

高等学校教材

工科数学分析

下册

第二版

张宗达 主编

张宗达 刘锐 王勇 盖云英 唐余勇 编

高等教育出版社

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010) 82086060

传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010) 64054588

策	划	李艳馥
编	辑	高尚华
封面设计		于文燕
责任绘图		吴文信
版式设计		胡志萍
责任校对		刘 莉
责任印制		

内容简介

《工科数学分析(第二版)》是在第一版的基础上修改而成的,分上、下两册。下册共六章:多元函数微分学,多元函数积分学,第二型曲线积分和第二型曲面积分、向量场,无穷级数,复变函数初步,微分几何基础知识。每章后有供自学的综合性例题,并以附录形式开了一些新知识窗口。

本书可作为工科大学一年级新生数学课教材,也可作为准备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析 .下册/ 张宗达主编 .—2 版 .—北京:
高等教育出版社,2003 .6
ISBN 7 - 04 - 011887 - 4

工 ... 张 ... 数学分析 - 高等学校 - 教
材 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025212 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http:// www .hep .edu .cn
总 机	010 - 82028899		http:// www .hep .com .cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷			
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2001 年 6 月第 1 版
印 张	20 .75		年 月第 版
字 数	390 000	印 次	年 月第 次印刷
		定 价	21 .90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第九章 多元函数微分学	1
9.1 多元函数的基本概念	1
9.2 偏导数与高阶偏导数	7
9.3 全微分	11
9.4 复合函数求导法	16
9.5 隐函数求导法	21
9.6 偏导数的几何应用	26
9.7 多元函数的一阶泰勒公式与极值	31
9.8 方向导数与梯度	38
9.9 例题	42
习题九	46
第十章 多元函数积分学	56
10.1 黎曼积分	56
10.2 二重积分的计算	60
10.3 三重积分的计算	70
10.4 第一型曲线积分的计算	79
10.5 第一型曲面积分的计算	82
10.6 黎曼积分的应用举例	85
10.7 例题	90
习题十	95
附录 重积分的变量变换	105
第十一章 第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场	111
11.1 向量场	111
11.2 第二型曲线积分	113
11.3 格林公式、平面流速场的环量与旋度	120
11.4 平面曲线积分与路径无关的条件、保守场	125
11.5 第二型曲面积分	134
11.6 高斯公式、通量与散度	140
11.7 斯托克斯公式、环量与旋度	146
11.8 例题	152
习题十一	157

第十二章	无穷级数	169
12.1	无穷级数的敛散性	169
12.2	正项级数敛散性判别法	176
12.3	任意项级数、绝对收敛	184
12.4	反常积分敛散性判别法、函数	188
12.5	函数项级数、一致收敛	193
12.6	幂级数	200
12.7	函数的幂级数展开	207
12.8	幂级数的应用举例	218
12.9	傅里叶级数	222
12.10	例题	236
	习题十二	241
	附录 幂级数的收敛半径	253
第十三章	复变函数初步	254
13.1	复数与复变函数	254
13.2	解析函数	258
13.3	复变函数的积分	265
13.4	解析函数的级数表示	271
13.5	解析函数的应用举例	276
	习题十三	278
第十四章	微分几何基础知识	281
14.1	向量分析概述	281
14.2	曲线论的基本知识	283
14.3	曲面论的第一基本形式	289
14.4	曲面论的第二基本形式	292
14.5	曲面上一点的近旁结构、短程线	297
	习题十四	299
	习题答案	302
	索引	323

第九章 多元函数微分学

前几章研究了仅依赖一个自变量的函数——一元函数,由于客观上许多事情是受多方面因素制约的,所以在数量关系上必须研究依赖多个自变量的函数,即多元函数.多元函数微积分学的内容和方法都与一元函数的内容和方法紧密相关,但由于变元的增加,问题更加复杂多样.在学习时,应注意与一元函数有关内容的对比,找出异同.这样不但有利于理解和掌握多元函数的知识,而且复习巩固了一元函数的知识.本章介绍多元函数的基本概念及其微分学.

9.1 多元函数的基本概念

9.1.1 预备知识

本段介绍 n 维空间及点集的术语和概念.

在空间引入坐标系 $Oxyz$ 后,空间的点 P 和三个实数构成的有序数组 (x, y, z) 一一对应,这样数组 (x, y, z) 就等同于点 P ,所有的三元有序数组 (x, y, z) 就表示空间所有点的集合,即整个空间.推而广之,有下面的定义.

定义 9.1 称 n 元有序实数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) ($x_i \in \mathbf{R}$) 为一个 n 维点 (或 n 维向量),所有 n 维点构成的集合叫做 n 维空间,记为 \mathbf{R}^n .点 $(0, 0, \dots, 0)$ 称为 n 维空间的原点.

所有实数构成一维空间 \mathbf{R} ,几何上就是数轴;所有实数偶 (x, y) 的集合为二维空间 \mathbf{R}^2 ,几何上是坐标平面;日常说的空间就是三维空间. $n > 3$ 时,空间 \mathbf{R}^n 没有直观的几何形象,但它们客观上是存在的,比如,我们生活的“时—空”空间是四维空间.我们常常可以借助于二维、三维空间来想像三维以上的空间.

定义 9.2 \mathbf{R}^n 中任意两点 $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 间的距离 (A, B) 规定为

$$(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

这与 n 维向量的模 (范数) 的定义是一致的.线性代数已经证明,若 P_1, P_2, P_3 是三个 n 维点,则有“三角不等式”:

$$(P_1, P_3) \leq (P_1, P_2) + (P_2, P_3).$$

定义 9.3 设 $P_0 \in \mathbf{R}^n$, 常数 $\rho > 0$, 则称 \mathbf{R}^n 的子集

$$\{P \mid (P, P_0) < \rho, P \in \mathbf{R}^n\}$$

为点 P_0 的邻域, 记为 $U(P_0)$.

$U(P_0)$ 是以 P_0 为中心, ρ 为半径的“ n 维球”内部所有点的集合. 当我们不关心半径 ρ 的大小时, 就把它称为 P_0 的邻域, 记为 $U(P_0)$.

定义 9.4 对集合 $E \subset \mathbf{R}^n$, 点 $P_0 \in \mathbf{R}^n$, 若 $\forall \rho > 0$, 使 $U(P_0) \subset E$, 则称 P_0 为 E 的内点. 若 P_0 的任何邻域内部有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点 (P_0 可以属于 E , 也可以不属于 E), 则称 P_0 为 E 的边界点. E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记为 ∂E (图 9.1).

定义 9.5 若集合 E 的每个点都是它的内点, 则说 E 是开集. 若 E 中任何两点都有 E 中的曲线 (\mathbf{R}^n 中的曲线是满足单参数 t 的连续函数 $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 的点集) 连接, 则说 E 是 (线) 连通集. 连通开集称为区域或开区域. 区域和它的边界的并集叫做闭区域.

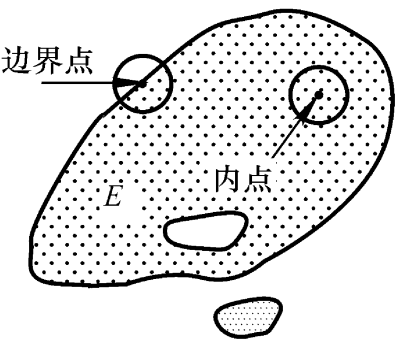


图 9.1

定义 9.6 若 $\exists \rho > 0$, 使集合 $E \subset U(O)$, 其中 O 是 \mathbf{R}^n 中的原点 $(0, 0, \dots, 0)$, 则说 E 有界, 否则说 E 无界.

例如, $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$ 是 \mathbf{R}^2 中无界区域, 而集合 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 是 \mathbf{R}^3 中有界闭区域.

9.1.2 多元函数

现实生活中, 经常遇到依赖两个或两个以上变量的函数, 举例如下.

例 1 一定量的某种理想气体的压强 p , 体积 V 和绝对温度 T 之间有依赖关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数.

例 2 长方体的体积 V , 由它的长 x , 宽 y 和高 z 确定:

$$V = xyz \quad (x, y, z > 0).$$

例 3 冷却过程中的铸件, 温度 θ 与铸件内点的位置 x, y, z 和时间 t , 以及外界环境温度 θ_0 , 空气流动的速度 v 有关:

$$\theta = f(t, x, y, z, \theta_0, v).$$

定义 9.7 设 D 是 Oxy 平面的点集, 若变量 z 与 D 中的变量 x, y 之间有一

除这种“球”型邻域外, 有时, 还用到所谓的“长方”型邻域. 设 $P_0(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. 常数 $\delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 称点集 $\{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i - a_i| < \delta_i, i = 1, \dots, n\}$ 为点 P_0 的“长方”型邻域. 显然在“球”型邻域内可以作出“长方”型邻域, 在长方型邻域内也可作出球型邻域.

个依赖关系,使得在 D 内每取定一个点 $P(x, y)$ 时,按着这个关系有确定的 z 值与之对应,则说 z 是 x, y 的二元(点)函数,记为

$$z = f(x, y) \quad (\text{或 } z = f(P)).$$

二元函数 $z = f(x, y)$ 就是 Oxy 平面点集 D 到 z 轴上的映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$. 称 x, y 为自变量,也称 z 为因变量,点集 D 称为该函数的定义域,数集

$$\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

称为该函数的值域.

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的函数值记为 $f(x_0, y_0)$ 或 $f(P_0)$.

类似地可以定义 n 元函数.二元及二元以上的函数统称多元函数.

关于多元函数的定义域,实际问题中的函数,定义域由实际意义确定.纯数学地研究函数时,定义域就是在实数范围内考虑问题时,能够得到确定函数值的那些点所确定的点集.

例 4 函数 $z = \ln(x + y)$ 的定义域是 $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$, 在平面直角坐标系下是直线 $x + y = 0$ 右上方的半平面(不含该直线),是无界开区域(图 9.2).

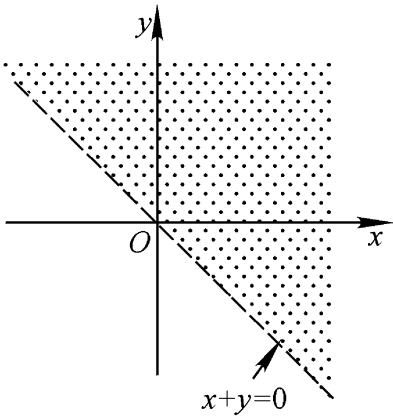


图 9.2

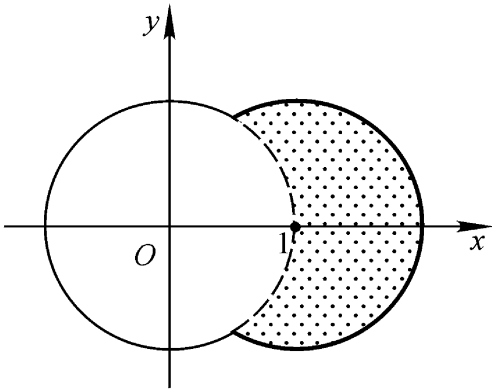


图 9.3

例 5 函数 $z = \sqrt{2x - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 的定义域是 $\{(x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \text{ 且 } x^2 + y^2 \geq 1\}$, 图 9.3 中有阴影的月牙形有界点集.

例 6 函数 $u = \sqrt{z - x^2 - y^2} + \arcsin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 的定义域是 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \text{ 且 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 在空间直角坐标系下是以原点为球心,1 为半径的球体内,旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上方的部分,是有界闭区域(图 9.4).

我们经常接触到的平面区域 D 上的二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

的图形是三维空间中的曲面(图 9.5).

例如,由空间解析几何知,函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的图形是以原点为球心, R 为半径的上半球面.函数 $z = x^2 + y^2$ 的图形是旋转抛物面.函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的

图形是圆锥面.函数 $z = xy$ 的图形是双曲抛物面.二元隐函数 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的图形是平面.

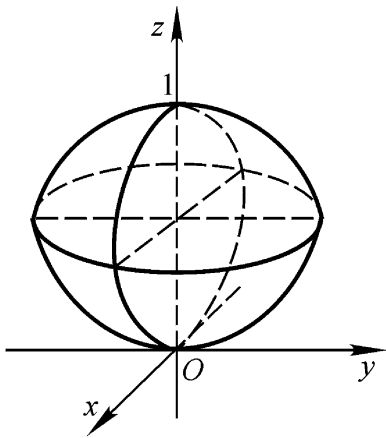


图 9.4

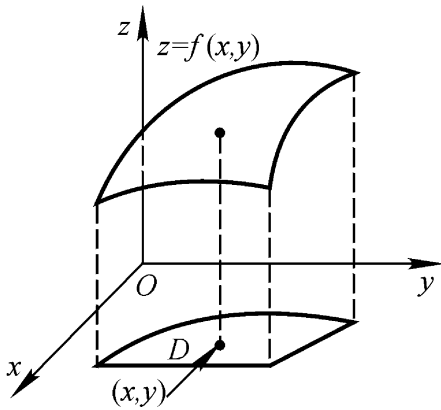


图 9.5

最后指出,从一元函数到二元函数,在内容和方法上都会出现一些实质性的差别,而多元函数之间差异不大,因此讨论多元函数时,将以二元函数为主.

9.1.3 多元函数的极限与连续

对集合 $E \subset \mathbf{R}^n$, 点 $P_0 \in \mathbf{R}^n$, 如果 P_0 的任何邻域中都有无穷多个点属于 E , 则称 P_0 为集合 E 的一个聚点. 聚点本身可能属于 E , 也可能不属于 E . 集合的内点必是聚点, 边界点可能是聚点, 也可能不是.

定义 9.8 设 $u = f(P)$, $P \in D$, P_0 是 D 的聚点, A 是常数. 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得当 $[P \in D, \text{ 且 } 0 < \rho(P, P_0) < \delta]$ 时, 恒有

$$|f(P) - A| < \epsilon,$$

则说 $P \rightarrow P_0$ 时, 函数 $f(P)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

当 P 是二维点 (x, y) 时, $P_0(x_0, y_0)$, 上述极限记为

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}} f(x,y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A.$$

多元函数极限的含意是: 只要点 $P(P \in D)$ 到 P_0 的距离 $\rho(P, P_0) \rightarrow 0$, 就有 $f(P) \rightarrow A$.

例 7 试证 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0$.

证明 因为

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} - 0 \right| = (x^2 + y^2) \left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq x^2 + y^2 = \rho^2,$$

所以, $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$, 则当 $0 < \rho < \delta$ ($xy \neq 0$) 时, 恒有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} - 0 \right| < ,$$

故

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0 .$$

务必注意,虽然多元函数的极限与一元函数的极限的定义相似,但它复杂得多.一元函数在某点处极限存在的充要条件是左右极限存在且相等,而多元函数必须是点 P 在定义域内以任何可能的方式和途径趋于 P_0 时, $f(P)$ 都有极限,且相等.因此:

1. 如果点 P 以两种不同的方式或途径趋于 P_0 时, $f(P)$ 趋向不同的值,则可断定 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 不存在.
2. 已知 P 以几种方式和途径趋于 P_0 时, $f(P)$ 趋于同一个数,这时还不能断定 $f(P)$ 有极限.
3. 如果已知 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 存在,则可取一特殊途径来求极限值.

例 8 讨论极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 的存在性.

解 当点 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^3}{x^2 + k^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2} = 0 .$$

又沿直线 $x = 0$, 也有

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 .$$

这说明沿任何直线趋于原点时, $f(x, y)$ 都趋于零. 尽管如此, 还不能说 $f(x, y)$ 以零为极限, 因为点 (x, y) 趋于 $(0, 0)$ 的方式还有无穷多种. 请看, 当点 (x, y) 沿抛物线 $x = y^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时

$$\lim_{(y^2,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} .$$

故例 8 中的极限不存在.

函数 $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 是 x 的奇函数, 其图形

如图 9.6, 关于 y 轴对称, 又是 y 的偶函数, 图形关于坐标面 $y = 0$ 对称.

一元函数求极限的四则运算法则、夹挤准则都可以推广到多元函数极限运算上来, 惟一性, 极限点附近的保序性和有界性也都成立.

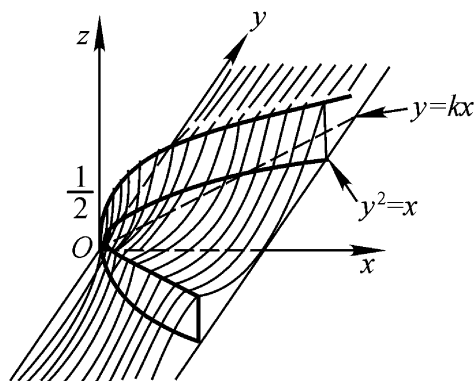


图 9.6

例 9 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} = a \quad (a \neq 0).$

例 10 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2 - y^4}.$

解 作变换令 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 化为 $\theta \rightarrow 0$, 又 $\left| \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta}{1 - \sin^4 \theta} \right| < \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} \quad (0 < \theta < 1)$, 注意 $\frac{2}{1 - \sin^2 \theta}$ 与 θ 无关, 且 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = 0$, 故由夹挤准则知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2 - y^4} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta}{1 - \sin^4 \theta} = 0.$$

顺便指出: $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的过程中, x 和 y 是作为点的坐标同时趋于 x_0 和 y_0 的, 不能把它分开先后. 如

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

与例 8 的极限不是一回事.

定义 9.9 设函数 $f(P)$ 的定义域为 D , P_0 是 D 的聚点. 如果 $P_0 \in D$, 且

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

则说函数 $f(P)$ 在点 P_0 处连续, 并称 P_0 是 $f(P)$ 的连续点. 否则称 P_0 是 $f(P)$ 的间断点.

若记 $u = f(P) - f(P_0)$, $\rho = (P, P_0)$, 函数 $u = f(P)$ 在 P_0 处连续等价于

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u = 0.$$

如果函数 $f(P)$ 在区域 E 的每一点处都连续, 则说函数 $f(P)$ 在区域 E 上连续, 记为 $f(P) \in C(E)$.

例如, 函数 $f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ 在 (x, y) 平面上处处连续. 函数 $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 仅在原点 $(0, 0)$ 处不连续. 函数 $f(x, y) = \sin \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$ 在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上处处间断.

在空间直角坐标系下, 平面区域 E 上的二元连续函数 $z = f(x, y)$ 的图形是在 E 上张开的一张“无孔无缝”的连续曲面.

同一元函数一样, 多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍是连续的. 每个自变量的基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合, 由一个式子表达的函数称为多元初等函数, 多元初等函数在它们定义域的内点处均连续.

有界闭区域上的多元连续函数有如下重要性质:

1. [最大最小值存在性] 在有界闭区域上连续的函数必有界, 且有最大值和

最小值 .

2. [介值存在性]在有界闭区域上连续的函数必能取到介于最大值与最小值之间的任何值 .

9.2 偏导数与高阶偏导数

9.2.1 偏导数

工作中,常常需要了解一个受多种因素制约的量,在其他因素固定不变的情况下,随一种因素变化的变化率问题.这促使人们研究多元函数在其他自变量固定不变时,函数随一个自变量变化的变化率——偏导数问题.

定义 9.10 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 固定 $y = y_0$, 给 x_0 以增量 Δx , 称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

为 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏增量, 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

存在, 则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\Delta z}{\Delta x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad f_x(x_0, y_0).$$

同样定义 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数为

$$\left. \frac{\Delta z}{\Delta y} \right|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

如果在区域 E 内每一点 (x, y) 处函数 $z = f(x, y)$ 关于 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是 E 内点 (x, y) 的函数, 称之为 $z = f(x, y)$ 关于 x 的偏导函数, 简称对 x 的偏导数, 记为

$$z_x, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad \frac{f(x, y)}{x} \quad \text{或} \quad f_x(x, y).$$

同样, $z = f(x, y)$ 对 y 的偏导(函)数, 记为

$$z_y, \quad \frac{\Delta z}{\Delta y}, \quad \frac{f(x, y)}{y} \quad \text{或} \quad f_y(x, y).$$

偏导函数 $f_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的值, 就是函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$.

一元函数 $f(x)$ 的导数, 可用“ $'$ ”表示. 多元函数 $f(x, y)$ 的偏导数, 可通过下标标明对哪个自变量求偏导, 可以省略“ $'$ ”, 如 $f_x(x_0, y_0)$ 表示 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数.

对一般多元函数可以类似地定义偏导数. 如函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处关于 x 的偏导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} [f(x_0 + x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)].$$

由偏导数的定义知, 多元函数对某个自变量的偏导数, 就是把其他自变量视为常量, 考查函数对这个自变量变化的变化率. 所以利用一元函数的导数公式与法则, 就可计算偏导数了.

例 1 求 $z = x^2 y + \sin y$ 在点 $(1, 0)$ 处的两个偏导数.

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \cos y,$$

故

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 2xy \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,0)} = (x^2 + \cos y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 2.$$

例 2 求 $f(x, y, z) = (z - a^{xy}) \sin \ln x^2$ 在点 $(1, 0, 2)$ 处的三个偏导数.

解 求某一点的偏导数时, 可以先将其他变量的值代入, 变为一元函数, 再求导, 常常较简便.

$$f_x(1, 0, 2) = [\sin \ln x^2] \Big|_{x=1} = \frac{2}{x} \cos \ln x^2 \Big|_{x=1} = 2,$$

$$f_y(1, 0, 2) = 0 \Big|_{y=0} = 0, \quad f_z(1, 0, 2) = 0 \Big|_{z=2} = 0.$$

例 3 求 $z = x^y (x > 0)$ 的偏导数.

解 $z_x = yx^{y-1}, \quad z_y = x^y \ln x.$

例 4 已知电阻 R_1, R_2, R_3 并联的等效电阻为

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}},$$

若 $R_1 > R_2 > R_3 > 0$, 问改变三个电阻中的哪一个, 对等效电阻 R 影响最大.

解 因为

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{R^2}{R_3^2},$$

R_3 最小, 所以 $\frac{\partial R}{\partial R_3}$ 最大. 故改变 R_3 对 R 影响最大.

例 5 求二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数.

解 这里必须由偏导数定义计算:

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0+x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

两个偏导数都存在, 回顾 9.1 节例 8 知, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时这个函数无极限, 所以在点 $(0, 0)$ 处也不连续.

一元函数可导必连续. 但对多元函数, 偏导数都存在, 函数未必有极限, 更保证不了连续性.

为了一般地说明这一问题, 先介绍偏导数的几何意义.

因为偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数, 所以几何上 $f_x(x_0, y_0)$ 表示曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线 $z = f(x, y_0)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率. 同样 $f_y(x_0, y_0)$ 表示曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $x = x_0$ 的交线 $z = f(x_0, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率 (见图 9.7).

因为偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 仅与函数 $z = f(x, y)$ 在 $y = y_0$ 上的值有关, $f_y(x_0, y_0)$ 仅与 $z = f(x, y)$ 在 $x = x_0$ 上的值有关, 与 (x_0, y_0) 邻域内其他点上的函数值无关, 所以偏导数的存在不能保证函数有极限.

例 6 由理想气体的状态方程 $PV = RT$, 推证热力学中的公式

$$\frac{P}{V} \cdot \frac{V}{T} \cdot \frac{T}{P} = -1.$$

证 因为

$$P = \frac{RT}{V}, \quad V = \frac{RT}{P}, \quad T = \frac{PV}{R},$$

$$\frac{P}{V} = -\frac{RT}{V^2}, \quad \frac{V}{T} = \frac{R}{P}, \quad \frac{T}{P} = \frac{V}{R},$$

所以

$$\frac{P}{V} \cdot \frac{V}{T} \cdot \frac{T}{P} = -1.$$

例 6 说明偏导数符号 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都是整体记号, 不能像一元函数导数那样理解为商.

9.2.2 高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 E 内有偏导数

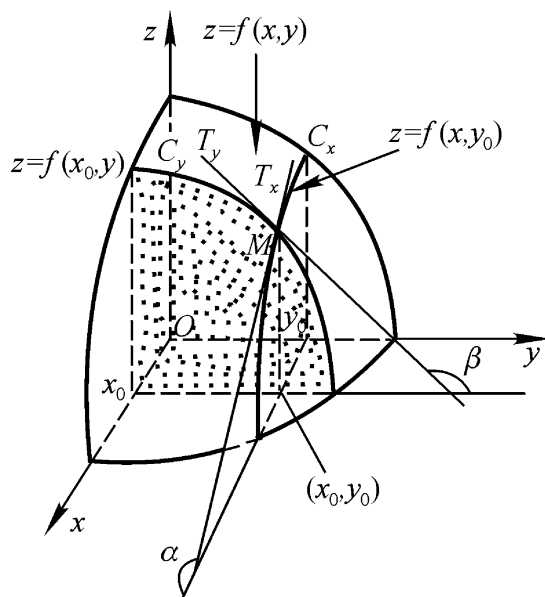


图 9.7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y),$$

它们仍是 E 内 x, y 的函数. 如果它们仍有偏导数, 则称它们的偏导数是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数, 二元函数 $z = f(x, y)$ 可以有如下四个二阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = z_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = z_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = z_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = z_{yy}, \end{aligned}$$

其中 $f_{xy}(x, y)$ 和 $f_{yx}(x, y)$ 称为混合二阶偏导数.

递推地可以定义各阶偏导数, 二阶和二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 7 已知 $z = \ln(x^2 + y)$, 求其四个二阶偏导数.

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y},$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2 + y) - 4x^2}{(x^2 + y)^2} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{-1}{(x^2 + y)^2}. \end{aligned}$$

例 7 中两个混合二阶偏导数相等, 一般情况下这虽不是必然的, 但在一定条件下是成立的.

定理 9.1 如果在点 (x, y) 的邻域内函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 z_x, z_y 及 z_{xy} 都存在, 且 z_{xy} 在点 (x, y) 处连续, 那么混合偏导数 z_{yx} 在点 (x, y) 处也存在, 且

$$z_{yx} = z_{xy}.$$

(证明略)

一般地, 多元函数的混合偏导数如果连续, 就与求导次序无关.

例 8 设 $u = e^{xy} \sin z$, 求 u_{x^2z}, u_{xzx} .

解 $u_x = ye^{xy} \sin z$, $u_{x^2} = y^2 e^{xy} \sin z$, $u_{xz} = ye^{xy} \cos z$, $u_{x^2z} = y^2 e^{xy} \cos z$.

