u = 1+x^2$,则

$$(\sqrt{1+x^2})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'(1+x^2)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例 4 求 $y = \sin 2x$ 的导数.

解 $(\sin 2x)' = (\sin u)'(2x)' = \cos u\cdot 2 = 2\cos 2x$.

复合函数求导时,首先需要熟练地引入中间变量,把函数分解成一串已知导数的函数,再用链导法则求导,最后把中间变量用自变量的函数替代.熟练地掌握了复合函数的分解和求导法则之后,可以不引入中间变量记号,只要心中有数,分解一层,求导一次,“剥皮”似的,直到自变量为止.

例 5

$$\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' = \mathrm{e}^{x^2}(x^2)' = 2x\mathrm{e}^{x^2}.$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}.$$

$$[(x^2+x+1)^n]' = n(x^2+x+1)^{n-1}(2x+1).$$

$$\left(a^{\arctan\frac{1}{x}}\right)' = a^{\arctan\frac{1}{x}}\ln a\,\frac{1}{1+x^{-2}}(-x^{-2}) = -\frac{1}{1+x^2}a^{\arctan\frac{1}{x}}\ln a.$$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

例 6 已知半径为 r_0 的圆柱气缸内活塞的运动速度 $v = 2\cos 2t$.$t = 0$ 时,活塞到缸顶的距离 $h = 1.1$(图 3.6) .求活塞开始上升时($t = 0$)气缸内气体压力 p 的增长速度 .

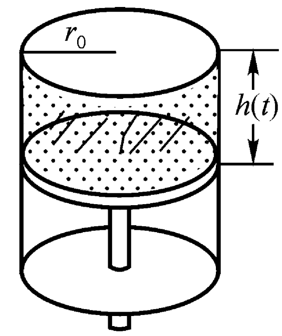


图 3.6

解 由于压力 p 是体积 V 的函数 $p = \dfrac{C}{V}$,其中 C 为常数,体积 V 又是 h 的函数 $V = \pi r_0^2 h$, h 又是时间 t 的函数,所以压力 p 是时间 t 的复合函数 .由题设知 $h_t' = -v = -2\cos 2t$,故由链导法则有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{C}{V^2}\pi r_0^2(-2\cos 2t) = \frac{2C}{\pi r_0^2 h^2}\cos 2t .$$

因此,在 $t = 0$ 时压力的增长速度为

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{2C}{1.21\pi r_0^2} .$$

3.3.2 隐函数与参数方程式函数求导法

怎样求隐函数

$$F(x, y) = 0$$

的导数呢?从中解出 y 再求导是很自然的想法,但对绝大多数隐函数来说,解出 y 是困难的,甚至是不可能的 .下面举例说明求隐函数的导数的一般方法 .

例 7 求隐函数 $xy - e^x + e^y = 0$ 的导数 .

解 设想把 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$代入方程,则得恒等式

$$xy - e^x + e^y = 0 .$$

将此恒等式两边同时对 x 求导,得

$$(xy)_x' - (e^x)_x' + (e^y)_x' = (0)_x',$$

因为 y 是 x 的函数,所以 e^y 是 x 的复合函数,求导时要用复合函数求导法,故有

$$y + xy' - e^x + e^y y' = 0,$$

由此解得

$$y' = \frac{e^x - y}{e^y + x} .$$

可见求隐函数的导数时,只要记住 x 是自变量, y 是 x 的函数, 于是 y 的函数便是 x 的复合函数,将方程两边同时对 x 求导,就得到一个含有导数 y'的方程,从中解出 y'即可 .

例 8 试证曲线 $x^2 + 2y^2 = 8$ 与曲线 $x^2 = 2\ \ 2y$ 在点(2, 2)处垂直相交(正交) .

证明 容易验证点(2, 2)是两曲线的交点,下面只需证明两条曲线在该点

的切线斜率互为负倒数.对 $x^2+2y^2=8$ 两边关于 x 求导得

$$2x+4yy'=0,$$

所以

$$y'\Big|_{(2,\ \ 2)}=-\frac{x}{2y}\Big|_{(2,\ \ 2)}=-\frac{1}{\ \ 2}.$$

再对 $x^2=2\ \ 2y$ 两边关于 x 求导得

$$2x=2\ \ 2y',$$

故

$$y'\Big|_{x=2}=\frac{x}{\ \ 2}\Big|_{x=2}=\ \ 2. \qquad \square$$

例 9 求函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

解 这个函数既不是幂函数,又不是指数函数,叫做幂指函数.怎样求导呢?我们熟悉对数运算,它能把乘除变为加减,把乘方、开方化为乘除,这条性质曾给我们带来很多便利,这里我们仍然借助它来解决问题.将函数 $y=x^{\sin x}$ 两边取对数,得隐函数

$$\ln y=\sin x\ln x.$$

由隐函数求导法,将上式两边关于 x 求导.得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x,$$

从而有

$$y'=x^{\sin x}\ \ \cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x\ \ .$$

这种先取自然对数再求导的方法叫做取对数求导法.对于一般的幂指函数

$$y=u(x)^{v(x)}\qquad(u(x)>0)$$

求导,需要用这一方法.此外,对含有多个因式相乘除或带有乘方、开方的函数,也可利用这一方法来简化求导手续.

例 10 求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}}$ 在 $y\neq0$ 处的导数.

解 先取函数的绝对值,再取对数得

$$\ln|y|=\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x-3|,$$

两边关于 x 求导,整理得

$$y'=(x-1)\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}}\ \ \frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-3}\ \ .$$

由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T \tag{2}$$

给出的函数,有如下求导法则.

定理 3.5 若 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 在点 t 处都可导,且 $\varphi'(t) \neq 0$, $x = \varphi(t)$ 在 t 的某邻域内是严格单调的连续函数,则参数方程(2)确定的函数在点 x($x = \varphi(t)$)处亦可导,且

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

证明 因为 $x = \varphi(t)$ 是严格单调的连续函数,所以有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,将它代入 $y = \psi(t)$ 得复合函数 $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$,利用复合函数求导法和反函数求导法得

$$y_x' = \psi'(t)[\varphi^{-1}(x)]' = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad □$$

这里指出:在 t 的某邻域内,若 $\varphi'(t) \neq 0$,则 $\varphi(t)$ 是严格单调的连续函数(将在下章证明).

例 11 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 由于

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \qquad (t \neq 2k\pi),$$

所以摆线在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为

$$y_x'\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

摆线上对应于 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 的点是 $\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)a, a\right)$,故所求切线方程为

$$y - a = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a,$$

即

$$x - y + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a = 0.$$

例 12 已知弹道曲线方程

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

其中 t 为炮弹运行时间,求炮弹运动速度的大小和方向.

解 水平分速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_1,$$

铅直分速度为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_2-gt,$$

所以炮弹速度的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_1^2+(v_2-gt)^2}.$$

炮弹运动的方向就是轨道的切线方向,可由切线斜率反映出来:

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{v_2-gt}{v_1}.$$

* 3.3.3 极坐标下导数的几何意义

设曲线 Γ 的极坐标方程为

$$r=r(\theta),$$

利用直角坐标与极坐标的关系 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,得到 Γ 的参数方程

$$x=r(\theta)\cos\theta,$$
$$y=r(\theta)\sin\theta,$$

其中参数 θ 为极角.

由参数方程求导法,得曲线 Γ 的切线斜率是

$$y_x'=\frac{y_\theta'}{x_\theta'}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{r'\tan\theta+r}{r'-r\tan\theta}.$$

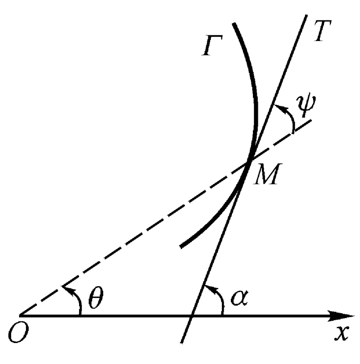


图 3.7

设曲线 Γ 在点 $M(r,\theta)$ 处的极半径 OM 与切线 MT 间的夹角为 ψ,则 $\psi=\alpha-\theta$(见图 3.7),故有

$$\tan\psi=\tan(\alpha-\theta)=\frac{y_x'-\tan\theta}{1+y_x'\tan\theta}.$$

将 y_x' 的上述表达式代入,并化简得

$$\tan\psi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

这一重要公式说明:在极坐标系下,曲线的极半径 $r(\theta)$ 与其导数 $r'(\theta)$ 之比等于极半径与曲线的切线之夹角的正切.

例 13 求对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{b\theta}$(a, b 为正的常数)的 ψ 角.

解 由于 $r'=(a\mathrm{e}^{b\theta})'=ab\mathrm{e}^{b\theta}=br$,所以

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{1}{b},$$

故

$$\psi = \arctan \frac{1}{b}$$

为常数 .

对数螺线在工业上是很有用的,如铲齿铣刀齿背曲线就是对数螺线,从而保证铣刀的前角恒定 .

3.4 高 阶 导 数

如果函数 $y = f(x)$的导函数 $f'(x)$仍有导数$[f'(x)]'$,则称$[f'(x)]'$为函数 $y = f(x)$的二阶导数,记为

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2 y}{dx^2}\quad 或\quad \frac{d^2 f}{dx^2},$$

即

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

一般地,把 $y = f(x)$的 $n - 1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$的 n 阶导数,记为

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^n y}{dx^n}\quad 或\quad \frac{d^n f}{dx^n},$$

即

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

相应地,把函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$称为 $f(x)$的一阶导数 .注意,只有一、二、三阶导数可以用“打撇”记号 y', y'', y''' 表示 .

函数的二阶及二阶以上的各阶导数统称为高阶导数 .

高阶导数也是由实际需要而引入的 .比如,已知某一运动的路程函数 $s = s(t)$,求运动的加速度 a .由于加速度 a 是速度 v 关于时间 t 的变化率 $a = \frac{dv}{dt}$,而速度 v 又是路程 s 关于时间 t 的变化率 $v = \frac{ds}{dt}$,所以加速度 a 等于路程 s 关于时间 t 的二阶导数 $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

又如,求自感电动势时,要用到电流对时间的变化率$\frac{dI}{dt}$,而电流又等于通过导体截面的电荷量 $q(t)$的导数 $I(t) = \frac{dq}{dt}$,所以将用到$\frac{d^2 q}{dt^2}$.下一章里我们还将看到研究曲线的弯曲程度时,也将用到高阶导数 .

根据高阶导数的定义,欲求函数的高阶导数,只需按求导法则和基本公式一阶阶地算下去.有时要利用数学归纳法.

例 1 证明下列 n 阶导数公式:

(1) $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ (λ 为常数);

(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu - 1)\cdots(\mu - n + 1)x^{\mu - n}$ (μ 为常数, $x > 0$).

证明 仅证(2)式,(1),(3)式留给读者.

由于

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

假定 $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ 成立,则

$$(\sin x)^{(k+1)} = \left[\sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

由数学归纳法知(2)式对任何正整数 n 都成立. □

例 2 证明下列 n 阶导数公式:

(4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $\left(\frac{1}{x + a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x + a)^{n+1}}$;

(6) $[\ln(x + a)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x + a)^n}$.

证明 (4) 因为 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,所以

$$(\cos x)^{(n)} = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 由公式(3)得

$$\left(\frac{1}{x + a}\right)^{(n)} = [(x + a)^{-1}]^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(x + a)^{-1-n}$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(x + a)^{n+1}}.$$

(6) 由于$[\ln(x+a)]'=\dfrac{1}{x+a}$,以及公式(5)知,(6)式成立 . ▯

例 3 求多项式 $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ 在 x 和 x_0 处的各阶导数 .

解

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n^{(n)}(x)=n!a_n,$$

$$P_n^{(n+1)}(x)=P_n^{(n+2)}(x)=\cdots=0 .$$

由此可见,多项式的导数是低一次的多项式; n 次多项式的 n 阶导数为常数,高于 n 阶的导数均为零 .此外,在点 x_0 处有

$$P_n(x_0)=a_0,\quad P_n'(x_0)=a_1,\quad P_n''(x_0)=2!a_2,\quad \cdots,\quad P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n,$$

即有

$$a_0=P_n(x_0),\quad a_1=P_n'(x_0),\quad a_2=\frac{1}{2!}P_n''(x_0),\quad \cdots\quad, a_n=\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0) .$$

从而有公式

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

这说明了$(x-x_0)$的多项式 $P_n(x)$(或系数)完全由它在 x_0 处的函数值和各阶导数值来确定 .

熟悉上述几个函数的高阶导数是有益的 .

用数学归纳法不难证明:若函数 u, v 均有 n 阶导数,则有下述求导法则:

(i) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;

(ii) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C 为常数);

(iii) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}$,

其中规定 $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.最后这一公式叫做莱布尼茨公式,可类比着牛顿二项公式加强记忆 .

例 4 求 $y=\dfrac{1}{x^2-a^2}$的 n 阶导数 .

解 依据上述法则(i)和(ii)及例 2,得

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right].$$

例 5 求 $y = x^2 \sin x$ 的 100 阶导数.

解 由莱布尼茨公式及例 1,得

$$y^{(100)} = x^2 (\sin x)^{(100)} + 100(x^2)'(\sin x)^{(99)} + \frac{100\times 99}{2!}(x^2)''(\sin x)^{(98)}$$

$$= x^2 \sin\left(x + 100\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 200x\sin\left(x + 99\frac{\pi}{2}\right) + 100\times 99\sin\left(x + 98\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x^2 \sin x - 200x\cos x - 9\,900\sin x.$$

值得注意的是参数方程和隐函数高阶导数的求法.

对参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

如果导数存在,则它的一阶导数

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

仍然是参数 t 的函数.它与 $x = \varphi(t)$ 构成一阶导数的参数形式

$$x = \varphi(t), \quad y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

若求二阶导数,需再用参数方程求导法求导

$$y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'} = \frac{\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)}.$$

例 6 设 $x = a\cos t, y = b\sin t$,求 y_{xx}''.

解
$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t,$$

$$y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'} = \frac{\left(-\dfrac{b}{a}\cot t\right)'}{(a\cos t)'} = \frac{\dfrac{b}{a}\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

再举例说明隐函数求高阶导数的方法.

例 7 设 $x^2 + xy + y^2 = 4$,求 y''.

解 将方程两边对 x 求导,有

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0, \tag{1}$$

解得

$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}. \tag{2}$$

将(1)式两边再对 x 求导,得

$$2+y'+y'+xy''+2(y')^2+2yy''=0,$$

解出

$$y''=-\frac{2+2y'+2(y')^2}{x+2y}.$$

将 y'的表达式(2)代入,并整理得

$$y''=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}=\frac{-24}{(x+2y)^3}.$$

3.5 微　　分

3.5.1 微分的概念

前几节介绍了函数的变化率——导数和它的运算法则.工作中有时还需要计算自变量的微小变化所引起的函数变化是多少的问题.也就是求函数增量的问题.设函数 $y=f(x)$在 x 的某邻域内有定义,给 x 以增量 Δx,则函数相应的增量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{1}$$

用(1)式计算增量,看起来很容易,但实际上常常会碰到不少困难.比如函数 $f(x)$是未知而待求的;又如函数值 $f(x)$, $f(x+\Delta x)$计算麻烦,甚至算不出准确的值.这样人们从实际需要出发,提出“能否既简单又较精确地近似计算出 Δy”的问题.先来分析一个简单例子.

例 1 圆面积是半径的函数: $S=\pi r^2$,当半径 r 从 r_0 变到 $r_0+\Delta r$ 时,圆面积的增量

$$\Delta S=\pi(r_0+\Delta r)^2-\pi r_0^2=2\pi r_0\Delta r+\pi\Delta r^2.$$

它由两部分组成,第一部分 $2\pi r_0\Delta r$ 是与自变量增量 Δr 成比例的部分,是 Δr 的线性函数,很好算;第二部分 $\pi\Delta r^2$ 是 Δr 的高阶无穷小.当 $\Delta r\to 0$ 时,第二部分 $\pi\Delta r^2$ 与第一部分 $2\pi r_0\Delta r$ 比较也是高阶无穷小,所以 $\pi\Delta r^2$ 是面积增量 ΔS 的次要部分,而 $2\pi r_0\Delta r$ 是 ΔS 的主部

$$\Delta S\sim 2\pi r_0\Delta r\quad(\Delta r\to 0\text{ 时}).$$

自然会问,对一般函数 $y=f(x)$,当自变量 x 有增量 Δx 时,函数的增量 Δy 是否也能分为这样两部分,其一与自变量增量成比例,其二是 Δx 的高阶无穷小?也就是说能否有一个常数 A,使 Δy 与 $A\Delta x$ 之差是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$?即

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x). \tag{2}$$

若有,且 $A\neq 0$,则由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - A\Delta x}{A\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{A\Delta x} = 0$$

知,当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y\sim A\Delta x$,即 $A\Delta x$ 是 Δy 的(线性)主部.这时,用 $A\Delta x$ 近似代替 Δy,绝对误差是高阶无穷小 $o(\Delta x)$,相对误差也是无穷小.

定义 3.4 设函数 $y = f(x)$ 在 x 附近有定义,若自变量从 x 变到 $x+\Delta x$ 时,函数的增量可表为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 的形式,其中 A 与 Δx 无关,则说函数 $f(x)$ 在 x 处可微,并把 $A\Delta x$ 称为函数 $y = f(x)$ 在 x 处的微分,记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$,即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

要强调指出两点:

1°函数的微分是与自变量增量 Δx 成比例的,它是 Δx 的线性函数,容易计算;

2°函数的微分与函数的增量之差是比 Δx 高阶的无穷小.当 $A\neq 0$ 时,微分是增量的主部,可以用微分来近似代替增量.

通俗地说"微分是增量的线性主部"(当 $A\neq 0$ 时).

满足什么条件的函数是可微的呢?微分的系数 A 如何确定?微分与导数有何关系?下面的定理回答了这些问题.

定理 3.6 函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微的充要条件是它在该点处的导数 $y' = f'(x)$ 存在.此时有 $A = f'(x)$,即有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x.$$

证明 (必要性)若(2)成立,则有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to 0$,就得到 $y' = f'(x) = A$.

(充分性)若在点 x 处函数有导数

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

由极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

其中 $\alpha\to 0$,当 $\Delta x\to 0$ 时.于是

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

故 $f(x)$ 可微,且微分系数 $A = f'(x)$,与 x 有关,与 Δx 无关. □

例 2 欲将单摆的摆长 l 由 100 cm 调长 1 cm,求周期 T 的增量与微分.

解 因为周期 T 与摆长 l 的函数关系是

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

所以当 $l = 100, \Delta l = 1$ 时, T 的增量

$$\Delta T = 2\pi \quad 101 \quad g - 2\pi \quad 100 \quad g \approx 0.010\,010\,3 .$$

由于 $T'(100) = \pi \quad gl|_{l=100} = \pi(10 \quad g)$,故所求的微分

$$\mathrm{d}T = T'(100)\Delta l = \pi(10 \quad g) \approx 0.010\,035\,4 .$$

显然用微分代替增量的误差很小,而且计算方便 .比如,$\Delta l = 0.1$ 时,$\mathrm{d}T \approx 0.001\,003\,54$,$\Delta l = 0.2$ 时,$\mathrm{d}T \approx 0.002\,007\,08$.

例 3 半径为 r 的球,当半径增加 Δr 时,球体体积的增量与微分为多少 ?

解 因球体体积函数是 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,所以它的增量和微分分别为

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= 4\pi r^2 \Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3 ,$$

$$\mathrm{d}V = V'\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r .$$

可见,$\mathrm{d}V$ 是 ΔV 中与 Δr 成比例关系的那一部分,ΔV 与 $\mathrm{d}V$ 之差是 Δr 的高阶无穷小 .

微分的几何意义 设曲线 l 的方程为 $y = f(x)$,当横坐标由 x 变到 $x + \Delta x$ 时,曲线上动点的纵坐标的增量 NM' 就是 Δy,点 $M(x, f(x))$ 处的切线 MT 的纵坐标的增量 NT 就是 $\mathrm{d}y$(见图 3.8) .Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差在图中是 TM',随着 $\Delta x \to 0$, TM' 很快地趋于零 .用微分近似增量,本质上是在局部上用切线代替曲线,或者说是函数的局部线性化 .

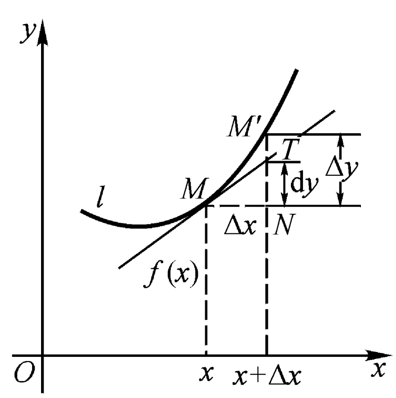


图 3.8

因为自变量 x 可以看作是它自己的函数 $x = x$,由等式

$$\Delta x = 1 \cdot \Delta x + 0$$

及微分的定义知

$$\mathrm{d}x = \Delta x ,$$

即自变量的微分与其增量相等 .因此,函数 $y = f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y = y'\Delta x$ 通常写为

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x .$$

这样,导数 y 就等于函数的微分与自变量的微分之商

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以导数也叫微商 .

3.5.2 微分运算

因为微分 dy 与导数 y'只差一个因子 dx,所以微分运算和求导运算是相仿的,并统称为微分法.由导数公式和运算法则,立刻就能写出微分公式和微分法则.

1.微分基本公式

(1) $dC=0$;　(2) $dx^{\mu}=\mu x^{\mu-1}dx$;

(3) $da^{x}=a^{x}\ln a\,dx$;　(4) $de^{x}=e^{x}dx$;

(5) $d(\log_a x)=\dfrac{dx}{x\ln a}$;　(6) $d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$;

(7) $d(\sin x)=\cos x\,dx$;　(8) $d(\cos x)=-\sin x\,dx$;

(9) $d(\tan x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\sec^2 x\,dx$;　(10) $d(\cot x)=\dfrac{-dx}{\sin^2 x}=-\csc^2 x\,dx$;

(11) $d(\sec x)=\sec x\tan x\,dx$;　(12) $d(\csc x)=-\csc x\cot x\,dx$;

(13) $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;　(14) $d(\arccos x)=\dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15) $d(\arctan x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$;　(16) $d(\operatorname{arccot} x)=\dfrac{-dx}{1+x^2}$.