因为 u_{x^2z} 连续, 所以

$$u_{x^2z} = u_{xzx} = y^2 e^{xy} \cos z.$$

最后指出, 确有混合偏导数不相等的函数, 比如

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 的两个混合二阶偏导数

$$f_{xy}(0,0) = -1, \quad f_{yx}(0,0) = 1.$$

这只能说明 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 $(0,0)$ 处都不连续.

9.3 全微分

对多元函数也有自变量的微小变化导致函数变化多少的问题.

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域内有定义, $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 为该邻域内任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

为函数在点 $P(x, y)$ 处的全增量.

二元函数在一点的全增量是 $\Delta x, \Delta y$ 的函数. 一般说来, Δz 是 $\Delta x, \Delta y$ 的较复杂的函数, 当自变量的增量 $\Delta x, \Delta y$ 很小的情况下, 自然希望能像可微的一元函数那样, 用 $\Delta x, \Delta y$ 的线性函数来近似代替 Δz , 即希望

$$\begin{aligned} \Delta z &= A \Delta x + B \Delta y + o(\rho) \\ &= (A \ B) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\rho), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, $\rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. 这就产生了全微分的概念.

定义 9.11 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的全增量(1)能表成(2)的形式, 则说函数 $z = f(x, y)$ 在点 P 处可微, 并称 $A \Delta x + B \Delta y$ 为函数在点 P 处的全微分, 记为 dz 或 df , 即

$$dz = A \Delta x + B \Delta y = (A \ B) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

在区域 E 内每一点都可微的函数, 称为区域 E 内的可微函数, 此时也说函数在 E 内可微.

由(2)式知, 多元函数可微必连续.

可微与偏导数存在有何关系呢? 微分系数 A, B 如何确定? 由下面两个定理来回答.

定理 9.2 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微, 则在点 P 处偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

证明 因 $f(x, y)$ 可微, 有

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho),$$

特别取 $y=0$ 时, 有

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = A \Delta x + o(|\Delta x|).$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A.$$

同法可证, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在, 且 $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. \square

由此可见, $z = f(x, y)$ 的全微分(3)可表为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta y} \Delta x.$$

因为自变量的微分等于它的增量, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, 所以函数 $z = f(x, y)$ 的全微分习惯上写为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dy} dx. \tag{4}$$

我们把 $\frac{\partial z}{\partial x} dx$, $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ 分别叫做函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处关于 x, y 的偏微分, 它们分别是偏增量 $\Delta x z$, $\Delta y z$ 的线性主部. 所以, 二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和——称为微分的叠加原理. 这对一般多元函数也成立. 比如, 对三元可微函数 $u = f(x, y, z)$ 有

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dy} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dz} dx. \end{aligned}$$

对一元函数来说可导与可微是等价的. 而对多元函数来说, 偏导数都存在也保证不了可微性. 这是因为偏导数仅仅是在特定的方向上函数的变化率, 它对函数在一点附近变化情况的描述是极不完整的. 前面讲过偏导数都存在也保证不了函数的连续性, 而可微必连续, 所以偏导数存在推不出可微性.

定理 9.3 若在点 $P(x, y)$ 的某邻域内, 函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 且它们在点 P 处连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 P 点处可微.

证明 设 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 是 P 的邻域内的任一点, 考查全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)],$$

第一个方括号里, 由于第二个自变量固定在 $y+\Delta y$ 处, 可视为 x 的一元函数 $f(x, y+\Delta y)$ 的增量, 第二个方括号里第一个自变量固定在 x 处, 可视为 y 的一

元函数 $f(x, y)$ 的增量, 分别应用拉格朗日中值定理就得到

$$z = f_x(x + \theta_1 x, y + \theta_2 y) x + f_y(x + \theta_1 x, y + \theta_2 y) y,$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, 此式称为二元函数中值公式.

利用 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的连续性得到

$$\begin{aligned} z &= [f_x(x, y) + \epsilon] x + [f_y(x, y) + \eta] y \\ &= f_x(x, y) x + f_y(x, y) y + \epsilon x + \eta y, \end{aligned}$$

其中 ϵ, η 满足

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \eta = 0.$$

下面只需证明 $\epsilon x + \eta y$ 是 ρ 的高阶无穷小. 因为

$$\begin{aligned} |\epsilon x + \eta y| &= |\epsilon| |x| + |\eta| |y| \\ &\leq (|\epsilon| + |\eta|) \rho, \end{aligned}$$

故

$$\epsilon x + \eta y = o(\rho),$$

$$z = f_x(x, y) x + f_y(x, y) y + o(\rho),$$

所以 $z = f(x, y)$ 在 P 处可微. \square

注意, 定理 9.3 的条件是可微的充分条件, 函数在一点可微, 在这点偏导数不一定连续.

例 1 试证函数

$$z = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点 $O(0, 0)$ 处可微, 但偏导数在 O 点不连续.

证明 因为

$$z = z(x, y) - z(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 即有

$$z = 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\rho),$$

所以, z 在原点处可微, 且

$$z_x(0, 0) = 0, \quad z_y(0, 0) = 0.$$

再来证明 $\frac{z}{\rho}$ 在原点 $O(0, 0)$ 处不连续. 为此, 我们这里仅沿 x 轴正半轴来考察 $\frac{z}{\rho}$, 因为

$$z_x(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \cos \frac{1}{x^2} \quad (x > 0),$$

所以,当 $x \rightarrow 0$ 时, $z_x(x, 0)$ 无极限. 这足以说明函数 $z(x, y)$ 在原点 O 处关于 x 的偏导数不连续.

类似地可证, $\frac{z}{y}$ 在点 O 处也不连续. \square

对一元函数, 在一点处

$$\boxed{\text{可微}} \Leftrightarrow \boxed{\text{可导}} \Leftrightarrow \boxed{\text{连续}} \Leftrightarrow \boxed{\text{有极限}}.$$

对多元函数, 在一点处

$$\boxed{\text{偏导连续}} \Leftrightarrow \boxed{\text{可微}} \Leftrightarrow \boxed{\text{连续}} \Leftrightarrow \boxed{\text{有极限}} \quad (\text{全方位性})$$

$$\begin{array}{ccc} \nwarrow & \updownarrow & \nearrow \\ \boxed{\text{有偏导}} & & \end{array} \quad (\text{单向性}).$$

例 2 求函数 $z = x^4 y^3 + 2x$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分.

解 由于

$$\frac{z}{x} = 4x^3 y^3 + 2, \quad \frac{z}{y} = 3x^4 y^2$$

连续, 特别 $\frac{z}{x}\Big|_{(1,2)} = 34, \frac{z}{y}\Big|_{(1,2)} = 12$, 故有

$$dz\Big|_{(1,2)} = 34dx + 12dy.$$

例 3 求函数 $u = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 因为

$$\frac{u}{x} = 1, \quad \frac{u}{y} = \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}, \quad \frac{u}{z} = ye^{yz}$$

都连续, 所以有全微分,

$$du = dx + \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} dy + ye^{yz} dz.$$

下面介绍全微分在近似计算和误差估计中的应用.

由全微分的定义, 当 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 且 $|x|, |y|$ 充分小时, 有近似式

$$z \approx dz = f_x(x_0, y_0) x + f_y(x_0, y_0) y \tag{5}$$

及

$$f(x_0 + x, y_0 + y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) x + f_y(x_0, y_0) y. \tag{6}$$

这两个式子可以用来计算 z 及 $f(x_0 + x, y_0 + y)$ 的近似值, (5) 式还可用来估计间接误差.

例 4 计算 $1.01^{1.98}$ 的近似值.

解 设 $f(x, y) = x^y$, 则

$$f(1.01, 1.98) = 1.01^{1.98}.$$

取 $x_0 = 1, y_0 = 2, x = 0.01, y = -0.02$. 由于

$$f(1, 2) = 1,$$

$$f_x(1, 2) = yx^{y-1}|_{(1,2)} = 2, \quad f_y(1, 2) = x^y \ln x|_{(1,2)} = 0,$$

所以, 由(6)式有

$$1.01^{1.98} \approx 1 + 2 \times 0.01 + 0 \times (-0.02) = 1.02.$$

例 5 有一圆柱体, 受压后发生形变, 它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm, 高度由 100 cm 减少到 99 cm, 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为 r, h 和 V , 则有

$$V = r^2 h.$$

由(5)式, 有

$$\Delta V \approx dV = 2rh\Delta r + r^2\Delta h,$$

将 $r = 20, h = 100, \Delta r = 0.05, \Delta h = -1$ 代入, 就得到体积变化的近似值

$$\Delta V \approx 2 \times 20 \times 100 \times 0.05 + 20^2 \times (-1) = -200 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

例 6 利用单摆测定重力加速度

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

现已测得摆长 $l = (100 \pm 0.1) \text{ cm}$, 周期 $T = (2 \pm 0.004) \text{ s}$, 问由于 l 与 T 的误差而引起 g 的误差为多少?

解 由于

$$dg = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \Delta l - \frac{2l}{T^3} \Delta T \right),$$

所以

$$|dg| \approx 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} |\Delta l| + \frac{2l}{T^3} |\Delta T| \right).$$

将 $l = 100, T = 2, |\Delta l| = 0.1, |\Delta T| = 0.004$ 代入, 得到 g 的绝对误差

$$|dg| \approx 4\pi^2 \left(\frac{0.1}{2^2} + \frac{200}{2^3} \times 0.004 \right) = 0.5 \text{ cm/s}^2 < 5 \text{ (cm/s}^2\text{)},$$

相对误差

$$\frac{|dg|}{g} \approx \frac{0.5}{\frac{4\pi^2 \times 100}{2^2}} = 0.5\%.$$

9.4 复合函数求导法

定理 9.4 如果函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 在点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在, 而函数 $z = z(u, v)$ 在 (x, y) 的对应点 (u, v) 处可微, 则复合函数

$$z = z(u(x, y), v(x, y))$$

在点 (x, y) 处对 x 的偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

证明 固定 y , 给 x 以增量 Δx , 引起 u, v 有偏增量 $\Delta u, \Delta v$, 从而导致 z 有增量 Δz . 由于 $z = z(u, v)$ 可微, 所以有

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\rho),$$

其中 $\rho = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$. 上式两边同除以 Δx , 再令 $\Delta x \rightarrow 0$, 注意此时 $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$, 进而 $\rho \rightarrow 0$, 于是, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

最后的运算中用到

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = \pm \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = \frac{\Delta u}{\Delta x}^2 + \frac{\Delta v}{\Delta x}^2 = 0. \quad \square$$

由(1)式不难看出: 当 $u(x, y), v(x, y)$ 关于 x 的偏导数和 $z(u, v)$ 关于 u, v 的偏导数都连续时, z 关于 x 的偏导数也连续.

同样条件下, 公式(1)可以推广到一般复合函数上去. 设

$$z = z(u_1, \dots, u_n), \quad u_i = u_i(x_1, \dots, x_l), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

则 z 关于某个自变量 x_j 的偏导数, 等于 z 对每个与 x_j 有关的中间变量 u_i 的偏导数与这个中间变量 u_i 对 x_j 的偏导数之积的总和, 即

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}. \quad (3)$$

公式(3)称为链导法则.

求复合函数的偏导数关键在于明确函数间的复合关系, 认定中间变量与自变量.

在(2)中当 $n=1, l=1$ 时, $z = z(u_1), u_1 = u_1(x_1)$, 得到一元复合函数 $z = z_1(u_1(x_1))$. 公式(3)恰是我们熟知的一元复合函数求导法则.

在(2)中, 当中间变量都是同一个自变量的一元函数时, 即 $l=1, u_i = u_i(x_1)$, z 就是 x_1 的一元函数 $z = z(u_1(x_1), \dots, u_n(x_1))$, 公式(3)变为

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx_1}, \quad (4)$$

称为 z 的全导数公式.

链导法则公式(3)可借助于矩阵简单地表为

$$\frac{z}{x_1} \cdots \frac{z}{x_l} = \frac{\frac{u_1}{x_1} \cdots \frac{u_l}{x_l}}{\frac{u_1}{x_1} \cdots \frac{u_l}{x_l}} \quad (5)$$

称矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{u_1}{x_1} & \cdots & \frac{u_l}{x_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{u_n}{x_1} & \cdots & \frac{u_n}{x_l} \end{pmatrix}$$

为函数组 $u_i = u_i(x_1, \dots, x_l), i = 1, \dots, n$ 的雅可比矩阵，记为

$$\frac{(u_1, \dots, u_n)}{(x_1, \dots, x_l)},$$

则链导法则公式(3)又可写为

$$\frac{(z)}{(x_1, \dots, x_l)} = \frac{(z)}{(u_1, \dots, u_n)} \frac{(u_1, \dots, u_n)}{(x_1, \dots, x_l)}. \quad (6)$$

其结构简洁,形式漂亮,便于记忆和推广.读者自己把它推广到 m 维向量值函数 (z_1, z_2, \dots, z_m) 的复合函数上去.

例 1 已知 $z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y$, 求 $\frac{z}{x}, \frac{z}{y}$.

解 因

$$\begin{aligned} \frac{z}{u} &= e^u \sin v, & \frac{z}{v} &= e^u \cos v, \\ \frac{u}{x} &= y, & \frac{u}{y} &= x, & \frac{v}{x} &= 1, & \frac{v}{y} &= 1 \end{aligned}$$

都连续,故

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{z}{u} \frac{u}{x} + \frac{z}{v} \frac{v}{x} = e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1 = e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)], \\ \frac{z}{y} &= \frac{z}{u} \frac{u}{y} + \frac{z}{v} \frac{v}{y} = e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 1 = e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)]. \end{aligned}$$

例 2 设 $y = (\cos x)^{\sin x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这个幂指函数的导数可以利用取对数求导法计算,但用全导数公式(4)比较简便.令

雅可比 Jacobi C. G. J. (德) 1804—1851, 他鼓励学生早做独立的研究工作, 要在干中学. 他为人大方、谦虚、慷慨.

$$u = \cos x, \quad v = \sin x,$$

则

$$y = u^v.$$

由公式(4)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y du}{u dx} + \frac{y dv}{v dx} = v u^{v-1} (-\sin x) + u^v \ln u (\cos x) \\ &= (\cos x)^{1+\sin x} (\ln \cos x - \tan^2 x). \end{aligned}$$

例 3 已知 $f(t)$ 可微, 证明 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ 满足方程

$$\frac{1}{x} \frac{z}{x} + \frac{1}{y} \frac{z}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

证明 引入中间变量, 令 $t = x^2 - y^2$, 则 $z = \frac{y}{f(t)}$. 注意这里 t, y 为中间变量, x, y 为自变量.

$$\frac{z}{x} = -\frac{2xyf(t)}{f^2(t)}, \quad \frac{z}{y} = \frac{1}{f(t)} + \frac{2y^2 f(t)}{f^2(t)}.$$

于是

$$\frac{1}{x} \frac{z}{x} + \frac{1}{y} \frac{z}{y} = -\frac{2yf(t)}{f^2(t)} + \frac{2yf(t)}{f^2(t)} + \frac{1}{yf(t)} = \frac{z}{y^2}. \quad \square$$

(请读者通过矩阵的运算来证明此题)

例 4 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 其中 f 可微, 求 $\frac{u}{x}, \frac{u}{z}$.

解 计算复合函数偏导数时, 适当的引入中间变量, 将函数分解, 是很关键的. 像例 3 那样给中间变量一个记号也可, 而本例中 f 的三个变量也可简单地用 1, 2, 3 来标记. 如 f_1 表示 f 对第一个变量的偏导数. 这样

$$\frac{u}{x} = f_1 + f_2 \cdot y + f_3 \cdot yz, \quad \frac{u}{z} = f_3 \cdot xy.$$

例 5 设 $z = F(x, y)$, $y = y(x)$, 其中 F, y 都有二阶连续的导数, 求 $\frac{d^2 z}{dx^2}$.

解 由全导数公式

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F}{x} + \frac{F dy}{y dx} = F_x(x, y) + F_y(x, y) y'(x). \quad (7)$$

求二阶导数时, 务必注意 $\frac{F}{x}, \frac{F}{y}$ 仍是 x, y 的二元函数, y 又是 x 的函数, 再用全

导数公式得

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{^2 F}{x^2} + \frac{^2 F dy}{x y dx} + \frac{^2 F}{y x} + \frac{^2 F dy}{y^2 dx} \frac{dy}{dx} + \frac{F d^2 y}{y dx^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{^2 F}{x^2} + 2 \frac{^2 F}{x} \frac{dy}{y dx} + \frac{^2 F}{y^2} \frac{dy}{dx}^2 + \frac{F d^2 y}{y dx^2} \\
&= F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y) \frac{dy}{dx} + F_{yy}(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_y(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (8)
\end{aligned}$$

显然在求高阶导数时,用(7),(8)式中最后的表达式表示导数是有利的.

例 6 设 f 具有二阶连续偏导数,求函数 $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$ 的混合二阶偏导数.

解 因 $\frac{u}{x} = f_1 + f_2 \cdot \frac{1}{y}$, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{^2 u}{x y} &= f_{12} \cdot \frac{-x}{y^2} + f_{22} \cdot \frac{-x}{y^2} \cdot \frac{1}{y} + f_2 \cdot \frac{-1}{y^2} \\
&= -\frac{1}{y^3} (xyf_{12} + xf_{22} + yf_2).
\end{aligned}$$

例 7 设 $u = F(x, y)$ 具有二阶连续偏导数,求表达式

$$\frac{u^2}{x} + \frac{u^2}{y}, \quad \frac{^2 u}{x^2} + \frac{^2 u}{y^2}$$

在极坐标系中的形式.

解 由直角坐标与极坐标的关系 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 知, u 是 r, θ 的函数 $u = F(x, y) = F(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(r, \theta)$, 而 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, 故

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{r} \frac{r}{x} + \frac{u}{r} \frac{r}{x}, \quad \frac{u}{y} = \frac{u}{r} \frac{r}{y} + \frac{u}{r} \frac{r}{y}.$$

而

$$\begin{aligned}
\frac{r}{x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}, & \frac{r}{y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{r^2} = \frac{\sin \theta}{r}, \\
-\frac{r}{x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & -\frac{r}{y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}.
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{r} \cos \theta - \frac{u \sin \theta}{r}, \quad \frac{u}{y} = \frac{u}{r} \sin \theta + \frac{u \cos \theta}{r}, \quad (9)$$

(9)中二式平方相加,得

$$\frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{y^2} = \frac{u^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} u^2.$$

将(9)中二式分别关于 x, y 求导,相加,得

$$\frac{^2 u}{x^2} + \frac{^2 u}{y^2} = \frac{^2 u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{^2 u}{r} + \frac{1}{r} \frac{u}{r}$$

如果 $z = F(x, y)$, $y = y(x, t)$, x 既是自变量,又是中间变量.用 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 表示 z 对自变量 x 的偏导数,

用 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 表示 z 对中间变量 x 的偏导数,以示区别.

(请读者详细推导) .

全微分形式不变性 . 设 $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 均可微, 则

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

这说明: 当 z 是 u, v 的函数时, 不论 u, v 是自变量还是中间变量, z 的全微分形式不变:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

这对计算全微分和求偏导数都是有益的. 此外, 还有下列四则运算的全微分法则:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
2. $d(uv) = u dv + v du$, $d(Cu) = C du$ (C 为常数).
3. $d \frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2}$ ($v \neq 0$).

例 8 求函数 $z = \arctan \frac{x}{x^2 + y^2}$ 的全微分与偏导数.

解 令 $z = \arctan u$, $u = \frac{x}{v}$, $v = x^2 + y^2$, 于是由微分法则

$$\begin{aligned} dz &= \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{1+u^2} \frac{v dx - x dv}{v^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2) dx - x(2x dx + 2y dy)}{(x^2 + y^2)^2 + x^2} = \frac{(y^2 - x^2) dx - 2xy dy}{(x^2 + y^2)^2 + x^2}. \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2 + x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2 + x^2}.$$

例 9 设 $u = f(x, y, z)$, $y = y(x, t)$, $t = t(x, z)$, 其中 f, y, t 均可微, 求 u 的两个偏导数.

解 由全微分形式不变性

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{f}{x}dx + \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{x}\right)dx + \frac{1}{t}dt + \frac{f}{z}dz \\
&= -\frac{f}{x}dx + \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{x}\right)dx + \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{x}\right)dx + \frac{f}{z}dz + \frac{f}{z}dz \\
&= \left(-\frac{f}{x} + \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{x}\right)\right)dx + \left(\frac{f}{y} \left(-\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{f}{z}\right)dz.
\end{aligned}$$

故

$$\frac{u}{x} = -\frac{f}{x} + \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{x}\right), \quad \frac{u}{z} = \frac{f}{y} \left(-\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{f}{z}.$$

通过全微分求所有一阶偏导数,比用链导法求偏导数有时会显得灵活方便,不易出错.

9.5 隐函数求导法

隐函数在实际问题中是常见的.比如,平面曲线方程 $F(x, y) = 0$, 空间曲面方程 $F(x, y, z) = 0$, 以及空间曲线方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 等.下面讨论如何由隐函数方程求偏导数.

一个方程情况 在一元函数微分学中,我们曾介绍过隐函数

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

的求导法.现在利用复合函数的链导法给出隐函数(1)的求导公式,并指出隐函数存在的一个充分条件.

定理 9.5 (隐函数存在定理) 设点 (x_0, y_0) 满足方程 $F(x, y) = 0$; 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内,函数 $F(x, y)$ 有连续偏导数 $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$; 且

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

则方程

$$F(x, y) = 0$$

在点 (x_0, y_0) 的某邻域内,确定惟一一个函数 $y = f(x)$, 满足

$$F(x, f(x)) = 0, \quad y_0 = f(x_0),$$

而且在 x_0 的某邻域内 $y = f(x)$ 是单值的, 有连续的导数, 导数公式为:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \quad (2)$$

(证明从略.)仅推导公式(2).将恒等式

$$F(x, f(x)) = 0$$

两边关于 x 求导, 由全导数公式, 得

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

因 $F_y(x, y)$ 连续, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 所以在点 (x_0, y_0) 的某邻域内, $F_y(x, y) \neq 0$. 于是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

例如, 方程 $xy - e^x + e^y = 0$, 这里记 $F(x, y) = xy - e^x + e^y$, 因 $F(0, 0) = 0$, 又 $F_x(x, y) = y - e^x$, 与 $F_y(x, y) = x + e^y$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域上连续, 且 $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$, 所以方程在 $(0, 0)$ 附近确定一个隐函数, 且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y - e^x}{x + e^y}.$$

用同样的方法可以推出多元隐函数的偏导数公式. 比如由三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

确定的二元隐函数 $z = f(x, y)$ 有偏导数公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad (F_z \neq 0). \quad (4)$$

例 1 已知 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, 则

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2},$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{\frac{c^2 x}{a^2 z}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x z_y}{z^2} = -\frac{c^4 x y}{a^2 b^2 z^3}. \end{aligned}$$

例 2 设有隐函数 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, 其中 F 的偏导数连续, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 由隐函数、复合函数求导法

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_1 \cdot z^{-1}}{F_1 \cdot (-xz^{-2}) + F_2 \cdot (-yz^{-2})} = \frac{zF_1}{xF_1 + yF_2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_2 \cdot z^{-1}}{F_1 \cdot (-xz^{-2}) + F_2 \cdot (-yz^{-2})} = \frac{zF_2}{xF_1 + yF_2}. \end{aligned}$$

解法 2 利用全微分, 将隐函数方程两边取全微分, 得

$$F_1 d\frac{x}{z} + F_2 d\frac{y}{z} = 0,$$

即

$$F_1 \frac{z dx - x dz}{z^2} + F_2 \frac{z dy - y dz}{z^2} = 0,$$

$$zF_1 dx + zF_2 dy - (xF_1 + yF_2) dz = 0,$$

故

$$dz = \frac{zF_1 dx + zF_2 dy}{xF_1 + yF_2}.$$

从而

$$\frac{z}{x} = \frac{zF_1}{xF_1 + yF_2}, \quad \frac{z}{y} = \frac{zF_2}{xF_1 + yF_2}.$$

由此可见,用全微分来求隐函数的偏导数也是一个途径,且步骤清楚.

方程组的情况 下面讨论由联立方程组所确定的隐函数的求导方法.设由方程组

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ G(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

确定两个二元函数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

将恒等式

$$\begin{aligned} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) &= 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) &= 0 \end{aligned}$$

两边关于 x 求偏导,由链导法得到

$$\begin{aligned} \frac{F}{x} + \frac{F}{u} \frac{u}{x} + \frac{F}{v} \frac{v}{x} &= 0, \\ \frac{G}{x} + \frac{G}{u} \frac{u}{x} + \frac{G}{v} \frac{v}{x} &= 0. \end{aligned}$$

解这个以 $\frac{u}{x}, \frac{v}{x}$ 为未知量的代数方程组,当系数行列式不为零时,即

$$\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

解得

$$\frac{u}{x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{F}{x} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{x} & \frac{G}{v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{v} \end{vmatrix}}, \quad \frac{v}{x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{x} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{v} \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

上面出现的由函数的偏导数构成的行列式称为雅可比行列式.为简便起见,记

$$\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{v} \end{vmatrix} = \frac{(F, G)}{(u, v)}.$$

于是

$$\frac{u}{x} = - \frac{(F, G)}{(x, v)} \bigg/ \frac{(F, G)}{(u, v)}, \quad \frac{v}{x} = - \frac{(F, G)}{(u, x)} \bigg/ \frac{(F, G)}{(u, v)}. \quad (6)$$

如果方程组(5)中不出现 y , 则 u, v 是 x 的一元函数, (6) 式就是其导数公式. 若出现 y , 则类似地有

$$\frac{u}{y} = - \frac{(F, G)}{(y, v)} \bigg/ \frac{(F, G)}{(u, v)}, \quad \frac{v}{y} = - \frac{(F, G)}{(u, y)} \bigg/ \frac{(F, G)}{(u, v)}. \quad (7)$$

例 3 设 $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $x + 2y + 3z = 4$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50$, $G(x, y, z) = x + 2y + 3z - 4$. 这里确定 y, z 是 x 的函数. 由

$$\begin{aligned} \frac{(F, G)}{(y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{F}{y} & \frac{F}{z} \\ \frac{G}{y} & \frac{G}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3y - 2z), \\ \frac{(F, G)}{(x, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{F}{x} & \frac{F}{z} \\ \frac{G}{x} & \frac{G}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3x - z), \\ \frac{(F, G)}{(y, x)} &= \begin{vmatrix} \frac{F}{y} & \frac{F}{x} \\ \frac{G}{y} & \frac{G}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(y - 2x), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= - \frac{(F, G)}{(x, z)} \bigg/ \frac{(F, G)}{(y, z)} = \frac{z - 3x}{3y - 2z}, \\ \frac{dz}{dx} &= - \frac{(F, G)}{(y, x)} \bigg/ \frac{(F, G)}{(y, z)} = \frac{2x - y}{3y - 2z}. \end{aligned}$$

例 4 设 $u = u(x)$ 由方程组 $u = f(x, y, z)$, $g(x, y, z) = 0$, $h(x, z) = 0$ 确定, 其中 f, g, h 均可微, 且 $g_y \neq 0, h_z \neq 0$, 求 u .

解法 1 对隐函数方程组确定的函数求导, 首要的是认准变量间的关系, 分清自变量和因变量. 这里 u 是 x 的一元函数, 所以 y, z 都应是 x 的函数. 从方程组

$$g(x, y, z) = 0, \quad h(x, z) = 0$$

确定 y, z 是 x 的函数 .因

$$\begin{vmatrix} g_y & g_z \\ h_y & h_z \end{vmatrix} = g_y h_z, \quad \begin{vmatrix} g_x & g_z \\ h_x & h_z \end{vmatrix} = g_x h_z - g_z h_x, \quad \begin{vmatrix} g_y & g_x \\ h_y & h_x \end{vmatrix} = g_y h_x,$$

故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z}, \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{h_x}{h_z}.$$

再由链导法得

$$\frac{du}{dx} = f_x + f_y y_x + f_z z_x = f_x + f_y \frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z} - f_z \frac{h_x}{h_z}.$$

解法 2 隐函数方程组的偏导数公式 (6) 可推广到 n 个方程上去 .如本题, 设

$$F(x, y, z, u) = f(x, y, z) - u,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= - \frac{(F, g, h)}{(x, y, z)} \bigg/ \frac{(F, g, h)}{(u, y, z)} = - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & 0 & h_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & f_y & f_z \\ 0 & g_y & g_z \\ 0 & 0 & h_z \end{vmatrix}} \\ &= f_x + f_y \frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z} - f_z \frac{h_x}{h_z}. \end{aligned}$$

解法 3 将每个方程两边取全微分得:

$$\begin{aligned} du &= f_x dx + f_y dy + f_z dz, \\ g_x dx + g_y dy + g_z dz &= 0, \\ h_x dx + h_z dz &= 0. \end{aligned}$$

注意要求的是 $\frac{du}{dx}$, x 是惟一的自变量 .由后两式解出 dy, dz , 代入第一式, 不难得到 $\frac{du}{dx}$.

9.6 偏导数的几何应用

9.6.1 空间曲线的切线与法平面

设曲线 l 以参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I \tag{1}$$

给出 . $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 是曲线 l 上的两个点, 对应的参量为 t_0 和 $t_0 + \Delta t$.于是割线 $P_0 P_1$ 的方向向量是 $\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ 或

$$\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}.$$

设 $x(t), y(t), z(t)$ 都存在且不同时为零. 因为点 P_1 沿曲线 l 趋于点 P_0 时 ($t \rightarrow 0$), 割线的极限位置是曲线 l 在点 P_0 处的切线, 所以向量

$$\mathbf{t} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\} \quad (2)$$

是切线的方向向量, 称为曲线 l 在点 P_0 处的切向量. 故曲线 l 在 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (3)$$

过点 P_0 与切线垂直的平面, 称为曲线 l 在点 P_0 处的法平面 (见图 9.8), 其方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (4)$$

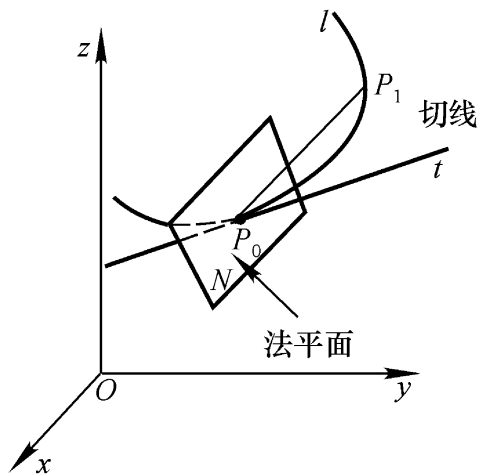


图 9.8

例 1 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解 因 $x = t, y = t^2, z = t^3$, 及点 $P_0(1, 1, 1)$ 对应参数 $t = 1$, 所以曲线在点 P_0 处的切向量 $\mathbf{t} = \{1, 2, 3\}$. 于是所求的切线方程为

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3},$$

法平面方程为

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

例 2 设曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 在任一点的法平面都过原点, 证明此曲线必在以原点为球心的某球面上.

证明 任取曲线上一点 $(x(t), y(t), z(t))$, 曲线过该点的法平面方程为:

$$x(t)[X - x(t)] + y(t)[Y - y(t)] + z(t)[Z - z(t)] = 0.$$

因原点 $(0, 0, 0)$ 在法平面上, 故有

$$x(t)x(t) + y(t)y(t) + z(t)z(t) = 0,$$

即

$$[x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)] = 0,$$

于是

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = C. \quad \square$$

例 3 在抛物柱面 $y = 6x^2$ 与 $z = 12x^2$ 的交线上, 求对应 $x = \frac{1}{2}$ 的点处的切向量.

解 取 x 为参数, 所述交线的参数方程为

$$x = x, \quad y = 6x^2, \quad z = 12x^2.$$

于是, $x = 1, y = 12x, z = 24x$. 所以交线上与 $x = \frac{1}{2}$ 对应的点处的切向量

$$\mathbf{t} = \{1, 6, 12\}.$$

设曲线 l 以方程组

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

给出 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, 设 F, G 的偏导数在 P_0 处连续, 且 F_x, F_y, F_z 与 G_x, G_y, G_z 线性无关. 方程组 (5) 确定两个变量是另一个变量的显函数, 像例 3 那样, 所以由隐函数求导法, 不难得到曲线 l 在点 P_0 处的切向量

$$\mathbf{t} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}. \quad (6)$$

三个二阶行列式中至少有一个不为零 (请读者推出 (6) 式, 并写出切线方程及法平面方程).

例 4 求曲线

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 + z^2 &= 9, \\ z^2 &= 3x^2 + y^2 \end{aligned}$$

上点 $P_0(1, -1, 2)$ 处的切线方程与法平面方程.

解 设 $F = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9, G = 3x^2 + y^2 - z^2$, 则

$$\begin{aligned} F_x &= 4x, & F_y &= 6y, & F_z &= 2z, \\ G_x &= 6x, & G_y &= 2y, & G_z &= -2z, \end{aligned}$$

所以在点 $P_0(1, -1, 2)$ 处的切向量

$$\mathbf{t} = \begin{vmatrix} 6y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2z & 4x \\ -2z & 6x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4x & 6y \\ 6x & 2y \end{vmatrix}_{P_0} = \{32, 40, 28\}.$$

故切向量的方向数为 8, 10, 7 .于是所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{7} .$$

法平面方程为

$$8(x-1) + 10(y+1) + 7(z-2) = 0,$$

即

$$8x + 10y + 7z - 12 = 0 .$$

9.6.2 曲面的切平面与法线

设曲面 由隐函数方程

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

给出, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 函数 $F(x, y, z)$ 在 P_0 处可微, F_x, F_y, F_z 在点 P_0 处不同时为零 .在曲面 上过 P_0 任意作一条(光滑)曲线, 设其方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) . \tag{8}$$

点 P_0 对应参数 t_0 , 于是有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 .$$

两边在 t_0 处求导, 由全导数公式得

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0 .$$

此式表明: 向量

$$\mathbf{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\} \tag{9}$$

与曲线(8)在 P_0 处的切向量 $\mathbf{t} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 垂直 .由曲线(8)的任意性知, 曲面 上过点 P_0 的任何(光滑)曲线在 P_0 处的切线都是与向量 \mathbf{n} 垂直, 从而这些切线都在一个平面上, 称此平面为曲面在点 P_0 处的切平面, \mathbf{n} 为其法向量, 也称 \mathbf{n} 为曲面在点 P_0 处的法向量 .故曲面 在 P_0 处的切平面方程为:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0 . \tag{10}$$

过点 P_0 且以法向量 \mathbf{n} 为方向向量的直线称为曲面在 P_0 处的法线, 其方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} . \tag{11}$$

现在从几何上考查曲线(5), 它是两个曲面的交线, 所以它的切向量同时垂直于两个曲面的法向量, 故

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} .$$

是曲线(5)的切向量, 与公式(6)完全一致 .

当曲面 由显函数

$$z = f(x, y) \quad (12)$$

给出, 且 $f(x, y)$ 可微时, 将曲面方程变为

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0,$$

从而有

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0), F_z(x_0, y_0, z_0) = -1.$$

即曲面在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量

$$\mathbf{n} = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}. \quad (13)$$

故曲面在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (14)$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (15)$$

例 5 求椭球面 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$ 上点 $P_0(1, 2, 3)$ 处的切平面和法线方程.

解 设 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} - 1$, 则曲面在点 P_0 处的法向量为

$$\mathbf{n} = \left. \frac{2}{3}x, \frac{1}{6}y, \frac{2}{27}z \right|_{(1, 2, 3)} = \frac{1}{9}\{6, 3, 2\}.$$

故所求的切平面方程为

$$6(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 3) = 0,$$

即

$$6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{2}.$$

例 6 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在任意点 $P(x, y, z)$ 处向上的法向量 (即与 z 轴夹角为锐角的法向量).

解 因为 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, 而

$$\{f_x, f_y, -1\}_P = \{2x, 2y, -1\}$$

为向下的法向量 (第三个分量为负), 故向上的法向量

$$\mathbf{n} = \{-2x, -2y, 1\}.$$

当曲面 以参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (16)$$

给出, 其中 u, v 为双参变量. 求 (u_0, v_0) 对应的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量 \mathbf{n} .

固定 $v = v_0$, 让 u 变, 得到曲面 上一条所谓的 u 曲线

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

它在 M_0 处的切向量为

$$\mathbf{t} = \left. \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}.$$

同样, 固定 $u = u_0$, 得到另一条所谓的 v 曲线, 它在 M_0 处的切向量为

$$\mathbf{t} = \left. \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}.$$

曲面 的法向量 \mathbf{n}_{M_0} 同时与 \mathbf{t} 、 \mathbf{t} 垂直, 故有公式

$$\mathbf{n}_{M_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}_{M_0}. \quad (17)$$

例 7 求马鞍面 $x = u + v, y = u - v, z = uv$ 上 $u = 1, v = 1$ 对应点处的切平面方程.

解 $u = 1, v = 1$ 对应的点为 $(2, 0, 1)$, 曲面的法向量

$$\mathbf{m} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix}_{\substack{u=1 \\ v=1}} = \{2, 0, -2\},$$

故所求的切平面方程为

$$2(x - 2) - 2(z - 1) = 0,$$

即

$$z = x - 1.$$

9.6.3 二元函数全微分的几何意义

因为切平面方程 (14) 的右边的表达式恰好是二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的全微分, 所以 (14) 式说明:

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的全微分等于其切平面竖坐标的增量 (见图 9.9).

9.7 多元函数的一阶泰勒公式与极值

9.7.1 多元函数的一阶泰勒公式

同一元函数一样, 多元函数也有泰勒公式, 用以解决多元多项式逼近多元函

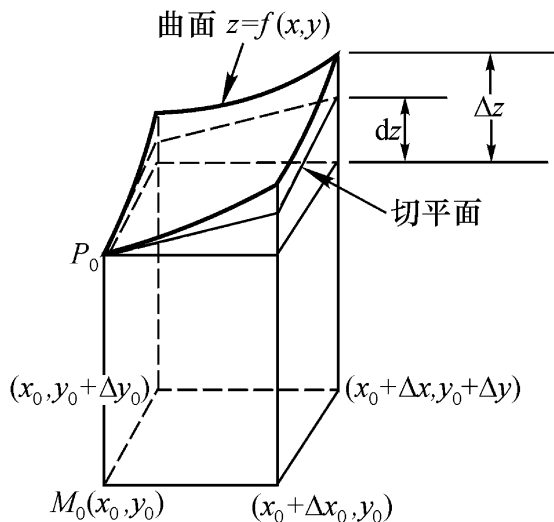


图 9.9

数问题 这里为了解决多元函数极值问题, 仅介绍多元函数的一阶泰勒公式 .

定理 9.6 若 n 元点函数 $u = f(\mathbf{X})$ 在 $\mathbf{X}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$ 的某邻域 $U(\mathbf{X}_0)$ 内有二阶连续偏导数(简记为 $f(\mathbf{X}) \in C^2(U(\mathbf{X}_0))$), 则 " $\mathbf{X} \in U(\mathbf{X}_0)$ ", 有一阶泰勒公式

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_0) + \frac{(f)}{(x_1, \dots, x_n)}_{\mathbf{X}_0} \mathbf{X} + \frac{1}{2!} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{X}^*) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{X}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T, \\ x_i &= x_i - x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{X}_0 + \theta (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

证明 设 t 的一元函数

$$\phi(t) = f(\mathbf{X}_0 + t(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)) = f(x_{10} + t(x_1 - x_{10}), \dots, x_{n0} + t(x_n - x_{n0}))$$

为辅助函数, 则

$$\phi(1) = f(\mathbf{X}), \quad \phi(0) = f(\mathbf{X}_0).$$

由全导数公式知

$$\phi'(t) = f_{x_1} (x_1 - x_{10}) + \dots + f_{x_n} (x_n - x_{n0})$$

若二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内 $n+1$ 阶导数连续, 则有泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \\ &\quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \text{ 其中 } 0 < \theta < 1, \quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \text{ 是形式的按牛顿二项展开式展开} \\ &\quad \text{的微分算符(算子)}. \end{aligned}$$

$$= \frac{(f)}{(x_1, \dots, x_n)} \mathbf{x}_0 + t \mathbf{x} \quad \mathbf{X} = (\mathbf{X})^T \dots$$

$$\begin{matrix} f_{x_1} & & & & \\ & f_{x_n} & & \mathbf{x}_0 + t \mathbf{x} & \\ & & f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ & & & \dots & \\ (t) = (\mathbf{X})^T & \frac{(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})}{(x_1, \dots, x_n)} & \mathbf{x}_0 + t \mathbf{x} & \mathbf{X} = (\mathbf{X})^T & \dots & \dots & \mathbf{X}. \\ & & & & f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{matrix}$$

所以 (t) 有一阶麦克劳林公式

$$(t) = (0) + (0)t + \frac{1}{2!} (t)^2, \quad 0 < t < 1.$$

令 $t=1$, 便得到多元函数 $f(\mathbf{X})$ 的一阶泰勒公式(1). \square

(2) 式的矩阵 \mathbf{H} 叫做 n 元函数 $f(\mathbf{X})$ 的黑塞(Hessian)矩阵.

9.7.2 多元函数的极值

定义 9.12 设 n 元函数 $u = f(\mathbf{X})$ 在点 \mathbf{X} 的某邻域 $U(\mathbf{X})$ 内有定义, 且

$$f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}) \quad (f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{X})),$$

则说函数 $u = f(\mathbf{X})$ 在点 \mathbf{X} 处取极大(小)值 $f(\mathbf{X})$, 并称 \mathbf{X} 为极值点.

极大值与极小值统称为函数的极值.

例如, 二元函数 $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ (图形是椭圆抛物面)在点 $(0, 0)$ 处取极小值 $f(0, 0) = 0$. 二元函数 $g(x, y) = 1 - x^2 + (y - 1)^2$ (锥面)在点 $(0, 1)$ 处取极大值 $g(0, 1) = 1$.

定理 9.7(极值的必要条件) 设函数 $u = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 $\mathbf{X}_0 = (x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$ 处取极值, 且在该点处函数的偏导数都存在, 则必有

$$\frac{(f)}{(x_1, \dots, x_n)} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \tag{3}$$

证明 因为 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 $(x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$ 处取极值, 所以一元函数 $f(x_1, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ 在 x_{1_0} 处取极值, 故 $f_{x_1}(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}) = 0$. 同理可证在 \mathbf{X} 处 f 对其他变元的偏导数也等于零. \square

凡使(3)式成立的点 $\mathbf{X} = (x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$, 均称为函数 $u = f(\mathbf{X})$ 的驻点. 可微函数的极值点必为驻点, 但驻点不一定是极值点, 例如 $z = x^2 - y^2$, 显然原点 $(0, 0)$ 是驻点, 却不是极值点(是马鞍形的鞍点). 所以, 驻点是否为极值点还要进一步判定.

定理 9.8(极值的充分条件) 设 \mathbf{X} 是函数 $f(\mathbf{X})$ 的驻点, $f(\mathbf{X}) \in C^2(U(\mathbf{X}))$. 若 $f(\mathbf{X})$ 在点 \mathbf{X} 的黑塞矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ 正定(负定), 则 $f(\mathbf{X})$ 为 $f(\mathbf{X})$ 的极小值(极大值); 若 $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ 不定, 则 $f(\mathbf{X})$ 不是 $f(\mathbf{X})$ 的极值.

证明 由于 \mathbf{X} 是 $f(\mathbf{X})$ 的驻点, 所以

$$\frac{(f)}{(x_1, \dots, x_n)}_{\mathbf{X}_0} = \mathbf{0}.$$

因此, 由 $f(\mathbf{X})$ 在 \mathbf{X} 处的一阶泰勒公式(1)得

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{X}^*) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \quad (4)$$

其中 $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$, $0 < \theta < 1$.

$\mathbf{H}(\mathbf{X}_0)$ 正定等价于它的各阶顺序主子式

$$\det \mathbf{H}_k(\mathbf{X}_0) > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

因为 $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ 的所有元 $f_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) 在 $U(\mathbf{X}_0)$ 内连续, 所以 $\det \mathbf{H}_k(\mathbf{X}) = C_k(U(\mathbf{X}_0))$, $k = 1, \dots, n$. 从而存在一个正数 δ , 使得当 $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{X}_0)$ 时

$$\det \mathbf{H}_k(\mathbf{X}) > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

故当 $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{X}_0)$ 时, $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ 正定. 于是, 当 $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{X}_0)$ 时, $\mathbf{X}^* \in U_\delta(\mathbf{X}_0)$, 从而 $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*)$ 正定, 于是(4)式右边为正定二次型, 由此可见, $f(\mathbf{X}_0)$ 为 $f(\mathbf{X})$ 的极小值.

当 $\mathbf{H}(\mathbf{X}_0)$ 不定时, 它的正负惯性指数皆大于零. 由于 $f(\mathbf{X}) \in C^2$, 所以当 \mathbf{X} 很小时, $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*)$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{X}_0)$ 的正负惯性指数相同. 于是 $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*)$ 不定, (4)式右边为变号二次型, 可见 $f(\mathbf{X}_0)$ 不是 $f(\mathbf{X})$ 的极值. \square

推论 设 (x_0, y_0) 为二元函数 $f(x, y)$ 的驻点, 且 $f(x, y) \in C^2(U(x_0, y_0))$, 记

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

(i) 若 $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, 则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值;

(ii) 若 $A < 0$, $AC - B^2 > 0$, 则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值;

(iii) 若 $AC - B^2 < 0$, 则 $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

例 1 确定函数 $f(x, y) = x^3 - y^2 + 3x^2 + 4y - 9x$ 的极值.

解 由方程组

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0,$$

$$f_y(x, y) = -2y + 4 = 0$$

解得驻点为 $(-3, 2)$ 及 $(1, 2)$, 又

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -2.$$

在点 $(-3, 2)$ 处, $A = -12 < 0$, $AC - B^2 = 24 > 0$, 故 $f(-3, 2) = 31$ 为极大值.

在点 $(1, 2)$ 处, $AC - B^2 = -24 < 0$, 故 $f(1, 2) = -1$ 不是极值.

同一元函数一样, 求多元可微函数在有界闭域上的最大(小)值, 可先求出函数在该闭域内的一切驻点上的函数值, 以及函数在闭域的边界上的最大(小)值, 这些函数值中最大(小)的便是所求的最大(小)值. 但要注意, 多元可微函数在区

域内若有惟一驻点,且取极大值,也未必是最大值!

例2 求函数 $z = 1 - x + x^2 + 2y$ 在直线 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 1$ 围成的三角形闭域 D (见图 9.10) 上的最大(小)值.

解 由于 $z_x = -1 + 2x, z_y = 2 \neq 0$, 所以在 D 内函数无极值, 最大(小)值只能在边界上.

1° 在边界线 $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ 上,

$$z = 1 + 2y.$$

由于 $z_y = 2 > 0, z = 1 + 2y$ 单调上升, 所以, $z(0, 0) = 1$ 最小, $z(0, 1) = 3$ 最大.

2° 在边界线 $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ 上,

$$z = 1 - x + x^2.$$

由于 $z_x = -1 + 2x$, 有驻点 $x = \frac{1}{2}$, 对应的函数值为

$z(\frac{1}{2}, 0) = \frac{3}{4}$, 又在端点 $(1, 0)$ 处有 $z(1, 0) = 1$.

3° 在边界线 $x + y = 1, 0 \leq x \leq 1$ 上,

$$z = 1 - x + x^2 + 2(1 - x) = 3 - 3x + x^2.$$

由于 $z_x = -3 + 2x < 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$, 所以函数单调下降, 最大(小)值在端点处.

比较 $z(0, 0), z(1, 0), z(0, 1)$ 及 $z(\frac{1}{2}, 0)$ 知

$$z_{\min} = z(\frac{1}{2}, 0) = \frac{3}{4}, \quad z_{\max} = z(0, 1) = 3.$$

例3 在椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内接长方体中, 求最大的体积.

解 设长方体的棱与坐标轴平行, 在第一卦限内的顶点为 $M(x, y, z)$, 则

$$V = 8xyz = 8cxy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, x > 0, y > 0.$$

因为

$$\begin{aligned} \frac{V}{x} &= \frac{8cy}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \\ \frac{V}{y} &= \frac{8cx}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

令 $\frac{V}{x} = 0, \frac{V}{y} = 0$, 解得惟一的驻点 $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$. 又由于 V 的最大值显然存在且在区域 D 内, 故所求的最大体积为

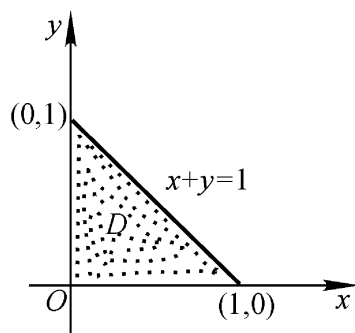


图 9.10

$$V_{\max} = V \frac{a}{3}, \frac{b}{3} = \frac{8-3}{9} abc.$$

9.7.3 条件极值、拉格朗日乘数法

极值问题有两类.其一,求函数在给定的区域上的极值,对自变量没有其他要求,这种极值称为无条件极值,如例1.其二,对自变量另有一些附加的约束条件限制下的极值,称为条件极值.如例3,对体积函数 $V = 8xyz$ 附加条件要 x, y, z 满足 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.对条件极值问题我们可以像例3那样从约束条件中解出

$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 代入体积函数中,将问题化为新的函数 $V = 8cxy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 的无条件极值问题来处理.但有时这样做很困难,甚至是做不到的.下面根据例3中处理问题的思想,推导出一个直接的方法——拉格朗日乘数法.

设函数

$$z = f(x, y) \quad (5)$$

在约束条件

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (6)$$

下,在点 (x_0, y_0) 处取极值.在 (x_0, y_0) 的某邻域内,函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ 有连续的偏导数,且 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.于是由隐函数存在定理,知方程 $\varphi(x, y) = 0$ 在 x_0 的某邻域内确定一个单值连续可微函数 $y = y(x)$ ($y_0 = y(x_0)$).从而一元函数

$$z = f(x, y(x))$$

在 x_0 处取极值.由取极值的必要条件知

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = 0.$$

又由隐函数求导法得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = - \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)},$$

从而有

$$f'_x(x_0, y_0) - \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \varphi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

设

$$\frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = -\lambda,$$

则 x_0, y_0, λ 必须满足

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

$$f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

这恰好相当于函数

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda (g(x, y, z) - c) \tag{7}$$

在 (x_0, y_0, z_0) 处取无条件极值的必要条件 .

总之, 求函数(5)在条件(6)下的条件极值, 可以通过函数(7)取无条件极值来解决. 如果 (x_0, y_0, z_0) 是(7)的驻点, 则 (x_0, y_0, z_0) 就是条件极值的嫌疑点, 这种方法叫做拉格朗日乘数法. 函数(7)称为拉格朗日函数 .

例 4 长方体表面积为 a^2 , 底面长与宽的比值为 3 : 2, 求长、宽与高各为多少时体积最大 .

解 设长方体的长为 $3x$, 宽为 $2x$, 高为 y , 则体积

$$V = 6x^2 y \quad (x > 0, y > 0) .$$

约束条件是表面积为 a^2 , 即

$$12x^2 + 10xy = a^2 .$$

设

$$F(x, y, z) = 6x^2 y + \lambda (12x^2 + 10xy - a^2) .$$

令

$$F_x = 12xy + 24x + 10y = 0,$$

$$F_y = 6x^2 + 10x = 0,$$

$$12x^2 + 10xy = a^2 .$$

解得惟一极值嫌疑点 $x = a/6, y = 2a/5$. 而这一实际问题的最大体积存在, 所以, 长为 $a/2$, 宽为 $a/3$, 高为 $2a/5$ 的长方体体积最大 .

拉格朗日乘数法对一般多元函数在多个附加条件下的条件极值问题也适用. 比如, 求函数

$$u = f(x_1, \dots, x_n)$$

在条件

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, m < n)$$

下的条件极值. 可以从函数

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x_1, \dots, x_n) - c_i)$$

的驻点 $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 中得到条件极值的嫌疑点 (x_1, \dots, x_n) .

例 5 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线上到坐标原点最近的点与最远的点 .

解 设

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (x^2 + y^2 - z) + \lambda_2 (x + y + z - 1) .$$

令 F 的所有偏导数为零, 得

$$2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \quad 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad x + y + z - 1 = 0.$$

解得两个嫌疑点

$$M_1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3} \right), \quad M_2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3} \right).$$

由于

$$|OM_1| = \sqrt{9+5\sqrt{3}}, \quad |OM_2| = \sqrt{9-5\sqrt{3}},$$

所以, 与原点最近的点是 M_2 , 最远点是 M_1 .