2.四则运算微分法则,当 u,v 均可微时,有

(i) $d(u\pm v)=du\pm dv$;

(ii) $d(uv)=u\,dv+v\,du$, $d(Cu)=C\,du$(C 为常数)

(iii) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

这些法则容易从对应的求导法则推出,例如法则(ii):

$$d(uv)=(uv)'dx=(uv'+u'v)dx=u(v'dx)+v(u'dx)=u\,dv+v\,du.$$

3.复合函数的微分法

设 $y=f(u)$是可微的,当 u 为自变量时,函数 $y=f(u)$的微分

$$dy=f'(u)du.$$

当 u 不是自变量,而是另一个变量 x 的可微函数 $u=\varphi(x)$时,则 $y=f[\varphi(x)]$的微分

$$dy=\{f[\varphi(x)]\}'dx=f'(u)\varphi'(x)dx=f'(u)du.$$

由此可见,无论 u 是自变量还是中间变量,函数 $y=f(u)$的微分形式都是一样的,这个性质叫做一阶微分形式不变性.由这个性质,将前面微分公式中的 x 换成任何可微函数 $u=\varphi(x)$,这些公式仍然成立.

例 4

$$d(e^{\sin x}) = e^{\sin x}d(\sin x) = e^{\sin x}\cos x dx .$$

$$d(\ln^{\mu} x) = \mu\ln^{\mu-1} x d(\ln x) = \frac{\mu}{x}\ln^{\mu-1} x dx .$$

$$d(x\arctan 2x) = \arctan 2x dx + x d(\arctan 2x) = \arctan 2x dx + \frac{x}{1+(2x)^2}d(2x)$$

例 5 求一个函数,使其微分等于$\frac{1}{x\cos^2 \ln x}dx$.

解 因为

$$\frac{1}{x\cos^2 \ln x}dx = \frac{1}{\cos^2 \ln x}d(\ln x) = d(\tan \ln x),$$

故函数 $f(x) = \tan \ln x$ 满足要求.

一阶微分形式不变性在后面的积分和微分方程中常常用到.

再举一例说明微分的一个应用.

例 6 设 $S = S(x)$表示曲线 $y = x^2$ 下,在 x 轴的$[0, x]$区间上曲边三角形的面积(如图3.9),显然它是 x 的函数.在 x 处面积的增量 ΔS 是竖在区间$[x, x+\Delta x]$上的窄曲边梯形的面积.而图中有黑点的窄矩形的面积 $x^2\Delta x$ 是与 Δx 成比例的线性函数,它与 ΔS 之差小于$\Delta x\Delta y$,而 $\Delta x\Delta y = o(\Delta x)$,所以 $x^2\Delta x$ 是增量 ΔS 的线性主部,即是函数 $S = S(x)$在点 x 处的微分,

$$dS = x^2\Delta x = x^2 dx,$$

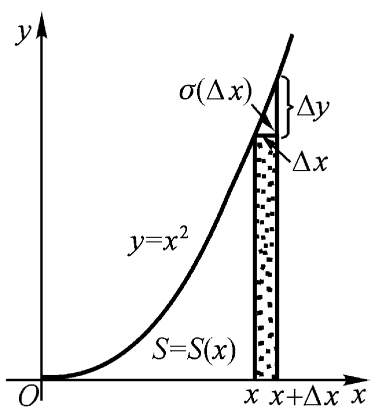


图 3.9

由此得到

$$\frac{dS}{dx} = x^2 .$$

由导数公式不难验证面积函数

$$S = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{为常数}) .$$

因为 $x = 0$ 时, $S(0) = 0$,所以 $C = 0$,故面积函数应为

$$S = \frac{1}{3}x^3 .$$

当 $x = 1$ 时, $S = \frac{1}{3}$.这一结果与 2.1 节例 1 的结果完全一致.

*3.5.3　微分在近似计算中的应用

我们知道,当 $f'(x_0)\neq 0$ 时,函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的线性主部(当 $\Delta x\to 0$ 时).故当 $|\Delta x|$ 充分小时,可以用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似计算增量 Δy,即有

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y. \tag{3}$$

比如本节例 2,若用微分 $\mathrm{d}T$ 近似代替 ΔT,误差很小,而且 $\mathrm{d}T$ 容易计算.

将(3)式写成

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

就可得到计算函数值的近似公式:当 $|\Delta x|$ 充分小时,有

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{4}$$

这表明:如果已知 $f(x)$ 在 x_0 处的值 $f(x_0)$ 和导数值 $f'(x_0)$,则 x_0 附近的函数值 $f(x_0+\Delta x)$ 可近似地由线性运算(4)求得.特别当 $x_0=0$ 时(这时 $\Delta x=x-0=x$),由(4)式知在 $|x|$ 充分小时,有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{5}$$

利用近似式(5)容易得到工程上常用的近似公式:当 $|x|$ 充分小时,有

$$\sin x\approx x,\quad \tan x\approx x,\quad \mathrm{e}^x\approx 1+x,$$
$$\ln(1+x)\approx x,\qquad (1+x)^{\mu}\approx 1+\mu x.$$

例 7　求 $\sqrt[3]{1.021}$ 的近似值.

解　由近似公式 $(1+x)^{\mu}\approx 1+\mu x$,知

$$\sqrt[3]{1.021}=(1+0.021)^{\frac{1}{3}}\approx 1+\frac{1}{3}\times 0.021=1.007.$$

例 8　求 $\tan 46°$ 的近似值.

解　因三角函数的导数公式是在弧度制下得到的,所以要把 $46°$ 化为弧度 $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}$.故 $\tan 46°=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$ 就是函数 $f(x)=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}$ 处的值.由于 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(\tan x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$,令 $x_0=\frac{\pi}{4}$, $\Delta x=\frac{\pi}{180}$,则由(4)式得

$$\tan 46°=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)\approx 1+2\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1.035.$$

应用(4)式时,首先应明确所求的是哪个函数在哪一点处的函数值,其次要确定 x_0 及 Δx,应当使 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 容易得到,而且 $|\Delta x|$ 尽可能地小.

*3.5.4 微分在误差估计中的应用

实际工作中,有些量的数值是通过直接测量或实验得到的,有些量的值是在测试得到的数据的基础上,再通过函数关系的计算得到的.比如圆盘的面积,通常是先测量其直径 ψ 的值,然后用公式 $S=\frac{1}{4}\pi\psi^2$ 计算面积值.在测试时,由于仪器质量、精度、测试条件和方法等种种原因,所得到的数据不可避免地要出现误差.依据这个有误差的数据计算其他量的值,必然有误差,我们把这个误差叫做间接测量误差.由于中学物理课已经讲过误差概念和它的估计,这里仅说明如何利用微分估计间接测量误差.

设测试未知量 x 得到近似值 x_0,通过关系式 $y=f(x)$ 算出另一个未知量 y 的近似值 $y_0=f(x_0)$ 若已知 x_0 的绝对误差(限)为 δ,即 $|\Delta x|=|x-x_0|\leq\delta$,因为一般 δ 很小,所以 y_0 的绝对误差 $|\Delta y|$ 可通过微分来估计

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|f'(x_0)||\Delta x|\leq|f'(x_0)|\delta,$$

即 y_0 的绝对误差(限)是 $|f'(x_0)|\delta$.而 y_0 的相对误差(限)是

$$\left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|\approx\left|\frac{\mathrm{d}y}{y_0}\right|\leq\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta,$$

相对误差通常用百分比表示.

例 9 用游标卡尺测得圆钢直径为 $\psi=(50.2\pm0.05)\,\mathrm{mm}$,利用公式 $S=\frac{\pi}{4}\psi^2$ 计算圆钢断面面积时,它的绝对误差和相对误差是多少?

解 由于 $S'=\frac{\pi}{2}\psi$, $\delta=0.05$ mm,所以面积的绝对误差

$$|\Delta S|\approx|\mathrm{d}S|\leq\frac{\pi}{2}\psi\Big|_{\psi=50.2}\times\delta=\frac{\pi}{2}\times50.2\times0.05\approx3.94(\mathrm{mm}^2).$$

相对误差

$$\left|\frac{\Delta S}{S_0}\right|\leq\frac{\frac{\pi}{2}\times50.2\times0.05}{\frac{\pi}{4}\times50.2^2}\approx0.2\%.$$

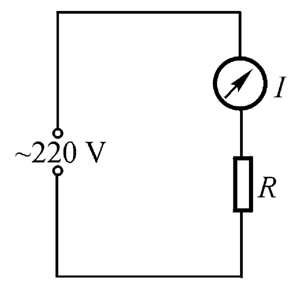


图 3.10

例 10 在图 3.10 所示的电路中,已知电阻 $R=22\ \Omega$,使用电流表测得电流 $I=10$ A,测量误差不超过 0.1 A,问由公式

$$P=I^2R$$

计算电功率时,所产生的绝对误差和相对误差是多少?

解 绝对误差

$$|\Delta P| \approx |\mathrm{d}P| = \left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}I}\right| |\Delta I| \leqslant 2IR\delta = 2\times10\times22\times0.1$$

$$= 44(\mathrm{W}).$$

相对误差

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| \leqslant \left|\frac{2IR\delta}{I^2 R}\right| = \frac{2\delta}{I} = \frac{0.2}{10} = 2\%.$$

3.6 例 题

例 1 试证函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ \sin x, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 处可导.

证明 显然 $f(x)$在 $x = 0$ 处连续,又

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x - 0}{x} = 1, & x \text{ 为有理数时}, \\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - 0}{x} = 1, & x \text{ 为无理数时}, \end{cases}$$

所以 $f(x)$在 $x = 0$ 处可导,且 $f'(0) = 1$.

当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$不连续,所以不可导.

例 2 设 $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$,且 $F(x)$, $f(x)$在 $x = 0$ 处均可导,试求 $f(0)$.

解 表达式中有绝对值的函数在运算时,常常要先去掉绝对值号,通过分段函数表示.

$$F(x) = \begin{cases} f(x)(1 - \sin x), & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ f(x)(1 + \sin x), & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

于是有

$$F'_-(0) = f'_-(0) - f(0), \quad F'_+(0) = f'_+(0) + f(0).$$

因为 $F'_-(0) = F'_+(0)$, $f'_-(0) = f'_+(0)$,所以两式相减得到

$$f(0) = 0.$$

例 3 已知 $y = \log_x u(x)$,其中 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, $u(x)$可导,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 由换底公式

$$y = \log_x u(x) = \frac{\ln u(x)}{\ln x},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{u'(x)}{u(x)}\ln x-\dfrac{\ln u(x)}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{xu'(x)\ln x-u(x)\ln u(x)}{xu(x)(\ln x)^2}.$$

例 4 已知 $x^2y+xy^2=1$,求 $\mathrm{d}y$.

解 方程两边取微分,利用微分法得

$$x^2\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x^2+x\mathrm{d}y^2+y^2\mathrm{d}x=0,$$

即

$$x^2\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0.$$

由此解出

$$\mathrm{d}y=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}\mathrm{d}x.$$

例 5 设 $x\neq 0$ 时,函数 $f(x)$有定义,且当 $x,y\neq 0$ 时,恒有

$$f(xy)=f(x)+f(y),\tag{1}$$

又 $f'(1)$存在,试证:当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)$存在.

证明 令 $x=y=1$,由(1)式得到 $f(1)=0$.又当 $x\neq 0$ 时,有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\frac{1}{x}=f'(1)\frac{1}{x}.$$

故 $f'(x)$存在,且

$$f'(x)=f'(1)\frac{1}{x}.$$

例 6 设 $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2\arccos x-\ln\arccos x+\dfrac{1}{2}\right]$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 由复合函数求导法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[u^2\left(\ln^2u-\ln u+\frac{1}{2}\right)\right]'_u(\arccos x)'$$

$$=\left[2u\left(\ln^2u-\ln u+\frac{1}{2}\right)+u^2\left(2(\ln u)\frac{1}{u}-\frac{1}{u}\right)\right]\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2u\ln^2u\,\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\ln^2\arccos x.$$

例 7 已知 y 是 x 的函数,满足关系

$$x^2y''_x+xy'_x=0,\tag{2}$$

而 x 又是 t 的函数 $x = e^t$,求 y 关于 t 的二阶导数.

解　由于

$$y_t' = y_x' x_t' = e^t y_x' = x y_x',$$
$$y_t'' = (y_t')_x' x_t' = (y_x' + x y_x'') x = x y_x' + x^2 y_x'',$$

所以由(2)式知

$$y_t'' = 0.$$

例 8　已知汽车以速度 $v = v(t)$作直线运动,车轮半径为 a,求车轮轮周上点 M 的水平运动速度.

解　设车轮转角为 θ,则由旋轮线(摆线)方程知,M 点位移的水平分量

$$x = a(\theta - \sin\theta).$$

汽车走过的路程 $s = a\theta$,从而

$$\theta = \frac{s}{a},$$

因路程是时间的函数 $s = s(t)$,故 x 是 t 的复合函数,由复合函数求导法得

$$x_t' = a(1 - \cos\theta)\frac{s'(t)}{a} = v(t)(1 - \cos\theta).$$

这就是轮周上点 M 的水平运动速度.由此可见,无论车跑得多快,车轮上总有水平速度为零的点.

如果变量 x 和 y 都是变量 t 的未知函数,已知 x 和 y 之间的函数关系,及 x 关于 t 的变化率,求 y 关于 t 的变化率的问题,习惯称为相关变化率问题.例 8 就是一个相关变化率问题.解决这种实际问题的步骤是:首先根据题意确立 x 和 y 之间的函数关系,然后利用复合函数求导法则求 y 关于 t 的导数.

例 9　溶液从深为 18 cm、顶直径为 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入直径为 10 cm 的圆柱形筒中,当溶液在漏斗中深为 12 cm 时,液面下降速度为1 cm/min,问此时圆柱形筒中液面上升的速度是多少?

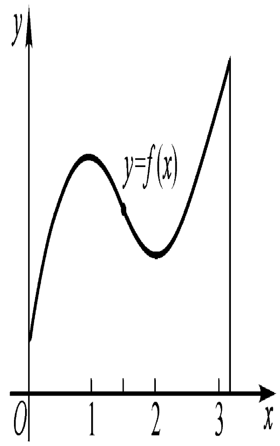


图 3.11

解　设漏斗中原有溶液是 K cm^3,漏的过程中,漏斗内溶液深为 h,圆筒内溶液深为 H.由相似比知漏斗内液面的圆半径 $r = \frac{h}{3}$,故漏斗内剩余液体为

$$V_{锥} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3.$$

此时圆筒内液体为

$$V_{柱} = \pi 5^2 H = 25\pi H.$$

由于 $V_{锥} + V_{柱} = K$,所以 h, H 之间满足关系

$$\frac{1}{27}\pi h^3 + 25\pi H = K,$$

两边关于 t 求导得

$$\frac{1}{9}\pi h^2 h_t' + 25\pi H_t' = 0,$$

$$H_t' = -\frac{1}{9\times 25} h^2 h_t'.$$

因此 $h = 12$, $h_t' = -1$ 时(因 h_t' 表示液面上升速度),圆筒内液面上升速度为

$$H_t'\big|_{h=12} = -\frac{1}{9\times 25}\times 12^2 \times (-1) = 0.64(\mathrm{cm}\ \mathrm{min}).$$

习　题　三

3.1

1.有一细杆,已知从杆的一端算起长度为 x 的一段的质量为 $m(x)$,给出细杆上距离此端点为 x_0 的点处线密度的定义.

2.设物体绕定轴旋转,其转角 θ 与时间 t 的函数关系为 $\theta=\theta(t)$,如果旋转是匀速的,则称 $\omega=\Delta\theta\ \Delta t$ 为旋转的角速度,如果旋转是非匀速的,如何定义 t_0 时的角速度?

3.高温物体在低温介质中冷却,已知温度 θ 和时间 t 的关系为 $\theta=\theta(t)$,给出 t_0 时冷却速度的定义式.

4.如果一个轴的轴向热膨胀是均匀的,则当温度每升高 1 ℃时,其单位长的增量称为该轴的线膨胀系数;如果膨胀过程是非均匀的,设轴长 l 与温度 t 的关系是 $l=l(t)$,指出 t_0 时轴的线膨胀系数.

5.太湖的水量(体积)是水面高度的函数 $V=V(h)$,则 $V'(h_0)$ 的实际意义是什么?

6.设 $P(t)$ 表示某油田在 t 年的蕴藏量,则 $P'(t_0)$ 表示什么, t_0 年采油量如何表示?

7.已知函数 $y=f(x)$ 的图形如图 3.12 所示,画出它的导函数 $y=f'(x)$ 的图形.

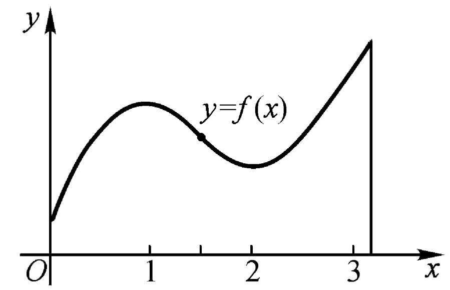


图 3.12

8.若 $f'(a)$ 存在,求:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(a)-f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

9．按导数定义，求下列函数在 $x = 2$ 处的导数：

(1) $f(x) = x^3$；

(2) $f(x) = x^2\sin(x - 2)$．

10．按导数定义，求下列函数的导数：

(1) $y = \sqrt{x}$；　　(2) $y = \cot x$．

11．如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，试证 $f'(0) = 0$．

12．讨论下列函数在 $x = 0$ 处的连续性与可导性：

(1) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1 + x), & x \geq 0; \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(3) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$．

13．设 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ ax + b, & x > x_0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 x_0 处左导数 $f'_-(x_0)$ 存在，要使 $F(x)$ 在 x_0 处可导，问 a 和 b 应取何值．

14．选择题：

(1) 设 $f(x)$ 可导，$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$，则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的(　)；

(A) 充分必要条件，　　(B) 充分、但非必要条件，

(C) 必要、但非充分条件，　　(D) 非充分、又非必要条件．

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义，且恒有 $|f(x)| \leq x^2$，则 $x = 0$ 必是 $f(x)$ 的(　)．

(A) 间断点，　　(B) 连续，但不可导的点，

(C) 可导的点，且 $f'(0) = 0$，(D) 可导的点，但 $f'(0) \neq 0$．

3.2

1．求下列函数的导数：

(1) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$；　　(2) $y = 2\lg x - 3\arctan x$；

(3) $y = x\tan x - \cot x$；　　(4) $y = 2^x e^x$；

(5) $y = x\sin x\ln x$；　　(6) $y = (x - a)(x - b)(x - c)$；

(7) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$；　　(8) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$．

2．长方形的长为 $x(t)$，宽为 $y(t)$，都是时间 t 的可导函数，求长方形面积 S 的变化速度．

3．求曲线 $y = \frac{1}{x}$在点$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$处的切线方程和法线方程．

4．求函数 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ 在 $x = 0$ 处的导数和导数为零的点．

5．当 a 取何值时，曲线 $y = a^x$ 和直线 $y = x$ 相切，并求出切点坐标．

6．求双曲线 $y = \frac{1}{x}$与抛物线 $y = \quad x$的交角．

7．证明双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$，且切点是斜边的中点．

3.3

1．求下列函数的导数：

(1) $y = a^{\sin 3x}$；

(2) $y = \cos^2 x^3$；

(3) $y = \sin \cos \frac{1}{x}$；

(4) $y = \cot^3 \quad 1 + x^2$；

(5) $y = \sec^2 \mathrm{e}^{x^2+1}$；

(6) $y = -\csc^2 \mathrm{e}^{8x}$；

(7) $y = \exp(\ln x)^{-1}$；

(8) $y = \exp \quad \ln(ax^2 + bx + c)$；

(9) $y = \arcsin \frac{x}{a}{}^{2}$ $(a > 0)$；

(10) $y = \mathrm{e}^{-x^2} \cos \mathrm{e}^{-x^2}$；

(11) $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$；

(12) $y = \arccos \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ $(a > b)$；

(13) $y = \log_2 \log_3 \log_5 x$；

(14) $y = \ln(x + \quad a^2 + x^2)$；

(15) $y = \quad x + \quad x + \quad x$；

(16) $y = \arctan \mathrm{e}^{2x} + \ln \quad \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$；

(17) $y = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x$；

(18) $y = \ln \frac{1 + \quad \sin x}{1 - \quad \sin x} + 2\operatorname{arccot} \quad \sin x$．

2．求下列函数的导数：

(1) $y = a^{b^x} + x^{a^b} + b^{x^a}$ $(x, a, b > 0$，a, b 为常数)；

(2) $y = \lim\limits_{n \to \infty} x \quad \frac{n + x}{n - x}{}^{n}$；

(3) $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-x}\cos 3x, & x > 0. \end{cases}$

3．设 $f(x)$，$g(x)$均可导，且下列函数有意义，求它们的导数：

(1) $y = {}^{n}\ f^2(x) + g^2(x)$；

(2) $y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$．

4．已知 $y = f\ \frac{3x - 2}{3x + 2}$，$f'(x) = \arctan x^2$，求 $y'_x\big|_{x=0}$．

5．若 $f(x) = \sin x$，求 $f'(a)$，$[f(a)]'$，$f'(2x)$，$[f(2x)]'$和 $f'(f(x))$，$\{f$

$[f(x)]\}'$.

6．求下列隐函数的导函数或指定点的导数:

(1) $x + \quad y = \quad a$;　　　　(2) $\arctan\frac{y}{x} = \ln \quad x^2 + y^2$;

(3) $2^x + 2y = 2^{x+y}$;　　　　(4) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;

(5) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$, 求 $y'\big|_{x=2}$;

(6) $\arccos(x+2)^{-\frac{1}{2}} + e^y \sin x = \arctan y$, 求 $y'(0)$.

7．设 $x = \varphi(y)$与 $y = f(x)$互为反函数, $\varphi(2) = 1$, 且 $f'(1) = 3$, 求 $\varphi'(2)$.

8．求下列函数的导函数或指定点的导数:

(1) $y = (\sin x)^{\cos x}$;　　　　(2) $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$, 求 $y'(1)$;

(3) $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$;　　　　(4) $x^y + y^x = 3$, 求 $y'(1)$.

9．求下列参数方程确定的函数的导数 y_x':

(1) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2; \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta, \\ y = 1 - \cos\theta; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$　　　　(4) $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^y(\sin t - \cos t). \end{cases}$

10．设 $x = f(t) - \pi$, $y = f(e^{3t} - 1)$, 其中 f 可导, 且 $f'(0) \neq 0$, 求 $y_x'\big|_{t=0}$.

11．试证: 可导的偶函数其导数是奇函数, 可导的奇函数其导数是偶函数.

12．球的半径以 5 cm s 的速度匀速增长, 问当球的半径为 50 cm 时, 球的表面积和体积的增长速度各是多少?