9.8 方向导数与梯度

如果在空间(或部分空间区域) D 上, 每个点都对应着某个物理量的一个确定值. 我们把该物理量在 D 上的这个分布称为该物理量的场. 若分布不随时间变化, 称为稳定场. 否则称为不稳定场. 物理量为数量的场叫做数量场. 物理量为向量的场叫做向量场. 例如, 温度场, 密度场, 电位场都是数量场, 而力场, 速度场, 电场强度场都是向量场. 如果 D 是平面区域, 相应的场叫平面场.

稳定的数量场中, 物理量 u 的分布是点 P 的数量函数 $u = u(P)$, $P \in D$. 稳定的向量场中, 物理量 \mathbf{A} 的分布是点 P 的向量函数 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(P)$, $P \in D$.

本节只介绍稳定的数量场(就是区域 D 上的点函数)的两个重要概念.

9.8.1 方向导数

在数量场 $u = u(P)$, $P \in D$ 中, 使 u 取同一值 C 的点的集合 $\{P \mid u(P) = C, P \in D\}$ 称为数量场的一个等值面. 它通常是空间曲面, 例如温度场中的等温面, 电位场中的等位面.

所有等值面充满了场, 并把场分“层”, 不同的等值面不相交, 场内每一点都有且仅有一个等值面通过(见图 9.11).

平面数量场 $v = v(P)$, $P \in D$, 中, 取同一数值 C 的点的集合称为等值线. 如地形图上的等高线, 地面气象图上的等压线等. 图 9.12 画出了 $v = 4 - x^2 - y^2$ 的图形及等值线.

考察数量场 $u = u(P)$, $P \in D$ 在一点处沿指定方向的变化率问题是数量场研究中的核心问题之一.

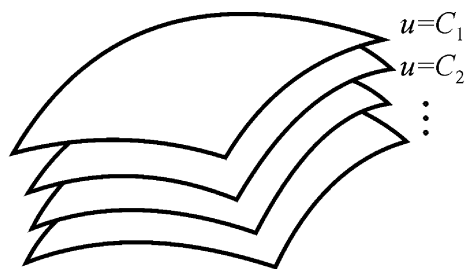


图 9.11

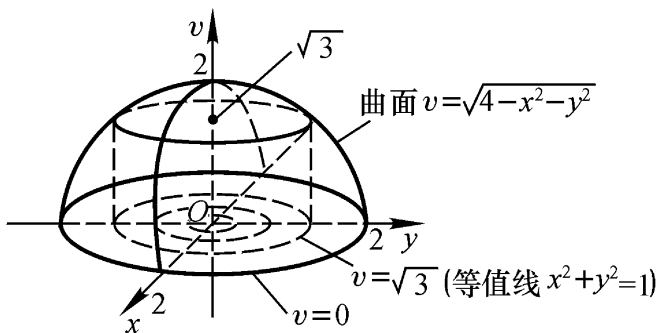


图 9.12

定义 9.13 设点 $P_0 \in D$, l 是从 P_0 引出的射线 (图 9.13), \mathbf{l} 为其方向向量. 在 l 上取一邻近点 P_0 的动点 P , 记 $|PP_0| = \rho$, 如果当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 比式

$$\frac{u(P) - u(P_0)}{|PP_0|}$$

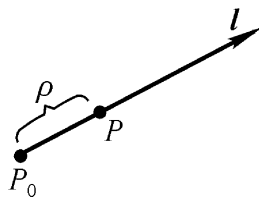


图 9.13

的极限存在, 则称之为场 (函数) $u = u(P)$ 在点 P_0 处沿 \mathbf{l} 方向

的方向导数, 记为 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{P_0}$, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{P_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(P) - u(P_0)}{\rho} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{|PP_0|}.$$

由定义 9.13 知, 方向导数就是函数 $u = u(P)$ 沿指定方向对距离 ρ 的变化率, 当 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{P_0} > 0$ 时, 函数 u 在 P_0 处沿 \mathbf{l} 方向是增加的, 当 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{P_0} < 0$ 时, 函数 u 在 P_0 处沿 \mathbf{l} 方向是减小的.

如果引进空间直角坐标系 $Oxyz$, 数量场 $u = u(P)$, $P \in D$ 可以通过 D 上的三元函数 $u = u(x, y, z)$ 表达. 关于方向导数的存在性及其计算, 有下面的定理.

定理 9.9 设 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 则函数 $u(x, y, z)$ 在点 P_0 处沿任意指定方向 \mathbf{l} 的方向导数都存在, 且

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0} \cos \gamma, \quad (1)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 \mathbf{l} 的方向余弦.

证明 在射线 l 上取邻近 P_0 的动点 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 由直线的参数方程知, $\Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta, \Delta z = \rho \cos \gamma$ ($\rho = |PP_0|$). 因函数 u 在点 P_0 处可微, 故

$$u(P) - u(P_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0} \Delta z + o(\rho).$$

两边同除以 ρ , 令 $\rho \rightarrow 0$, 取极限, 即得所证. \square

由公式 (1) 知, 计算方向导数只需知道 l 的方向及函数的偏导数. 但是务必

注意, 偏导数存在不足以保证各方向导数都存在 .

例 1 求 $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 处沿向量 $\mathbf{l} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 方向的方向导数 .

解 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yz + x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2zx + y^2$$

都连续, 又

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,1,1)} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,1,1)} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,1,1)} = 3,$$

且 \mathbf{l} 的方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{1}{6}, \quad \cos \beta = \frac{-2}{6}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{6},$$

所以

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_{(1,1,1)} = \frac{3}{6} + \frac{-6}{6} + \frac{3}{6} = 0.$$

9.8.2 梯度

方向导数描述了函数 $u = u(P)$ 在一点处沿某一方向的变化率, 但从一点发出的射线有无穷多条, 能否既简单又全面地掌握函数在一点处的变化情况呢? 沿哪个方向变化率最大, 这个最大的变化率为多少? 为解决这些问题, 下面来分析一下点 $P(x, y, z)$ 处方向导数的公式

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

它等于下述两个向量的数量积:

$$\mathbf{l}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

其中 \mathbf{l}^0 是 \mathbf{l} 方向的单位向量, 与点 P 的位置无关, \mathbf{G} 依赖于点 P 的位置, 与 \mathbf{l} 的方向无关 .

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{l}^0 = |\mathbf{G}| \cos(\mathbf{G}, \mathbf{l}) = \text{Prj}_{\mathbf{l}} \mathbf{G}.$$

这说明方向导数等于向量 \mathbf{G} 在 \mathbf{l} 上的投影 . 只要知道向量 \mathbf{G} , 任何方向的方向导数就都清楚了 . 所以 \mathbf{G} 在数量场 (函数) 的研究中十分重要 . 当 \mathbf{l} 与 \mathbf{G} 方向一致时, 方向导数最大, 等于 $|\mathbf{G}|$. 所以, 向量 \mathbf{G} 的方向是函数 $u(P)$ 在点 P 处变化率最大的方向, 其模 $|\mathbf{G}|$ 是这个最大的变化率 .

定义 9.14 数量场 (函数) $u(P)$ 在点 P 处的梯度是个向量, 其方向为 $u(P)$

在点 P 的变化率最大的方向, 其模恰好等于这个最大的变化率, 记为 $\text{grad } u$.

在空间直角坐标系下, 梯度的表达式为

$$\text{grad } u = \frac{u}{x} \mathbf{i} + \frac{u}{y} \mathbf{j} + \frac{u}{z} \mathbf{k} = \frac{(u)}{(x, y, z)} \quad (2)$$

梯度 $\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{u}{z}$ 恰好是过点 P 的等值面 $u(x, y, z) = C$ 在点 P 处的一个法向量. 由梯度的定义、公式 (2) 以及求导法则, 可以直接推出下列性质 (见图 9.14) 及运算法则.

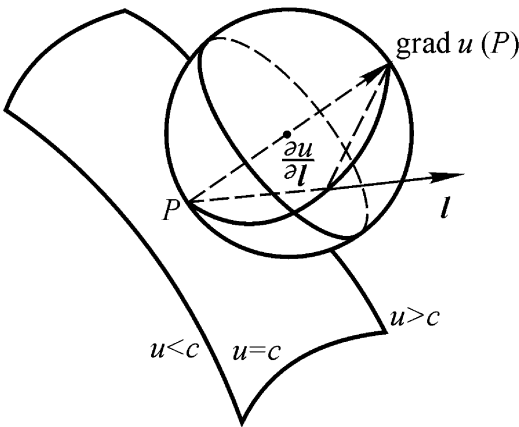


图 9.14

1. 方向导数等于梯度在该方向投影, 即

$$\frac{u}{l} = \text{Prj}_l \mathbf{G}.$$

2. 梯度 $\text{grad } u(P)$ 垂直于过点 P 的等值面, 并指向 $u(P)$ 增大的方向.

3. 梯度运算法则

$$\text{grad } C = \mathbf{0} \quad (C \text{ 为常数}).$$

$$\text{grad}(C_1 u_1 + C_2 u_2) = C_1 \text{grad } u_1 + C_2 \text{grad } u_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}).$$

$$\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad } u_2 + u_2 \text{grad } u_1.$$

$$\text{grad} \frac{u_1}{u_2} = (u_2 \text{grad } u_1 - u_1 \text{grad } u_2) / u_2^2 \quad (u_2 \neq 0).$$

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u.$$

其中 u, u_1, u_2, f 都是可微的函数.

例 2 求电位 $u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 的梯度.

解 设 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$, 由法则 有

$$\text{grad } u = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{grad } r,$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{r}{x} \mathbf{i} + \frac{r}{y} \mathbf{j} + \frac{r}{z} \mathbf{k} = \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} = \mathbf{r}^0,$$

故

$$\operatorname{grad} u = -\frac{q}{4r^2} \mathbf{r}^0 = -\mathbf{E}.$$

这说明电场强度 \mathbf{E} 是与电位 u 的梯度相反的向量.

最后介绍一个美妙和谐的向量微分算子 ∇ . 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下, 记

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

称之为哈密顿 (Hamilton) 算子, 符号 ∇ 读作“那勃勒” (Nabla), 则

$$\operatorname{grad} u = \nabla u.$$

9.9 例题

例 1 已知 $u = f(t)$, $t = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

求 $f(t)$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(t) \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t) \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + f(t) \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

根据此题中 x, y, z 地位同等, 可直接得到 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 代入 (1) 得

$$f(t) \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + f(t) \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

整理, 并注意 $x^2 + y^2 + z^2 = e^t$, 得

$$f(t) + f(t) = e^{-t}.$$

这是二阶常系数非齐线性微分方程, 其通解为

$$f(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - t e^{-t}.$$

例 2 设 $z = f(x, u, v)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y, u)$, f, g, h 均可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及

$$\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 在多元复合函数中, 如果有的变量既是中间变量又是自变量, 利用全微分形式不变性去求偏导数, 有时很方便, 且不易出错. 取三个式子的全微分, 得

$$dz = f_x dx + f_u du + f_v dv,$$

$$du = g_x dx + g_y dy,$$

$$dv = h_x dx + h_y dy + h_u du.$$

将后两式代入第一式,得

$$\begin{aligned} dz &= f_x dx + f_u [g_x dx + g_y dy] + f_v [h_x dx + h_y dy + h_u (g_x dx + g_y dy)] \\ &= [f_x + f_u g_x + f_v h_x + f_v h_u g_x] dx + [f_u g_y + f_v h_y + f_v h_u g_y] dy, \end{aligned}$$

故

$$\frac{z}{x} = f_x + f_u g_x + f_v h_x + f_v h_u g_x,$$

$$\frac{z}{y} = f_u g_y + f_v h_y + f_v h_u g_y.$$

用隐函数求导法也很方便.设

$$F_1 = z - f(x, u, v), \quad F_2 = u - g(x, y), \quad F_3 = v - h(x, y, u).$$

则

$$\frac{(F_1, F_2, F_3)}{(z, u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & -f_u & -f_v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -h_u & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\frac{(F_1, F_2, F_3)}{(x, u, v)} = \begin{vmatrix} -f_x & -f_u & -f_v \\ -g_x & 1 & 0 \\ -h_x & -h_u & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -f_x - f_v h_u g_x - f_v h_x - f_u g_x,$$

$$\begin{aligned} \frac{(F_1, F_2, F_3)}{(y, u, v)} &= \begin{vmatrix} 0 & -f_u & -f_v \\ -g_y & 1 & 0 \\ -h_y & -h_u & 1 \end{vmatrix} \\ &= -f_v h_u g_y - f_v h_y - f_u g_y. \end{aligned}$$

故

$$\frac{z}{x} = f_x + f_v h_u g_x + f_v h_x + f_u g_x,$$

$$\frac{z}{y} = f_v h_u g_y + f_v h_y + f_u g_y.$$

例 3 隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xz + 2z - 1 = 0$$

确定,求其极值.

解 令

$$\frac{z}{x} = -\frac{x - 2z}{4z - 2x + 1} = 0, \quad \frac{z}{y} = -\frac{y}{4z - 2x + 1} = 0.$$

解得 $x = 2z, y = 0$, 代入原方程得 $z = \frac{1}{2}$, 故驻点为 $(1, 0)$. 又

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \bigg|_{(1,0)} = -1, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{(1,0)} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \bigg|_{(1,0)} = -1.$$

$A < 0, AC - B^2 = 1 > 0$, 所以当 $x = 1, y = 0$ 时 z 取极大值 $\frac{1}{2}$.

此题也可视 $f = z$ 为目标函数, 求其在条件 $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xz + 2z - 1 = 0$ 下的条件极值.

例 4 求实二次型

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$$

在单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最大值与最小值.

解 设拉格朗日函数

$$F = f(x, y, z) + (1 - x^2 - y^2 - z^2).$$

由方程组

$$\begin{aligned} F_x &= 2[(A - 1)x + Fy + Ez] = 0, \\ F_y &= 2[Fx + (B - 1)y + Dz] = 0, \\ F_z &= 2[Ex + Dy + (C - 1)z] = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

中最后一个方程知 x, y, z 不全为零, 故前三个方程构成的齐次线性方程组有非零解, 因此系数行列式

$$\begin{vmatrix} A - 1 & F & E \\ F & B - 1 & D \\ E & D & C - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

所以拉格朗日乘数 λ_0 是二次型矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的特征值. 方程组 (2) 解得的 $(x_0, y_0, z_0)^T$, 是 \mathbf{G} 的属于特征值 λ_0 的单位特征向量. 此时二次型的值

$$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) \mathbf{G} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = \lambda_0.$$

由此可见, 这个条件极值问题的最大值就是 \mathbf{G} 的最大特征值 λ_{\max} , 最小值就是 \mathbf{G} 的最小特征值 λ_{\min} .

请读者通过等值面、二次曲面对这个问题作几何的思考.

例 5 某处地下埋有物品 E , E 在大气中散发着特有的气味, 气味的浓度在地平面上的分布为 $v = e^{-k(x^2 + 2y^2)}$ (k 为正的常数), 警犬在点 (x_0, y_0) 处嗅到气味后, 沿着气味最浓的方向搜寻, 求警犬搜寻的路线.

解法 1 设警犬搜寻路线为 $y = y(x)$, 在各点 (x, y) 处前进的方向是曲线 $y = y(x)$ 的切向量 $\{1, \frac{dy}{dx}\}$ 的方向. 而气味最浓的方向是 v 的梯度方向

$$\text{grad } v = e^{-k(x^2 + 2y^2)} (-k)(2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}).$$

故 $y = y(x)$ 满足初值问题

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dx} &= 2y, \\ y|_{x_0} &= y_0. \end{aligned}$$

由分离变量法解得:

当 $x_0 \neq 0$ 时, 搜寻曲线为 $y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2$;

当 $x_0 = 0$ 时, 搜寻曲线为 $x = 0$.

解法 2 气味的等值线为

$$x^2 + 2y^2 = C,$$

两边求导, 得到等值线满足的微分方程

$$x + 2yy' = 0.$$

由于警犬沿着气味的梯度方向搜寻, 所以搜寻曲线与气味等值线正交, 故搜寻曲线满足初值问题

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= 0, \\ y|_{x_0} &= y_0. \end{aligned}$$

以下同解法 1.

习 题 九

9.1

1. 将圆弧所对之弦长 L 表为: (1) 半径 r 与圆心角 的函数; (2) 半径 r 与圆心到弦的距离 d 的函数(这里 $<$).

2. 某水渠的横断面是一等腰梯形(见图 9.15), 设 $AB = x$, $BC = y$, 渠深为 z , 试将水渠横断面面积 A 表为 x, y, z 的函数.

3. 质量为 M 的质点位于定点 (a, b, c) 处, 将质量为 m 的质点置于点 (x, y, z) 处, 试将它们之间的万有引力在三个坐标轴上的投影 F_x, F_y, F_z 表示为 x, y, z 的函数.

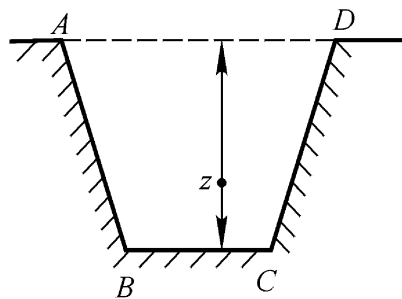


图 9.15

4. 确定并给出下列函数的定义域, 画出定义域并指出其中的开区域与闭区域, 连通集与非连通集, 有界域与无界域.

(1) $z = x - y$;

(2) $z = 2 - x^2 - y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$;

(3) $z = \ln[x \ln(y - x)]$;

(4) $u = \frac{1}{\arccos(x^2 + y^2 + z^2)}$.

5. 若 $z = x + y + f(x - y)$, 且当 $y = 0$ 时, $z = x^2$, 求函数 f 与 z .

6. 若 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2xy$, 试证 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$.

7. 若 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

8. 求下列极限:

(1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} [1 + \sin(xy)]^{\frac{1}{xy}}$;

(2) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{xy + 1 - 1}$.

9. 指出下列函数的间断点:

(1) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

(2) $z = \ln|4 - x^2 - y^2|$;

(3) $u = e^{\frac{1}{z}} / (x - y^2)$.

10. 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

的连续性.

11. 设函数 $f(x, y)$ 在闭域: $|x| \leq a, |y| \leq b$ 上连续, 且是正定的 (即当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $f(x, y) > 0, f(0, 0) = 0$). 试证对适当小的正数 C , 方程 $f(x, y) = C$ 的图形中含有一条包围着原点 $(0, 0)$ 的闭曲线.

9 2

1. 设 $f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin \frac{x}{y}$, 求 $f_x(x, 1)$.

2. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2xy}\sin(x^2y), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ 求 $f_x(0, 1), f_y(0, 1)$.

3. 求下列函数的偏导数:

(1) $z = (1 + xy)^y$;

(2) $z = e^{-x} \sin(x + 2y)$;

(3) $z = \arctan \frac{y}{x}$;

(4) $z = \arcsin(y - x)$;

(5) $u = xe^{xyz}$;

(6) $u = z \ln \frac{x}{y}$.

4. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z = \cos(xy)$;

(2) $z = x^{2y}$;

(3) $z = e^x \cos y$;

(4) $z = \ln(e^x + e^y)$.

5. 验证下列给定的函数满足指定的方程.

(1) $z = \frac{xy}{x+y}$, 满足 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$;

(2) $z = e^{x/y^2}$, 满足 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

(3) $z = \ln(x^2 + y^2)$, 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

(4) $z = 2\cos^2 x - \frac{t}{2}$, 满足 $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$.

6. 已知方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 有形如 $u = (\frac{y}{x})$ 的解, 求出此解.

7. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^6}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

试证 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续, 但在点 $(0, 0)$ 处两个偏导数都存在, 且两个偏导数在点 $(0, 0)$ 处不连续.

8. 设当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$; $f(0, 0) = 0$. 讨论 $f_{xy}(0, 0)$ 是否存在.

9. 在区域 D 上, $f_x(x, y) > 0$, 对函数 $z = f(x, y)$ 可以得到哪些几何信息?

10. 设二元函数 f 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内的偏导数 f_x 与 f_y 都有界, 证明 f 在 $U(P_0)$ 内连续.

9 3

1. 求下列函数在指定点 M_0 处和任意点 M 处的全微分.

(1) $z = x^2 y^3$, $M_0(2, 1)$;

(2) $z = e^{xy}$, $M_0(0, 0)$;

(3) $z = x \ln(xy)$, $M_0(-1, -1)$;

(4) $u = \cos(xy + xz)$, $M_0(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

2. 用全微分定义, 求函数 $z = 4 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ 在点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 处的全微分.

3. 试证函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, 但不可微.

4. 计算 $(10.1)^{2.03}$ 的近似值.

5. 有一直角三角形, 测得两直角边分别为 7 cm 和 24 cm, 测量的精度为 ± 0.1 cm. 试求利用上述两值计算出的斜边长的误差.

6. 函数 $z = f(x, y)$ 在凸的区域 D 上, $\frac{\partial z}{\partial x} \geq 0$ 的充要条件是什么? $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \geq 0$ 的充要条件是什么? $dz \geq 0$ 的充要条件是什么? (凸的区域 D , 是指 D 内任意两点间的直线段都位于 D 内的区域.)

7. 若 $f_x(x_0, y_0)$ 存在, $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 试证函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

8. 已知二元函数 $z = f(x, y)$ 可微, 两个偏增量

$$\Delta_x z = (2 + 3x^2 y^2) \Delta x + 3xy^2 \Delta x^2 + y^2 \Delta x^3,$$

$$\Delta_y z = 2x^3 y \Delta y + x^3 \Delta y^2,$$

且 $f(0, 0) = 1$, 求 $f(x, y)$.

9.4

1. 用链导法则求下列函数的偏导数:

$$(1) z = (x^2 + y^2) \exp \frac{x^2 + y^2}{xy}; \quad (2) z = \frac{xy}{x+y} \arctan(x+y+xy).$$

2. 求下列函数的全导数:

$$(1) u = \tan(3t + 2x^2 - y), \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = t;$$

$$(2) u = e^{x-2y} + \frac{1}{t}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3.$$

$$3. \text{ 已知 } z = e^u \sin v, \quad u = xy, \quad v = x - y, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

4. 设 f 与 g 是可微函数, 求下列复合函数的一阶偏导数:

$$(1) z = f(x+y, x^2 + y^2); \quad (2) z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right);$$

$$(3) u = f(xy)g(yz); \quad (4) u = f(x - y^2, y - x^2, xy).$$

5. 设 f 具有连续二阶偏导数, 对下列函数求指定的偏导数:

$$(1) z = f(u, x, y), \quad u = xe^y, \quad \text{求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$(2) z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right), \quad \text{求 } \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ 及 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

6. 证明下列函数 u 满足指定的方程:

$$(1) \text{ 设 } u = (x+at)^2 + (x-at)^2, \text{ 其中 } a \text{ 为常数, 具有二阶导数, 证明 } u \text{ 满足方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$(2) \text{ 设 } z = f[x + (y)^2], \text{ 其中 } f \text{ 可微, } f \text{ 具有二阶连续的导数, 证明}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$(3) \text{ 如果函数 } u = f(x, y, z) \text{ 满足关系}$$

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z),$$

则称此函数为 k 次齐次函数. 证明当 f 可微时, k 次齐次函数满足方程

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = kf(x, y, z).$$

反之, 满足此方程的函数, 必为 k 次齐次函数.

$$7. \text{ 已知函数 } z = f(x, y) \text{ 有连续的二阶偏导数, 且满足方程 } a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

0, 作变换, 令 $u = x + ay, v = x - ay$, 试求 z 作为 u, v 的函数所应满足的方程.

8. 设变换 $u = x - 2y, v = x + ay$ 可把方程 $6 \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{x y} - \frac{z^2}{y^2} = 0$ 简化为 $\frac{z^2}{u v} = 0$, 求常数 a .

9. 设 $u = f(x, y, z)$ 可微, 且满足关系 $\frac{u_x}{x} = \frac{u_y}{y} = \frac{u_z}{z}$, 试证作变换 $x = \sin \cos$, $y = \sin \sin$, $z = \cos$ 后, u 仅是 的函数.

10. 利用全微分形式不变性和微分运算法则, 求下列函数的全微分和偏导数.

$$(1) u = f(x - y, x + y); \quad (2) u = f(xy, \frac{x}{y});$$

$$(3) u = f(\sin x + \sin y, \cos x - \cos z).$$

9 5

1. 求下列方程所确定的隐函数 z 的一阶和二阶偏导数.

$$(1) \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}; \quad (2) x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$$

2. 利用全微分形式不变性, 求下列隐函数 z 的全微分及偏导数.

$$(1) xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 2; \quad (2) z - y - x + xe^{z-y-x} = 0.$$

3. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $ax + by + cz = (x^2 + y^2 + z^2)$ 所确定, 其中 可微, 证明

$$(cy - bz) \frac{z}{x} + (az - cx) \frac{z}{y} = bx - ay.$$

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$ 所确定. 证明

$$x \frac{z}{x} + y \frac{z}{y} = z - xy.$$

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$ 所确定, 其中 具有连续的二阶导数, 证明

$$\frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2}{y^2} = \frac{z^2}{x y}.$$

6. 设 $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 其中 F 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{z^2}{x y}$.

7. 已知函数 $z = z(x, y)$ 可微, 且 $\frac{z}{x} = 0$, 满足方程 $(x - z) \frac{z}{x} + y \frac{z}{y} = 0$, 若将 x 作为 y, z 的函数, 它应满足怎样的方程?

8. 求曲线 $F(x, y) = 0$ 的曲率, 设 F 具有二阶连续的偏导数.

9. 求下列方程组所确定隐函数的导数或偏导数.

$$(1) \quad \begin{aligned} z &= x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 20. \end{aligned} \quad \text{求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}.$$

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= f(ux, v + y), \\ v &= g(u - x, v^2 y), \end{aligned} \quad \text{其中 } f, g \text{ 具有一阶连续偏导数, 求 } \frac{u}{x}, \frac{v}{x};$$

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= e^u + u \sin v, \\ y &= e^u - u \cos v, \end{aligned} \quad \text{求 } \frac{u}{x} \text{ 及 } \frac{v}{y}.$$

10. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 均有一阶连续的偏导数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

11. 设 $u = f(x, y, z)$, $(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f 具有一阶连续的偏导数, 且 $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

12. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq 0$, 证明对函数的值域内任意给定的值 C , $f(x, y) = C$ 为直线的充要条件是

$$(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

9.6

1. 求下列曲线在指定点处的切线与法平面.

$$(1) \quad x = at, y = bt^2, z = ct^3, \text{ 在 } t = 1 \text{ 的对应点};$$

$$(2) \quad x = \cos t + \sin^2 t, y = \sin t(1 - \cos t), z = \cos t, \text{ 在 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 的对应点};$$

$$(3) \quad x = y^2, z = x^2, \text{ 点 } (1, 1, 1);$$

$$(4) \quad 2x^2 + y^2 + z^2 = 45, x^2 + 2y^2 = z, \text{ 点 } (-2, 1, 6).$$

2. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求出一点, 使曲线在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

3. 证明螺旋线 $x = a \cos k$, $y = a \sin k$, $z = k$ 上任一点的切向量与 z 轴正向的夹角为定角.

4. 求下列曲面上指定点处的切平面方程和法线方程.

$$(1) \quad z = x^2 + y^2, \text{ 点 } (3, 4, 5);$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \text{ 点 } (1, 2, -1);$$

$$(3) \quad x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3, \text{ 在 } (u_0, v_0) = (2, 1) \text{ 的对应点处}.$$

5. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 并写出此法线方程.

6. 设 $f(u, v)$ 可微, 证明曲面 $f(ax - bz, ay - cz) = 0$ 上任一点的切平面都与某一定直线平行, 其中 a, b, c 是不同时为零的常数.

7. 设 $f(u, v)$ 可微, 证明曲面 $f\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right) = 0$ 上任一点的切平面都过定点.

8. 证明曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 上任一点处的切平面和三个坐标面所围四面体的体积是一常数.

9. 设 $f(x) \neq 0$, 证明旋转曲面 $z = f(x^2 + y^2)$ 上任一点的法线都与旋转轴 z 相交.

10. 求螺旋面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ 的法线与 z 轴的夹角.

11. 证明曲面 $e^{2x-z} = f(y - 2z)$ 是柱面, 其中 f 可微.

9.7

1. 求 $f(x, y) = \sin x \sin y$ 在点 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ 处的一阶泰勒公式.

2. 求下列函数的极值:

(1) $z = 3axy - x^3 - y^3, a > 0;$ (2) $z = e^{2x}(x + 2y + y^2).$

3. 求函数 $f(x, y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 在矩形闭区域: $-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ 上的最大值与最小值. 此题的结果说明什么?

4. 在 Oxy 平面上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三条直线的距离的平方和最小.

5. 已知函数 $z = z(x, y)$ 在区域 D 内满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c = 0$ (常数 $c > 0$), 证明在 D 内函数 $z = z(x, y)$ 无极值.

6. 证明周长为常数 $2p$ 的三角形中, 等边三角形面积最大.

7. 求下列函数在指定的约束条件下的极值点.

(1) $u = x - 2y + 2z$, 条件为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(2) $u = xyz$, 条件为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

8. 某公司通过电台和报纸做某种商品的销售广告, 根据统计资料, 销售收入 R (万元) 与电台广告费用 x (万元) 及报纸广告费用 y (万元) 之间有如下经验关系

$$R = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2.$$

(1) 在广告费不限的情况下, 求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费为 1.5(万元), 求相应的最优广告策略.

9. 设生产某种产品必需投入两种要素, x_1 和 x_2 分别为两种要素的投入量,

Q 为产品的产出量. 若生产函数为 $Q = 2x_1x_2$, 其中 α, β 为正的常数, 且 $\alpha + \beta = 1$. 假设两种要素的价格分别为 P_1 和 P_2 , 问当产出量为 12 时, 两种要素各投入多少可使得投入的总费用最少?

10. 在曲面 $z = \sqrt{2 + x^2 + 4y^2}$ 上求一点, 使它到平面 $x - 2y + 3z = 1$ 的距离最近.

11. 求椭球面 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 被平面 $x + y + z = 0$ 截得的椭圆的长半轴与短半轴.

12. 确定正数 a , 使椭球面 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2$ 与平面 $3x - 2y + z = 34$ 相切.

13. 修建一个容积为 V 的长方体的水池(无盖), 已知底面与侧面单位面积造价比为 3:2, 问如何设计水池的长 x , 宽 y , 高 z , 使总造价最低.

14. 将长为 l 的线段分为三段, 一段围成圆, 一段围成正方形, 一段围成正三角形, 问如何分 l 才能使它们的面积之和最小, 并求这个最小值.

15. 将正数 a 分成 n 个非负数之和, 使其乘积最大, 并由此导出 n 个正数的几何平均值不超过其算术平均值.

16. 三角形的顶点分别在三条不相交的曲线 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 及 $h(x, y) = 0$ 上, 其中 f, g, h 均可微, 且 $f_y, g_y, h_y \neq 0$. 如果三角形的面积能取得极值, 试证面积取极值时的三角形的顶点处, 曲线的法线必过三角形的垂心.

17. 证明光滑曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上离原点最近的点处的法线必过原点.

9.8

1. 求数量场 $u = x^2 + y^2 - 2z^2 + 3xy + xyz - 2z - 3y$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的梯度, 和沿方向 $\mathbf{l} = \{1, -1, 0\}$ 的方向导数.

2. 设数量场 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求

(1) 梯度为零向量的点;

(2) 在点 $(2, 0, 1)$ 处, 沿哪一个方向, u 的变化率最大; 并求此最大变化率;

(3) 使其梯度垂直于 Oz 轴的点.

3. 指出数量场 $u = u(x, y, z)$ 在一点 (x_0, y_0, z_0) 处的梯度, 方向导数, 等值面及全微分之间的关系.

4. 求 $u = xyz$ 在点 $M(3, 4, 5)$ 处沿锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的法线方向的方向导数.

5. 求 $u = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 在点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的内法线的方向导数.

6. 求函数 $w = e^{-2y} \ln(x + z^2)$ 在点 $(e^2, 1, e)$ 处沿曲面 $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = e^{uv}$ 的法向量的方向导数(注意思考:以参数方程给出的曲面(双参数)如何求法向量)。

7. 计算 $\text{grad}[\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \ln(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})]$, 其中 \mathbf{c} 为常向量, \mathbf{r} 为向径, 且 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} > 0$ 。

8. 证明 $\text{grad} u$ 为常向量的充要条件是 u 为线性函数, $u = ax + by + cz + d$ 。

9. 海平面上点 (x_0, y_0) 处, 一条鲨鱼嗅到水中有血腥味后, 时时刻刻向着血腥味最浓的方向游动, 设海水中海平面上点 (x, y) 处血液浓度(每百万份水中含血的份数)为 $C = \exp - (x^2 + 2y^2) / 10^4$, 求鲨鱼游动的路线。

9 9

1. 设 $f(x, y, z)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处连续, 其他点处可微, 且 $x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} + z \frac{f}{z} > a > 0$, 则 $f(0, 0, 0)$ 是 $f(x, y, z)$ 的()。

(A) 最大值

(B) 最小值

(C) 极大值, 不一定最大

(D) 极小值, 不一定最小

2. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 沿任何方向的方向导数都存在, 且相等, 那么 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处, 偏导数是否存在? 是否可微?

3. 设 $z = \sin(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ 。

4. 设 $x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w)$ 确定 u, v, w 是 x, y, z 的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 。

5. 设 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = f(u, v)$ 确定 z 是 x, y 的二元函数, 试求出偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的计算公式。

6. 已知 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 处可微, $\mathbf{l} = \{2, -2\}, \mathbf{l} = \{-2, 0\}$ 且 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = 1, \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = -3$, 求 z 在 P_0 处的梯度, 全微分, 及沿 $\mathbf{l} = \{3, 2\}$ 方向的方向导数。

7. 设函数 $u = F(x, y, z)$ 在条件 $\phi(x, y, z) = 0$ 和 $\psi(x, y, z) = 0$ 下, 在点 (x_0, y_0, z_0) 处取极值 m . 试证三个曲面 $F(x, y, z) = m, \phi(x, y, z) = 0$ 和 $\psi(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的三条法线共面. 这里 F, ϕ, ψ 都具有连续的一阶偏导数, 且每个函数的三个偏导数不同时为零。

8. 利用求条件极值的方法, 证明对任何正数 a, b, c , 都有不等式

$$abc^3 \geq 27 \frac{a+b+c}{5}^5.$$

9. 已知四边形的四个边边长为 a, b, c, d , 问何时四边形面积最大?

10. 计划建设的国家大剧院的房顶为一椭球壳型(被称为世纪之蛋), 假设其方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$, 问雨水落在房顶上点 (x_0, y_0, z_0) 处后, 受重力的作用向下滑落的曲线方程.

第十章 多元函数积分学

10.1 黎曼积分

10.1.1 黎曼积分的概念

为了解决非均匀分布在某区间上的量的总量问题,在第六章中引入了定积分概念,它的两个要素是被积函数与积分区间.处理问题的主导思想是:“整体由局部构成,局部线性化,近似中寻精确”.通过“分割、作积、求和、取极限”四步解决问题.

客观上,有许多量非均匀地分布在几何形体上,这里几何形体包括二维或三维空间有界闭域和空间曲线段或曲面片.比如,已知质量密度求质量问题;已知电荷密度求电量问题;曲顶柱体体积问题等等.为了解决这些总量问题,我们将定积分的思想与方法推广到几何形体上,就产生了在几何形体上点函数 $f(P)$ 的黎曼积分.这是本章的核心内容.

定义 10.1 设 $f(P)$ 是几何形体上有定义的点函数.将 分割为 n 个小的几何形体 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, 同时用它们表示其度量(面积、体积或弧长).称数 $d_i = \sup_{P_1, P_2 \in \sigma_i} d(P_1, P_2)$ 为 σ_i 的直径,记

$$D = \max_{i=1, 2, \dots, n} (d_i).$$

任取点 $P_i \in \sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$, 作乘积的和式

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) d_i.$$

如果不论怎样分割以及怎样取点 P_i , 极限

$$\lim_{D \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) d_i$$

都存在,且为同一个值,则称此极限值为函数 $f(P)$ 在几何形体上的黎曼积分,记为 $\int f(P) d$, 即

黎曼 Riemann G.F.B. 1826—1866, 德国数学家、数学物理学家.

$$\int_D f(P) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \sigma_i. \quad (1)$$

此时也说 $f(P)$ 在 D 上可积, 称 $f(P)$ 为被积函数, $f(P)d\sigma$ 为被积表达式, D 为积分域, $d\sigma$ 为 D 的度量微元.

关于黎曼积分的存在性定理, 仅叙述如下, 不予证明.

定理 10.1 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则 $f(P)$ 在 D 上可积.

10.1.2 黎曼积分的性质

由黎曼积分的定义和极限运算的性质, 不难看出黎曼积分具有下列性质. 为简便计, 约定下面涉及到的积分都是存在的.

1. 当 $f(P) \equiv 1$ 时, 它在 D 上的积分等于 D 的度量, 即

$$\int_D 1 d\sigma = \sigma(D).$$

2. 线性性质

$$\int_D [af(P) + bg(P)] d\sigma = a \int_D f(P) d\sigma + b \int_D g(P) d\sigma,$$

其中 a, b 为常数.

3. 对积分域的可加性质 若将 D 分割为两部分 D_1, D_2 , 则

$$\int_D f(P) d\sigma = \int_{D_1} f(P) d\sigma + \int_{D_2} f(P) d\sigma.$$

4. 比较性质

(i) 若 $f(P) \leq g(P)$, $\forall P \in D$, 则

$$\int_D f(P) d\sigma \leq \int_D g(P) d\sigma.$$

(ii) $\left| \int_D f(P) d\sigma \right| \leq \int_D |f(P)| d\sigma.$

5. 估值性质 若 $m \leq f(P) \leq M$, $\forall P \in D$, 则

$$m \sigma(D) \leq \int_D f(P) d\sigma \leq M \sigma(D).$$

6. 积分中值定理 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则在 D 上至少存在一点 P^* , 使得

$$\int_D f(P) d\sigma = f(P^*) \sigma(D).$$

证明 因 $f(P) \in C(D)$, 故有最大值 M 和最小值 m ,

$$m \leq f(P) \leq M, \quad \forall P \in D.$$

由估值性质得

$$m \sigma(D) \leq \int_D f(P) d\sigma \leq M \sigma(D),$$

故

$$m = \frac{1}{M} \int_M f(P) dM.$$

再由闭域上连续函数的介值定理知, 有点 P^* , 使

$$f(P^*) = \frac{1}{M} \int_M f(P) dM. \quad \square$$

7. 对称性质 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下, 设积分域 Ω 关于坐标面 $x=0$ (即 Oyz 面) 对称. 若被积函数是 x 的奇函数 (即满足 $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dV = 0;$$

若被积函数是 x 的偶函数 (即满足 $f(-x, y, z) = f(x, y, z)$), 则

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dV = 2 \int_{\Omega^+} f(x, y, z) dV,$$

其中 $\Omega^+ = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in \Omega, \text{ 且 } x \geq 0\}$.

由对积分域的可加性和黎曼积分的定义不难证明这条性质.

当 Ω 关于其他坐标面对称, 并且被积函数有相应的奇偶性时, 有类似的性质, 当 Ω 是 Oxy 面上的平面区域或曲线段, 且关于坐标轴对称时, 也有类似的性质.

10.1.3 黎曼积分的分类

按几何形体 Ω 的类型, 多元函数的黎曼积分分为以下四类.

1. 二重积分 当几何形体 Ω 为平面有界闭区域, $f(P)$ 是 Ω 上的二元点函数时, 则称黎曼积分 (1) 为函数 $f(P)$ 在区域 Ω 上的二重积分, 记为 $\int_{\Omega} f(P) d\sigma$, 即

$$\int_{\Omega} f(P) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \sigma_i,$$

这里 $d\sigma$ 是面积微元.

例 1 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在 Oxy 平面的有界闭域 Ω 上非负、连续, 则以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶, Ω 为底, Ω 的边界线为准线, 母线平行于 z 轴的柱面为侧面的曲顶柱体 (图 10.1) 的体积

$$V = \int_{\Omega} f(x, y) d\sigma,$$

这就是二重积分的几何意义.

例 2 已知平板 Ω 的质量面密度 $\mu = \mu(P)$,

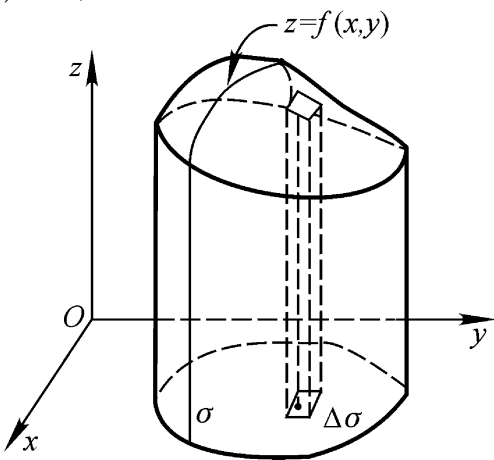


图 10.1

则平板 的质量

$$m = \int_D \rho(P) dA .$$

例 3 已知水管的横截面 上各点水的流动的速率 $v = v(P)$, 流动方向均与 垂直, 则单位时间内穿过 水的流量

$$Q = \int_D v(P) dA .$$

2. 三重积分 当几何形体 为三维空间的有界闭区域(立体) V , $f(P)$ 是 V 上的三元点函数时, 则称黎曼积分(1)为函数 $f(P)$ 在区域 V 上的三重积分, 记为 $\int_V f(P) dV$, 即

$$\int_V f(P) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) V_i ,$$

这里 dV 是体积微元 .

例 4 已知物体 V 的质量体密度 $\mu = \mu(P)$, 则该物体的质量

$$m = \int_V \mu(P) dV .$$

3. 对弧长的曲线积分 当几何形体为平面内或空间内的曲线段 l , $f(P)$ 是 l 上的点函数时, 称黎曼积分(1)为函数 $f(P)$ 在曲线 l 上对弧长的曲线积分(或称第一型曲线积分), 记为 $\int_l f(P) ds$, 即

$$\int_l f(P) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) s_i ,$$

这里 ds 是 l 的弧长微元 .

例 5 若已知物质曲线段 l 的质量线密度 $\rho = \rho(P)$, 则曲线段的质量

$$m = \int_l \rho(P) ds .$$

4. 对面积的曲面积分 当几何形体为空间曲面片 S , $f(P)$ 为 S 上的点函数时, 则称黎曼积分(1)为函数 $f(P)$ 在曲面 S 上对面积的曲面积分(或称第一型曲面积分), 记为 $\int_S f(P) dS$, 即

$$\int_S f(P) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) S_i ,$$

这里 dS 是曲面的面积微元 .

例 6 已知曲面片 S 上带静电, 电荷分布面密度 $\sigma = \sigma(P)$, 则 S 上静电总量

弧长微元 ds , 通常也记为 dl , 以后两者通用 .

$$q = \iint_S f(P) dS,$$

见图 10.2.

黎曼积分是由被积函数 $f(P)$ 和积分域 确定的一个数, 它的计算是以一元函数的定积分为基础的, 下面几节将分别介绍二重积分, 三重积分, 对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分是如何通过定积分计算的.

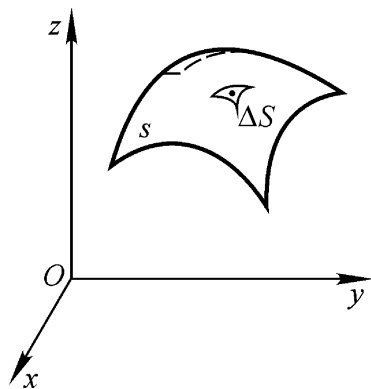


图 10.2

10.2 二重积分的计算

二重积分、三重积分统称为重积分. 本节仅借助于二重积分的几何意义来给出它的计算方法. 由 10.1 节例 1 知, 当 $f(P) \geq 0$ 时, 二重积分 $\iint_S f(P) dS$ 可视为一曲顶柱体的体积, 当 $f(P) < 0$ 时, $\iint_S f(P) dS$ 等于一曲底柱体体积的负值; 当 $f(P)$ 在 S 上有正有负时, $\iint_S f(P) dS$ 表示平面片 S 上、下柱体体积的代数和.

10.2.1 直角坐标系下二重积分的计算

设 D 为 Oxy 平面上一有界闭域, $f(P) \in C(D)$, 则二重积分

$$\iint_D f(P) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \sigma_i \quad (1)$$

存在. 此时, 点函数 $f(P)$ 就是点的坐标 x, y 的二元函数 $f(x, y)$. 既然 (1) 式中的极限与 D 的分割方法无关, 用与坐标轴平行的直线网分割 D , 其典型的小片 σ 为矩形, 面积 $\sigma = \Delta x \Delta y$, 所以, 在直角坐标系下面积微元 $d\sigma = dx dy$ (见图 10.3). 这时二重积分可表为

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

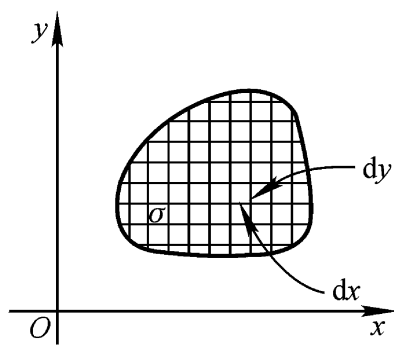


图 10.3

当 D 为 x -型闭域时, 即 D 可由不等式组

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

表示, 其中 $y_1(x), y_2(x) \in C[a, b]$. 就是说积分域 D 夹在直线 $x = a, x = b$ 之间, 下边界线是 $y = y_1(x)$, 上边界线是 $y = y_2(x)$ (图 10.4). 在区间 $[a, b]$ 内用一组垂直于 x 轴的平面截此“曲顶柱体”, 对每个 x , 截面是一个曲边梯形 (图 10.5), 其面积为

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

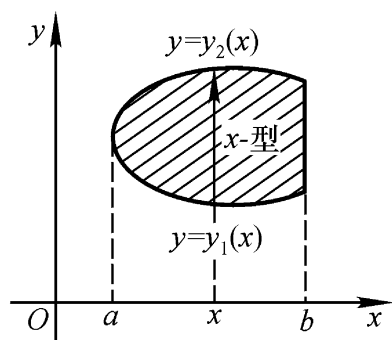


图 10.4

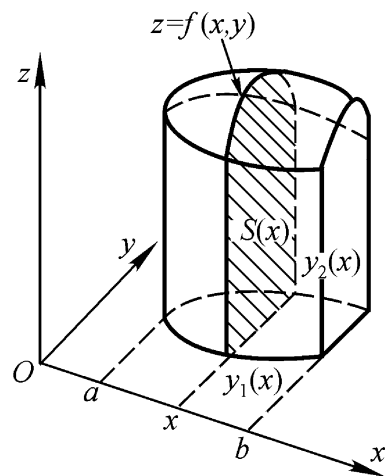


图 10.5

由已知平行截面面积的立体体积公式, 得到这个曲顶柱体的体积

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

习惯上, 将上式右端的两次定积分记作

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

并把多元函数的这种二次以上的定积分称为累次积分. 这样就得到在直角坐标系下二重积分的一个计算公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2)$$

公式(2)把二重积分化为累次积分. 计算时, 先视 x 为常量, 把 $f(x, y)$ 只看作是 y 的函数, 对 y 从 $y_1(x)$ 到 $y_2(x)$ 作定积分; 然后将算得的结果 (x 的函数) 作为被积函数, 再对 x 从 a 到 b 作定积分.

当 D 为 y -型闭域时, 即可由不等式组

$$c \leq y \leq d, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$$

表示, 其中 $x_1(y), x_2(y) \in C[c, d]$ (见图 10.6). 按照上段的推导方法, 可以得到直角坐标系下二重积分的另一个计算公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (3)$$

公式(3)将二重积分化为另一种累次积分, 先视 y 为常量, 把 $f(x, y)$ 只看为 x 的函数, 对 x 从 $x_1(y)$ 到 $x_2(y)$ 作定积分, 然后再对 y 从 c 到 d 积分.

若函数 $f(x, y)$ 在积分域 D 上不恒为正, 公式(2), (3)仍然成立. 如果积分域 D 不属于 x -型或 y -型时,

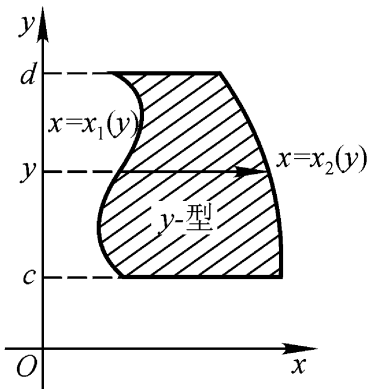


图 10.6

可将 分割为几部分,使每个部分或者是 x - 型或者是 y - 型,利用区域可加性计算积分.公式(2),(3)将二重积分化为两个不同次序的累次积分.计算二重积分时,要根据积分域和被积函数来确定采用哪个公式.

例 1 计算 $\int\int_D xy \, dx \, dy$, 其中 D 是曲线 $y = x^2, y^2 = x$ 所围成的有界域.

解 画出积分域,如图 10.7,由方程组

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ y^2 &= x \end{aligned}$$

求出图形顶点坐标 $O(0,0), B(1,1)$.显然 D 既是 x - 型的,又是 y - 型的;从被积函数看先对哪个变量积分都一样.这里选用公式(2),因

$$D: 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x,$$

故

$$\begin{aligned} \int\int_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy \, dy = \int_0^1 \left. \frac{1}{2} xy^2 \right|_{x^2}^x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

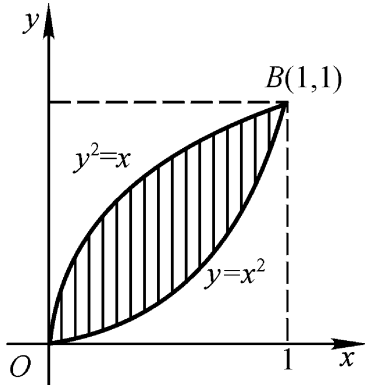


图 10.7

例 2 计算 $\int\int_D \frac{x}{y} \, dx \, dy$, 其中 D 是由曲线 $xy=1, x=y$ 和 $y=2$ 围成的有界域.

解 画出积分域,如图 10.8,求出顶点坐标 $A(\frac{1}{2}, 2), B(2, 2), C(1,1)$.

这里 D 是 y - 型域,

$$D: 1 \leq y \leq 2, \quad \frac{1}{y} \leq x \leq y.$$

从积分域和被积函数看,先对 x 积分有利,故由(3)

式

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{x}{y} \, dx \, dy &= \int_1^2 dy \int_{1/y}^y \frac{x}{y} \, dx = \int_1^2 \left. \frac{x^2}{2y} \right|_{1/y}^y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (1 - y^{-3}) dy = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

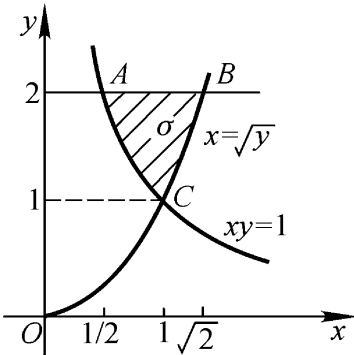


图 10.8

如果用公式(2),先对 y 积分.那么,要先将 D 用直线 $x=1$ 分为两块,而且,积分时要用分部积分法,比较麻烦.

例 3 求椭圆抛物面 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 及平面 $z=0$ 所围立体体积 V .

解 该立体如图 10.9 所示.它是立在 Oxy 平面区域

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

上以椭圆抛物面为顶的曲顶柱体.故

$$V=\int\limits_D\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由该立体的对称性,或由积分域关于 x 轴(或 y 轴)的对称性及被积函数 $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 关于变量 y (或 x)的偶性,设 σ_1 是在第一象限的部分

$$\sigma_1:0\leq y\leq b,0\leq x\leq\frac{a}{b}\left(b^2-y^2\right).$$

则所求的立体体积

图 10.9

$$\begin{aligned} V &= 4\int\limits_{\sigma_1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x=4\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^{\frac{a}{b}\left(b^2-y^2\right)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 4\int_0^b\frac{2a}{3b^3}\left(b^2-y^2\right)^{3/2}\mathrm{d}y=\frac{8ab}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}ab. \end{aligned}$$

例 4 计算 $\int\limits_D\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由不等式 $x\leq 1,0\leq y\leq x$ 确定.

解 画出积分域如图 10.10,若采用先 x 后 y 的累次积分公式(3),

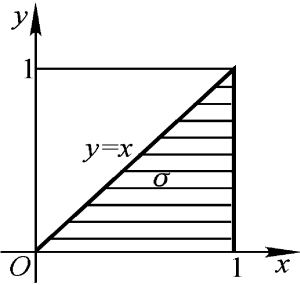


图 10.10

就会遇到不能用初等函数表示的积分 $\int\limits_D\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.若采用先 y 后 x 的累次积分公式(2),则

$$\int\limits_D\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}x\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

计算二重积分时,适当的选取累次积分顺序十分重要,它不仅涉及到计算烦简问题,而且有时出现能否进行计算的问题.计算二重积分,首先要认定积分域(包括画图,确定边界及交点,图形的顶点),然后根据被积函数和积分域确定累次积分顺序和定积分的上、下限,把重积分化为累次积分.最后,计算累次积分.