13．点 M 沿螺线 $r = a\varphi$($a = 10$ cm)运动, 其极半径转动的角速度(6°s)不变, 确定点 M 的极半径的增长速度.

14．半径为$\frac{1}{2}$的圆在抛物线 $x = \quad y$上滚动, (1) 求圆心(ξ, η)的轨迹方程; (2) 当圆心匀速上升(速率为 a)时, 求圆心的横坐标 ξ 的增长速度.

15．证明圆的渐伸线 $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$的法线是圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线.

16．求曲线 $x^3 + y^3 = 4xy$ 与曲线 $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$在交点(2, 2)处的交角.

17．求对数螺线 $r = e^\theta$ 在点$(r, \theta) = \quad e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}$ 处的切线的直角坐标方程.

3.4

1．求下列函数的二阶导数：

(1) $y = \quad x^2 - 1$；　　(2) $y = x\ln(x + \quad x^2 + a^2) - \quad x^2 + a^2$；

(3) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$；　　(4) $y = \tan(x + y)$；

(5) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$ 其中 $f(t)$具有二阶导数，且不等于零．

2．设 $y = y(x)$由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y\sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$．

3．设 $u = f(\varphi(x) + y^2)$，其中 $y = y(x)$由方程 $y + e^y = x$ 确定，且 $f(x)$，$\varphi(x)$均有二阶导数，求$\dfrac{du}{dx}$和$\dfrac{d^2u}{dx^2}$．

4．求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y = \sin^2 x$；　　(2) $y = xe^x$；

(3) $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)(x^2 - x - 2)}$；　　(4) $y = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$；

(5) $y = \sin x\sin 2x\sin 3x$．

5．对下列函数求指定的导数：

(1) $y = x^2e^x$，求 $y^{(100)}$；　　(2) $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$，求 $y^{(6)}$；

(3) $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x$，求 $\left.y^{(27)}\right|_{x=\pi}$．(4) $y = \dfrac{x^{10}}{1 - x}$，求 $y^{(10)}$．

6．设 $f(x)$具有各阶导数，且 $f'(x) = [f(x)]^2$，求 $f^{(n)}(x)$．

7．设 $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x - 2$，将 $P(x)$化为$(x - 1)$的幂的多项式．

8．设 $y = P(x)$是 x 的多项式，满足关系

$$xy'' + (1 - x)y' + 3y = 0,$$

且 $P(0) = -6$，求函数 $P(x)$．

9．设 $y = y(x)$在$[-1, 1]$上有二阶导数，且满足

$$(1 - x^2)y''_x - xy'_x + a^2y = 0,$$

作变换 $x = \sin t$，证明这时 y 满足：

$$y''_t + a^2y = 0.$$

10．选择题：

(1) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$的不可导的点的个数为(　　)；

(A) 0，　(B) 1，　(C) 2，　(D) 3．

(2) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$存在的最高阶数 n 为(　　).

(A) 0,　(B) 1,　(C) 2,　(D) 3.

3.5

1. 求函数 $y=5x+x^2$ 当 $x=2$ 而 $\Delta x=0.001$ 时的增量 Δy 与微分 $\mathrm{d}y$.

2. 用微分法则,求下列函数的微分:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$;　　(2) $y=x\ln x-x$;

(3) $y=\cot x-\csc x$;　　(4) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$;

(5) $y=\sin^2 u,\ u=\ln(3x+1)$;　　(6) $y=\arctan\dfrac{u(x)}{v(x)}$($u'$, v'存在).

3. 设 $y=y(x)$由方程 $\varphi(\sin x)+\sin\varphi(y)=\varphi(x+y)$所确定,其中 $\varphi(t)$处处可导,求 $\mathrm{d}y$.

4. 将适当的函数填入括号内,使下列各式成为等式:

(1) $x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;　　(2) $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;

(3) $\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;　　(4) $\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;

(5) $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;　　(6) $\dfrac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;

(7) $\mathrm{d}(\arctan \mathrm{e}^{2x})=(\quad)\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}$;　　(8) $\mathrm{d}(\sin\ \cos x)=(\quad)\mathrm{d}\cos x$;

(9) $f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=f(\sin x)\mathrm{d}(\quad)$;　　(10) $x^2\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(-x^3)$.

5. 试由球面面积公式 $S=4\pi r^2$ 导出球体体积公式.

6. 求曲线 $y=\ x$, $x=1$ 及 $y=0$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周得到的旋转体体积.

7. 若 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x)$在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的(　　).

(A) 高阶无穷小,　(B) 低阶无穷小,　(C) 同阶,但不等价的无穷小,　(D) 等价无穷小.

8. 设 $f(u)$可导,函数 $y=f(x^2)$当自变量在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$＿＿＿＿.

9. 利用微分近似计算下列各数(结果取到小数点后第四位,中间运算均取小数点后第五位,最后结果在第五位上四舍五入):

(1) $\sqrt[3]{998}$;　　(2) $\cos 59°$;

(3) $\ln 0.99$;　　(4) $\mathrm{e}^{1.01}$.

10. 单摆振动周期 $T=2\pi\quad l\ g$,其中 l 为摆长,$g=980\ \mathrm{cm\ s^2}$ 为重力加速

度，为使周期增大 0.052 s，需将 $l = 20$ cm 的摆长改变多少？

11．试证根据欧姆定律 $I = E \quad R$ 计算电流时，如果电阻的绝对误差为 ΔR，则电流的绝对误差可按公式 $\Delta I = -I\Delta R \quad R$ 近似计算．

12．证明：计算圆面积或球表面积时，当半径的长度有 1% 的相对误差时，圆面积或球表面积的相对误差均为 2%（注：球表面积 $S = 4\pi r^2$，r 为球的半径）．

3.6

1．水流入半径为 10 m 的半球形蓄水池，求水深 $h = 5$ m 时，水的体积 V 对深度的变化率．如果注水速度是 $5 \quad 3$ $\mathrm{m}^3 \quad \mathrm{min}$，问 $h = 5$ m 时水面半径的变化速度是多少？ 注：球缺体积 $V = \pi h^2 \quad R - \dfrac{h}{3}$ ．

2．一个半径为 a 的球渐渐沉入半径为 b、盛有部分水的圆柱形容器中（$a < b$）．如果球以匀速 c 下沉，证明当球浸没一半时，容器中水面上升的速率是 $\dfrac{a^2 c}{b^2 - a^2}$．

3．靶子沿直线以速度 $v = 10$ m s 移动，射击运动员到直线的距离为 50 m，求靶子从垂足处开始移动 5 m 时，射击运动员的枪口转动的角速度．

4．设 $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$，$g(x)$ 在 $x = a$ 附近有定义，求 $f'(a)$ 存在的充分必要条件．

5．n 在什么条件下，函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处 (1) 连续；(2) 可导；(3) 导数连续．

6．设 $f(x)$ 满足关系 $af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}$，$|a| \neq |b|$，求 $f'(x)$．

7．设 $f(x + y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$，且 $f'(0) = 1$，求 $f'(x)$．

8．设 $f'(0)$ 存在，$f(0) = 0$，试求

$$\lim_{x\to 0} f(1 - \cos x) \quad \tan x^2 .$$

9．设 $f(0) = 0$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件为（　　）．

(A) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在，　　(B) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{2h} f(1 - \mathrm{e}^h)$ 存在，

(C) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(\tan h - \mathrm{sim}\ h)$ 存在，　　(D) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[f(-h) - f(-h)]$ 存在．

10 . 设 $f(a)>0$, $f'(a)$存在, 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

11 . 设曲线 $y=f(x)$在原点与 $y=\sin x$ 相切, 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.

12 . 若 $f(x)<g(x)$, 能否推出 $f'(x)<g'(x)$, 证明你的结论 .

13 . 设 $y=|x|^3$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 试证 $y''(x)=6|x|$.

14 . 设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

15 . 设 $f(x)=\max\{x,x^2\}$, $x\in(0,2)$, 求 $f'(x)$.

16 . 设 $y=\arctan(u-1)$, $u=\begin{cases}x^2-2x+2, & x\leq 0,\\ 2e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

17 . 已知函数 $f(x)$满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$, 其中 x_1, x_2 为任意实数, 且 $f'(0)=2$, 求 $f'(x)$.

18 . 已知 $f(x)$是周期为 5 的连续函数, 在 $x=1$ 处可导, 在 $\mathring{U}_\delta(0)$内满足关系 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$, 求曲线 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程 .

附录Ⅲ 广 义 导 数

有两种广义导数概念介绍如下:

1 . 对称导数

称

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

为 $f(x)$在 x_0 处的对称导数 .显然, 函数在 x_0 处可导时, 对称导数存在, 且它们相等 .但有对称导数不能保证函数可导, 如 $y=|x|$在 $x=0$ 处不可导但对称导数为零 .

2 . 迪尼导数

以下四种极限值:

$$D^+y(x)=\limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[y(x+h)-y(x)],$$

$$D_+y(x)=\liminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[y(x+h)-y(x)],$$

$$D^-y(x)=\limsup_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[y(x+h)-y(x)],$$

$$D_{-} y(x) = \liminf_{h \to 0^{-}} \frac{1}{h}[y(x+h) - y(x)]$$

依次称为函数 $y(x)$**的右上导数,右下导数,左上导数,左下导数,统称迪尼**(Dini U .1849—1918)**导数,显然** $y(x)$**可导　四个迪尼导数存在且相等** .

第四章　微分中值定理

因为导数是函数随自变量变化的瞬时变化率,所以可借助导数来研究函数 .但每一点的导数仅仅是与局部有关的一点处的变化性态,要用导数来研究函数的全局性态,还需架起新的“桥梁”.这就是本章的主要任务,介绍微分学基本理论 .它们在一些理论的证明中起着重要作用 .因为这些定理都涉及到区间中的某一点的导数,所以又统称中值定理 .

4 .1　微分中值定理

本节的几个定理都来源于下面的明显的几何事实:在一条光滑的平面曲线段AB上,至少有一点其切线与联接曲线两端点的弦$\overline{AB}$平行(见图 4 .1);曲线段AB上离弦$\overline{AB}$最远的点就是如此 .

我们先从简单而特殊的情况讲起 .

定理 4 .1　(罗尔定理)[①]　若函数 $f(x)$满足

(i) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(ii) 在开区间(a, b)内可导;

(iii) $f(a) = f(b)$,

则在开区间(a, b)内至少存在一点 ξ,使得

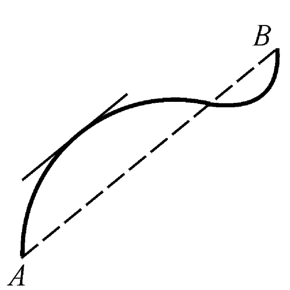


图 4 .1

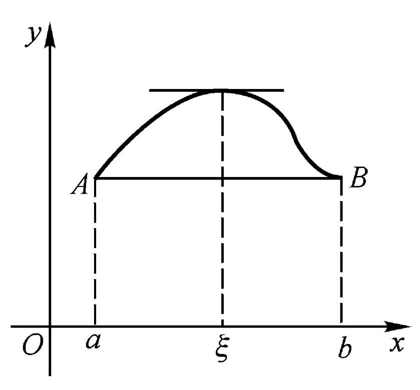


图 4 .2

$$f'(\xi) = 0 .$$

① 罗尔 Rolle M .(法)1652—1719 .主要成就在代数方面 .罗尔对牛顿 - 莱布尼茨的微积分持反对意见,说微积分是“一套天才的谬论”,到晚年才公开承认微积分有用 .他仅对多项式叙述了一个类似定理 4 .1 的结论(未证明) .1846 年尤斯托·伯拉维提斯证明了现在的定理 .并命名为罗尔定理 .

分析 从几何上看(图 4.2),函数在区间$[a, b]$上取最大值或最小值的点就是 ξ.

证明 由条件(i)知,$f(x)$在区间$[a, b]$上有最大值 M 和最小值 m.

若 $m = M$,则 $f(x)$在区间$[a, b]$上为常数,这时任何一点 $\xi \in (a, b)$,都有 $f'(\xi) = 0$.

若 $m < M$,由条件(iii)知,两个数 m, M 中至少有一个不等于端点的函数值 $f(a) = f(b)$,不妨设 $M \neq f(a)$,则在开区间(a, b)内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi) = M$.由条件(ii)知 $f'(\xi)$存在,下面证明 $f'(\xi) = 0$.

由于 $f(x)$在 ξ 处最大,故不论 Δx 是正或负,总有

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0 .$$

因此,当 $\Delta x > 0$ 时,

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0 ,$$

故由极限的保号性有

$$f'_{+}(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0 . \tag{1}$$

而当 $\Delta x < 0$ 时,

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0 ,$$

故

$$f'_{-}(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0 . \tag{2}$$

统观(1),(2)两式及 $f'(\xi)$存在知,必有

$$f'(\xi) = 0 . \quad \square$$

这个定理的物理意义也很明显,一个经过一段时间又返回原位置的直线运动,必在某一时刻速度为零.离原位置最远的那一点处,就是如此.

推论 1 如果 $f(x)$是可导的,则在方程 $f(x) = 0$ 的两个根(如果有)之间至少有方程 $f'(x) = 0$ 的一个根.

定理 4.2 (拉格朗日中值定理)① 如果函数 $f(x)$满足

(i) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(ii) 在开区间(a, b)内可导,

则在开区间(a, b)内至少存在一点 ξ,使得

---

① 拉格朗日 Lagrange J.L.(法)1736—1813.他与欧拉是 18 世纪最伟大的数学家,他在理论上崇尚严谨,在形式和内容上力求完美和谐.他的著作被誉为"科学之诗".他品德高尚,虚怀若谷,善于向他人学习,不断地从各个学科吸取营养、丰富自己,因此充满了诗人般的想像力。

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).\tag{3}$$

分析 将(3)式变为

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

定理的结论就转化为函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

在区间(a,b)内有点ξ,使$\varphi'(\xi)=0$的问题,化为罗尔定理问题.

证明 引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

易知$\varphi(x)$满足罗尔定理的条件:$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{1}{b-a}[bf(a)-af(b)].$$

故在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

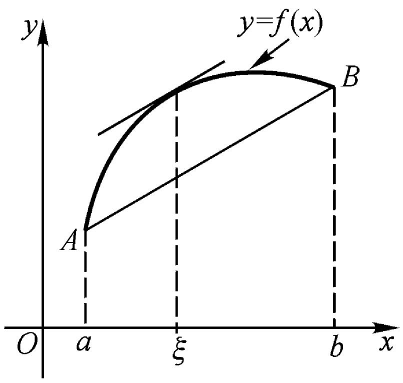


图 4.3

由此得到

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).\quad\square$$

如图 4.3 所示.

公式(3)叫做拉格朗日中值公式.在微分学中占有极其重要的地位,它表明了函数在两点处的函数值与导数间的关系.以后将不止一次用到它,特别可利用它研究函数的单调性及某些等式与不等式的证明.

显然,当$f(x)$在区间(a,b)内可导时,若$x,x+\Delta x\in(a,b)$,则有ξ介于$x,x+\Delta x$之间,使得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x.\tag{4}$$

由于ξ可表为

$$\xi=x+\theta\Delta x\quad(0<\theta<1),$$

(4)式又可写成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\tag{5}$$

即

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

与用微分近似替代增量的式子

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x$$

比较,后者需要$|\Delta x|$充分小,而且是近似式,但它简单好算,是Δx的线性函数.

而前者是一个准确的增量公式,且$|\Delta x|$不必很小,只要是个有限量即可,这就是它的重要性所在.公式(4),(5)也叫做有限增量公式.虽然这里只肯定了ξ或θ的存在性,未能说明其确切位置,但这不妨碍它在理论上的作用.

推论 2 在区间I上,若$f'(x)\equiv 0$,则

$$f(x)=C \qquad (C \text{为常数}).$$

证明 对区间I内任意二点x_1, x_2,由拉格朗日中值定理,有

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi), \qquad \xi \text{介于} x_1, x_2 \text{之间}.$$

因为$f'(x)\equiv 0$,所以$f(x_1)=f(x_2)$,即在区间I内任意两点的函数值都相等,故

$$f(x)=C. \quad \square$$

这个推论是“常数的导数为零”的逆命题,在后面的积分学中起着重要的作用.

显然,如果在区间I上,$f'(x)=g'(x)$,则$f(x)$与$g(x)$最多相差一个常数,即

$$f(x)=g(x)+C, \qquad x\in I.$$

推论 3 在区间I上,若$f'(x)>0(<0)$,则$f(x)$严格单增(严格单减).

证明 任取二点$x_1, x_2\in I$,设$x_1<x_2$,由拉格朗日中值定理,有

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi) \qquad (x_1<\xi<x_2).$$

因为$f'(x)>0, x\in I$,所以,$f'(\xi)>0$,从而

$$f(x_2)-f(x_1)>0.$$

同法可证推论的另一部分. $\square$

定理 4.3 (柯西中值定理)[①] 如果函数$f(x)$和$g(x)$满足

(i) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(ii) 在开区间(a, b)内可导,且$g'(x)\neq 0$,

则在开区间(a, b)内至少存在一点ξ,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6}$$

分析 将(6)式写成

$$f(b)-f(a)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}[g(b)-g(a)]$$

的形式,显然当$g(x)=x$时,它就是拉格朗日中值公式,所以柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广.用类比法不难得到它的证明.柯西中值定理的几何意

---

① 柯西 Cauchy A.L.(法)1789—1857 现代微积分的奠基人,创造力惊人,发表800篇论文,出版专著7本,名言是“人总是要死的,但他们的业绩应该永存”.

义,请读者自己给出.

*证明　首先指出 $g(b)-g(a)\neq 0$,这是因为

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(\eta),$$

其中 η 介于 a,b 之间,而 $g'(\eta)\neq 0$ 的缘故.

类比拉格朗日中值定理的证明,引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x).$$

$\varphi(x)$满足罗尔定理的条件:$\varphi(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}.$$

于是由罗尔定理知,在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

由此得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.\qquad\square$$

注意:这三个定理的条件都是充分条件.如果条件不成立,对某些函数也可能有类似的结果;对另外一些函数,定理的结论不成立,请读者举出各种例子来说明.下面我们举例说明这三个定理及推论在讨论函数的单调性、方程的根、不等式与等式的证明,以及在其他理论命题证明中的应用.

例 1　讨论函数 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$ 的单调区间.

解　由

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$$

知:

当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,0]$上单调下降;

当 $x>0$ 时,$f'(x)\geq 0$,仅在 $x=1$ 一点处 $f'(x)=0$,所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调上升.

讨论函数的单调性时,将导函数分解为因式连乘(除)的形式是有益的,然后以 $f'(x)$的零点及不可导的点为分点,将定义域分为几个区间,在各区间上考察 $f'(x)$的正负号,确定 $f(x)$的单调性.在一个区间上的连续函数,个别点导数为零或不可导不影响函数的单调性.

例 2　设 $f(x)=x^3-3ax+2b$,其中 $b>0$,$a^3>b^2$,讨论方程 $f(x)=0$ 有几个实根.

解　因为

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}),$$

所以,当 $x<-\sqrt{a}$时, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$;当 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$时, $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$;当 $x>\sqrt{a}$时, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$.又

$$f(-\sqrt{a})=2a^{\frac{3}{2}}+b>0,\quad f(\sqrt{a})=-2a^{\frac{3}{2}}-b<0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty .$$

根据连续函数零点存在定理及函数在各区间上的单调性知,方程 $f(x)=0$ 有三个实根,分别在区间$(-\infty,-\sqrt{a})$,$(-\sqrt{a},\sqrt{a})$和$(\sqrt{a},+\infty)$内 .

例 3 设常数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 满足条件

$$c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0,$$

试证方程

$$c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0 \tag{7}$$

在 0 与 1 之间至少有一个根 .

分析 讨论方程根的存在性,现在有两个方法,其一,用零点存在定理,其二,用本节的推论 1 .这里不能用零点存在定理,因为(7)式左边函数在点 0 与 1 处是否异号未知 .用推论 1 时,要先构造一个以(7)式左边函数为导函数的函数 .

证明 设

$$f(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1},$$

则

$$f'(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,\quad x\in\mathbf{R} .$$

且由给定的条件知

$$f(0)=0,\quad f(1)=0 .$$

因此由推论 1 知,在区间(0,1)内至少有一点 x_0,使

$$f'(x_0)=c_0+c_1x_0+\cdots+c_nx_0^n=0 .$$

故方程(7)在 0 与 1 之间至少有一个根 . □

例 4 设函数 $f(x)$在区间[0,1]上可导, $f'(x)\neq1$,且 $0<f(x)<1$.试证在区间(0,1)内有惟一的 x,使 $f(x)=x$.

证明 (存在性)设 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(0)=f(0)-0>0$, $F(1)=f(1)-1<0$,又 $F(x)\in C[0,1]$,所以由零点存在定理知存在 $\xi\in(0,1)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

(惟一性)反证法,设有 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, $\xi_1<\xi_2$,使得

$$f(\xi_1)=\xi_1,\quad f(\xi_2)=\xi_2 .$$

在区间$[\xi_1, \xi_2]$上,对函数 $f(x)$应用拉格朗日中值定理,有 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=1 .$$

这与假设 $f'(x)\neq1$ 矛盾 . □

例 5 试证:当 $n>1, 0<x<y$ 时,有不等式

$$nx^{n-1}(y-x)<y^n-x^n<ny^{n-1}(y-x) .$$

证明 设 $f(t)=t^n$,显然, $f(t)$在$[x, y]$区间上满足拉格朗日中值定理条件,故有

$$y^n-x^n=n\xi^{n-1}(y-x),\quad \xi\in(x, y) .$$

因为 $y-x>0$, $x<\xi<y$,所以 $n>1$ 时,有

$$nx^{n-1}(y-x)<y^n-x^n<ny^{n-1}(y-x) . \quad □$$

例 6 试证

$$\arctan\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{2}\arcsin x=\frac{\pi}{4} . \tag{8}$$

证明 当 $x=0$ 时,(8)式成立,又因(8)式左边函数的导数为零 .由推论 2 知等式(8)成立 . □

例 7 若 $f(x)$在有限区间(a, b)内可微,但 $f(x)$无界,试证 $f'(x)$在(a, b)内也无界 .

证明 反证法,设$|f'(x)|\leq M$.任意取定一点 $x_0\in(a, b)$, $\forall x\in(a, b)$,在以 x_0, x 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理有

$$|f(x)-f(x_0)|=|f'(\xi)||x-x_0|<M(b-a) .$$

从而

$$|f(x)|<|f(x_0)|+M(b-a),$$

这与 $f(x)$无界矛盾 . □

例 8 设 $f(x)$在闭区间$[x_1, x_2]$上可微,且 $x_1x_2>0$,试证:至少有一点 $\xi\in(x_1, x_2)$,使

$$\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_1-x_2}=f(\xi)-\xi f'(\xi) . \tag{9}$$

证明 因 $x_1x_2>0$,所以 $x_1, x_2\neq0$,且 x_1, x_2 同号 .由于

$$\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}},$$

故令

$$F(x)=\frac{f(x)}{x},\quad g(x)=\frac{1}{x},$$

显然, $F(x)$和 $g(x)$在区间$[x_1, x_2]$上可导, 且 $g'(x)=\frac{-1}{x^2}\neq 0$, 由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi\in(x_1, x_2)$, 使

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

即(9)式成立. □

4.2 洛必达法则

确定未定式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$的极限是较困难的, 我们曾采取消去“零因式”和“∞因式”等手段部分地解决问题. 由于柯西中值定理能把函数比变为导数比, 从而促使人们想到, 上述未定式的极限能否通过导数比的极限来确定? 早在 1694 年约翰·伯努利(Brenoulli J(瑞士) 1667—1748)就肯定了这个想法, 写信给他的学生洛必达①, 从而产生了简便而重要的洛必达法则.

4.2.1 $\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

洛必达法则 如果 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式, 而 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为无穷大, 则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则中的极限过程, 可以是函数极限的任一种, 但同一问题中的极限过程相同.

证明 仅对 $x\to x_0$ 时的“$\frac{0}{0}$”型给出证明. 定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$, 则 $f(x)$, $g(x)$在点 x_0 处连续. 这样对充分靠近 x_0 的点 x, $f(x)$, $g(x)$在以 x_0 和 x 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 故有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\text{ 介于 } x_0, x \text{ 之间}.$$

令 $x\to x_0$, 取极限, 注意此时 $\xi\to x_0$, 故

① 洛必达 L'Hospital G.F.(法)1661—1704. 最大功绩是撰写了世界上第一本系统的微积分教程.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ □

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\arctan x-\operatorname{arccot} x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}}=-\pi.$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

每次使用洛必达法则之前都必须检查是否满足条件,特别是是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,而且应尽力化简.有时连续几次使用洛必达法则,也有时要结合使用其他法则.

例 3 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\cos x\ln|x-a|}{\ln|e^x-e^a|}=\lim_{x\to a}\cos x\lim_{x\to a}\frac{\ln|x-a|}{\ln|e^x-e^a|}$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\cos a\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{e^x}{e^x-e^a}}=\cos a\lim_{x\to a}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$$

$$=\frac{\cos a}{e^a}e^a=\cos a.$$

这里最后用到 e^x **在** $x=a$ **处导数的定义,在求$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限时,应先把非零的定式因式分离出来,免得求导运算过分复杂.**

例 4 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\mu x^\mu=+\infty\ (\mu>0).$

由例 4 知,当 $x\to+\infty$**时,任何正幂的幂函数都比对数函数更快地趋向于无穷.**

例 5 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{\alpha^{\lambda x}}\ (\lambda,\mu>0,\alpha>1).$

解 因 $\mu>0$**,必有正整数** n_0**,使** $n_0-1<\mu\le n_0$**,连续使用洛必达法则** n_0 **次,得**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{\alpha^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{\lambda\alpha^{\lambda x}\ln\alpha}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n_0+1)}{\lambda^{n_0}\alpha^{\lambda x}x^{n_0-\mu}\ln^{n_0}\alpha}=0.$$

由例 5 知,当 $x\to+\infty$**时,底数大于 1、指数为正的指数函数比任何幂函数都更快地趋向于无穷.**

最后指出,当导数比的极限不存在时,不能断定函数比的极限不存在,这时不能使用洛必达法则,例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1 .$$

然而

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=1+\cos x,$$

当 $x\to\infty$时无极限 .

4.2.2 其他型未定式

下面涉及到的极限,在同一问题中的极限过程是相同的,我们不再标明了 .

若 $f(x)\to0$, $g(x)\to\infty$,则说 $f(x)g(x)$是“$0\cdot\infty$”型未定式,只要把它变形为

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\quad 或\quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

使之呈$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,就可以考虑使用洛必达法则求极限 .

若 $f(x)\to+\infty$, $g(x)\to+\infty$(或 $f(x)\to-\infty$, $g(x)\to-\infty$),则说 $f(x)-g(x)$是“$\infty-\infty$”型未定式 .也要想法先把它化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,如

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)f(x)}} .$$

对具体问题,可能有较简单的化法 .

若幂指函数 $f(x)^{g(x)}$为“0^0”,“1^∞”或“∞^0”型未定式时,由于

$$f(x)^{g(x)}=\exp\left(g(x)\ln f(x)\right)\qquad (f(x)>0) .$$

它的极限取决于 $g(x)\ln f(x)$的极限,这是“$0\cdot\infty$”型未定式,可以用上述方法确定极限,从而求出 $f(x)^{g(x)}$的极限 .

注意,“$0\cdot\infty$”,“$\infty-\infty$”,“0^0”,“1^∞”和“∞^0”五种未定式没有直接的洛必达法则,只有把它们化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,才可能使用洛必达法则 .

例 6 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^\mu\ln x\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{x^\mu}{-\mu}=0\ (\mu>0)$.

例 7 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

例 8 $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{\infty^0}{=} \lim_{x\to 0^+}\exp\frac{\ln\cot x}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \exp\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x\csc^2 x}{x^{-1}}$

$$=\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin x\cos x}=e^{-1}.$$

例 9 $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\exp\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right].$

$$\overset{令 t=\frac{1}{x}}{=} \exp\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \exp\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}=e^2.$$

求数列的极限不能直接用洛必达法则,除非能把它转化为函数的未定式的极限.

例 10 **求** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)^{\frac{1}{\ln n}}$

解 **由于**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{0^0}{=} \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$=e^{-1}$$

又 $n\to\infty$**是** $x\to+\infty$**中的一种特殊情况,所以有**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)^{\frac{1}{\ln n}}=e^{-1}.$$

4.3 泰勒公式

无论在理论研究上,还是在实际工作中,以简单的熟悉的函数来近似表达复杂的函数都是常用的手段.我们最熟悉的最简单的函数就是多项式函数,它不仅容易计算函数值(恐怕初学者还不会计算其他函数的函数值),而且它的导数仍为多项式.更突出的是在 3.4 节中看到的,多项式由它的系数完全确定,而多项式的系数又由它在一点的函数值及导数值确定.那么用怎样的多项式去逼近给

定的函数呢?误差如何呢?

在讲微分时,我们知道,若 $f'(x_0)$存在,在 x_0 附近有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) . \tag{1}$$

当 $x \to x_0$ 时,其误差是比$(x - x_0)$高阶的无穷小.但是用一次多项式来近似表达函数 $f(x)$常常不能满足精度要求,比如造三角函数表,若用(1)式近似计算函数值就太粗糙了,而且对(1)式的误差没有定量的估计.因此人们希望在 x_0 附近用适当的高次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n ,$$

即

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2}$$

来近似表达函数 $f(x)$.

假设函数 $f(x)$在点 x_0 处有 n 阶导数,类比(1)式,自然希望多项式(2)在 x_0 处的值以及它的各阶导数在 x_0 处的值分别与 $f(x_0), f'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0)$相等(用几何的话来说,就是在 x_0 处有相同的纵坐标,相同的切线,相同的弯曲方向和弯曲程度,…… .从运动学角度讲,就是要有相同的起点,相同的初始速度,相同的初加速度,…… .)所以,多项式(2)应为

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \tag{3}$$

称(3)为 $f(x)$的泰勒①多项式.

下面将证明确实可以用泰勒多项式逼近函数 $f(x)$,并估计它的误差.

定理 4.4 (泰勒定理) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处有 n 阶导数,则在 x_0 附近 $f(x)$可表为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{4}$$

其中

$$R_n(x) = o(|x - x_0|^n) . \tag{5}$$

---

① 泰勒 Taylor B.1685—1731,英国数学家.

分析 要证明的是 $R_n(x)$是$(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.自然想到高阶无穷小的定义和洛必达法则.

证明 显然

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

在 x_0 处有 n 阶导数,且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0. \tag{6}$$

据此,连续使用洛必达法则 $n-1$ 次,再用 n 阶导数定义,可推得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$
$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

这说明,当 $x\to x_0$ 时, $R_n(x)$是$(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小,即

$$R_n(x)=o(|x-x_0|^n). \quad \square$$

称(4)式为函数 $f(x)$按$(x-x_0)$的幂(或在 x_0 处)展开到 n 阶的泰勒公式,称(5)式为佩亚诺①型余项.定理 4.4 说明当$|x-x_0|$充分小时,可以用泰勒多项式(2)逼近函数 $f(x)$.

定理 4.5 (泰勒中值定理) 设函数 $f(x)$在区间 I 上有 $n+1$ 阶导数, $x_0\in I$,则在区间 I 上 $f(x)$的 n 阶泰勒公式(4)的余项 $R_n(x)$可表为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad x\in I, \tag{7}$$

其中 ξ 是介于 x_0 和 x 之间的某个(与 x 有关的)数.

分析 将要证的(7)式变形为

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

等式一边为两个函数比,另一边为它们的 $n+1$ 阶导数比.自然联想到柯西中值定理.

证明 注意(6)式,对函数 $R_n(x)$及$(x-x_0)^{n+1}$在以 x_0 及 $x\in I$ 为端点的区间上应用柯西中值定理,得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0, x \text{ 之间}),$$

再对函数 $R_n'(x)$及$(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理,有

① 佩亚诺 Peano G.1858—1932,意大利数学家.

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$

$$=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2\text{ 在 } x_0,\xi_1\text{ 之间}).$$

如此,连续应用柯西中值定理 $n+1$ 次,得到

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi\text{ 在 } x_0,x\text{ 之间}).$$

又因 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$(因 $P_n^{(n+1)}(x)=0$),所以

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{ 在 } x_0,x\text{ 之间}).\ \square$$

称(7)式为拉格朗日型余项.

容易看出:

1.当 $n=0$ 时,泰勒公式就是拉格朗日中值公式.

2.若用 $f(x)$的 n 阶泰勒多项式近似表达 $f(x)$时,其误差

$$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

特别地,若 $x\in I$ 时,$|f^{(n+1)}(x)|<M$,则

$$|R_n(x)|\leq\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}. \tag{8}$$

所以,只要$|x-x_0|$适当地小,误差$|R_n(x)|$就能小于预先指定的数.

3.若在区间 I 内,$f(x)$有各阶导数,且有共同的界,则对固定的 $x\in I$,因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

所以只要(4)式中多项式的次数 n 适当地大,误差$|R_n(x)|$也能小于预先指定的数.

在泰勒公式(4)中,若 $x_0=0$,则 ξ 介于 0,x 之间,故 ξ 可表为 $\xi=\theta x$ $(0<\theta<1)$,这时的(4)式,即按 x 的幂(在零点)展开的泰勒公式叫做麦克劳林①公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1). \tag{9}$$

由此得到近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

---

① 麦克劳林 Maclaurin C.1698—1746,英国数学家.

此时误差估计式(8)变为

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

由3.4节的高阶导数公式,不难得到下列几个初等函数的麦克劳林公式:

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$;

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + (-1)^{m+1}\frac{\cos \theta x}{(2m+3)!} x^{2m+3}$;

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1}\frac{\cos \theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$;

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$;

(5) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n +$

$$\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1}.$$

公式中 $\theta \in (0,1)$,在包含原点且函数及各阶导数都存在的区间上,上述五个公式都成立.

下面仅证明(2),(5)两式.

(2) 的证明

因为 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$,所以 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $\cdots$,从而 $\sin x$ 的 $2m+2$ 阶麦克劳林公式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + R_{2m+2},$$

其中

$$R_{2m+2} = \frac{\sin\left[\theta x + (2m+3)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+3)!}x^{2m+3} = (-1)^{m+1}\frac{\cos \theta x}{(2m+3)!}x^{2m+3}. \quad \square$$

由公式(2)知,$\sin x$ 可以用多项式近似表示为

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

其误差为

$$|R_{2m+2}| = \left|(-1)^{m+1}\frac{\cos \theta x}{(2m+3)!}x^{2m+3}\right| \leq \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

图 4.4 表示不同次数的泰勒多项式逼近函数 $\sin x$ 的情形. 当 $m=0$ 时,有 $\sin x\approx x$,误差 $|R_2|\leq\frac{|x|^3}{6}$,要使误差小于 0.001,必须 $|x|<0.1817$(约 $10°$). 当 $m=1$ 时,有 $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$,误差 $|R_4|\leq\frac{|x|^5}{120}$,要使误差小于 0.001,只需 $|x|<0.6544$(约 $37.5°$).

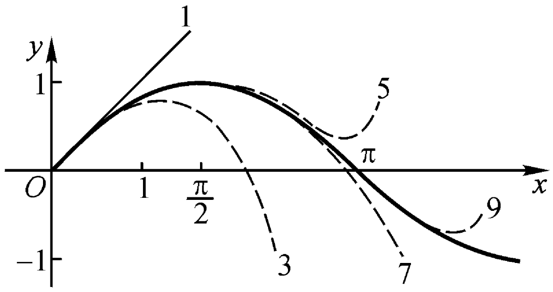


图 4.4

(5) 的证明

因为 $f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}\ (n=1,2,\cdots)$,所以

$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1),$$
$$f^{(n+1)}(\theta x)=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)(1+\theta x)^{\mu-n-1},$$

于是

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$
$$\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1},\qquad\theta\in(0,1).\ \square$$

当 μ 为正整数 n 时,因为 $(1+x)^n$ 的 n 阶以上的导数恒为零,所以 $(1+x)^n$ 的 n 阶麦克劳林公式就是它的牛顿二项公式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n.$$

泰勒公式给出具有高阶导数的函数的另一种表示,为计算函数值和用简单函数逼近给定的函数提供了有效的方法,在其他方面也是很有用的. 下面仅举几个例子.

例 1 计算 $\ln 1.2$ 的值,准确到小数点后第四位.

解 由公式(7)余项的表达式,通过试算知 $n=5$ 时满足精度要求

$$|R_5(0.2)|=\left|\frac{(0.2)^6}{6(1+\xi)^6}\right|<\frac{1}{6}\cdot(0.2)^6<0.000011,$$

故

$$\ln 1.2=\ln(1+0.2)\approx 0.2-\frac{1}{2}\cdot(0.2)^2+\frac{1}{3}\cdot(0.2)^3-\frac{1}{4}\cdot(0.2)^4$$
$$+\frac{1}{5}\cdot(0.2)^5\approx 0.1823.$$

例 2 当 $x\to 0$ 时,$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是 x 是几阶无穷小? 并求其幂函数形主部.

解 因
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\,!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + o(x^4),$$

故由于 $o(x^5) \pm o(x^4) = o(x^4)$,**有**

$$\cos x - e^{-x^2/2} = -\frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

显然,它是 x **的** 4 **阶无穷小,幂函数形主部是** $-\frac{x^4}{12}$.

例 3 **已知** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$,**且** $f''(x) > 0$,**证明:当** $x \neq 0$ **时**, $f(x) > x$.

证明 **因为** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$,**所以** $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.**故** $f(x)$**的一阶麦克劳林公式为**

$$f(x) = x + \frac{f''(\xi)}{2\,!}x^2, \qquad \xi \text{ 介于 } 0, x \text{ 之间}.$$

由于 $f''(x) > 0$,**所以当** $x \neq 0$ **时,有**

$$f(x) > x. \quad \square$$

例 4 **设函数** $f(x)$**和** $g(x)$**在** $x \geq x_0$ **上有** n **阶导数,如果** $f(x_0) = g(x_0)$; $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $k = 1, 2\cdots, n-1$;**且当** $x > x_0$ **时,**

$$f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x),$$

则当 $x > x_0$ **时,恒有**

$$f(x) < g(x).$$

证明 **设** $F(x) = g(x) - f(x)$,**则**

$$F(x_0) = 0, \quad F^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

故 $F(x)$**的** $n-1$ **阶泰勒公式为**

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(\xi)}{n\,!}(x - x_0)^n, \quad x_0 < \xi < x.$$

由于

$$F^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(\xi) > 0,$$

所以,当 $x > x_0$ **时**, $F(x) > 0$,**即有**

$$f(x) < g(x), \quad \text{当 } x > x_0 \text{ 时}. \quad \square$$

例 5 **已知** $f(x) = 2x^2(x - \sin^2 x\cos x^2 e^{\tan x})$,**求** $f''(0)$, $f'''(0)$.

解 **因为** $2x^2\sin^2 x\cos x^2 e^{\tan x}$**是** x **的四阶无穷小,所以** $f(x)$**的三阶麦克劳林公式为**

$$f(x) = 2x^3 + o(x^3),$$

故

$$f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2 \cdot 3\,! = 12.$$

4.4 例　　题

例 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导. 试证：若 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = r$，则 $f'_+(a) = r$；若 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = l$，则 $f'_-(b) = l$.

证明　由拉格朗日中值定理知，$\forall\, x\in(a, b)$，$\exists\, \xi\in(a, x)$，使得

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi),$$

因为当 $x\to a^+$ 时，$\xi\to a^+$，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = r$，所以

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = r.$$

同理可证，$f'_-(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = l$.　$\square$

由此可见，若已知 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，在 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处也可导，且 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

例 2　设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，且有

$$f(x)\,g'(x) \neq f'(x)\,g(x),$$

证明：介于 $f(x)$ 的两个零点 x_1，x_2 之间至少有 $g(x)$ 的一个零点，其中 x_1，x_2 均在区间 (a, b) 内.

证明　(反证法) 若在 x_1，x_2 之间没有 $g(x)$ 的零点，又考虑到给定的不等式知 $g(x_1)\neq 0$，$g(x_2)\neq 0$，从而当 $x\in[x_1, x_2]$ 时，$g(x)\neq 0$.

设 $F(x) = f(x)\quad g(x)$，显然它在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔定理的条件，从而至少存在一点 $\xi\in(x_1, x_2)$，使

$$F'(\xi) = \frac{f'(\xi)\,g(\xi) - g'(\xi)\,f(\xi)}{g^2(\xi)} = 0,$$

这与给定的不等式矛盾.　$\square$

例 3　若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ 内某点处取得最大值，且函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上二阶导数有界，$|f''(x)|\leq M$，试证

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

分析　要证所给的不等式，显然应从 $f'(0)$ 与 $f'(a)$ 的估计入手. 注意到题设，若 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0, a)$ 处取最大值，则 $f'(x_0) = 0$，从而可转为考虑 $f'(x_0) - f'(0)$ 和 $f'(a) - f'(x_0)$ 的估计.

证明　设 $f(x)$ 在 $x_0\in(0, a)$ 处取最大值，则有

$$f'(x_0) = 0.$$

分别在区间$[0, x_0]$和$[x_0, a]$上,对 $f'(x)$应用拉格朗日中值定理,得

$$f'(x_0) - f'(0) = f''(\xi_1)(x_0 - 0), \qquad 0 < \xi_1 < x_0,$$

$$f'(a) - f'(x_0) = f''(\xi_2)(a - x_0), \qquad x_0 < \xi_2 < a.$$

于是

$$|f'(0)| \leq Mx_0, \qquad |f'(a)| \leq M(a - x_0).$$

两式相加得

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma. \quad \square$$

例 4 设在区间(a, b)内 $f''(x) > 0$,试证:$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$,都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

证明 当 $x_1 = x_2$ 时,上式显然成立.下面假设 $x_1 < x_2$.设 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $f(x)$在 x_0 处展开的一阶泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \quad \xi 在 x_0, x 之间.$$

故

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2, \quad x_1 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2, \quad x_0 < \xi_2 < x_2.$$

两式相加,并注意:由于 $f''(x) > 0$,它们的余项均为正;又 $x_1 + x_2 = 2x_0$,得

$$f(x_1) + f(x_2) \geq 2f(x_0),$$

因此

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]. \quad \square$$

例 5 试证

$$\frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x > x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

证明 设

$$f(x) = \frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x - x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

由于

$$f'(x) = \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{2}{3}\cos x - 1,$$

$$f''(x) = \frac{2\cos x \sin x}{3\cos^4 x} - \frac{2}{3}\sin x = \frac{2}{3}\sin x \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^3 x} > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

(法 1) $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \uparrow$, 又 $f'(0) = 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$. $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$, 又 $f(0) = 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) > 0$.

(法 2) 因 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 所以由 $f(x)$ 的一阶麦克劳林公式

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} x^2 > 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad \square$$

例 6 指出数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的数, 并说明理由.

解 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \ (x > 0)$, 先研究它的单调性. 由取对数求导法得

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x) / x^2,$$

故 $f'(e) = 0$. 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x) \uparrow$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x) \downarrow$, 又 $2 < e < 3$, 因此

$$1 < \sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \cdots > \sqrt[n]{n} > \cdots (n > 3).$$

由此可见, $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{3}$ 中最大的数就是数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的数. 因为

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}, \qquad \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}.$$

所以, 数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的数是 $\sqrt[3]{3}$.

例 7 讨论方程 $f(x) = x\ln x + a = 0$ 有几个实根.

解 连续函数在单调区间的端点处, 若函数值异号, 则在区间内有惟一的零点, 否则无零点. 所以先求出 $f(x)$ 的单调区间, 由

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0),$$

故 $x_0 = 1/e$ 处函数取最小值

$$\min f(x) = f(1/e) = a - \frac{1}{e},$$

且当 $0 < x < 1/e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x) \downarrow$; 当 $x > 1/e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x) \uparrow$.

又因

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x\ln x + a) = a, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x\ln x + a) = +\infty,$$

所以

1° 当 $a > 1/e$ 时, 方程无实根;

2° 当 $a = 1/e$ 时, 方程只有一个实根, $x_0 = 1/e$;

3° 当 $0 < a < 1/e$ 时, 方程有两个实根, 在区间 $(0, 1/e)$ 和 $(1/e, +\infty)$ 内各一个;

4° 当 $a \leq 0$ 时, 方程仅有一个实根, 在区间 $(1/e, +\infty)$ 内.

例 8 试证勒让德(Legendre)多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

的所有根皆为实根,且都含在区间$(-1,1)$内.