当 $f(x,y)\in C(D)$ 时, $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分存在,且能化为不同次序的两种累次积分.由于两种次序的累次积分计算上的差异,常常要考虑将一种次序的累次积分换为另一种次序的累次积分,称为累次积分换序.

例 5 交换累次积分 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^xf(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序.

解 首先由给定的累次积分的上、下限,确定出对应的二重积分的积分域,

如图 10 .11 所示 .

$\because a \leq x \leq b, a \leq y \leq x$
 是 x - 型的, 将 σ 表为 y - 型,
 $\because a \leq y \leq b, y \leq x \leq b$.

于是有

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

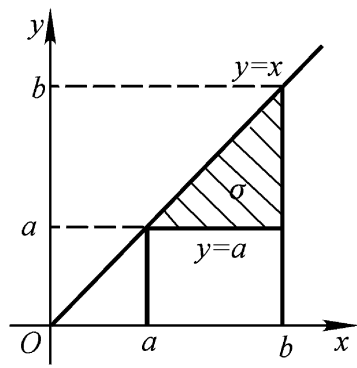


图 10 .11

例 6 试将累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$
 $+$ $\int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ 换序 .

解 这两个累次积分是同一个被积函数, 先对 y 后对 x 的积分 . 对应的二重积分积分域都是 x - 型的 .

$\sigma_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x;$ $\sigma_2: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x$.
 如图 10 .12 所示, 合并在一起恰好是个三角形区域 , 表为 y - 型域
 $\sigma: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2-y$.

故有

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx.$$

例 7 将下面的累次积分换序:

$$\int_0^{2a} dx \int_{2ax-x^2}^{2ax} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

解 对应的二重积分的积分域

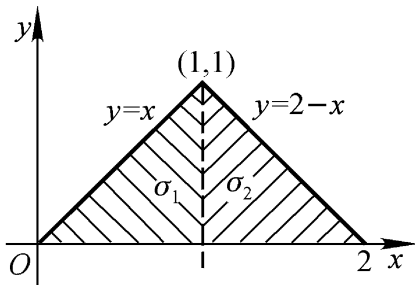


图 10 .12

$$: 0 \leq x \leq 2a, \quad 2ax - x^2 \leq y \leq 2ax,$$

为 x -型域, 见图 10.13. 要将 σ 表为 y -型域, 需把 σ 分为图中的 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 三块:

$$\sigma_1: 0 \leq y \leq a, \quad y^2/(2a) \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$\sigma_2: 0 \leq y \leq a, \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2a,$$

$$\sigma_3: a \leq y \leq 2a, \quad y^2/(2a) \leq x \leq 2a,$$

故有

$$\begin{aligned} & \int_0^{2a} dy \int_{y^2/(2a)}^{2ax - x^2} f(x, y) dx \\ &= \int_0^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \\ & \quad \int_a^{2a} dy \int_{y^2/(2a)}^{2a} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

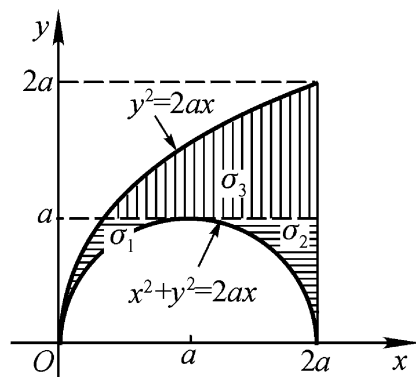


图 10.13

例 8 证明 $\int_0^a dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^a (a - x) f(x) dx \quad (a > 0)$.

证明 因左边的累次积分中, $f(y)$ 是 y 的抽象函数, 不能具体计算. 所以, 先作累次积分换序, 将积分域 (图 10.14)

$$: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x$$

表为

$$: 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a,$$

故有

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^x f(y) dy &= \int_0^a dy \int_y^a f(y) dx = \int_0^a f(y) (a - y) dy \\ &= \int_0^a (a - x) f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

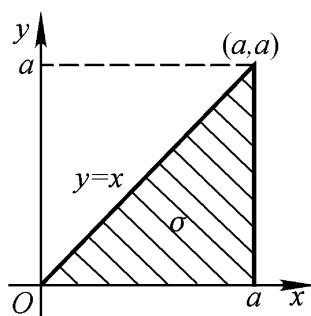


图 10.14

10.2.2 极坐标系下二重积分的计算

在极坐标系下, 设函数 $f(r, \theta) = C(\theta)$,

$$: r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta),$$

其中 $r_1(\theta), r_2(\theta)$ 在区间 $[a, b]$ 上单值连续 (见图 10.15).

用 $r = \text{常数}$, $\theta = \text{常数}$ 的曲线网来分割 σ , 其典型小片是圆扇形, 其面积 $d\sigma = r dr d\theta$, 其差是比 r 高阶的无穷小, 从而极坐标系下的面积微元是

$$d\sigma = r dr d\theta.$$

因此极坐标系下二重积分通常表为

$$\iint_{\sigma} f(P) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(r_i, \theta_i) r_i \Delta r \Delta \theta = \int_a^b \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

若视 $f(r, \theta)$ 为被积函数, 把 r, θ 看作是与 x, y 等同的两个变量, 类比着 10.2.1 段公式 (3), 就可将极坐标系下的二重积分化为累次积分.

$$\iint_D f(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr. \tag{4}$$

要强调指出的是积分域 D 在极坐标系下的不等式表示. 首先看 D 所在的极角区间 $[\alpha, \beta]$, 即 D 夹在 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 二射线之间, 然后再看 D 的靠近极点和远离极点的两条边界线的极坐标方程 $r = r_1(\theta), r = r_2(\theta)$, 从而

$$D: \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta).$$

特别, 极点在边界上的扇形区域 [如图 10.16(a)], 则

$$D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq r(\theta).$$

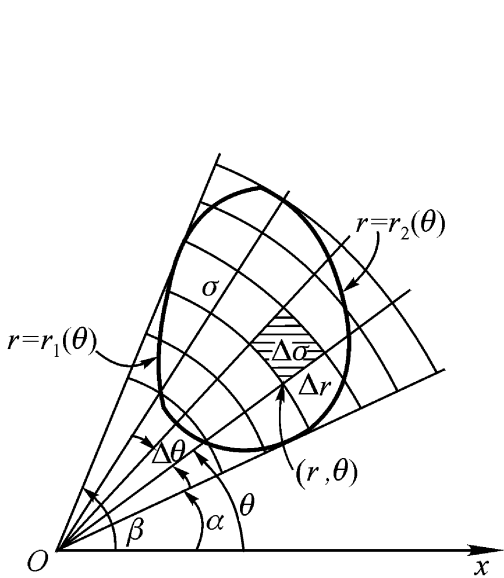
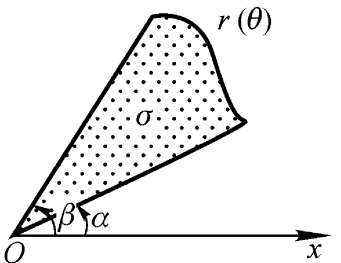
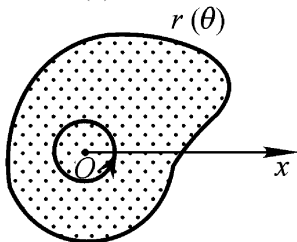


图 10.15



(a)



(b)

图 10.16

极点在 D 内部, 边界线是 $r = r(\theta)$ 的区域 [如图 10.16(b)], 则

$$D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq r(\theta).$$

显然, 直角坐标系下的二重积分化为极坐标系下的二重积分公式为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \tag{5}$$

当积分域 D 是圆、圆环、圆扇形, 被积函数是 $x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy$ 或 y/x 之一的复合函数时, 化为极坐标系下的二重积分计算较方便.

例 9 求圆柱面 $x^2 + y^2 = ay (a > 0)$, 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 0$ 所围的立体体积 V (见图 10.17).

解 这是立在圆域 $x^2 + y^2 \leq ay$ 上, 以锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为曲顶的曲顶柱体, 故

$$V = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

显然在极坐标系下计算较方便,这时积分域(图 10.18)

$$:0 \qquad , \quad 0 \leq r \leq a \sin \theta .$$

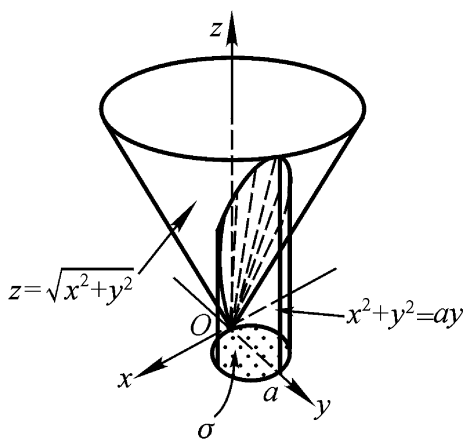


图 10.17

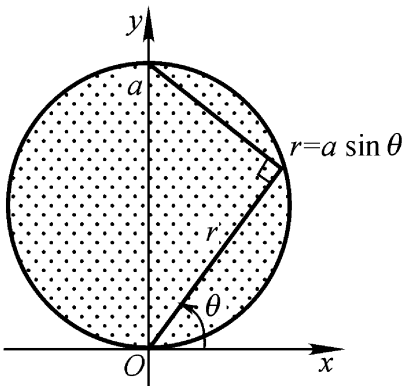


图 10.18

故

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \sin \theta} r^2 \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \sin \theta} r^2 \, dr \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{9} a^3 . \end{aligned}$$

例 10 计算双纽线

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0) .$$

所围图形的面积 .

解 由直角坐标与极坐标的关系知,双纽线的极坐标方程为

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta .$$

其图形如图 10.19 所示,所围图形的面积为

$$S = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}a \cos \theta} r \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2 \theta \, d\theta .$$

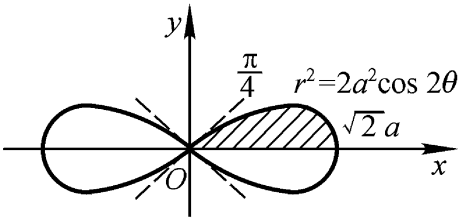


图 10.19

例 11 证明概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$

证明 据反常积分定义

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x^2} \, dx .$$

而

$$\int_0^b e^{-x^2} \, dx \int_0^b e^{-y^2} \, dy = \int_D e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy ,$$

其中 D 是正方形 $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b$, 因为

$$\int_1 e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy \leq \int_D e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy \leq \int_2 e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy ,$$

其中 \int_1, \int_2 是以原点为圆心, 依次以 $b, 2b$ 为半径的圆之位于第一象限的部分

(图 10.20), 而且

$$\begin{aligned} \int_1 e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \int_0^b e^{-r^2} r dr = \frac{1}{4} (1 - e^{-b^2}), \\ \int_2 e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \int_0^{2b} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{4} (1 - e^{-2b^2}). \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1}{2} (1 - e^{-b^2}) - \int_0^b e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} (1 - e^{-2b^2}).$$

令 $b \rightarrow +\infty$, 由两边夹挤准则得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 12 试将直角坐标系下累次积分

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^{4-x^2} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y) dy$$

化为极坐标系下的累次积分.

解 由于对应的二重积分域

$$\begin{aligned} \sigma_1: & 0 \leq x \leq 1, \quad 1-x^2 \leq y \leq 4-x^2, \\ \sigma_2: & 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4-x^2. \end{aligned}$$

它们并在一起是圆环在第一象限的部分(图 10.21), 其极坐标表示为

$$\sigma_1 + \sigma_2: 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

从而

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^{4-x^2} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \end{aligned}$$

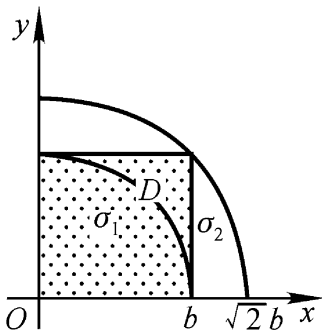


图 10.20

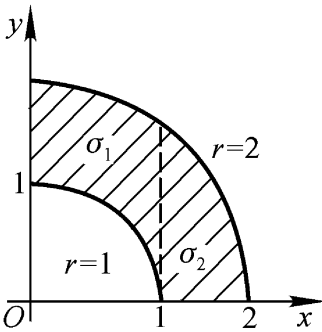


图 10.21

10.2.3 用二重积分计算曲面面积

设曲面 S 由单值连续函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

给出, 且 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续(图 10.22).

分割 D , 设 σ 为一典型小片, 任取一点 $M(x, y) \in \sigma$, 过曲面上的对应点 $P(x, y, f(x, y))$ 作曲面 S 的切平面 T . 设 S_σ, T_σ 是以 σ 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 从曲面 S 和切平面 T 上截下的部分. 如果同时用 $\sigma, S_\sigma, T_\sigma$ 表示其面积数, 由图 10.23 显然有

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, d\sigma, \quad T = \frac{1}{\cos \gamma},$$

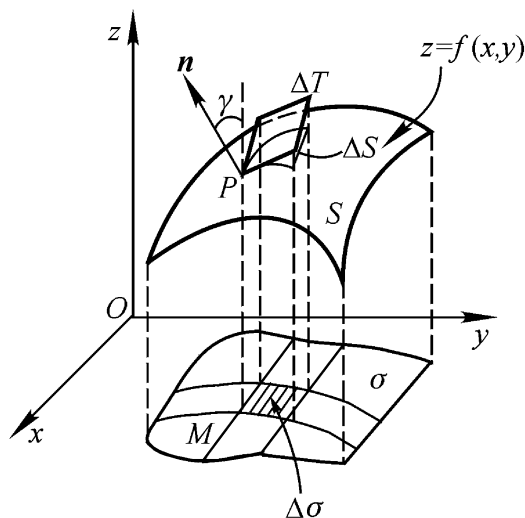


图 10.22

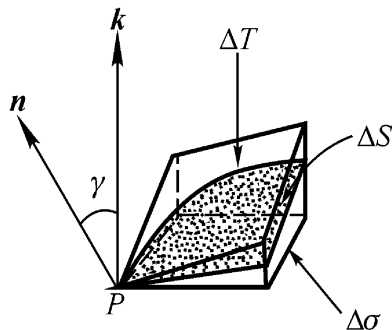


图 10.23

其中 γ 为切平面 T 与 Oxy 面之间的二面角, 即在点 P 处曲面 S 的法向量 $\mathbf{n} = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\}$ 与 Oz 轴正向 \mathbf{k} 的夹角, 故

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}.$$

从而

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, d\sigma.$$

于是由二重积分的定义, 得到曲面面积计算公式

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, d\sigma. \quad (6)$$

习惯上, 称被积表达式为曲面面积微元, 记为 dS , 即

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, d\sigma. \quad (7)$$

例 13 求被围在柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 内的上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的面积 S (图 10.24).

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{R^2 - x^2 - y^2}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{R^2 - x^2 - y^2}, \\ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{R}{R^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

以及曲面在 Oxy 面上的投影域为圆

$$x^2 + y^2 = Rx,$$

所以

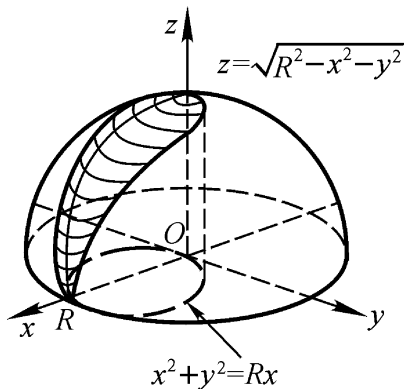


图 10.24

$$S = \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_0^{R \cos \theta} \frac{R}{R^2 - x^2 - y^2} dr = \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_0^{R \cos \theta} \frac{Rr}{R^2 - r^2} dr = R^2 - 2R^2.$$

可见半球面截去例 13 那样的曲面两片余下的部分的面积, 恰好等于边长为 $2R$ 的正方形的面积 $4R^2$.

10.3 三重积分的计算

三重积分

$$\int_V f(P) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) V_i$$

同二重积分一样需要化成累次积分来计算, 而这又与坐标的选取有关, 分别介绍如下.

10.3.1 直角坐标系下三重积分的计算

在直角坐标系 $Oxyz$ 下, 若用平行于坐标面的三组平面分割积分域 V , 则 V_i 是小长方体, 故直角坐标系下体积微元是

$$dV = dx dy dz.$$

在直角坐标系下, 三重积分可表为

$$\int_V f(P) dV = \int_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

1. 投影法(先后二法)

设 $f(x, y, z) \in C(V)$, V 在 Oxy 面上的投影区域为 Σ_{xy} , V 的下、上边界面依次为

$$z = z_1(x, y), \quad z = z_2(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_{xy},$$

其中 $z_1 \leq z_2$, 且 z_1, z_2 在 Σ_{xy} 上单值, 连续(见图 10.25). 从而积分域 V 可表为

$$V: (x, y) \in \Sigma_{xy}, \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y).$$

为了下面的叙述更生动具体,我们设想 $f(x, y, z)$ 为质量的体密度.那么,三重积分就表示分布在立体 V 上的总质量.注意,这个总质量也可以认为分布在 V 的投影域 σ_{xy} 上.

先用二组平面 $x = x_i, y = y_j$ 分割 V 及 σ_{xy} , 设 $\Delta\sigma_{xy}$ 为 σ_{xy} 内典型的小片, ΔV 为 V 内对应的细丝体,即 V 在 Oxy 面上的投影域为 σ_{xy} .

再用平面组 $z = z_k$ 分割 V 为 V_1, V_2, \dots, V_l , 设点 $(x, y, z_k) \in V_k$, 则 V 的质量(即 σ_{xy} 上的质量)近似等于

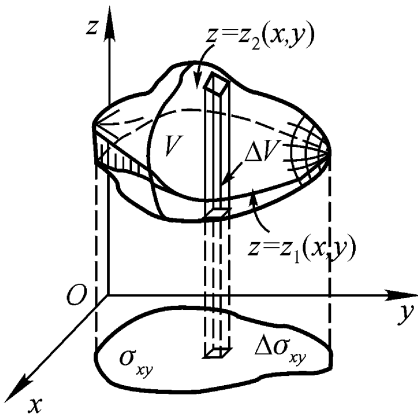


图 10.25

$$\sum_{k=1}^l f(x, y, z_k) \Delta V_k = \sum_{k=1}^l f(x, y, z_k) \Delta z_k \Delta \sigma_{xy} = \iint_{\sigma_{xy}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \Delta \sigma_{xy},$$

(其中 Δz_k 是 V_k 的高)这是 σ_{xy} 上对应的立体 V 的质量微元, 再作二重积分便可得到分布在 σ_{xy} 上的立体 V 的总质量, 故有公式

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\sigma_{xy}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (1)$$

这就是计算三重积分的投影法(先一后二法).先视 x, y 为常量, 对 z 从 V 的下边界面到上边界面作定积分, 然后在投影域 σ_{xy} 上作二重积分.

当 σ_{xy} 是 x -型闭域: $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ 时, 即积分域 $V: a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$. 由公式(1)及二重积分计算公式, 得到三重积分化为累次积分的一个公式

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (2)$$

类似地, 不难写出当 σ_{xy} 为 y -型闭域时, 三重积分化为累次积分的公式. 同样, 也可以把积分域 V 向 Oyz 或 Ozx 坐标面投影. 所以, 三重积分可以化为六种不同次序的累次积分. 解题时, 要依据具体的被积函数 $f(x, y, z)$ 和积分域 V 选取适当的累次积分进行计算.

例 1 计算 $\int_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dV$, 其中 V 由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成.

解 画出积分域如图 10.26 所示, V 在 Oxy 的投影是图中带阴影的三角形区域, 显然

$$V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y.$$

故
 . 70 .

$$\int_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{8}.$$

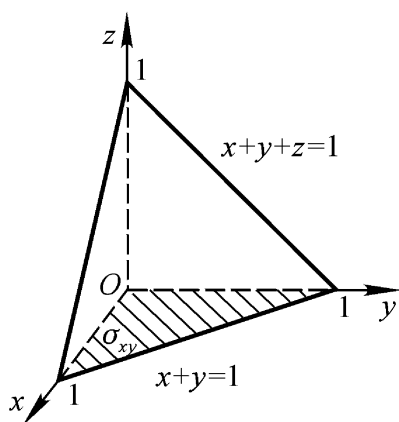


图 10 26

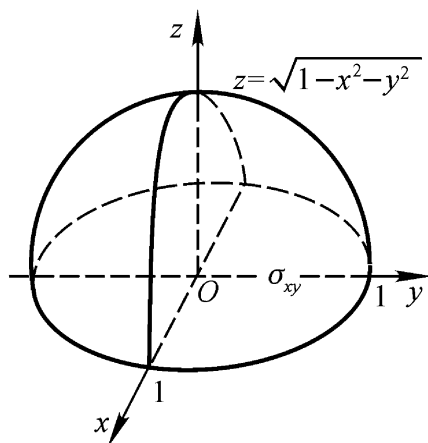


图 10 27

例 2 计算 $I = \int_V z dV$, 其中 V 是由曲面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 及平面 $z=0$ 围成的上半球体.

解 积分域 V 如图 10 27 所示, 在 Oxy 面投影域为圆 $x^2 + y^2 = 1$, 故

$$V: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, & -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{cases}$$

$$I = \int_{xy} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_{xy} (1-x^2-y^2) d = \frac{1}{4}.$$

在三重积分的计算中, 注意积分域关于坐标面的对称性及被积函数对相关变量的奇偶性将会简化运算. 如在例 2 的积分域 V 上, 有

$$\int_V xz dV = 0, \quad \int_V (y^3 + z) dV = \int_V z dV = \frac{1}{4}.$$

2. 截面法(先二后一法)

在公式(2)中, 若将对 z, y 的累次积分表为二重积分, 注意到此时 x 不变, 这个二重积分的积分域是垂直于 x 轴的平面与 V 的截面 σ_x , 所以, 三重积分还可以这样计算, 若积分域夹在 $x=a, x=b$ 两个平面之间, 在区间 $[a, b]$ 内任取 x 作垂直于横轴的平面截 V , 设截面为 σ_x , 则

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\sigma_x} f(x, y, z) dy dz. \quad (3)$$

这就是计算三重积分的截面法(先二后一法). 当被积函数仅与变量 x 有关, 且截面 σ_x 面积易知时, 用公式(3)较简便. 截面法的公式还有两个, 请读者自己给出.

比如, 用截面法计算例 2 中的三重积分, 因 σ_z 是圆 $x^2 + y^2 = 1 - z^2, 0 \leq z \leq 1$, 故

$$I = \int_0^1 z \, dz \int_{-z}^z dx \, dy = \int_0^1 (1 - z^2) z \, dz = \frac{1}{4}.$$

例 3 已知椭球 $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 内点 (x, y, z) 处质量的体密度 $\rho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, 求椭球的质量 m .

解 因为

$$m = \int_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV = \int_V \frac{x^2}{a^2} dV + \int_V \frac{y^2}{b^2} dV + \int_V \frac{z^2}{c^2} dV,$$

而

$$\int_V \frac{x^2}{a^2} dV = \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \int_{-x}^x dy \, dz,$$

其中 $\int_{-x}^x dy \, dz$ 等于椭圆 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ 的面积

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

所以

$$\int_V \frac{x^2}{a^2} dV = \frac{2bc}{a^2} \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{15} abc.$$

由对等性知

$$\int_V \frac{y^2}{b^2} dV = \int_V \frac{z^2}{c^2} dV = \frac{4}{15} abc,$$

因此

$$m = \frac{4}{5} abc.$$

10.3.2 柱坐标系下三重积分的计算

设点 $P(x, y, z)$ 在 Oxy 坐标面上的投影点 M 的极坐标为 (r, θ) , 则称有序数组 (r, θ, z) 为点 P 的柱(面)坐标. r 表示点 P 到 z 轴的距离, $0 \leq r < +\infty$; θ 是 Ozx ($x \geq 0$) 半平面绕 z 轴正向反时针转到点 P 的转角, $0 \leq \theta < 2\pi$; z 是点 P 的竖坐标, $-\infty < z < +\infty$.

柱坐标的三组坐标面是(见图 10.28):

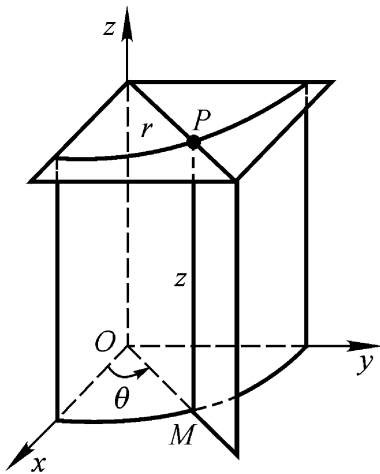


图 10.28

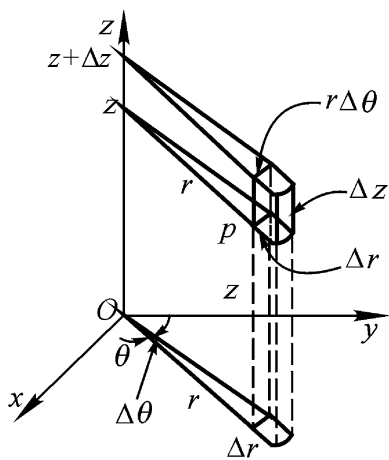


图 10.29

$r = \text{常数}$, 是以 z 轴为轴的圆柱面族;

$\theta = \text{常数}$, 是过 z 轴的半平面族;

$z = \text{常数}$, 是与 Oxy 平面平行的平面族.