证明 设多项式

$$Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n,$$

显然$Q_{2n}(x)$和它的1阶至$n-1$阶导数在$x=\pm1$处皆为零.由罗尔定理,$Q'_{2n}(x)$在区间$(-1,1)$内至少有一实根;同样,$Q''_{2n}(x)$在区间$(-1,1)$内至少有两个实根,依次推下去,$Q_{2n}^{(n-1)}(x)$在区间$(-1,1)$内至少有$n-1$个实根,此外$x=1$和$x=-1$还是它的两个根.对$Q_{2n}^{(n-1)}(x)$在它的两个相邻的实根之间再用罗尔定理,便知函数$Q_{2n}^{(n)}(x)$在$(-1,1)$内至少有n个实根,而$Q_{2n}^{(n)}(x)$是n次多项式,只能有n个根,故所有根均为实数,且在区间$(-1,1)$内.这些根就是$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}Q_{2n}^{(n)}(x)$的所有根. ▯

习 题 四

4.1

1. 下列函数在指定的区间上是否满足罗尔定理的条件,在区间内是否有点ξ,使$f'(\xi)=0$?

(1) $y=x^3+4x^2-7x-10$, $[-1,2]$; (2) $y=\ln\sin x$, $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$;

(3) $y=1-\sqrt[3]{x^2}$, $[-1,1]$; (4) $y=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|$, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

2. 试证:对二次函数$y=px^2+qx+r$应用拉格朗日中值定理时,点ξ总是位于区间的正中间.

3. 设$f(x)=\begin{cases}3-x^2, & 0\leq x\leq1,\\ \frac{2}{x}, & 1<x\leq2,\end{cases}$在区间$[0,2]$上$f(x)$是否满足拉格朗日中值定理的条件,满足等式

$$f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$$

的ξ共有几个?

4. 证明多项式$P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导函数的根(零点)都是实根,并指出这些根所在的范围.

5．证明：$x\geq 1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$．

6．证明下列不等式：

(1) $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}\leq\tan\beta-\tan\alpha\leq\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$，当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时；

(2) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，当 $x>0$ 时．

7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$a>0$，试证存在点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

8．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有二阶导数，联结点 $(a,f(a))$ 和点 $(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $(c,f(c))$，其中 $a<c<b$．试证方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根．如果将直线换为曲线 $y=g(x)$，且 $g(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，将有什么类似的结论呢？

9．设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f''(x)$ 在开区间 (a,b) 内存在．若 $f(a)=f(b)=0$，且有 $c\in(a,b)$，使 $f(c)<0$，证明存在点 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)>0$．

10．设 $f(x)$，$g(x)$ 都在区间 I 上可导，证明在 $f(x)$ 的任意两个零点之间，必有方程

$$f'(x)+g'(x)f(x)=0$$

的实根．

11．设 $f(x)$ 在区间 $0,\frac{\pi}{2}$ 上可导，且 $f(0)\,f\,\frac{\pi}{2}<0$，证明 $\exists\ \xi\in\ 0,\frac{\pi}{2}$，使得

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi.$$

12．若有常数 $L>0$，使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leq L|x_2-x_1|,\quad \forall\ x_1,x_2\in I.$$

则说函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足利普希茨(Lipschitz)条件．你认为它与 $f(x)$ 在 I 上连续，可导有何关系？证明你的结论．

13．确定下列函数的单调区间：

(1) $y=\ 2x-x^2$；　　(2) $y=x-e^x$．

14．设 $f''(x)>0$，$f(0)<0$，试证函数 $g(x)=f(x)\ \ x$ 分别在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调增加．

15．已知 $y=ax^3+bx^2+cx+3$ 单调下降．求 a,b,c 满足的条件．

16．方程 $\ln x=ax$(其中 $a>0$)有几个实根？

17．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常

数 .试证若 $f(a)<0$,则方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根 .请指出这个实根存在的有限区间 .

18 . 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$, 证明对任何 $x_1, x_2>0$, 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2) .$$

19 . 设 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续, 在开区间$(0,1)$内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 试证在开区间$(0,1)$内存在两个不同的点 ξ,η, 使 $f'(\xi)=-1$, $f'(\eta)=1$.

20 . (达布定理) 设 $f(x)$在区间(a,b)内可微, $x_1, x_2\in(a,b)$ 若 $f'(x_1)f'(x_2)<0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f'(\xi)=0$, 你能将这一定理作简单推广吗?

21 . 设 $f(x)\in C^2[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

4 .2

1 . 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}$; (4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\cot x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\pi-\arccos x}{x+1}$; (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$; (8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|\cot x|}{\csc x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$; (10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)(a>0, b\neq0)$;

(11) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$; (12) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$; (14) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; (16) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

(17) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{t}{n}\right)^n$; (18) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

2 . 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$存在,但不能用洛必达法则计算 .

3 . 当 $x\to0$ 时, $\dfrac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)$是 x 的几阶无穷小 ?

4 . 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\dfrac{1}{2}$,求常数 p .

5 . 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$具有二阶连续导函数,且 $g(0)=1$.

(1) 求 a,使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续; (2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$在 $x=0$ 处的连续性 .

6 . 设 $f(x)$具有二阶导数,当 $x\neq0$ 时, $f(x)\neq0$,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=4$,求

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} .$$

4 .3

1 . 求下列函数在指定点处的 n 阶泰勒公式:

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=2$; (2) $f(x)=x^2\ln x$, $x_0=1$.

2 . 求下列函数的二阶麦克劳林公式:

(1) $f(x)=xe^x$; (2) $f(x)=\tan x$.

3 . 设 $f(x)$有三阶导数,当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$是 $x-x_0$ 的二阶无穷小,问 $f(x)$在 x_0 处的二阶泰勒公式有何特点 ? 并求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^2}$.

4 . 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sin 18°$.

5 . 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

6 . 当 $x\to0$ 时,下列无穷小是 x 的几阶无穷小,其幂函数形的主部如何 ?

(1) $\alpha(x)=\tan x-\sin x$; (2) $\beta(x)=(e^x-1-x)^2$.

7 . 确定 a, b,使 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to0$ 时为 x 的五阶无穷小 .

8 . 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,求 $f^{(4)}(0)$和 $f^{(5)}(0)$.

9．设 $f(x)$在区间$[a, b]$上有二阶导数，$f'(a) = -f'(b)$，证明在区间(a, b)内至少存在一点 ξ，使

$$|f''(\xi)| \geq 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

10．已知函数 $f(x)$具有三阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$，$f(1)=0$．试证在区间$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使

$$f\ (\xi)=0.$$

11．设 $f(x)\in C^2(-1,1)$，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

(1) 对$(-1,1)$内任一点 $x\neq 0$，存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$．

4.4

1．已知 $f(x)$在$[a, b]$上可导，且 $b-a\geq 4$，证明 v $x_0\in(a, b)$，使得

$$f'(x_0)<1+f^2(x_0).$$

2．设 $f(x)\in C[a, b]$，在(a, b)内可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，试证：在$(a, b)$内存在 ξ，使

$$f'(\xi)=f(\xi).$$

3．设 $f(x)$在$(0, +\infty)$内有界，可导，则[　　]．

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$，

(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$．

4．设 $f(x)$在$[-1,1]$上有二阶导数，且 $f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(1)=3$，证明在区间$(-1,1)$内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=4$．

5．设 $f(x)$在区间$[0,1]$上有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，且 $\max\limits_{x\in(0,1)}f(x)=2$．证明v $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\leq -16$．

6．设 $f(x)$在 x_0 处具有二阶导数 $f''(x_0)$，试证：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0)$．

7．设 $f(x)\in C^2(U(0))$，且 $f(0)f'(0)f''(0)\neq 0$，证明存在惟一的一组实

数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,使 $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0) = o(h^2)$.

8.已知 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + 3 - [A + B(x-1) + C(x-1)^2]}{(x-1)^2} = 0$,求 A, B, C.

9.证明:$\dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq x^2 + \cos x,\quad x \in \mathbf{R}$.

10.证明不等式:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \quad (a, b, c \text{ 均为正数}).$$

11.若用 $\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 来近似 $\ln x$,证明当 $x \in [1,2]$ 时,其误差不超过 $\dfrac{1}{12}(x-1)^3$.

12.证明方程 $e^x - x^2 - 3x - 1 = 0$ 有且仅有三个实根.

13.讨论方程 $2^x = 1 + x^2$ 的实根个数.

14.设函数 $\varphi(x)$ 可微,且 $|\varphi'(x)| < r < 1$(r 为常数),试证:若方程 $x = \varphi(x)$ 有解 x_0,则解必惟一,而且可以用如下的"迭代法"来求 x_0:任取 x_1,作数列

$$x_2 = \varphi(x_1),\quad x_3 = \varphi(x_2),\quad \cdots,\quad x_{n+1} = \varphi(x_n),\quad \cdots,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 .$$

用本题指出的迭代法,用计算器求方程 $x = \dfrac{\pi}{4}\ \dfrac{2}{3}\sin x + 1$ 在区间 $0, \dfrac{\pi}{2}$ 内的近似解.

附录Ⅳ　数学分析中的论证方法

数学课的任务除了传授数学知识外,还肩负着培养学生逻辑思维能力的重任.数学中论证问题的各种方法不外乎是逻辑推理的不同形式.论证是用已知的判断获取新判断的逻辑方法,是人们正确认识世界的手段,掌握了它,将使人的逻辑推理能力产生飞跃.但是,理解和掌握它是困难的.这里根据前几章学过的知识举例说明数学分析中的论证方法,以便在以后各章的学习中主动实践、体会,提高逻辑推理能力.

论证的基本规则是:(i)论题必须明确,即命题的条件和结论要清楚.所以在论证之前要认真审题,并根据条件和结论联想到有关的知识和概念,有时还要借助图形开阔思路,有时要作适当的变化(包括演算)使问题转化.(ii)论据必须真实、充足.论证时不但可以引用事实和定义来作论据,还可以根据公理及已经证明过的定理来论证.(iii)不许恶性循环论证,即引用的论据不许是本论题推出的

结论.

一、分析法

分析法是由命题结论出发,步步紧扣已知条件,追溯到已知论断的论证方法,也称倒推法.证明中应当使用假定的语气,如用“若要 A 成立,只要 B 成立;若要 B 成立,又需 C 成立”等.

例 1 设 $f(x)$对 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$,且 $f(x)$在 $x = 0$ 处连续,$f(0) \neq 0$.试证 $f(x) \in C(\mathbf{R})$.

证明 要证 $f(x) \in C(\mathbf{R})$,只需证对任一点 x,$f(x)$都连续.即证

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

由 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$知,$f(x + \Delta x) = f(x) f(\Delta x)$,故只需证

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) f(\Delta x) = f(x) \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = f(x),$$

即要证 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = 1$.

取 $x_1 = x_2 = 0$,则有 $f(0) = f(0) f(0)$,又 $f(0) \neq 0$,故 $f(0) = 1$.又因 $f(x)$在 $x = 0$ 处连续,所以有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = 1$.

由此可见,$f(x) \in C(\mathbf{R})$.

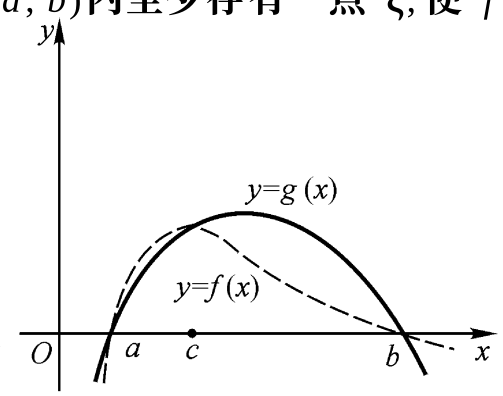
使用分析法时必须注意,每倒推一步,后者都应是前者的充分条件.

二、综合法

综合法是以给定条件下的某已知论断为前提引导到命题结论的论证法.这种方法论证简洁,语气肯定,但难以掌握,为了找到正确的出发点,要求我们除了能熟练地掌握和运用与命题有关的理论、概念和运算外,还要善于分析问题,特别地,要借助分析法寻找解题思路.

例 2 设抛物线 $g(x) = -x^2 + Bx + C$ 与 x 轴有两个交点 $x = a$, $x = b(a < b)$;函数 $y = f(x)$在$[a, b]$上有二阶导数,$f(a) = f(b) = 0$;且曲线 $y = f(x)$与 $y = g(x)$在区间(a, b)内有一个交点.试证在(a, b)内至少存有一点 ξ,使 $f''(\xi) = -2$.

分析 作示意图如图Ⅳ.1,问题中涉及到函数值与某点的导数值,自然想到中值定理,由图上看到两个函数之差 $g(x) - f(x)$有三个零点,由罗尔定理可知它的一阶导数至少有两个零点,二阶导数至少有一个零点 ξ,又 $g(x)$是二次多项式,$g''(x) = -2$,故 $f''(\xi) = -2$.所以我们应从罗尔定理出发.



图Ⅳ.1

证明 设曲线 $g(x)$和 $f(x)$在(a,b)内交点的横坐标为 $c(a<c<b)$,考虑函数

$$F(x)=g(x)-f(x)=-x^2+Bx+C-f(x),$$

由已知条件知 $F(a)=F(b)=F(c)=0$,又因 $g(x)$和 $f(x)$在$[a,b]$上均有二阶导数,所以 $F(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上均满足罗尔定理的条件,于是有 $\xi_1\in(a,c)$,$\xi_2\in(c,b)$,使

$$F'(\xi_1)=0,\qquad F'(\xi_2)=0.$$

由此可见,$F'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理的条件,故至少有一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ (a,b),使

$$F''(\xi)=0.$$

因为 $F''(x)=g''(x)-f''(x)=-2-f''(x)$,所以

$$f''(\xi)=-2.$$

三、构造法

根据论证需要先构造一个函数、算式或引理,然后进行证明的方法叫做构造法.比如拉格朗日中值定理和柯西中值定理的证明,上述例 2 的证明中也构造了一个函数.构造的目的在于转化问题,技巧性较高.

例 3 试证不等式

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}\quad(a>1).$$

分析 由前边学过的知识,要证不等式常常联想到函数的单调性、中值定理等.这里 $a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}$是 $a^{\frac{1}{x}}$在 $x=n$ 和 $x=n+1$ 处的函数值之差,仔细分析要证的不等式知,应从拉格朗日中值定理入手.

证明 引入辅助函数 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$,在$[n,n+1]$上应用拉格朗日中值定理,有 $\xi\in(n,n+1)$,使

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{\xi^2}a^{\frac{1}{\xi}}\ln a.$$

由于 $a>1$,$\ln a>0$,故

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\frac{1}{\xi^2}a^{\frac{1}{\xi}}.$$

再考虑辅助函数 $g(x)=x^2a^x$,由于 $g'(x)=2xa^x+x^2a^x\ln a$,所以当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,即当 $x>0$ 时,$g(x)\uparrow$.又因 $n<\xi<n+1$,即$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$,从而有

$$\frac{1}{(n+1)^2}a^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{\xi^2}a^{\frac{1}{\xi}} < \frac{1}{n^2}a^{\frac{1}{n}}.$$

于是得到

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}. \qquad \square$$

四、举反例法

数学上要想证明一个命题不正确,或证明一个否定性的论断,只需举出一个反例(满足命题的条件,而与命题结论相反的例子)就可以了.举反例也是数学中很重要的论证手段.如“连续函数不一定可导”等论断的证明.教材中许多定理的后面常常强调定理中某条件不存在时,结论不正确,都采用举反例证明.

例 4 试证无穷多个无穷小之积,不一定是无穷小.

证明 考虑下列每行的数列

$$\begin{array}{llllllll}
1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \cdots, & \frac{1}{n}, & \cdots, & \\
1, & 2, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \cdots, & \frac{1}{n}, & \cdots, & \\
1, & 1, & 3^2, & \frac{1}{4}, & \cdots, & \frac{1}{n}, & \cdots, & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots, & & & & & & & \\
1, & 1, & 1, & 1, & \cdots, & n^{n-1}, & \frac{1}{n+1}, & \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & & &
\end{array}$$

每个数列是无穷小,但它们的乘积数列$\{1\}$不是无穷小. $\square$

举反例法实质上也是构造性论证法,需要对涉及的知识有深透的理解,并且技巧性很强.举反例也不是轻而易举的事,一个好的反例的作用不亚于定理.

五、计算法

利用有关的计算,经计算得到结论的证明方法叫计算论证法,如证明恒等式或不等式等.计算证明有三种基本途径:从左向右;从右向左;左右分别向同一式子推算.这是大家在初等数学中就熟悉了的.计算证明要求我们心中目标明确,同时要有高超的计算技巧(特别是变形与变换)和娴熟的计算能力.

例 5 试证勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

满足关系式

$$(x^2-1)P''_n(x)+2xP'_n(x)-n(n+1)P_n(x)=0. \tag{1}$$

分析 多项式 $P_n(x)$等于函数 $z=\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$ 的 n 阶导数,当然可以先求出 $P_n(x)$,再将它代入(1)式左边验证,但这相当麻烦.因为要证的实质上是"$z^{(n)}$满足(1)式",所以我们从 z 的一阶导数入手.

证明 令 $z=\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$,则

$$z'=\frac{1}{2^n n!}2nx(x^2-1)^{n-1}.$$

两边乘以(x^2-1),得

$$(x^2-1)z'=2nxz.$$

两边求 $n+1$ 阶导数,由莱布尼茨公式,得

$$(x^2-1)z^{(n+2)}+(n+1)2xz^{(n+1)}+\frac{(n+1)n}{2!}\cdot 2z^{(n)}=2nxz^{(n+1)}+2n(n+1)z^{(n)}.$$

整理得

$$(x^2-1)z^{(n+2)}+2xz^{(n+1)}-n(n+1)z^{(n)}=0.$$

因为 $z^{(n)}=P_n(x)$,代入上式便知 $P_n(x)$满足(1)式. □

以上五种论证方法都属于直接论证,均是引用论据正面证明命题的.有些命题在论证当时还没有直接证明的正面根据,直接论证较困难,这时我们可以证明它的反命题(命题"若 A 则 B"的反命题是指"若 A,不一定 B")是错误的.当反命题被驳倒后,便可断定原命题正确,这种证法叫间接法或反证法.

六、反证法

为了证明在条件 A 下有结论 B.首先否定 B,即假设 B 不成立.然后由条件 A 和这个反证的假设出发,运用有关的知识进行逻辑推理.如果推出一个矛盾(与已知条件 A 矛盾,或与已知的概念、公式、公理、定理和事实矛盾,或自相矛盾等),说明反证的假设是错误的,根据逻辑排中律,推出原命题正确.

当结论 B 中包含的情况复杂、广泛,而反面情况较单一时,也常用反证法.这时反证法会显得更加简洁,因为增加了一个反证的假设条件,而且推理的方向相当自由——只要找出一个矛盾即可.

例 6 若 $f(x)\in C(a,b)$,且 $f'_+(x)>0$,则在区间(a,b)上 $f(x)\uparrow$.

证明 若不然,设有点 $x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$,且 $f(x_1)\geq f(x_2)$.由于 $f(x)\in C[x_1,x_2]$,所以有最大值,设为 $f(x_0)$,$x_1\leq x_0<x_2$.于是当 $x\in[x_0,x_2]$时,恒有

$$f(x)\leq f(x_0),$$

故

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 .$$

与命题条件矛盾,因此在(a,b)上 $f(x)\uparrow$. ▯

要强调的是,当命题的结论 B 的反面包含多种情况时,要使用反证法,必须摒弃一切可能的对立情况,才能证得命题 比如,要证在某条件下,$\angle\alpha=\angle\beta$,必须摒弃$\angle\alpha>\angle\beta$及$\angle\alpha<\angle\beta$两种情况 .

七、数学归纳法

这是大家已经熟悉的方法 .它是证明同正整数集有关的命题的基本的、有力的方法 .

要证明命题 $\pi(n)$对所有自然数 $n\geq n_0$ 都成立,证明过程分两步:第一步,论证 $n=n_0$ 时,命题 $\pi(n)$成立;第二步,假设 $n_0\leq n\leq k$时,命题 $\pi(n)$都成立,推证 $n=k+1$ 时,$\pi(n)$也成立 .这样命题 $\pi(n)$对一切自然数 $n\geq n_0$ 都成立 .其中第一步是用数学归纳法证明的基础,绝不可缺少 .如果没有第一步,第二步的假设就是无根据的 .第二步证明命题有延续性,因此,这一步一定要从 $n_0\leq n\leq k$ 时命题成立来推证 $n=k+1$ 时命题也成立(许多命题可从 $n=k$时命题成立推出 $n=k+1$ 时命题成立,这时第二步也可假设 $n=k$时命题成立来推证 $n=k+1$ 时命题成立,如果第二步中用到 $n=k-1$, $n=k$ 的结论,则在第一步中要证 $n=n_0$ 和 $n=n_0+1$ 时结论成立 .如果没有用第二步的假设条件而直接推导 $n=k+1$ 时命题成立,就不能算做数学归纳法 .通常第二步比第一步要困难些 .

例 7 数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$,且满足

$$a_{n+1}a_{n-2}-a_na_{n-1}=7 \qquad (n>2),$$

试证 $a_n(n\in\mathbf{N}_+)$是正整数 .

证明 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ 都是正整数,由 $a_4a_1-a_3a_2=7$,得 $a_4=13>0$.

首先,设 a_{k-2}, a_{k-1}, a_k 均大于零,则由

$$a_{k+1}a_{k-2}-a_ka_{k-1}=7$$

知 $a_{k+1}>0$,由数学归纳法知 $a_n>0(n\in\mathbf{N}_+)$.

其次,由

$$a_{n+1}a_{n-2}-a_na_{n-1}=a_na_{n-3}-a_{n-1}a_{n-2},$$

$$a_{n+1}a_{n-2}+a_{n-1}a_{n-2}=a_na_{n-1}+a_na_{n-3},$$

得递推公式

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}.$$

当 n 为偶数时

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}=\cdots=\frac{a_3+a_1}{a_2}=2.$$

当 n 为奇数时

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}=\cdots=\frac{a_4+a_2}{a_3}=5.$$

设 a_k, a_{k-1} 为整数,则由于 $\frac{a_{k+1}+a_{k-1}}{a_k}$ 为整数,所以 a_{k+1} 为整数,由数学归纳法知 a_n ($n\in\mathbf{N}_+$)为整数.

综上所述, a_n ($n\in\mathbf{N}_+$)是正整数. □

要想提高数学论证的能力,首先要精通学习过的数学理论精通,不但搞清它的来龙去脉,认准它的条件、结论,还要知道它的应用,学习时注意吸收处理问题的好方法.在做习题时要合乎逻辑,注意形式.同学间的辩论、研究、批判和反驳及自己的反复思考和实践,都是提高论证能力的有效途径.

第五章　不定积分

5.1　原函数与不定积分

5.1.1　原函数与不定积分的概念

第三章里介绍了求已知函数的导数和微分的运算.在科学和技术的许多问题中常常要解决相反的问题,就是已知导数或微分,求原来那个函数的问题.例如:

1.已知某曲线的切线斜率为 $2x$,求此曲线的方程.

2.某质点作直线运动,已知运动速度函数 $v=at+v_0$,求路程函数.

这是微分运算的逆运算问题,是微积分学中另一个基本内容.

定义 5.1　如果在某区间 I 上,

$$F'(x)=f(x)\quad 或\quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$为 $f(x)$在 I 上的一个原函数.

例如,由$(\sin x)'=\cos x$,或由 $\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$ 知,$F(x)=\sin x$ 是 $f(x)=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数.不难看出 $F(x)+C=\sin x+C$ 也是 $f(x)=\cos x$ 的原函数,其中 C 为任意常数.

一般地说,若 $F(x)$为 $f(x)$的一个原函数,则 $F(x)+C$ 亦为 $f(x)$的原函数(C 为任意常数),这是因为

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

由此可见,一个函数如果有原函数,就有无穷多个,并有结论:

定理 5.1　如果 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数,则 $f(x)$在 I 上的任一原函数都可表为 $F(x)+C$ 的形式,其中 C 为某一常数.

这个定理表明:形如 $F(x)+C$ 的一族函数是 $f(x)$的全部原函数.

证明　设 $\Phi(x)$为 $f(x)$的任一原函数,则

$$\Phi'(x)=f(x),$$

又因 $F'(x)=f(x)$,所以

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0,\quad \forall x\in I,$$

故 $\Phi(x)-F(x)=C$,即

$$\Phi(x)=F(x)+C.\quad \square$$

可见,只要找到 $f(x)$的一个原函数,就知道它的全部原函数.

定义 5.2 设 $F(x)$是 $f(x)$的任一原函数,则 $f(x)$的全部原函数的一般表达式

$$F(x)+C$$

称为函数 $f(x)$的不定积分,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中,$\int$叫做积分号,$f(x)\mathrm{d}x$叫做被积表达式,$f(x)$叫做被积函数,x叫做积分变量,任意常数 C 叫做积分常数.

要强调指出的是:(i)被积函数是原函数的导数,被积表达式是原函数的微分.(ii)不定积分表示那些导数等于被积函数的所有函数,或者说其微分等于被积表达式的所有函数,因此绝对不能漏写积分常数 C.(iii)求已知函数的原函数或不定积分的运算称为积分运算,它是微分运算的逆运算.

例 1 $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C.$

例 2 $\int x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+C.$

不定积分的几何意义.设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则 $y=F(x)$的图形称为 $f(x)$的一条积分曲线.因为 $F'(x)=f(x)$,所以积分曲线上任一点$(x,F(x))$处的切线斜率恰好等于$f(x)$.若把这条积分曲线沿 y 轴方向平移 C 个单位,就得到另一条积分曲线 $y=F(x)+C$.所以不定积分就是这样一族积分曲线通用的方程.曲线族中各条曲线在横坐标相同的点处的切线平行(见图 5.1).

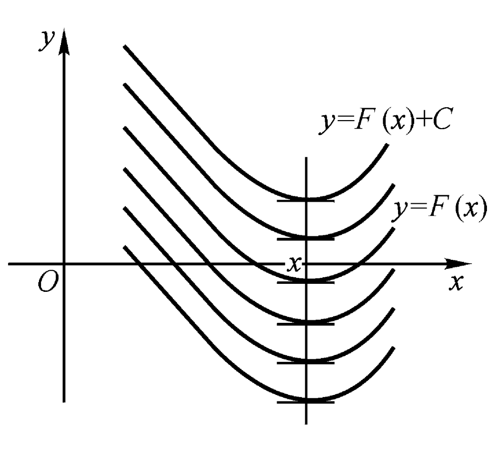


图 5.1

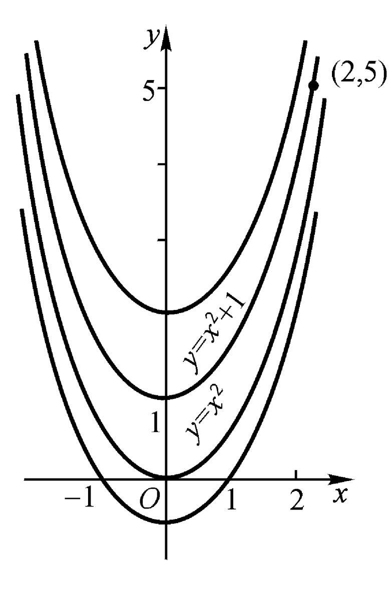


图 5.2

在求原函数的实际问题中,有时要从全部原函数中确定出所需要的具有某

种特性的一个原函数,这时应根据这个特性确定常数 C 的值,从而找出需要的原函数.

例 3 求通过点(2,5),且其切线斜率为 $2x$ 的曲线.

解 切线斜率为 $2x$,即 $y'=2x$ 的曲线族为

$$y=\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C,$$

又因所求曲线通过点(2,5),即当 $x=2$ 时, $y=5$,所以有

$$5=2^2+C,\quad C=1.$$

故所求的曲线方程为

$$y=x^2+1,$$

参看图 5.2.

例 4 已知物体运动速度 $v=at+v_0$,求路程函数.

解 因为$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=at+v_0$,所以

$$s=\int(at+v_0)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0,$$

其中 s_0 为任意常数.若 $t=0$ 时, $s=0$,则 $s_0=0$,这时路程函数为

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t.$$

哪些函数有原函数?又如何求其原函数呢?第一个问题由下面的定理来回答.

定理 5.2 若 $f(x)\in C[a,b]$,则它必有原函数.

这个原函数存在性定理的证明将在下一章给出,至于第二个问题正是下面几节所要研究的.顺便指出:不定积分与导数的定义方法大不相同,导数的定义是构造性的,定义本身就指明了计算方法;而不定积分的定义仅指出所要求的函数的特性,没有告诉我们如何寻找它,所以积分运算原则上比微分运算困难得多.因此在学习中,应熟记基本积分公式,适当做些练习并不断总结、摸索求不定积分的方法和技巧.

5.1.2 不定积分的性质和基本公式

由不定积分的定义和微分法则,可以直接推出不定积分如下两条性质:

性质 1 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$;

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C \text{ 或 } \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C,$$

即先积分后微分,则两个运算抵消;反之,先微分后积分,抵消后差一个常数项.

这就是所说的微分与积分互为逆运算的含义．

性质 2　若在同一区间上 $f(x)$，$g(x)$ 都有原函数，则

$$\int[af(x)+bg(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x.$$

其中 a，b 是不同时为零的常数．

证明　由微分法则和性质 1，

$$\left(a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = a\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + b\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)'$$

$$= af(x)+bg(x),$$

所以，$a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x$ 是 $af(x)+bg(x)$ 的原函数，且在不定积分中已含有任意常数，由不定积分定义知性质 2 成立． □

性质 2 称为积分的线性性质，它是和微分运算的线性性质相对应的．

根据微分基本公式，可直接得到如下的不定积分基本公式．

不定积分基本公式（Ⅰ）

(1) $\int 0\mathrm{d}x = C$；　　(2) $\int 1\mathrm{d}x = x + C$；

(3) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$；　　(4) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

(5) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\ (a>0, a\neq 1)$；　　(6) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$；

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；　　(8) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(9) $\int \sec^{2} x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^{2} x}\mathrm{d}x = \tan x + C$；

(10) $\int \csc^{2} x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^{2} x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(11) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

(12) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$；　　(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}} = \arctan x + C$．

熟记基本积分公式，才可能顺利地进行积分运算．现在可以利用不定积分的基本公式和线性性质，计算一些简单的不定积分．

例 5 $\int(\mathrm{e}^x+2\sin x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+2\int\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-2\cos x+C.$

例 6 $\int x\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}-2\ln|x|+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2\ln|x|+C.$$

计算积分时,常常将被积函数作适当的恒等变形,使之化为积分表中诸被积函数的线性组合的形式,然后用线性性质计算积分,称为分项积分法.

例 7 $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=x-\arctan x+C.$

例 8 $\int\cot^2x\mathrm{d}x=\int(\csc^2x-1)\mathrm{d}x=-\cot x-x+C.$

例 9 $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C.$

例 10 $\int\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos x}{2\sin^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\cot x\csc x\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(-\cot x+\csc x)+C.$$

5.2 换元积分法

微分运算中有两个重要的法则:复合函数微分法和乘积的微分法,在积分运算中,与它们对应的是本节和下节将要介绍的换元积分法和分部积分法.

换元积分公式 设 $f(x)$连续,$x=\varphi(t)$有连续的导数,则

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)\overset{x=\varphi(t)}{=\!=}\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

证明 由于

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)=f(x)\mathrm{d}x,$$

所以根据不定积分的定义知(1)式成立. □

第一换元积分法 若遇到积分$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$不易计算时,通过变换$x=\varphi(t)$,由(1)式化为不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$来计算,积分后再将 $x=\varphi(t)$代入.

第二换元积分法 若遇到积分$\int f(x)\mathrm{d}x$不易计算时,可选取适当的变换

$x = \varphi(t)$,由(1)式化为不定积分$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$来计算.由于积分之后还要将 t 换为 x 的函数,所以这时要求变换 $x = \varphi(t)$有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$.

换元积分法的基本思想是将被积表达式(原函数的微分)变形,因为原函数的微分等于它对自变量的导数乘以自变量的微分,也等于它对中间变量的导数乘以中间变量的微分.把原函数的微分写成不同的形式,求原函数的难易程度是不同的.

先看第一换元积分法的例题.

例 1 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\mathrm{d}x^2 \overset{u = x^2}{\quad\quad} \int e^u \mathrm{d}u = e^u + C = e^{x^2} + C$.

例 2 $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}\ln x \overset{u = \ln x}{\quad\quad} \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

做过一定数量的练习对第一换元积分法熟练后,可以不再写出中间变量,但需明白将积分公式中的积分变量换为可微函数时,公式依然成立.

例 3 $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \int \arctan x \mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$.

△**例 4**[①] $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a \quad 1 - (\frac{x}{a})^2} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1 - (\frac{x}{a})^2} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

△**例 5** $\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x = -\ln|\cos x| + C$.

例 6 $\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

例 7 $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x)$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

由例 6,例 7 知,$\sin^m x\cos^n x$ 的积分,当 m, n 有一个是奇数时,容易用第一换元积分法积分,

---

① 本章带△号的例题都是基本公式或定理.

当 m, n 都是偶数时,可选用倍角公式降幂,再积分.

例 8 $\int \cos 3x \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos x + \cos 5x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$.

不同角度的正弦函数、余弦函数之积的积分,通常用积化和差公式来拆项化简 如果中间变量的导数是常数,很容易凑出它来.

△例 9 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

△例 10
$$\int \csc x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x - 1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$
$$= \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

换个算法有
$$\int \csc x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}$$
$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

同一个积分用不同的方法计算,可能得到表面上不一致的结果,但实际上都表示同一族函数 检验积分结果是否正确的方法是求其导数,看它是否与被积函数相等 另外,由这几个例子看到,有时被积表达式内不明显含有 $\varphi'(x)$的因式,只要把被积函数作适当的变形,便可出现$\varphi'(x)$.

例 11
$$\int \tan^3 x \mathrm{d}x = \int \tan x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \tan x \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \tan x \mathrm{d}x$$
$$= \int \tan x \mathrm{d}\tan x + \ln|\cos x| = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

例 12
$$\int \sec^6 x \mathrm{d}x = \int(\tan^2 x + 1)^2 \sec^2 x \mathrm{d}x = \int(\tan^2 x + 1)^2 \mathrm{d}\tan x$$
$$= \int(\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1)\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

例 13
$$\int \tan^5 x \sec^3 x \mathrm{d}x = \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x \mathrm{d}x$$
$$= \int(\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \mathrm{d}\sec x$$

$$= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x)\,\mathrm{d}\sec x$$

$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C.$$

例 14 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1\right] b^2\cos^2 x}$

$$= \frac{1}{ab}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C \quad (a, b \neq 0).$$

例 15 $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos^2 x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}$

$$= -\arcsin(\cos^2 x) + C.$$

例 16 $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 8}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x^2 + 3x + 8)}{x^2 + 3x + 8} = \ln|x^2 + 3x + 8| + C.$

注意:函数从微分号外移到微分号里要积分,而由微分号里移到微分号外要求导;在微分号里可随意加常数, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x + C)$.

再看第二换元积分法的例题.

例 17 **求** $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 **此题的难点在于有根式,为消除它,作变换,令** $t = \sqrt{x}$,**即** $x = t^2\ (t \geq 0)$,**则** $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,**故**

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1 + t}\mathrm{d}t = \int \left(2 - \frac{2}{1 + t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t - 2\ln(1 + t) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C.$$

例 18 **求** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\mathrm{d}x$.

解 **设** $\sqrt{e^x - 1} = t$,**即** $x = \ln(1 + t^2)\ (t > 0)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{1 + t^2}\mathrm{d}t$,**故**

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1 + t^2}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{e^x - 1} + C.$$

△ **例 19** **求** $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$.

解 设 $x = a\sin t\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t$，$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$，
于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int a^2 \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C.$$

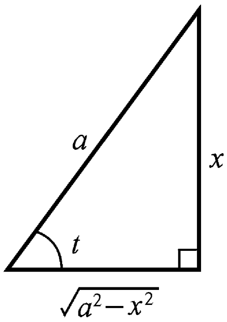


图 5.3

还需要将结果表成原变量 x 的函数，由图 5.3 知，在三角变换 $\sin t = \dfrac{x}{a}$ 下，有

$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \qquad t = \arcsin\frac{x}{a},$$

故

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

△ **例 20** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\ (a > 0)$.

解 设 $x = a\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t$，$\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

参看图 5.4，最后一步中把 $-\ln a$ 归入到任意常数 C 内.

相仿地，通过变换 $x = a\sec t$ 可算出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

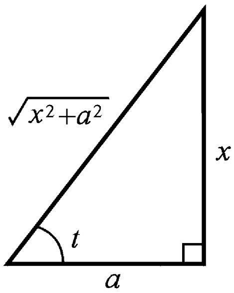


图 5.4

对于什么样的积分，采用怎样的变换要具体问题具体分析，选择得好，可以积分出来，选取得不恰当，积不出来，就要再换其他的变换.只有十分熟悉基本微分与积分公式，注意分析被积表达式的结构，多做练习，不断总结经验，才能提高计算不定积分

的能力 比如从前面几个例题知,当被积函数中:

1°含有 $a^2 - x^2$ 时,作变换 $x = a\sin t$;

2°含有 $x^2 + a^2$ 时,作变换 $x = a\tan t$;

3°含有 $x^2 - a^2$ 时,作变换 $x = a\sec t$;

4°含有 $ax + b$时,作变换 $t = ax + b$,即 $x = \frac{t^2 - b}{a}$,

常常是可行的 .

最后,再举一个第二换元积分法的例子 .

例 21 求$\int \frac{a^2 - x^2}{x^4} \mathrm{d}x (x > 0)$.

解 作倒变换 $x = \frac{1}{t}$,即 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$,故

$$\int \frac{a^2 - x^2}{x^4} \mathrm{d}x = \int \frac{a^2 - \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^4}} \frac{-\mathrm{d}t}{t^2} = -\int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} t \,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{3a^2}(a^2 t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C .$$

一些情况下(如被积函数是分式,分母的多项式次数较高时),倒变换可以用来消去分母中的变量 .

由本节的例题得到几个常用的积分基本公式汇集如下 .

不定积分基本公式(Ⅱ)

(15)$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$;

(16)$\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$;

(17)$\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$;

(18)$\int \csc x \,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

(19)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$;

(20)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$;

$$(21)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$(22)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$(23)\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$(24)\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

以上各式中的 $a \neq 0$.

5.3 分部积分法

我们知道,两个连续可微函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$乘积的微分

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u,$$

从而有

$$u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u,$$

两边取积分,根据不定积分性质 1,性质 2 有

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u, \tag{1}$$

亦即

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

积分公式(1)或(2)称为分部积分公式.它把一个积分转换为另一个积分,用它计算不定积分的方法叫分部积分法:

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x.$$

例 1 求$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 设 $u = x$, $v' = \cos x$,则

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ u}}{x}\underset{\substack{\uparrow\\ v'}}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \underset{\substack{\uparrow\\ u}}{x}\,\mathrm{d}\underset{\substack{\uparrow\\ v}}{\sin x} = \underset{\substack{\uparrow\\ u}}{x}\underset{\substack{\uparrow\\ v}}{\sin x} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ v}}{\sin x}\,\mathrm{d}\underset{\substack{\uparrow\\ u}}{x} = x\sin x + \cos x + C.$$

例 2 求$\int x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解 设 $u = x^2$, $v' = \mathrm{e}^x$,则

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2 = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

对积分$\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$再用分部积分法,有

$$\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C,$$

故

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^2 \mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C.$$

此例说明,有时要多次应用分部积分法.

应用分部积分法时,需要把被积函数看作两个因式 u 及 v'之积,如何选取 u 和 v'是很关键的,选取不当,将使积分愈化愈繁.因为分部积分第一步要将 $v'\mathrm{d}x$ 变为 $\mathrm{d}v$,实质就是先积分 v',所以选取 v'应使它好积.

例 3 $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x = \int x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\tan x - \int x\mathrm{d}x$

$$= x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2 = x\tan x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

例 4 求$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x\sec^2 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x$

$$= \sec x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}\sec x = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x + \int \sec x\mathrm{d}x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\mathrm{d}x.$$

由此解得

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

有时经过分部积分后又出现了原来的不定积分,这时可以通过解方程的方法得出所求的积分.此时,注意解出的不定积分必须加上任意常数 C.

熟悉了分部积分法后,对较简单的情况常常直接用公式(2),不必通过公式(1)转化.

例 5 求$\int x^2 + a^2 \mathrm{d}x$.

解 因为

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right),$$

所以

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

例 6 求$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x,$$

又

$$\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos x + \int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

所以,后式代入前式,解得

$$\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C,$$

若将前式代入后式,又可解得

$$\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C.$$

有一条经验值得一提,当被积函数形如

$$\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\quad \mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad P_m(x)\mathrm{e}^{ax},\quad P_m(x)\sin bx,$$

$$P_m(x)\cos bx,\quad P_m(x)(\ln x)^n,\quad P_m(x)\arctan x,\quad \cdots$$

之一时,用分部积分法便可求出不定积分,其中 $P_m(x)$表示 m 次多项式.

选取 v 的顺序通常可为:指数函数、三角函数、幂函数(因为它们好积,特别是 e^{ax}),其余的因式作为 u;如果被积函数中含有对数函数、反三角函数因式,常常把它们取作 u(因为它们的导数比它们自己简单),其余因式作 v'.

例 7 $\int\ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

例 8 $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int\frac{\arctan x}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2) = \int\arctan x\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$

$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$

利用分部积分法可以得到一些递推公式.

△**例 9** 试证递推公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{3}$$

证明 设 $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$,由分部积分法得

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - 2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}, \end{aligned}$$

由此推出

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n \qquad (n=1,2,\cdots). \qquad \square$$

利用这个递推公式及公式

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

就可以求出每个积分 J_n.例如

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

在积分过程中常常兼用各种积分方法.

例 10 求 $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\sin t$,则 $\arcsin x = t$, $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}\tan t = t\tan t - \int \tan t\,\mathrm{d}t \\ &= t\tan t + \ln|\cos t| + C \\ &= \frac{x\arcsin x}{1-x^2} + \ln\ 1-x^2 + C. \end{aligned}$$

求不定积分的基本思路是:想方设法将被积函数化为积分表中被积函数的线性组合的形式,然后用积分公式和分项积分法计算不定积分.因此,积分公式和不定积分的线性性质是计算不定积分的基础,而换元积分法、分部积分法以及对被积函数作代数、三角恒等变形等,都是将被积表达式向已知积分公式转化的手段,这是非常灵活的,其技巧性很高.

顺便指出:虽然初等函数的导数仍为初等函数,但初等函数的不定积分不一定是初等函数.例如,下列初等函数

$$1+x^3,\quad e^{x^2},\quad \frac{e^x}{x},\quad \sin(x^2),\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{\ln x},\quad 1-\varepsilon\sin^2 t\ (0<\varepsilon<1)$$

在其连续的区间上不定积分是存在的,但用初等函数却表达不出来,所以它们的不定积分是非初等函数,在我们学了定积分和函数项级数之后,在扩展的函数集之中,就可研究它们的积分问题.

5.4 几类函数的积分

5.4.1 有理函数的积分

有理函数是两个多项式的商所表示的函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},\tag{1}$$

其中 m,n 均为正整数或零; $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 都是实常数,并且 $a_0\neq0$, $b_0\neq0$.

当 $n<m$ 时,称(1)为真分式;当 $n\geq m$ 时,称(1)为假分式.因为任何一个假分式都可以表为一个多项式与一个真分式之和,多项式的积分是容易计算的,所以,下面只讨论真分式的积分.

对一般有理真分式的积分,代数学中下述定理起着关键性的作用.

定理 5.3 任何既约有理真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$均可表为有限个最简分式之和.如果分母多项式 $Q(x)$在实数域上的质因式分解式为

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\lambda}\cdots(x^2+px+q)^{\mu}\cdots,$$

λ,μ 为正整数,则$\frac{P(x)}{Q(x)}$可惟一地分解为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\lambda}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{A_{\lambda}}{x-a}+\cdots+$$
$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{x^2+px+q}+\cdots,$$

其中诸 A_i, M_i, N_i 都是常数,可由待定系数法确定,式中每个分式叫做$\frac{P(x)}{Q(x)}$的部分分式.

证明 (略)可查阅有关代数教材.利用这个定理,有理函数的积分就容易计

算了,且由下面的例题可以看出:有理函数的积分是初等函数.

例 1 求$\int \frac{x^3+x+1}{x+1}\mathrm{d}x$.

解 由多项式除法,有

$$\frac{x^3+x+1}{x+1}=x^2-x+2-\frac{1}{x+1},$$

所以

$$\int \frac{x^3+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int (x^2-x+2)\mathrm{d}x-\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x-\ln\left|x+1\right|+C.$$

这说明当被积函数是假分式时,应把它分为一个多项式和一个真分式,分别积分.

例 2 求$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解 设

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1},$$

通分、去分母,得

$$x^2+1=A(x-1)^2+Bx+Dx(x-1).$$

令 $x=0$,得 $A=1$;令 $x=1$,得 $B=2$.将 $A=1$, $B=2$ 代入上式得

$$x^2+1=(1+D)x^2-Dx+1.$$

比较两边 x 同次幂的系数,得 $D=0$.于是

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int \frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{2}{x-1}+C.$$

例 3 求$\int \frac{4\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+4x}$.