显然, 点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (r, θ, z) 的关系是

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

用三组坐标面分割积分域 V , 典型的小块是直角扇形柱体(图 10.29), 由 r, θ, z 各取一个增量 $\Delta r, \Delta \theta, \Delta z$ 所构成的直角扇形柱体体积 $\Delta V \approx r \Delta r \Delta \theta \Delta z$. 其差是比 $r \Delta r \Delta \theta \Delta z$ 高阶的无穷小, 故柱坐标系下体积微元是

$$dV = r dr d\theta dz,$$

因此柱坐标系下三重积分可写为

$$\int_V f(P) dV = \int_V f(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

柱坐标系下三重积分的计算, 只要把 $f(r, \theta, z) r$ 视为被积函数, 把 r, θ, z 与 x, y, z 等等的看为三个变量, 类比着公式(2)就可得到柱坐标系下三重积分化为累次积分的计算公式. 比如, 首先将 V 在 Oxy 面上的投影域 D_{xy} 用极坐标不等式表示: $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, 然后确定 V 的下、上边界面 $z = z_1(r, \theta), z = z_2(r, \theta)$. 从而

$$V: \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \quad z_1(r, \theta) \leq z \leq z_2(r, \theta).$$

故

$$\int_V f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta. \quad (4)$$

直角坐标系下三重积分与柱坐标系下三重积分的关系是

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (5)$$

当积分域 V 在 Oxy 面上的投影是圆、圆环、圆扇形, 被积函数是 $x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy, x/y$ 之一与 z 的复合函数时, 用柱坐标计算三重积分较方便.

例4 计算 $\int_V z \sqrt{x^2 + y^2} dV$, 其中 V 由半圆柱面 $x^2 + y^2 - 2x = 0 (y \geq 0)$ 及平面 $y=0, z=0, z=a>0$ 所围成.

解 积分域如图 10.30, 用柱坐标表示为

$$V: 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\theta, 0 \leq z \leq a.$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_V z \sqrt{x^2 + y^2} dV &= \int_V z r^2 dr d\theta dz \\ &= \int_0^a dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

例5 求曲面 $2z = x^2 + y^2$ 与 $z=2$ 所围立体的质量 m , 已知立体内任一点的质量的体密度 μ 与该点到 z 轴的距离的平方成正比(图 10.31).

解 由给定的条件知, 体密度函数

$$\mu = k(x^2 + y^2) \quad (\text{常数 } k > 0),$$

于是

$$m = \int_V k(x^2 + y^2) dV.$$

因为 $2z = x^2 + y^2$ 与 $z=2$ 的交线是平面 $z=2$ 上的圆 $x^2 + y^2 = 2^2$, 所以 V 在 Oxy 面的投影域 σ_{xy} 是半径为 2 的圆:

$$\sigma_{xy}: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2.$$

V 的下边界面是 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 即 $z = \frac{1}{2}r^2$; 上边界面是 $z=2$, 故

$$m = \int_V kr^3 dr d\theta dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r^2/2}^2 kr^3 dr = \frac{16}{3}k.$$

柱坐标系下三重积分化为累次积分, 也应注意选取积分顺序. 下面举一个例子说明.

例6 计算 $\int_V \frac{e^{z^2}}{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 V 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z=1, z=2$ 所围成的锥台体.

解 积分域如图 10.32 所示. 这是一个反常三重积分, 但在柱坐标系下化成常义三重积分

$$\int_V \frac{e^{z^2}}{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_V e^{z^2} dr d\theta dz,$$

如果利用公式(4), 先对 z 积分将遭遇到积分 $\int e^{z^2} dz$. 故应先对 r 积分, 后对 z

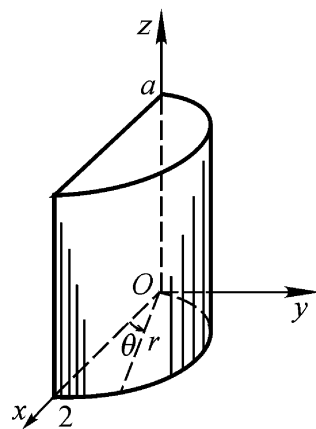


图 10.30

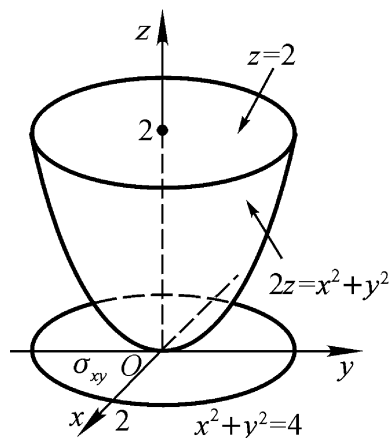


图 10.31

积分

$$\int_V e^{z^2} dr d\varphi dz = \int_1^2 e^{z^2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z dr = 2 \int_1^2 e^{z^2} z dz = (e^4 - e).$$

此题也可先对 r , 再对 z , 最后对 φ 积分. 都相当截面法, 前者是 z 截面, 后者是 φ 截面.

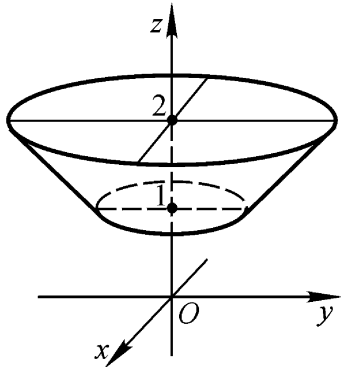


图 10.32

10.3.3 球坐标系下三重积分的计算

设 $P(x, y, z)$ 为空间内任一点, 点 P 到原点 O 的距离记为 $\rho = |OP|$, $0 < \rho < +\infty$; 有向线段 \overline{OP} 与 z 轴正向的夹角记为 φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$; Oz 在 $(x > 0)$ 半平面绕 z 轴正向反时针转到点 P 的转角记为 θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, 称有序数组 (ρ, φ, θ) 为点 P 的球(面)坐标.

球坐标的三组坐标面是(图 10.33):

- $\rho = \text{常数}$, 是以原点为球心的球面族;
- $\varphi = \text{常数}$, 是以原点为顶点, z 轴为轴的圆锥面族;
- $\theta = \text{常数}$, 是过 z 轴的半平面族.

由图 10.33 不难看出, 点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间的关系是

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

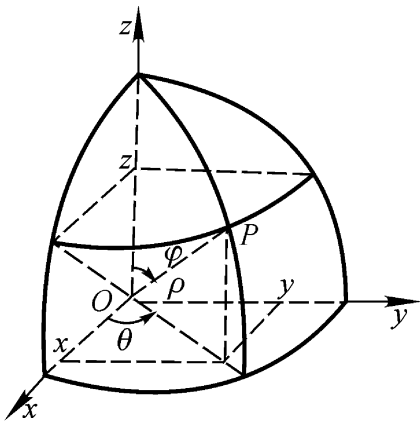


图 10.33

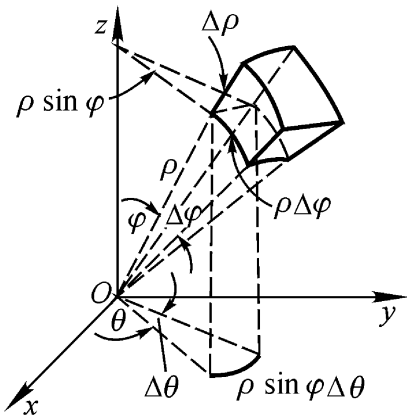


图 10.34

用球坐标的三组坐标面分割积分域 V . 典型的小块是直角六面体, 是由 ρ, φ, θ , 各取一增量 $\Delta \rho, \Delta \varphi, \Delta \theta$ 形成的. 由图 10.34 知, 这个直角六面体体积 $\Delta V \approx \rho^2 \sin \varphi \Delta \rho \Delta \varphi \Delta \theta$. 所以, 在球坐标系下, 体积微元是

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

故球坐标系下三重积分可以写为

$$\int_V f(P) dV = \int_V f(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

球坐标系下三重积分的计算,只需把 $f(\rho, \theta, \varphi) \sin \theta$ 视为被积函数,把 ρ, θ, φ 等同于 x, y, z 作为三个变量,类比着公式(2)就可得到球坐标系下三重积分化为累次积分的计算公式.首先看积分域 V 夹在那两个半平面 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 之间,即有 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$;在区间 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 内任取一个 φ ,作半平面截 V ,如果截面区域 D_φ 在这个半平面上以 z 为极轴的极坐标 (ρ, θ) 的范围是: $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi)$,则

$$\int_V f(\rho, \theta, \varphi) \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta \, d\theta \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \, d\rho. \quad (6)$$

直角坐标系下三重积分与球坐标系下三重积分的关系是

$$\int_V f(x, y, z) \, dV = \int_V f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \quad (7)$$

当积分域 V 为球心在原点,或在坐标轴上而球面过原点的球;或者是球的一部分;或者是顶点在原点以坐标轴为轴的圆锥体,被积函数是 $x^2 + y^2 + z^2$ 的函数时,用球坐标计算三重积分较简便.

例 7 求半径为 R 的球体体积.

解 取球心为坐标原点,则

$$V: 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$V = \int_V dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

例 8 计算 $I = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$, 其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2R^2, z \geq 0$.

解 画积分域如图 10.35, 又因被积函数是 $x^2 + y^2 + z^2$ 的函数,所以选用球坐标系.

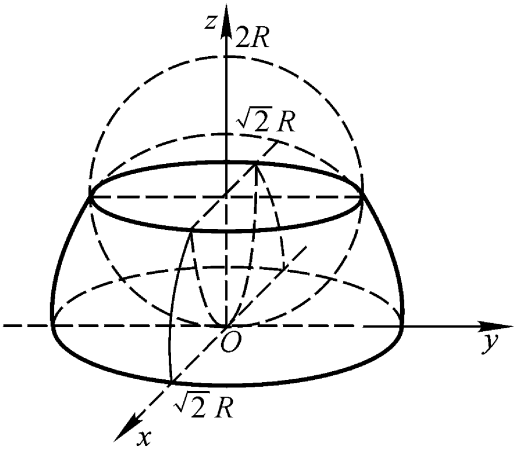


图 10.35

$$V: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2R \cos \theta.$$

$$I = \int_V r^3 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2R \cos \theta} r^3 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{4}{5} 2^4 R^4.$$

例 9 设有一高为 h , 母线长为 l 的正圆锥, 质量的体密度 μ 为常数. 另有一质量为 m 的质点在锥的顶点上, 试求锥对质点的万有引力.

解 取坐标如图 10.36, 由对称性知引力 \mathbf{F} 在 x 轴, y 轴上的分量均为零, 只需求在 z 轴上的分量 F_z , 显然

$$V: 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{h}{l}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \frac{h}{\cos \theta}.$$

与定积分应用一样, 在重积分的应用题中也常用微元法. 在 V 内任一点 (r, θ, φ) 处取体积微元

$$dV = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr.$$

它对质点 m 的引力在 z 轴方向上的分量为

$$dF_z = \frac{km\mu \, dV}{r^2} \cos \theta = km\mu \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr,$$

k 为引力常数. 从而

$$\begin{aligned} F_z &= \int_V km\mu \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^{\arccos(h/l)} \int_0^{2\pi} \int_0^{h/\cos \theta} km\mu \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi km\mu h \left(1 - \frac{h}{l}\right), \end{aligned}$$

故所求的万有引力

$$\mathbf{F} = (0, 0, 2\pi km\mu h \left(1 - \frac{h}{l}\right)).$$

例 10 已知在极坐标系下, 对数螺线

$$r = ae^{t/4}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0)$$

绕极轴旋转一周所围成的旋转体 V (图 10.37), 其内各点质量的体密度等于点到极点的距离, 求 V 的质量 m .

解 取极轴为正 z 轴, 则 r , 相当于球坐标中的 ρ . 所以球坐标系下旋转面的方程是

$$\rho = ae^{t/4}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

故

$$V: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq ae^{t/4}.$$

$$m = \int_V \rho \, dV = \int_V \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho$$

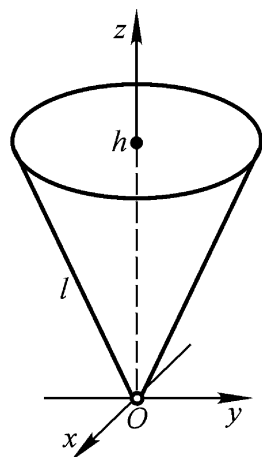


图 10.36

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \int_0^{\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2-\rho^2}} \rho^3 d\rho d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2-\rho^2}} d\theta \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^2 \left(\sin^4 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2-\rho^2} - \cos^4 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2-\rho^2} \right) d\theta \Big|_0^2 \\
 &= \frac{1}{4} (\pi + 1) .
 \end{aligned}$$

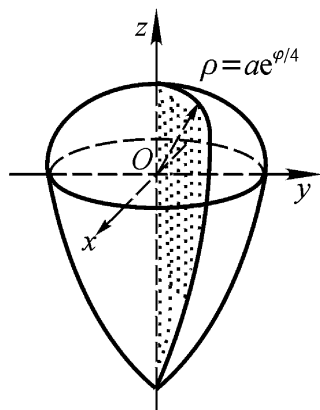


图 10.37

由此例可知,极坐标系下曲线绕极轴旋转一周得到的旋转面所围的立体上的三重积分,也可考虑在球坐标下计算.

重积分的计算,首先要画出积分域,根据积分域及被积函数选取坐标系,务必注意在选定的坐标系下面积微元或体积微元是什么.然后用不等式表示出积分域的范围,从而确定累次积分的上、下限.最后进行累次积分运算.

10.4 第一型曲线积分的计算

设 l 是以 A, B 为端点的平面曲线段(图 10.38),由参数方程

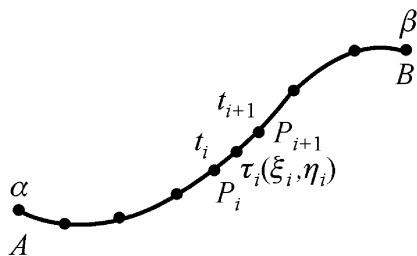


图 10.38

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t$$

给出, $x(t), y(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续可微(即曲线 l 是光滑的).如果函数 $f(x, y)$ 在 l 上连续,则对弧长的曲线积分(第一型曲线积分)

$$\int_l f(x, y) ds = \int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i$$

存在.

设点 A 对应 $t = a$, 点 B 对应 $t = b$.因被积函数 $f(x, y)$ 中点 (x, y) 在曲线 l 上,所以它是 t 的函数 $f(x(t), y(t))$.又由曲线弧长公式和积分中值定理知 S_i

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} \Delta t_i.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i)) \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i)} \Delta t_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.\end{aligned}$$

于是对弧长的曲线积分可化为定积分计算,

$$\int_l f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (1)$$

注意, 这里弧长微元 ds 就是弧微分.

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

当 $ds > 0$ 时, $dt > 0$. 故公式(1)中的定积分上限必须大于下限! 由此可见,

$$\int_{AB} f(P) ds = \int_{BA} f(P) ds,$$

这是第一型曲线积分的一个特性, 它与定积分不同.

如果 l 是空间曲线段 AB :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

则有公式

$$\int_l f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (2)$$

例 1 计算

$$\int_l y ds,$$

其中: 1° l 为曲线 $y^2 = 4x$ 上点 $(0, 0)$ 与点 $(1, 2)$ 之间的弧段; 2° l 为心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的下半部分 (见图 10.39).

解 1° 因为 $l: x = \frac{1}{4}y^2, 0 \leq y \leq 2$ (视 y 为参量),

$$ds = \sqrt{x'^2 + 1} dy = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy,$$

故由公式(1)得

$$\int_l y ds = \int_0^2 y \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy = \frac{4}{3} (2^{3/2} - 1).$$

2° 因为 $l: r = a(1 + \cos \theta), \pi \leq \theta \leq 2\pi$, 所以

$$x = r \cos \theta = a(1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

(视 θ 为参数), 又极坐标系下弧微分为

$$ds = \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)} d\theta = \sqrt{a^2(-\sin \theta)^2 + a^2(1 + \cos \theta)^2} d\theta = a \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta.$$

故由公式(1)得

$$\int_l y ds = \int_{\pi}^{2\pi} a(1 + \cos \theta) \sin \theta \cdot a \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = -\frac{16}{5} a^2.$$

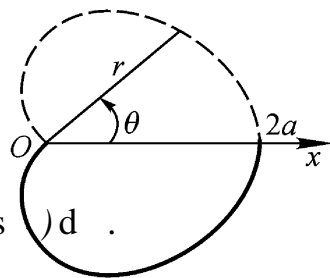
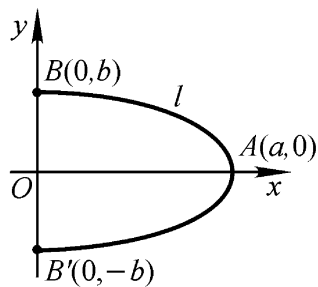


图 10.39

例 2 计算 $\int_{BB} x|y|ds$, 其中 BB 是椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$ ($a > b > 0$) 的右半部分 (见图 10.40).



解 因 $BB: x = a\cos t, y = b\sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 又

$$ds = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

故由公式(1)得

图 10.40

$$\begin{aligned} \int_{BB} x|y|ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t |b\sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t} dt \\ &= \frac{2ab}{3(a+b)} (a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

例 3 设 l 是圆柱螺线的一段,

$$l: \quad x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1° 计算 l 的弧长 2° 计算 $\int_l \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 弧微分

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

1° 由公式(2)得弧长

$$s = \int_l ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2° 由公式(2)

$$\int_l \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctan \frac{bt}{a}.$$

最后指出, 当 $f(x, y) \geq 0$ 时, 平面曲线 l 上第一型曲线积分

$$\int_l f(x, y) ds$$

在几何上表示以 l 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面之介于平面 $z = 0$ 和曲面 $z = f(x, y)$ 之间那部分的面积 (图 10.41).

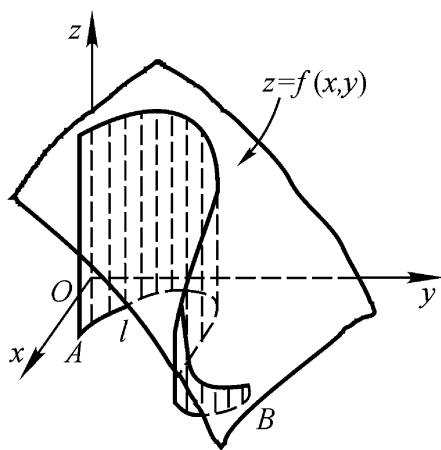


图 10.41

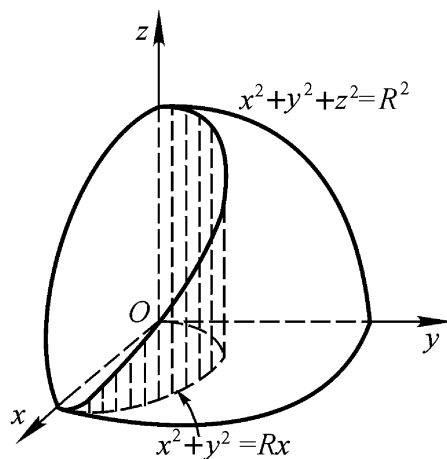


图 10.42

例 4 求圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 被截在球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内部的柱面的面积(图 10.42) .

解 由图形的对称性, 只需求第一卦限部分的面积, 再四倍之. 柱面与平面 Oxy 的交线

$$l: \quad r = R \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

弧微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = R d\theta,$$

故所求的面积

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ds = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} R d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 4R^2.$$

10.5 第一型曲面积分的计算

设空间曲面 S 的方程为

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

其中 D_{xy} 为曲面 S 在 Oxy 平面上的投影域. 函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上连续, 则对面积的曲面积分(第一型曲面积分)

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i$$

存在.

如果 $z(x, y)$ 在 D_{xy} 上有连续的一阶偏导数, 则由 10.2 节公式(6)及 10.1 节的积分中值定理得

$$S_i = \iint_{D_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

$$= 1 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2}$$

i .

其中 σ_i 是 S_i 在 Oxy 上的投影域 (见图 10.43),

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 表示在 σ_i 内某点 (x_i, y_i) 处的两个偏

导数. 因被积函数 $f(x, y, z)$ 中的点 (x, y, z) 在曲面 S 上, 所以它是 x, y 的二元函数 $f(x, y, z(x, y))$. 于是由二重积分的定义知

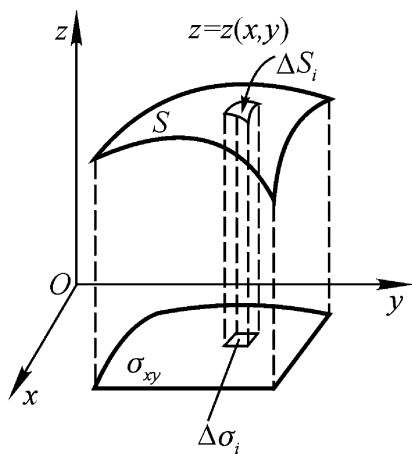


图 10.43

$$f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \left(1 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} \right) \Delta \sigma_i$$

$$= \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \left(1 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} \right) d\sigma.$$

于是对面积的曲面积分可化为二重积分计算,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \left(1 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} \right) d\sigma. \quad (1)$$

根据曲面 S 的不同情况, 可以把对面积的曲面积分转化为在其他坐标面的投影域上的二重积分. 所以, 计算对面积的曲面积分时, 首先应根据曲面 S 选好投影面, 确定投影域并写出曲面 S 的方程, 然后算出曲面面积微元; 最后将曲面方程代入被积函数, 写出(1)式右端的二重积分进行计算.

例 1 计算 $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之间的部分 (图 10.44).

解 曲面 S 的方程为

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2}. \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ 1 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} &= 2. \end{aligned}$$

又 S 在 Oxy 面上投影域是圆 $\sigma: x^2 + y^2 \leq 1$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \iint_{\sigma} 2(x^2 + y^2) d\sigma \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

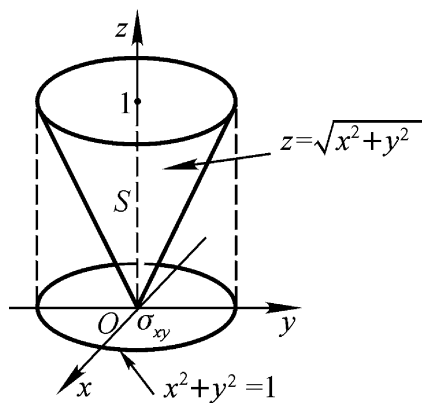


图 10.44

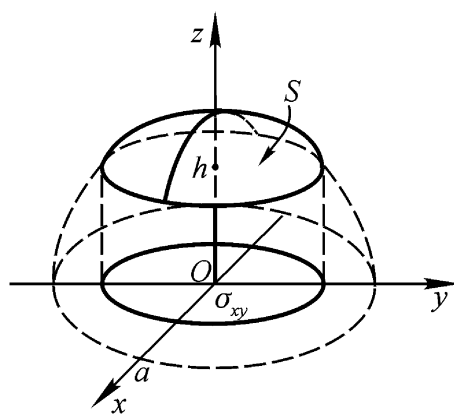


图 10.45

例 2 计算 $\int_S (x^3 + x^2 y + z) dS$, 其中 S 为球面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ 之位于平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 上方的部分 (图 10.45) .

解 由对称性知

$$\int_S (x^3 + x^2 y + z) dS = \int_S z dS .$$

曲面 S 的方程是

$$z = a^2 - x^2 - y^2 ,$$

$$\frac{z}{x} = \frac{-x}{a^2 - x^2 - y^2} ,$$

$$\frac{z}{y} = \frac{-y}{a^2 - x^2 - y^2} ,$$

$$1 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2} .$$

S 在 Oxy 面上的投影域是圆 σ_{xy} :

$$x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2 .$$

故

$$\begin{aligned} \int_S (x^3 + x^2 y + z) dS &= \int_S z dS = \int_{\sigma_{xy}} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma \\ &= a(a^2 - h^2) . \end{aligned}$$

值得注意的是, 在球面上的第一型曲面积分用球坐标计算有时是方便的. 如本例, 曲面 S :

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \arccos \frac{h}{a}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

曲面面积微元

$$dS = a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta .$$

所以

$$\int_S (x^3 + x^2 y + z) dS = \int_S z dS = \int_0^2 \int_0^{\arccos \frac{h}{a}} a^3 \cos \sin d = a(a^2 - h^2).$$

例 3 计算 $I = \int_S xyz dS$, 其中 S 是平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面围成的四面体的表面 .

解 若以 S_1, S_2, S_3 依次表示该四面体在 Oxy, Oyz, Ozx 坐标面上的三个表面 (图 10.46), 则因 S_1 的方程为 $z = 0$, 所以

$$\int_{S_1} xyz dS = 0.$$

同样有

$$\int_{S_2} xyz dS = 0, \quad \int_{S_3} xyz dS = 0.$$

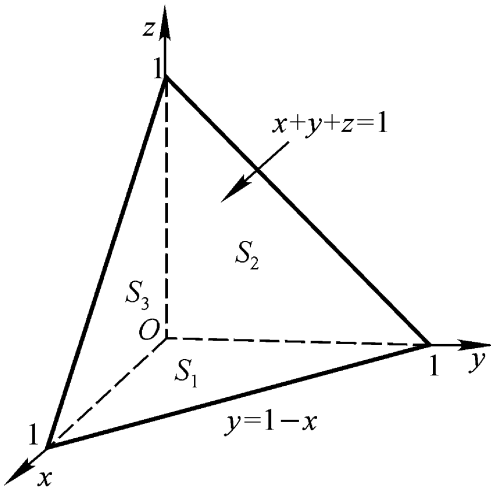
图 10.46

第四个表面 S_4 的方程为

$$\begin{aligned} z &= 1 - x - y, \\ 0 \leq x &\leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \end{aligned}$$

故 $z_x = -1, z_y = -1, 1 + z_x^2 + z_y^2 = 3$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_S xyz dS = \int_{S_4} xyz dS = \int_{xy} xy(1 - x - y) 3 dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 3xy(1 - x - y) dy = \frac{3}{120}. \end{aligned}$$



10.6 黎曼积分的应用举例

黎曼积分有广泛的应用, 比如, 求平面区域的面积, 曲面的面积, 立体的体积, 曲线的弧长, 物体的质量等问题已在前几节介绍过. 本节仅介绍物体的质心及转动惯量的求法. 读者应从中学会将有关的实际问题转化为黎曼积分计算的方法.