解 因 $x^3+2x^2+4x=x(x^2+2x+4)$,设

$$\frac{4}{x^3+2x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+4}.$$

通分、去分母,得

$$4=(A+B)x^2+(2A+D)x+4A.$$

比较 x 同次幂的系数,得

$$A+B=0,\quad 2A+D=0,\quad 4A=4.$$

由此解得

$$A=1,\qquad B=-1,\qquad D=-2.$$

所以

$$\int \frac{4}{x^3+2x^2+4x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int \frac{x+2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+4}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+2x+4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

例 4 求 $\int \frac{5x-3}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

解 因 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 是二次质因式,被积函数不能再分解.设 $u=x-1$,则 $x=u+1$, $dx=du$,于是

$$\int \frac{5x-3}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int \frac{5u+2}{(u^2+1)^2}du = \frac{5}{2}\int \frac{d(u^2+1)}{(u^2+1)^2} + 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

$$= -\frac{5}{2}\frac{1}{u^2+1} + \frac{u}{u^2+1} + \arctan u + C$$

$$= \frac{2x-7}{2(x^2-2x+2)} + \arctan(x-1) + C.$$

计算中用到了 5.3 节例 9 的递推公式.

5.4.2 三角函数有理式的积分

对 $\sin x$, $\cos x$ 及常数只施行四则运算所构成的式子叫做三角函数有理式.它的积分,在无简单方法的情况下,可以通过半角变换(或称万能代换) $u=\tan\frac{x}{2}$,将积分化为 u 的有理函数的积分.这时

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du.$$

例 5 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

解 设 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(u+2+u^{-1})\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例 6 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin 2x}$.

解 设 $u=\tan x$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2}{1+u^2}}{5+4\frac{2u}{1+u^2}}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}u}{5u^2+8u+5}$$
$$=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{1}{3}\arctan\frac{u+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}+C$$
$$=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\tan x+\frac{4}{3}\right)+C.$$

5.4.3 简单无理函数的积分

当被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 的有理式时，采用变换 $u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，就可化为有理函数的积分.

例 7 求 $\int\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，即 $x=\frac{1}{u^2-1}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{-2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u$，故

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=-2\int\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$$
$$=-2u-\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2+C.$$

当被积函数是 x 与 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理式时，通常先将 ax^2+bx+c 配方，再用三角变换化为三角函数有理式的积分或直接利用积分公式计算.

例 8 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

解 因 $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}$，令 $x+1=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$dx = \sec^2 t\, dt$,于是

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\sec^2 t}{1+\sec t} dt = \int \frac{dt}{\cos t(1+\cos t)} = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right) dt$$

$$= \int \sec t\, dt - \frac{1}{2}\int \sec^2 \frac{t}{2} dt = \ln|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + C$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.$$

运算中用到

$$\tan\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{\sec t - 1}{\tan t}.$$

5.5 例　　题

例 1　求$\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$.

解　这是有理函数的积分,但分母是 100 次多项式,按有理函数积分法运算,是很麻烦的.如果作一个适当的变换,使分母为单项式,而分子为多项式,除一下,就化为和差的积分了.

令 $t=1-x$,即 $x=1-t$,则 $dx=-dt$,于是

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \frac{-(1-t)^2}{t^{100}} dt = \int (-t^{-100} + 2t^{-99} - t^{-98}) dt$$

$$= \frac{1}{99t^{99}} - \frac{1}{49t^{98}} + \frac{1}{97t^{97}} + C$$

$$= \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C.$$

例 2　求$\displaystyle\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} dx$.

解　先将被积函数作恒等变形,把它写成函数和的形式(注意分母的简化),然后再积分.因为

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} = \frac{-(1+\sin x-\cos x)+2}{1+\sin x-\cos x}$$

$$= -1 + \frac{2}{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= -1 + \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= -1 + \left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} .$$

所以

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\mathrm{d}x = \int(-1)\mathrm{d}x + \int\left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= -x + 2\int\left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}\right)\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}$$

$$= -x + 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + C$$

$$= -x + \ln\frac{1-\cos x}{1+\sin x} + C .$$

例 3 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

解 求不定积分时,需要考虑到被积函数及原函数的定义域.在前面几节中,为了集中精力研究积分方法,没有着重提出这一要求.从现在开始,提醒大家注意它.

这里被积函数的定义域是$\{x \mid x<-2$ 或 $x>0\}$.因为倒变换可以消除分母上的因式$(x+1)^3$,故令 $t=\dfrac{1}{x+1}$,即 $x=\dfrac{1}{t}-1$,则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \int\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{|t|}\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \begin{cases} -\displaystyle\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}, & 0<t<1, \\ \displaystyle\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}, & -1<t<0 . \end{cases}$$

由于

$$\int\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{t|t|}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} - \frac{1}{2}\arcsin t + C,$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x+1} + C, & x>0, \\ \dfrac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x} + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x+1} + C, & x<-2 . \end{cases}$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{当 } x\geq 1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x^2}, & \text{当 } x<1 \text{ 时},\end{cases}$ 求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 由于这个分段函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,所以原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C, & \text{当 } x\geq 1 \text{ 时},\\ \int\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}-\arctan x + C_1, & \text{当 } x<1 \text{ 时}.\end{cases}$$

由于原函数可导,所以在 $x=1$ 处必连续,于是有

$$1\cdot\ln 1 - 1 + C = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+C_1,$$

解得 $C_1 = C+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{2}$,故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}x\ln x - x + C, & \text{当 } x\geq 1 \text{ 时},\\ \dfrac{x}{2}-\arctan x+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{2}+C, & \text{当 } x>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

例 5 设 $P(x)$ 为 n 次多项式,证明

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]\mathrm{e}^{ax}+C.$$

证明 由分部积分公式得

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int P(x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a}\int P'(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $P'(x),P''(x),P^{(n)}(x)$ 都是多项式,$\int P^{(k)}(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x,(k=1,\cdots,n)$,都可反复利用这个积分等式.又因 $P^{(n+1)}(x)\equiv 0$,所以 $\int P^{(n+1)}(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=C$.故有

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]\mathrm{e}^{ax}+C. \qquad \square$$

这个结果把 $P(x)\mathrm{e}^{ax}$ 的积分运算转化为微分运算,是很方便的.

比如,求 $\int \mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+2)\,\mathrm{d}x$ 这里 $a=-1$, $P(x)=x^2-2x+2$, $P'(x)=2x-2$, $P''(x)=2$,故有

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2-2x+2}{-1}-\frac{2x-2}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^3}\right]\mathrm{e}^{-x}+C\\ &= -(x^2+2)\mathrm{e}^{-x}+C.\end{aligned}$$

多项式与正弦(或余弦)函数之积也有类似的性质,请读者自己推导.

例 6 确定系数 A, B,使下式成立:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2} = \frac{A\sin x}{a+b\cos x} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}.$$

解 所论等式等价于

$$\left(\frac{A\sin x}{a+b\cos x} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}\right)' = \frac{1}{(a+b\cos x)^2},$$

即

$$\frac{A(a+b\cos x)\cos x + Ab\sin^2 x}{(a+b\cos x)^2} + \frac{B}{a+b\cos x} = \frac{1}{(a+b\cos x)^2},$$

亦即

$$Ab+Ba+(Aa+Bb)\cos x = 1.$$

从而有

$$Ab+Ba=1,$$
$$Aa+Bb=0.$$

当 $a^2 \neq b^2$ 时,解得

$$A = -\frac{b}{a^2-b^2}, \quad B = \frac{a}{a^2-b^2}.$$

当 $a^2 = b^2$ 时,无解.

显然,掌握较多的不定积分公式会给不定积分运算带来方便,为此,人们把常用的积分公式汇集起来,按被积函数分类,列成表,叫做积分表,以便查阅.在计算机上,使用数学软件包 Mathematica 可以实现大部分初等函数的积分运算,但求不定积分的基本方法还必须掌握.

习 题 五

5.1

1.写出下列函数的原函数:

(1) $\sin 2x$; (2) a^{2x};

(3) $(ax+b)^n$ $(n \neq -1)$.

2.一条曲线通过点$(e^2, 3)$,且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数,求该曲线方程.

3.一物体由静止开始作直线运动,在时间 t(单位:s)的速度是 $3t^2$(单位:m/s),问

(1) 到 $t=3$ 时物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

4．求一曲线,使之通过点 $A(1,6)$和 $B(2,9)$,且其切线斜率与 x^3 成正比．

5．证明:当 $a<x<\pi$时,有 $\ln\tan\frac{x}{2}-\ln(\csc x-\cot x)=a$,并求该常数 a．

6．设 $f(x)$为可微函数,下列各式中是正确的．

(A) $d\int f(x)dx = f(x)$; (B) $\int f'(x)dx = f(x)$,

(C) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, (D) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)+C$．

7．应用基本积分表及分项积分法求下列不定积分:

(1) $\int(x^2-3x^{-0.7}+1)dx$; (2) $\int\sqrt[m]{x^n}\,dx$;

(3) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; (4) $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

(5) $\int 3^{2x}e^x dx$; (6) $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx$;

(7) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$; (8) $\int\tan^2 x\,dx$;

(9) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; (10) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$;

(11) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; (12) $\int\frac{1+x^2}{1-x^4}dx$．

8．试证

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx = Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

其中 $a^2+b^2\neq 0$, $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$．

5.2

1．用第一换元积分法计算下列积分:

(1) $\int\frac{dx}{a-x}$; (2) $\int\frac{1}{7-5x^2}dx$;

(3) $\int(ax+b)^{100}dx$; (4) $\int\frac{3-2x}{5x^2+7}dx$;

(5) $\int\frac{1}{x}\sin(\lg x)dx$; (6) $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$;

(7) $\int\frac{x}{a^3-x^3}dx$; (8) $\int\frac{\arctan x}{x(1+x)}dx$;

(9) $\int \dfrac{\arcsin x}{1 - x^2} \mathrm{d}x$; (10) $\int \dfrac{x - \arctan 2x}{1 + 4x^2} \mathrm{d}x$;

(11) $\int \dfrac{a^x}{1 + a^{2x}} \mathrm{d}x$; (12) $\int \dfrac{1}{2^x + 3} \mathrm{d}x$;

(13) $\int \dfrac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} \mathrm{d}x$; (14) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$;

(15) $\int \tan^3 \dfrac{x}{3} \sec^2 \dfrac{x}{3} \mathrm{d}x$; (16) $\int \sin^4 x \mathrm{d}x$;

(17) $\int \cos x \cos \dfrac{x}{2} \mathrm{d}x$; (18) $\int \sin 5x \sin 7x \mathrm{d}x$;

(19) $\int \sec^4 x \mathrm{d}x$; (20) $\int \tan^4 x \mathrm{d}x$;

(21) $\int \sec^3 x \tan x \mathrm{d}x$; (22) $\int \dfrac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} \mathrm{d}x$;

(23) $\int \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$; (24) $\int \dfrac{1 - \sin x}{x + \cos x} \mathrm{d}x$;

(25) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln \ln x)}$; (26) $\int \dfrac{\cot x}{\ln \sin x} \mathrm{d}x$;

(27) $\int 1 + 3\cos^2 x \sin 2x \mathrm{d}x$; (28) $\int \dfrac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \mathrm{d}x$
$(a^2 \neq b^2)$;

(29) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$; (30) $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} \mathrm{d}x$;

(31) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x - b + x - a} (a \neq b)$; (32) $\int \dfrac{x + 1}{3 + 4x - 4x^2} \mathrm{d}x$;

(33) $\int \dfrac{\mathrm{e}^x (1 + \mathrm{e}^x)}{1 - \mathrm{e}^{2x}} \mathrm{d}x$.

2 . **用第二换元积分法计算下列积分**:

(1) $\int \dfrac{x^2}{(x - 1)^{10}} \mathrm{d}x$; (2) $\int x(2x + 5)^{10} \mathrm{d}x$;

(3) $\int \dfrac{1}{1 + 1 + x} \mathrm{d}x$; (4) $\int \dfrac{x}{x - {}^3 x} \mathrm{d}x$;

(5) $\int \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$; (6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2 - a^2)^{3\ 2}}$;

(7) $\int \dfrac{x^2}{a^2 - x^2} \mathrm{d}x$; (8) $\int \dfrac{x^2 + a^2}{x^2} \mathrm{d}x$;

(9) $\int \dfrac{x^2 - a^2}{x} \mathrm{d}x$; (10) $\int \dfrac{1}{x \quad 1 - x^2} \mathrm{d}x$;

(11) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$;　　(12) $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$.

3. 若 $F(x)=\int \frac{x^3-a}{x-a}\mathrm{d}x$ 为 x 的多项式,求 a 及 $F(x)$.

5.3

1. 利用分部积分法计算下列积分:

(1) $\int 3^x\cos x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int x\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$;

(7) $\int x^3 e^{x^2}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int x2^{-x}\mathrm{d}x$;

(9) $\int (x^2-2x+5)e^{-x}\mathrm{d}x$;　　(10) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$;

(11) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x$;　　(12) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$;

(13) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;　　(14) $\int x\arcsin x\mathrm{d}x$;

(15) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;　　(16) $\int \sin x\ln(\tan x)\mathrm{d}x$;

(17) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$;　　(18) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

(19) $\int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\mathrm{d}x$;　　(20) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f'(e^x)=1+x$,求 $f(x)$.

3. 试证递推公式:

$$\int \sin^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x.$$

4. 设 $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$,其中 n 为大于 2 的自然数,试导出 I_n 的递推公式.

5. 已知 $(1+\sin x)\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

6. 当 $x\geq 0$ 时,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,已知 $f(x)F(x)=\sin^2(2x)$,且 $F(0)=1$,$F(x)\geq 0$,求函数 $f(x)$.

5.4

1. 计算下列有理函数的积分:

(1) $\int \frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{x+2}{x^2(x-1)}\mathrm{d}x$;　(4) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{x^4}{x^4-1}\mathrm{d}x$;　(6) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

2．**计算下列三角函数有理式的积分**：

(1) $\int \frac{1}{3+5\cos x}\mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{1}{\cos x+2\sin x+3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x$;　(4) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

3．**计算下列无理函数的积分**：

(1) $\int x \quad 3x+2\mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{x^{1\ 3}}{x^{3\ 2}+x^{4\ 3}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \quad \frac{1-x}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{x}$;　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{{}^{3}\quad (x-4)^4(x-2)^2}$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4x+4x^2}$;　(6) $\int \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x^2+2x}{x^2}\mathrm{d}x$.

5.5

1．**计算下列积分**：

(1) $\int \quad 1+\csc x\mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\cos \quad x-1}{x\sin^2 \quad x}\mathrm{d}x$;　(4) $\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x\ (x\neq 0)$;　(6) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{x}{\cos^2 x\tan^3 x}\mathrm{d}x$;　(10) $\int \frac{1}{{}^{4}\quad \sin^3 x\cos^5 x}\mathrm{d}x$;

(11) $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　(12) $\int \frac{\ln(x+\quad 1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$;　　(14) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{\cos x + \ln x}{x}\mathrm{d}x$;　　(16) $\int x^2 \quad e^{3x} - \quad 4 - 3x^3 \quad \mathrm{d}x$;

(17) $\int \frac{x\cos x + \mathrm{cof}^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;　　(18) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2\pi}} dx$;

(19) $\int \frac{x+\ln^4 x}{(x\ln x)^3}\mathrm{d}x$;　　(20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)}$ $(\alpha \neq \beta)$;

(21) $\int \tan(x+\alpha)\tan(x+\beta)\mathrm{d}x$ $(\alpha \neq \beta)$.

2 . **求下列两个函数在指定区间上的不定积分**:

(1) $f(x) = 1+\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$;　　(2) $f(x) = $

x^2, $-1 \leq x < 0$,

$\sin x$, $0 \leq x < 1$.

第六章　定　积　分

6.1　定积分的概念与性质

6.1.1　定积分的概念

定积分概念也是由大量的实际问题抽象出来的,现举两例.

1.曲边梯形的面积

求由连续曲线 $y=f(x)>0$ 及直线 $x=a$, $x=b$ 和 $y=0$ 所围成的曲边梯形的面积 S.

当 $f(x)\equiv h$(常数)时,由矩形面积公式知, $S=(b-a)h$,对 $f(x)$的一般情况,曲线上各点处高度是变化的,我们采取下列步骤来求面积 S.

1°分割:用分点

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

把区间$[a,b]$分为 n 个小区间,使每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上 $f(x)$变化较小,记 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$,用 ΔS_i 表示$[x_i,x_{i+1}]$上对应的窄曲边梯形的面积(见图 6.1).

2°作积:在每个区间$[x_i,x_{i+1}]$内任取一点 ξ_i,以 $f(\xi_i)$为高,Δx_i 为底的矩形面积近似代替 ΔS_i,有

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

3°求和:这些窄矩形面积之和可以作为曲边梯形面积 S 的近似值.

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

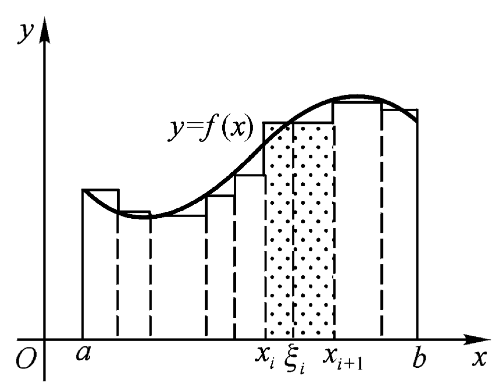


图 6.1

4°取极限:为得到 S 的精确值,让分割无限细密,设 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,令 $\lambda\to 0$(蕴含着 $n\to\infty$),取极限,极限值就是给定的图形的面积

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

可见,为了求曲边梯形的面积,需对 $f(x)$作如上的乘积和式的极限运算.

2.变速直线运动的路程

已知某物体作直线运动,其速度 $v=v(t)$,求该物体从 $t=a$ 到 $t=b$ 时间间隔内走过的路程 s.

我们知道,匀速直线运动的路程等于速度乘时间.现在遇到的是变速运动,在较大的时间范围内速度可能有较大的变化,但在很短的时间间隔内速度变化不会很大,所以在很短的时间范围内可以把变速运动近似地当作匀速运动处理.

1°分割:用分点

$$a=t_1<t_2<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n<t_{n+1}=b$$

把时间区间$[a,b]$分为 n 个小区间,记 $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$,Δs_i 表示在时间区间$[t_i,t_{i+1}]$内走过的路程.

2°作积:在每个区间$[t_i,t_{i+1}]$内任取一时刻 ξ_i,以 ξ_i 时的瞬时速度 $v(\xi_i)$代替$[t_i,t_{i+1}]$上各时刻的速度 $v(t)$,则有

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

3°求和:各个小的时间区间内走过的路程的近似值累加起来,可以作为时间区间$[a,b]$内走过路程的近似值.

$$s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

4°取极限:为得到路程 s 的精确值,让分割无限细密,设 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$,令 $\lambda\to0$,就得到

$$s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

同前一问题一样,最终归结为函数 $v(t)$在$[a,b]$上的上述乘积和式的极限运算.

类似的例子很多,比如变力作功的计算,电容器充电量的计算等等.

定义 6.1 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有定义,用分点

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

将$[a,b]$分为 n 个小区间$[x_i,x_{i+1}]$,记 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$,$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$.任取 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$,$i=1,2,\cdots,n$.如果乘积的和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(称为积分和)的极限

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在,且这个极限值与 x_i 和 ξ_i 的取法无关,则说 $f(x)$在$[a,b]$上可积,并称此极限值为 $f(x)$在区间$[a,b]$上由 a 到 b 的定积分,用记号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示之,

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

称 $f(x)$为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量, a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$为积分区间.称$\int$为积分号,它是由拉丁文“和”(Summa)字的字头 S 拉长而来的.

根据定积分定义,曲边梯形的面积等于曲边的纵坐标在底边区间上的定积分,即

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

从 $t = a$ 到 $t = b$ 物体走过的路程,等于速度函数在时间区间$[a, b]$上的定积分,即

$$s = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t .$$

总之,分布在某区间上的量的总量问题,当分布均匀时,只需用乘法(分布密度×区间的度量)便可解决,当分布非均匀时,就需要用定积分——分布密度函数在区间上的定积分来计算.

难怪有人说:定积分是常量数学中的乘法在变量数学中的发展.在定积分的记号内,还保留着乘积的痕迹 $f(x)\mathrm{d}x$,它来自第二步“作积”,它是局部量的线性近似.

所以,在 x 轴方向上的变力 $F(x)$作用下,物体从 $x = a$ 移到 $x = b$,变力作的功 W 等于变力在路程区间$[a, b]$上的定积分,即

$$W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x .$$

从时刻 t_1 到 t_2,电容器极板上增加的电荷量 Q 等于电流 $I(t)$在时间区间$[t_1, t_2]$上的定积分

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\mathrm{d}t .$$

定积分的几何意义:当 $f(x) > 0$ 时,由前边的讨论知$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示由曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b$ 及 $y = 0$ 围成的曲边梯形的面积;当 $f(x) < 0$ 时,由于 $f(\xi_i)\Delta x_i < 0$,所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示曲边梯形面积的负值.所以对一般函数 $f(x)$,定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义是:介于 x轴,曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b$ 之间的各部分图形面积的代数和——在 x 轴上方的图形面积与下方

的图形面积数之差(见图 6.2).

哪些函数可积呢?

定理 6.1 如果 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则 $f(x)$在$[a,b]$上必有界.

事实上,无界函数在任何一个分割下都至少有一个小区间$[x_j, x_{j+1}]$,在其上函数无界,这样$|f(\xi_j)\Delta x_j|$就可以任意大,所以积分和没有极限,即 $f(x)$在$[a,b]$上不可积.

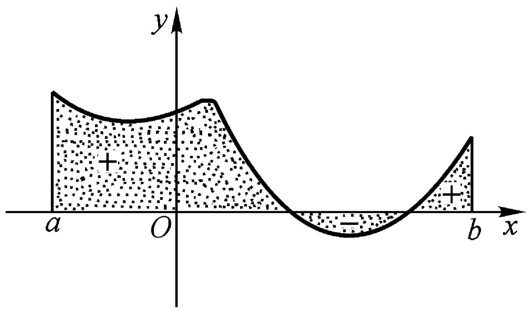


图 6.2

这个定理是说无界函数一定不可积.但有界函数也未见得可积,例如狄利克雷函数 $D(x)$,虽然是有界的,但在任何区间$[a,b]$上它都不是可积的.这是因为无论怎样分割区间$[a,b]$,只要选取 ξ_i 均为无理数,积分和就等于零,而选取 ξ_i 均为有理数时,积分和为 $b-a$,所以 $\lambda\to 0$时,积分和没有确定的极限.

定理 6.2 如果 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理 6.3 如果 $f(x)$在$[a,b]$上除有限个第一类间断点外处处连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明略(可参看理科数学分析教材).由定理 6.3 知,函数在区间$[a,b]$内个别点(属于第一类间断点)处无定义,不影响可积性.

6.1.2 定积分的简单性质

定积分是由被积函数与积分区间所确定的一个数

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i .$$

由此不难得到下列性质.在本段中,假定所涉及到的定积分都存在.

1°$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (有向性)

2°$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3°$\int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a$.

4°$\int_a^b [kf(x)+lg(x)]\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + l\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (k, l为常数).

这条性质称为定积分的线性性质.

5°$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$,其中 c 可以在区间$[a,b]$内,也可以在区间外,此性质称为区间可加性.

若 c 在区间 $[a, b]$ 内，只要将 c 取作一个分点，将积分和按 c 点分成两部分，再取极限就得到这条性质．若 c 在区间 $[a, b]$ 外，当 $c > b$ 时，可将 $[a, c]$ 上的积分用 b 分为两部分，当 $c < a$ 时，可将 $[c, b]$ 上的积分用 a 分为两部分．

6°若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \quad \text{(保序性)}$$

7°若在区间 $[a, b]$ 上，$m \leq f(x) \leq M$，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

利用性质 3°及 4°, 6°便可推得这个积分的估计式．

8° $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a < b)$.

由不等式 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ 和性质 6°不难推出这个结果．

9°定积分值与积分变量的记号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

10°定积分中值定理　设 $f(x) \in C[a, b]$，则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明　由 $f(x) \in C[a, b]$，知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，由性质 7°得

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

根据闭区间上连续函数介值定理知，存在一点 $\xi \in [a, b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \quad \square$$

这个定理告诉我们如何去掉积分号来表示积分值．

无论从几何上，还是从物理上，都容易理解 $f(\xi)$ 就是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值(见图 6.3)，所以上式也叫做平均值公式．求连续变量的平均值就要用到它．

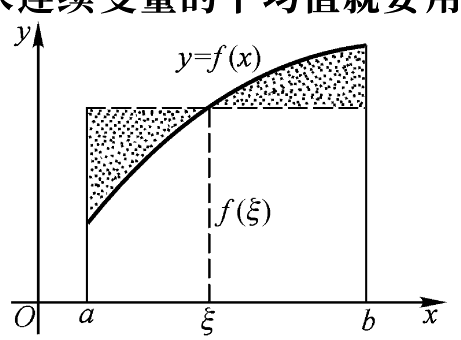


图 6.3

例 1　估计积分值 $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解　显然函数 e^{-x^2} 在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上是单调下降的，因此有

$$e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{-x^2} \leq 1, \qquad 当\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

由性质 7°有估计式

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{2}.$$

例 2　试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0.$$

证明　由积分中值定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} a = 0 \qquad (n \leq \xi_n \leq n+a).$$ □

例 3　设非负函数 $f(x)$ **连续，则** $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ **的充要条件是** $f(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$.

证明　(必要性)若不然，则必有 $x_0 \in (a, b)$，**使**

$$f(x_0) = \lambda > 0.$$

由此及 $f(x)$**的连续性知，存在** $\delta > 0$，**使得** $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$，**且当** $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$**时，有**

$$f(x) > \frac{\lambda}{2},$$

于是由性质 5°, 6°和 7°有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > \frac{\lambda}{2} 2\delta > 0,$$

这与假设矛盾.

(充分性)由定积分定义或性质 7°知它是显然的. □

△**例 4　设** $f(x), g(x) \in C[a, b]$，**证明柯西不等式**

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx \qquad (a < b).$$

证明　分两种情况:

1°**当** $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ **时，类似例 3 可知** $f(x) \equiv 0$，**不等式显然成立.**

2°**当** $\int_a^b f^2(x)\,dx \neq 0$ **时，对任意实数** λ **有**

$$[\lambda f(x) - g(x)]^2 \geq 0.$$

从 a **到** b **积分，由线性性质得**

$$\int_a^b [\lambda f(x) - g(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\ \lambda^2 - 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\ \lambda + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geq 0,$$

左边是 λ 的二次三项式 这个不等式成立的充要条件是判别式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leq 0. \quad \square$$

6.2 微积分学基本定理

由定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

计算定积分是非常困难的,甚至常常是不可能的.历史上,由于微分学的研究远远晚于积分学,所以定积分计算问题长期未能解决,积分学的发展很缓慢.直到 17 世纪最后 30 年,牛顿和莱布尼茨把两个貌似无关的微分问题和积分问题联系起来,建立了微积分学基本定理,才为定积分的计算提供了统一的简洁的方法.

以路程问题为例.如果已知某物体作直线运动,其速度为 $v(t)$,则在时间间隔$[a, b]$内走过的路程 $s_{[a,b]} = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.如果知道该物体运动的路程函数 $s(t)$,则 $s_{[a,b]} = s(b) - s(a)$,可见如果能从 $v(t)$ 求出 $s(t)$,定积分$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 运算就可化为减法$s(b) - s(a)$运算.这正是第五章已经解决了的微分运算的逆运算 —— 不定积分问题,这启示我们:定积分的计算有捷径可循.下面进行一般性的讨论.

设 $f(x)$在区间$[a, b]$上可积,则对任一点 $x\in[a, b]$,定积分

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

都有确定的值,所以这个定积分是上限 x 的函数,记为 $\Phi(x)$,即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad (a \leq x \leq b).$$

注意:这样定义的函数一定是$[a, b]$上的连续函数(留作练习),这个函数的几何意义是图6.4中阴影部分的面积函数.

定理 6.4 (微积分学基本定理第一部分) 设 $f(x)\in C[a, b]$,则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$[a, b]$上连续可微,且对上限的导数等于被积函数在上限处的值,即

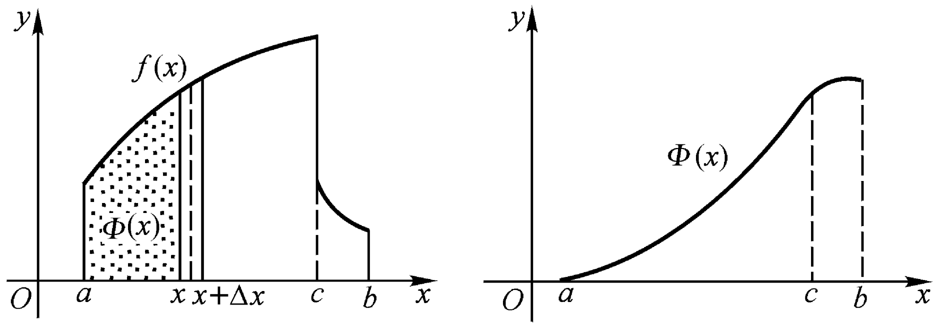


图 6.4

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\qquad(a\leq x\leq b).\tag{1}$$

证明　因为

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t,$$

所以由定积分性质 5°和积分中值定理有

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x,$$

其中 ξ 介于 x, $x+\Delta x$ 之间 .因 $f(x)$连续,故

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x).\quad ▯$$

这个定理指出积分运算和微分运算为逆运算的关系,它把微分和积分联结为一个有机的整体——微积分,所以它是微积分学基本定理 .

它还说明,连续函数 $f(x)$ 一定有原函数,函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就是$f(x)$的一个原函数(这就证明了定理 5.2) .由此可见,连续函数 $f(x)$ 的不定积分和定积分有如下关系:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.\tag{2}$$

它还说明:连续函数的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的被积表达式$f(x)\mathrm{d}x$等于变上限积分函数 $\Phi(x)$ 的微分,即 $f(x)\mathrm{d}x$ 是 $\Phi(x)$ 的增量 $\Delta\Phi$ 的线性主部 .将有关的实际问题化为定积分时,必须注意到这一点,第七章我们将用到它,人们习惯称 $f(x)\mathrm{d}x$ 为微元 .

例 1　$\left(\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\right)'=\mathrm{e}^{2x}$.

$$\left(\int_x^{\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right)'=\left(-\int_{\pi}^{x}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right)'=-\cos^2 x.$$

$$\left(\int_x^{x^2}\ln t\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_x^1\ln t\mathrm{d}t+\int_1^{x^2}\ln t\mathrm{d}t\right)' = -\ln x + 2x\ln x^2 = (4x-1)\ln x .$$

定理 6.5 (微积分学基本定理第二部分) 如果 $F(x)$是$[a, b]$区间上连续函数 $f(x)$的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) . \tag{3}$$

证明 因为 $F(x)$ 及 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 都是 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上的原函数,故有

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad \forall x\in[a, b],$$

C 是待定常数,即有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C, \quad \forall x \in [a, b] .$$

令 $x = a$,由上式得 $0 = F(a) + C$,于是 $C = -F(a)$,可见

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a), \quad \forall x \in [a, b] .$$

特别,令 $x = b$,上式就变为公式(3) .公式(3)也叫做牛顿 - 莱布尼茨[①]公式 . □

公式(3)表明了连续函数的定积分与不定积分之间的关系 .它把复杂的乘积和式的极限运算转化为被积函数的原函数在积分上下限 b, a 两点处函数值之差 .习惯用 $F(x)\Big|_a^b$ 表示 $F(b) - F(a)$,于是(3)式可写为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

例 2 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} .$

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2 .$$

例 3 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 此极限实为一积分和的极限,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$$

---

① 莱布尼茨和牛顿同时在前人工作的基础上建立了微积分学,莱布尼茨是作为哲学家和几何学家对待这一问题,而牛顿是从运动学的需要研究问题 .莱布尼茨是 17 世纪的全才,法学家、外交官、哲学家,最伟大的符号学者,终生奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法 .他多才多艺,研究工作涉及 41 个范畴 .

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 .$$

注意:公式(3)要求被积函数连续,如果遇到分段连续函数 $f(x)$ **的积分,应将积分区间** $[a,b]$ **分为几个子区间** $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_n,b]$, **使** $f(x)$ **在每个子区间上连续,根据定积分性质** 5°, **有**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

右端的每个积分都可用牛顿 - 莱布尼茨公式计算了 .

例 4 **设** $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 5, & 1< x\le 2,\end{cases}$ **求** $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x + \int_1^2 5\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^1 + 5x\Big|_1^2 = 1+5=6 .$$

例 5 $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}|\cos x-\sin x|\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}-2 .$$

被积函数带有绝对值号时,应将积分区间分开,去掉绝对值号,再积分 .

6 .3 定积分的计算

在不定积分的计算中有两个重要的方法——换元积分法和分部积分法,在定积分计算中用到它们时,由于我们的目的是求积分值,所以又有新的特点,下面来介绍它们 .

6 .3 .1 定积分的换元积分法

定理 6 .6 **设** $f(x)\in C[a,b]$, **对变换** $x=\varphi(t)$, **若有常数** α,β **满足:**

(i) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

(ii) **在** α,β **界定的区间上,** $a\le\varphi(t)\le b$;

(iii) **在** α,β **界定的区间上,** $\varphi(t)$ **有连续的导数,**

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t .$$

证明 **由于** $f(x)\in C[a,b]$, **所以上式左边的积分存在 .由** $f(x)\in C[a,b]$ **及条件**(ii), (iii)**知右边积分也存在 .设** $F(x)$ **是** $f(x)$ **的一个原函数,则由复合函数求导法知,** $F[\varphi(t)]$ **是** $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ **的原函数,于是由牛顿 - 莱布尼茨**

公式有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

比较两式知结论成立. □

这个定理说明用换元积分法计算定积分时,应把积分上、下限同时换为新的积分变量的上、下限,通过新的积分算出积分值 这样避免了求 $f(x)$的原函数,所以对变换 $x = \varphi(t)$也不要求它有反函数.

例 1 计算$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

解 令 $x = a\sin t$,当 $x = 0$ 时, $t = 0$,当 $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.于是 $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$,故

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\pi a^2.$$

这是半径为 a 的四分之一圆的面积.记住它,以后可直接应用.

例 2 计算$\int_0^4 \frac{x + 2}{\sqrt{2x + 1}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{2x + 1} = t$,即 $x = \frac{t^2 - 1}{2}$.当 $x = 0$ 时, $t = 1$,当 $x = 4$ 时, $t = 3$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$,故

$$\int_0^4 \frac{x + 2}{\sqrt{2x + 1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{\frac{t^2 - 1}{2} + 2}{t}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2 + 3)\,\mathrm{d}t = \frac{22}{3}.$$

作变换时,必须满足定理的条件,特别是通过 $t = \psi(x)$引入新变量 t 时,要验证它的反函数是否满足定理的条件.换元积分还可以证明一些定积分等式,通常由被积函数的变化和积分区间变化来确定变换.下面几个例子也可作定积分公式使用.

△**例 3** 设 $f(x)$在区间$[-a, a]$上可积,则

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x.$$

证明 (仅在 $f(x) \in C[-a, a]$情况下证明,一般可由定积分定义推证.)由于

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

对积分$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$作变换,令 $x=-t$,则

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t,$$

故有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x. \quad \square$$

由此例可知:

(1) 若 $f(x)$为可积的偶函数,则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若 $f(x)$为可积的奇函数,则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

利用这一结果计算:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi/4}\left(\frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi/4}\cos x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2} x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1).$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^5+x^4-x^3-x^2-2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}\frac{x^4-x^2-2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}(x^2-2)\mathrm{d}x=-\frac{8}{3}.$$

△**例 4** 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上以 T为周期的分段连续的有界函数,则对任何实数 a,都有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由于

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x,$$

对最后的积分用换元法,令 $x=t+T$,有

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(t+T)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t,$$

代入前式得

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x. \quad \square$$

这一结果说明,可积的周期函数在任何一个长度为一个周期的区间上的积分值都是相等的.

△**例 5** 设 $f(x)\in C[0,1]$,试证:

(1)$\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证明

(1) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\mathrm{d}t$.

(2) **留给读者** . ▯

利用这一结果计算:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

6.3.2 定积分的分部积分法

定理 6.7 设 $u(x)$, $v(x)$在区间$[a, b]$上有连续的导数,则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

由不定积分的分部积分法及牛顿 - 莱布尼茨公式,这是显然的 .

例 6 $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\mathrm{d}x = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\mathrm{d}x$

$$= 2x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x = \pi + 2\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

例 7 $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

△**例 8** **试证对任何大于** 1 **的自然数** n,**有**

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

证明 **由例** 5(1)**知上述两个积分相等** .

当 $n\geq 2$ **时,有**

$$I_n = -\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x = -\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

于是得到一个递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\qquad(n\geq 2).$$

又因为

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=1.$$

所以,当 n 为偶数时,

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}.$$

当 n 为大于 1 的奇数时,

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}.\quad \square$$

利用这个公式可直接计算出:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{10}x\mathrm{d}x=\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}=\frac{63}{512}\pi.$$

6.4 反常积分

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 受到两个限制,其一,积分区间 $[a,b]$ 是有限区间;其二,被积函数在积分区间上是有界函数.许多实际问题不满足这两个要求,为此需要引进新概念,解决新问题.

6.4.1 无穷区间上的反常积分

一个固定的点电荷 $+q$ 产生的电场,对场内其他电荷有作用力,由库仑定律知,距 q 为 r 的单位正电荷受到的电场力,其方向与径向一致指向外,大小为

$$F=\frac{kq}{r^2}\qquad (k\text{ 是常数}).$$

当单位正电荷从 $r=a$ 沿径向移到 $r=b$ 处时,电场力所作的功称为该电场在这两点处的电位差。

单位正电荷从 $r=a$ 移到无穷远时,电场力所需作的功称为该电场在点 a 处的电位.

例 1 试求 a,b 两点的电位差及 a 点的电位.

解 a,b 两点的电位差

$$V_{[a,b]}=\int_a^b\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

令 $b\to+\infty$,即得 a 点处的电位

$$V_a=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=\lim_{b\to+\infty}kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{kq}{a}.$$

这里计算了一个上限无限增大的定积分的极限,类似的实例很多,如一些无

界域的面积，第二宇宙速度问题，电容器放电问题等等.引入下面的反常积分概念.

定义 6.2 设对任何大于 a 的实数 b，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上均可积，则称极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分(或广义积分)，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当这个极限存在时，则说反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛(存在)，否则说它发散.

类似地，定义反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 c 为任一实常数.反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛.

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的原函数，计算反常积分时，为书写方便，记

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x),\quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x),$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

这时反常积分的收敛与发散取决于 $F(+\infty)$ 和 $F(-\infty)$ 是否存在.

例 2

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-\infty}^0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

这三个反常积分都收敛.如果注意到第一个反常积分收敛和它的积分值，以及被积函数为偶函数，立刻就会得到后两个反常积分值.

△**例 3** 试证反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散．

证明 当 $p=1$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty .$$

当 $p\neq 1$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } p<1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{当 } p>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

故当 $p>1$ 时，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}$ 收敛，当 $p\leq 1$ 时，它发散(图6.5)． □

例 4 判断 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arctan x}{1+|x|}\mathrm{d}x$ 的敛散性．

解 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，

$$\frac{\arctan x}{1+|x|}\geq\frac{\frac{\pi}{4}}{2x}=\frac{\pi}{8}\frac{1}{x}>0 .$$

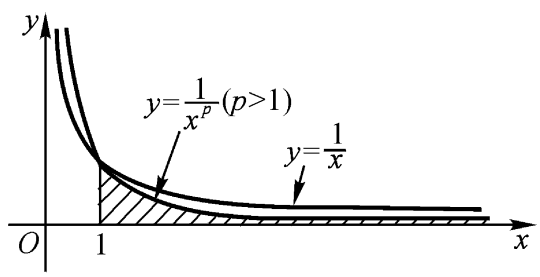


图 6.5

由例 3 知反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$ 发散，所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+|x|}\mathrm{d}x$$

发散(为什么？你能由此得到一个判定某类无穷区间上反常积分敛散性的方法吗？)，从而反常积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arctan x}{1+|x|}\mathrm{d}x$$

发散．

奇函数在 $(-\infty,\infty)$ 上的反常积分或者发散，或者收敛到零．

6.4.2 无界函数的反常积分

定义 6.3 若" $\varepsilon>0$，$f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积，在 a 点右邻域内 $f(x)$ 无界(称 a 为瑕点)，称极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

为无界函数 $f(x)$ 在$(a,b]$ 上的反常积分(或瑕积分),记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x .$$

当这个极限存在时,则说反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则说它发散 .

同样,若 " $\varepsilon>0$, $f(x)$在$[a,b-\varepsilon]$上可积,在 b 的左邻域内 $f(x)$无界(称 b 为瑕点),定义反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x .$$

若 " $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, $f(x)$在$[a,d-\varepsilon_1]$和$[d+\varepsilon_2,b]$上都可积,在点 d 的邻域内 $f(x)$无界,定义反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{d-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{d+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x .$$

这里,只有两个反常积分$\int_a^d f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_d^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 才是收敛的 .

例 5 有一热电子 e 从原点处的阴极发出(图 6.6),射向 $x=b$ 处的板极,已知飞行速度 v 与飞过的距离的平方根成正比,即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k\quad x,$$

其中 k 为常数,求热电子 e 从阴极到板极飞行的时间 T.

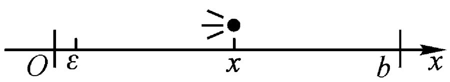


图 6.6

解 时间 t 花费在从 $x=0$ 到 $x=b$ 的路途上,在小路段$[x,x+\mathrm{d}x]$上,用去时间

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{k\quad x}\mathrm{d}x .$$

所以电子 e 从 $x=0$ 到 $x=b$ 飞行时间

$$T = \int_0^b \frac{1}{k\quad x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^b \frac{\mathrm{d}x}{k\quad x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{k}\quad x\Big|_\varepsilon^b = \frac{2}{k}\quad b .$$

当 $f(x)\in C[a,b)$, b 为瑕点, $F(x)$ 是 $f(x)$的原函数时,计算时为方便计,常把瑕积分写为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a) .$$

如果 $f(x)\in C(a,b]$, a 为瑕点,则记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+) .$$

如果瑕点在积分区间内部,通常要用瑕点将区间分开,分别讨论各子区间上的瑕积分,只要有一个瑕积分发散,则整个瑕积分发散 . 但如果 $f(x)$的原函数 $F(x)\in C[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (\text{为什么?}) .$$

例 6 $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a^-} = \frac{\pi}{2}$.

△**例 7** 试证积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 当 $q < 1$ 时收敛,当 $q \geq 1$ 时发散 .

证明 当 $q=1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_{0^+}^1 = +\infty .$$

当 $q\neq 1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-q}x^{1-q}\Big|_{0^+}^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{当 } q < 1 \text{ 时}, \\ +\infty, & \text{当 } q > 1 \text{ 时} . \end{cases}$$

故当 $q < 1$ 时,反常积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛,当 $q \geq 1$ 时发散 . □

例 8 判定$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解 当 $0 < x\leq 1$ 时

$$0 < \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x},$$

由例 7 知$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,根据反常积分定义知

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛,从而$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛(为什么) .

例 9 判定$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解 由于$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散,所以$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散 .

如果误认为$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是定积分,则$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0$.或认为$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = 0$,得到的结果都是错误的 !

例 10 计算$\int_0^{3a}\frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{2/3}}$.

解 $x=a$ 是被积函数在积分区间内的第二类间断点,但原函数 $3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}$ 在$[0,3a]$上连续,故

$$\int_0^{3a}\frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{2/3}}=3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{3a}=9a^{\frac{2}{3}}.$$

6.5 例 题

例 1 已知 $f(x)=x+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

解 因为定积分是个数,设$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=A$,则

$$f(x)=x+A.$$

因此

$$A=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+Ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{A}{2}.$$

解得 $A=\frac{2}{3}$,故

$$f(x)=x+\frac{2}{3}.$$

例 2 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$,且 $f(x+2\pi)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$,计算

$$\int_a^{a+2\pi}\sin^4 x(1+f(x))\mathrm{d}x.$$

解 由 6.3 的例 3,例 4,例 8 的公式,有

$$\int_a^{a+2\pi}\sin^4 x(1+f(x))\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x(1+f(x))\mathrm{d}x.$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\mathrm{d}x=4\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

例 3 计算$\int_0^{\pi/4}\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

解 作变换,令 $t=a-x$,容易证明有公式

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x.$$

利用这一公式

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = (\tan x - x)\Big|_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$