10.6.1 物体的质心

由静力学知, 当质点系 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 的各点质量为 m_i 时, 质心的坐标是

\int_S 表示闭表面上的积分.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

如果在一个几何形体 V 上, 质量分布密度为连续函数 $\mu(P)$, $P \in V$. 由黎曼积分的定义, 将 V 分割为 n 个直径很小的部分 $\Delta V_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 任取一点 $P_i \in \Delta V_i$, 把 ΔV_i 看成是质量为 $\mu(P_i) \Delta V_i$ (这里 ΔV_i 也表示其度量), 位于点 P_i 的质点. 这样得到 n 个质点的质点系, 求出其质心, 再让分割无限细密, 取极限, 就得到质心的坐标为:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \mu(P) x \, dV}{\int_V \mu(P) \, dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int_V \mu(P) y \, dV}{\int_V \mu(P) \, dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int_V \mu(P) z \, dV}{\int_V \mu(P) \, dV}. \quad (1)$$

这里 V 包括空间立体、曲面、曲线及平面片和平面上的曲线. 当 V 在 Oxy 平面上时, $\bar{z} = 0$, 不必写它. 由(1)式知, 物体的质心的横坐标, 等于物体对平面 $x=0$ 的总静距(也称一次距) $\int_V \mu(P) x \, dV$, 与总质量 $\int_V \mu(P) \, dV$ 之商, 质心的纵坐标、竖坐标有类似的结论. 当密度 $\mu(P)$ 为常数时, 质心也叫形心. 不难从(1)式, 消去 μ , 得到形心的坐标.

例 1 求位于两圆 $r = 2 \sin \theta$, $r = 4 \sin \theta$ 之间的均质薄板 V 的质心 (图 10.47).

解 由于薄板 V 关于 y 轴对称, 且是均质的(面密度 μ 为常数), 故 $\bar{x} = 0$, 只需求 \bar{y} , 因为

$$m = \int_V \mu \, dA = \mu \left(\int_0^{\pi} \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} r \, dr \, d\theta \right) = 3 \mu,$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_V \mu y \, dA = \int_0^{\pi} \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} \mu r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{112}{3} \mu \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \, d\theta = \end{aligned}$$

$\frac{7}{3} \mu$,

所以, $\bar{y} = \frac{7}{3}$, 即质心为点 $(0, \frac{7}{3})$.

例 2 已知图 10.48 中球底锥的体密度 $\mu = k(x^2 + y^2 + z^2)$, k 为常数, 求其质心.

解 由图知球底锥 V 关于坐标面 Oyz 及 Ozx 对称, 又密度函数是 x, y 的偶函数, 故质心必在 z 轴上, 只需求 \bar{z} . 因

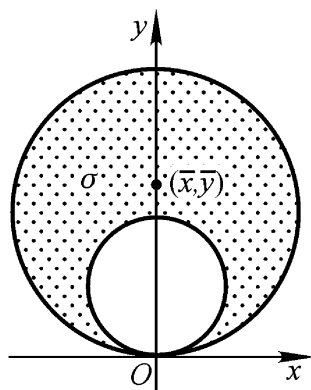


图 10.47

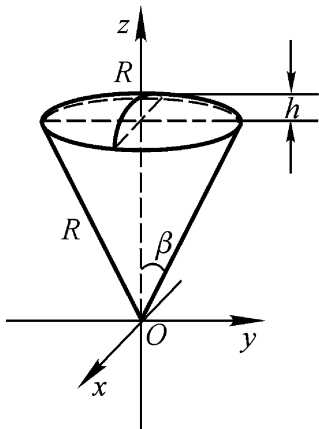


图 10.48

为:

$$m = \int_V k(x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_0^2 \int_0^{\pi} k \sin \theta d\theta \int_0^R r^4 dr$$

$$= \frac{2}{5} k R^5 (1 - \cos \theta),$$

及

$$M_z = \int_V k(x^2 + y^2 + z^2) z dV = \int_0^2 \int_0^{\pi} k \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^R r^5 dr$$

$$= \frac{1}{6} k R^6 (1 - \cos^2 \theta),$$

所以

$$x_{cm} = \frac{5}{12} R(1 + \cos \theta) = \frac{5}{12} (2R - h),$$

其中 $h = R(1 - \cos \theta)$.于是球底锥的质心是点 $(0, 0, \frac{5}{12} (2R - h))$.

10.6.2 转动惯量

转动惯量是力学中一个重要概念,研究刚体转动时要用到它.从力学知, n 个质点对一个定轴的转动惯量为

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 m_i,$$

其中 m_i 和 r_i 分别表示第 i 个质点的质量和它到定轴的距离.

对一个刚体,设质量分布密度是 $\mu(P)$ 上点 P 的连续函数 $\mu(P)$,如何求对某一定轴的转动惯量呢?可以按黎曼积分的定义去推导.这里用“微元法”去做.在 V 内任取一微元刚体 ΔV ,任取点 P .设点 P 到定轴的距离为 r ,则有质量微元 $\mu(P) \Delta V$,和对应的转动惯量微元:

$$r^2 \mu(P) \Delta V,$$

从而刚体 对定轴的转动惯量 (也称二次距)

$$I=\int_V r^2 \mu(P) dV.$$

若在空间取定直角坐标系 $Oxyz$, 则刚体 对 x 轴、 y 轴、 z 轴的转动惯量分别为

$$\begin{aligned} I_x &= \int_V (y^2+z^2) \mu dV, & I_y &= \int_V (x^2+z^2) \mu dV, \\ I_z &= \int_V (x^2+y^2) \mu dV, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\mu=\mu(P)$ 是密度函数, 这里 可以是空间立体、曲面、曲线及平面片和平面曲线 .

例 3 由平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, 及三个坐标面围成的立体, 密度 $\mu=1$, 求该立体对三个坐标轴的转动惯量 .

解 如图 10.49 所示, 因为

$$V: 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad 0 \leq z \leq c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right),$$

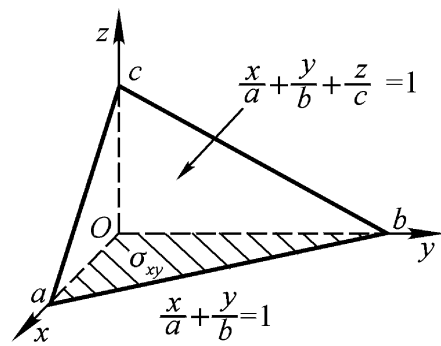


图 10.49

所以

$$\begin{aligned} I_x &= \int_V (y^2+z^2) dV \\ &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} (y^2+z^2) dz \\ &= \frac{1}{60} abc(b^2+c^2). \end{aligned}$$

类似地可得

$$I_y = \frac{1}{60} abc(a^2+c^2), \quad I_z = \frac{1}{60} abc(a^2+b^2).$$

例 4 有一均质圆柱螺线 l :

$$x= a\cos t, \quad y= a\sin t, \quad z= bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1° 求 l 的质心; 2° 求 l 对 z 轴的转动惯量 I_z .

解 空间曲线 l 的弧微分

$$ds = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} dt = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

1° 设线密度为常数 μ , 由于

$$m = \int_l \mu ds = \int_0^{2\pi} \mu \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \mu \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$M_x = \int_l \mu x ds = \int_0^{2\pi} \mu a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0,$$

$$M_y = \int_l \mu y ds = \int_0^{2\pi} \mu a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0,$$

$$M_z = \int_l \mu z ds = \int_0^{2\pi} \mu b t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi^2 b \mu \sqrt{a^2 + b^2}.$$

所以, l 的质心为点 $(0, 0, b)$.

2° l 对 z 轴的转动惯量

$$I_z = \int_l (x^2 + y^2) \mu ds = \int_0^{2\pi} a^2 \mu \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \mu a^2 \sqrt{a^2 + b^2} = a^2 m,$$

其中 $m = 2\pi \mu \sqrt{a^2 + b^2}$ 是 l 的质量.

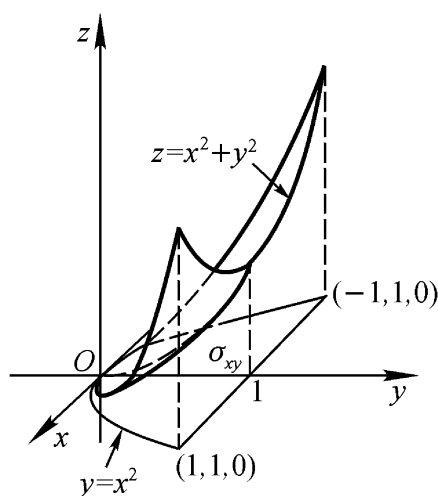


图 10.50

例 5 考虑在 Oxy 面上的投影域为 $\sigma_{xy}: -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$ 的曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 的部分(图 10.50), 其质量的面密度 $\mu = (1 + 4x^2 + 4y^2)^{-\frac{1}{2}}$. 1° 求 S 的质心; 2° 求 S 对 z 轴的转动惯量 I_z .

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2.$$

1° 由对称性知 $\bar{x} = 0$, 因为

$$m = \iint_S \mu dS = \iint_{xy} (1 + 4x^2 + 4y^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + 4x^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} d$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy = \frac{4}{3},$$

$$M_y = \iint_S \mu y dS = \iint_{xy} y d = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y dy = \frac{4}{5},$$

$$M_z = \iint_S \mu z dS = \iint_{xy} (x^2 + y^2) d = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105}.$$

所以, S 的质心在点 $(0, \frac{3}{5}, \frac{22}{35})$ 处.

2° S 对 z 轴的转动惯量

$$I_z = \iint_S \mu (x^2 + y^2) dS = \iint_{xy} (x^2 + y^2) d = \frac{88}{105}.$$

10.7 例 题

例 1 计算 $\iint_D |\cos(x+y)| d$ 其中 D 是由直线 $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = x$ 所围成.

解 先画出区域 D , 见图 10.51, 用直线 $y + x =$

$\frac{\pi}{2}$ 将 D 分为两部分 D_1 与 D_2 , 于是有

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y), & (x, y) \in D_1, \\ -\cos(x+y), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

从而

$$\iint_D |\cos(x+y)| d$$

$$= \iint_{D_1} \cos(x+y) d - \iint_{D_2} \cos(x+y) d.$$

由于

$$\iint_{D_1} \cos(x+y) d = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2y) dy,$$

$$\iint_{D_2} \cos(x+y) d = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^x \cos(x+y) dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - 1) dx,$$

所以

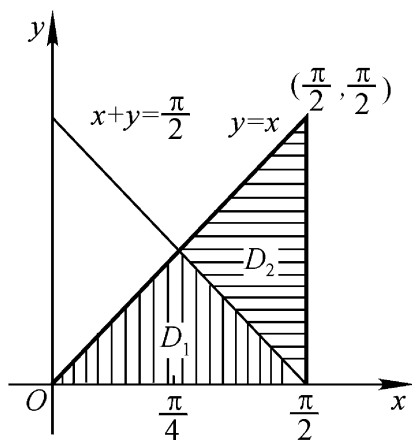


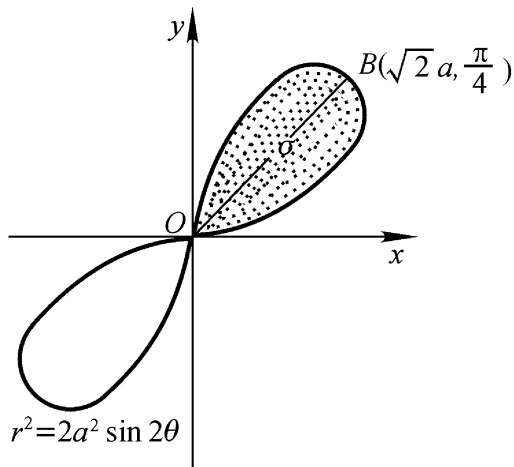
图 10.51

$$\begin{aligned} \int_D |\cos(x+y)| \, d\tau &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2t) \, dt = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

被积函数带有绝对值时,常常利用对积分域的可加性质,把积分域分为几部分,以便去掉绝对值.

例 2 求双纽线 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 所围图形的面积.

解 画出双纽线如图 10.52 所示.当 θ 由 0 增至 $\frac{\pi}{2}$ 时,画出双纽线的一叶.当 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 增至 $\frac{3\pi}{2}$ 时,画出另一叶.图形关于极点对称,故所求面积



$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt{2\sin 2\theta}} r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\theta \, d\theta = 2a^2. \end{aligned}$$

图 10.52

例 3 计算积分 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx \quad (a, b > 0).$

解 这个积分难以直接计算,但由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \, dy,$$

所以,利用累次积分换序可得

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \, dx = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

例 4 证明

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx.$$

证 在正方形域 $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ 上,因为

$$\int_D [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 \, d\tau \geq 0,$$

故有

$$\int_D f^2(x)g^2(y) \, d\tau + \int_D f^2(y)g^2(x) \, d\tau \geq 2 \int_D f(x)g(x)f(y)g(y) \, d\tau.$$

注意到积分域 D 是正方形, x 与 y 地位对等,所以上式左边两个积分相等.将上式两边化为累次积分得

$$2 \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(y) \, dy \geq 2 \int_a^b f(x)g(x) \, dx \int_a^b f(y)g(y) \, dy,$$

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b g^2(x)dx. \quad \square$$

例 5 有一半径为 a 的均质半球体, 在其大圆上拼接一个材料相同的半径为 a 的圆柱体. 问圆柱的高为多少时, 拼接后的立体质心在球心处.

解 设圆柱高为 H , 取坐标如图 10.53. 由对称性知质心在 z 轴上. 要质心在球心(坐标原点)处, 只需

$$\bar{z} = \frac{\int_V \mu z dV}{\int_V \mu dV} = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV} = 0,$$

其中常数 μ 为质量的体密度. 由于

$$\begin{aligned} \int_V z dV &= \int_{\text{半球}} z dV + \int_{\text{柱}} z dV \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, r^3 dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \int_0^H r \, dr \, d\phi \, z dz \\ &= -\frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{2} a^2 H^2. \end{aligned}$$

要 $\bar{z}=0$, 只需

$$-\frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{2} a^2 H^2 = 0,$$

由此解得 $H = \frac{2}{2} a$, 即圆柱体的高应为 $\frac{2}{2} a$.

例 6 求极坐标系中的心脏线 $r = a(1 - \cos \theta)$ ($a > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) 与极轴所围成的平面区域绕极轴旋转一周所得的旋转体体积.

解 取极轴为 Oz 轴正向, 则旋转体表面的球坐标方程为

$$r = a(1 - \cos \theta),$$

见图 10.54. 于是所求的体积

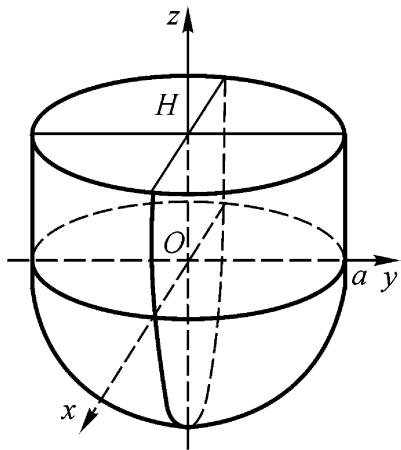


图 10.53

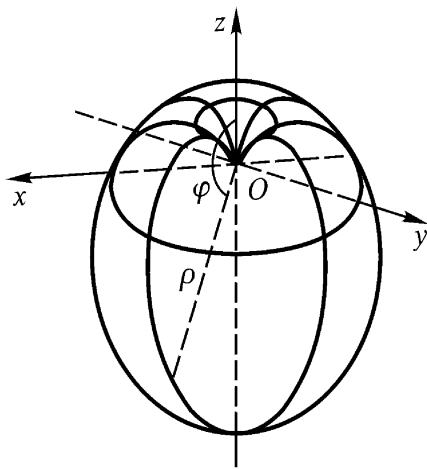


图 10.54

$$V = \int_V 1 dV = \int_0^2 \int_0^{\pi} \int_0^{a(1-\cos\theta)} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sin\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{a(1-\cos\theta)} d\theta = \frac{8}{3} a^3.$$

例 7 计算空间曲线积分 $\int_c (z + y^2) ds$, 其中 c 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

解 若将曲线 c 化为参数方程, 比较麻烦, 因而考虑将所给线积分化为定积分来计算的方法是不可取的. 现在根据曲线 c 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线这一特点: x, y, z 地位相等, 可以轮换, 曲线的方程不变. 又由于

$$\int_c (z + y^2) ds = \int_c z ds + \int_c y^2 ds,$$

因此可以利用曲线 c 的方程, 与其变量 x, y, z 具有轮换性来计算. 因为

$$\int_c x ds = \int_c y ds = \int_c z ds,$$

所以

$$\int_c z ds = \frac{1}{3} \int_c (x + y + z) ds = \frac{1}{3} \int_c 0 ds = 0.$$

又因为

$$\int_c x^2 ds = \int_c y^2 ds = \int_c z^2 ds,$$

所以

$$\int_c y^2 ds = \frac{1}{3} \int_c (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} R^2 \int_c ds = \frac{1}{3} R^2 \cdot 2\pi R,$$

于是有

$$\oint_c (z + y^2) ds = \frac{2}{3} R^3 .$$

做曲线、曲面积分时, 利用曲线和曲面方程来简化被积函数是很巧妙的方法 .

例 8 半径为 R , 高为 h 的圆柱面均匀带电, 电荷面密度为常数 . 求底圆中心处的电场强度 $\mathbf{E}(0) = \{E_x(0), E_y(0), E_z(0)\}$.

解 取坐标如图 10.55 . 由对称性知, $E_x(0) = 0$, $E_y(0) = 0$, 仅需求 $E_z(0)$. 在柱面上取一面积微元 dS , 具有电量微元 dS , 它在点 O 处产生的电场强度沿 z 轴的分量是

$$dE_z(0) = \frac{-k dS}{r^2} \cos \varphi = \frac{-k z}{r^3} dS = \frac{-k z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dS,$$

其中 k 为常数, 表示点 O 到面积微元的距离 . 于是

$$E_z(0) = \oint_s \frac{-k z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dS,$$

这里积分曲面是柱面 . 深入理解体会对面积的曲面积分的定义, 会发现采用柱坐标, 将十分方便 . 这时曲面 S 的方程为

$$r = R, \quad 0 \leq z \leq H .$$

显然, 柱面上面积微元

$$dS = R dz .$$

于是

$$\begin{aligned} E_z(0) &= \oint_s \frac{-k z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R dz = -k R \int_0^H \frac{z dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -2k \left[1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right] . \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{E}(0) = (0, 0, -2k \left[1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right]) .$$

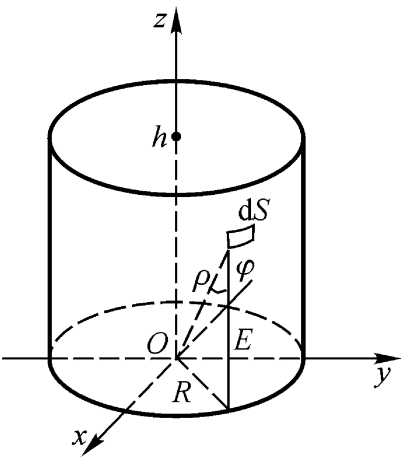


图 10.55

习 题 十

10.1

1. 试将二曲面 $z = 8 - x^2 - y^2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 所围立体之体积 V 表为黎曼积分.

2. 在 $x^2 + y^2 \leq 2ax$ 与 $x^2 + y^2 \leq 2ay$ ($a > 0$) 的公共部分的平板上, 电荷面密度为 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, 试将 上的总电荷量 Q 表为黎曼积分.

3. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 的质量体密度 $= 1$. 在球外点 $(0, 0, h)$ 处有一单位质点, $h > a$. 试将此球对这个质点的万有引力 \mathbf{F} 在 z 轴上的分量 F_z 表为黎曼积分.

4. 一物质曲线 L , 其形状由方程组

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$x + y + z = 1$$

确定, 其质量线密度 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, 试将此曲线 L 的质量 m 表为黎曼积分.

5. 设有一太阳灶, 其聚光镜是旋转抛物面 S , 设旋转轴为 z 轴, 顶点在原点处. 已知聚光镜的口径是 4, 深为 1. 聚光镜将太阳能汇聚在灶上, 已知聚光镜的能流(即单位面积传播的能量)是 z 的函数 $p = \frac{1}{1+z}$, 试用黎曼积分表示聚光

镜汇聚的总能量 W .

6. 估计下列积分值:

(1) $\int_D (x + y + 10) d\sigma$, 积分域 D 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$;

(2) $\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$, 积分域为球域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

7. 指出下列积分值:

(1) $\int_S (xe^z + x^2 \sin y) dS$, 曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$;

(2) $\int_D |y| d\sigma$, 积分域 $D: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

8. 设 D 是 Oxy 平面上以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 证明

$$\int_D (xy + \cos x \sin y) d\sigma = 2 \int_{D_1} \cos x \sin y d\sigma.$$

9. 指出下列积分值:

(1) $\int_l (x^2 + y^2) ds$, 曲线 l 是下半圆周 $y = -\sqrt{1 - x^2}$;

(2) $\int_s f(x^2 + y^2 + z^2) dS$, 曲面 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

10. 设函数 $f(x, y, z)$ 连续, $f(0, 0, 0) = 0$, V_t 是以原点为球心, t 为半径的球形域. 求 $t \rightarrow 0$ 时,

(1) 三重积分 $\int_{V_t} f(x, y, z) dV$;

(2) 第一型曲面积分 $\int_{S_t} f(x, y, z) dS$, S_t 是 V_t 的表面;

(3) 第一型曲线积分 $\int_{c_t} f(x, y, z) ds$, c_t 是曲面 S_t 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线. 各是 t 的几阶无穷小.

11. 比较下列各组积分的大小.

(1) $\int_D (x + y)^2 dx dy$ 与 $\int_D (x + y)^3 dx dy$, 其中 $D: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 2^2$;

(2) $\int_D \ln(x + y) dx dy$ 与 $\int_D xy dx dy$, 其中 D 由直线 $x = 0, y = 0, x + y = \frac{1}{2}, x + y = 1$ 围成.

12. 函数 $\frac{\sin(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$ 在圆环 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 上的二重积分 ().

(A) 不存在

(B) 存在, 且为正值

(C) 存在, 且为负值

(D) 存在, 且为零

10.2

1. 画出下列积分域的图形, 并把其上的二重积分 $\int_D f(x, y) dx dy$ 化为不同次序的累次积分.

(1) 由直线 $x + y = 1, x - y = 1, x = 0$ 围成;

(2) 由直线 $y = 0, y = a, y = x, y = x - 2a (a > 0)$ 围成;

(3) $xy \leq 1, y \leq x, 0 \leq x \leq 2$;

(4) $x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y^2$;

(5) $4x^2 + 9y^2 \leq 36, y^2 \leq x + 4$ 的有界域.

2. 计算下列二重积分:

(1) $\int_D \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(2) $\int_D (x+y) d$, 其中 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 为顶点的三角形区域;

(3) $\int_D \frac{x^2}{y} d$, 其中 D 是由 $y=2$, $y=x$, $xy=1$ 所围成的区域;

(4) $\int_D \cos(x+y) dx dy$, 其中 D 是由 $x=0$, $y=x$, $y=$ 所围成的区域;

(5) $\int_D \frac{x \sin y}{y} dx dy$, 其中 D 由 $y=x$, $y=x^2$ 所围成;

(6) $\int_D y^2 dx dy$, 其中 D 由横轴和摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 一拱 $(0 \leq t \leq 2\pi, a>0)$ 围成.

3. 计算下列二重积分:

(1) $\int [x^2 y + \sin(xy^2)] d$, 其中 是由 $x^2 - y^2 = 1$, $y=0$, $y=1$ 所围成的区域;

(2) $\int x|y| dx dy$, $D: y \leq x, x \leq 1, y \geq -2-x^2$;

(3) $\int (1-2x+\sin y^3) dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq R^2$.

4. 画出下列累次积分的积分域, 并改变累次积分的次序.

(1) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$; (2) $\int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;

(3) $\int_0^1 dy \int_y^{3y} f(x, y) dx$; (4) $\int_0^1 dy \int_{1-y^2}^{1-y^2} f(x, y) dx$;

(5) $\int_{1/2}^{1/2} dx \int_{1/2}^x f(x, y) dy + \int_{1/2}^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$;

(6) $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{a^2-2ay}^{a^2-y^2} f(x, y) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_0^{a^2-y^2} f(x, y) dx$.

5. 计算 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{1+y^3} dy$.

6. 求由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$ 所围成的立体的体积.

7. 求圆柱体 $x^2+y^2 \leq a^2$ 与 $x^2+z^2 \leq a^2$ 的公共部分的体积.

8. 由曲线 $xy=1$ 及直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 围成的平板, 质量面密度等于 $\frac{1}{x}$, 求板的质量.

9. 计算下列二重积分:

(1) $\int_D \ln(1+x^2+y^2) d$, 其中 D 为 $x^2+y^2 \leq 1$ 的圆域;

$$(2) \int_D (a^2 - x^2 - y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq ay, |y| \leq |x| \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$(4) \int_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 4x;$$

$$(5) \int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x;$$

$$(6) \int_D \arctan \frac{y}{x} dx dy, \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$(7) \int_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 16;$$

$$(8) \int_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a.$$

10. 用二重积分计算下列平面区域的面积:

(1) 心脏线 $r = a(1 - \cos \theta)$ 内, 圆 $r = a$ 外的公共区域;

(2) 曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy$ ($a > 0$) 围成的区域.

11. 求下列曲面的面积:

(1) 锥面 $y^2 + z^2 = x^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 内的部分;

(2) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被抛物柱面 $z^2 = 2x$ 截下的部分;

(3) 旋转抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截下的部分;

(4) 双曲抛物面 $z = xy$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 截下的部分;

(5) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ 含在旋转抛物面 $x^2 + y^2 - 2az = 0$ ($a > 0$) 内的部分.

12. 设半径为 R 的球面 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 上, 问 R 取何值时, 球面 在定球面内部的那部分的面积最大.

13. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $\int_0^1 f(x) dx = a$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$.

10.3

1. 将三重积分 $\int_V f(x, y, z) dV$ 化为直角坐标系下的累次积分, 积分域 V 分别是:

(1) 由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 2 - x^2$ 所围成的区域;

(2) 由曲面 $z = 1 - x^2 + y^2$, 平面 $z = x$ ($x \geq 0$) 及 $x = 0$ 所围成的区域;

(3) 由不等式组 $0 \leq x \leq \sin z, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \pi$ 所确定的区域.

2. 在直角坐标系下, 计算下列三重积分.

(1) $\int_V xy^2 z^3 dV$, 其中 V 是由曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围成的区域;

(2) $\int_V y \cos(x+z) dV$, 其中 V 是由柱面 $y = x$ 和平面 $y = 0, z = 0, x + z = \frac{1}{2}$ 所围成的区域;

(3) $\int_V z^2 dx dy dz$, 其中 V 是由 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所围成的区域;

(4) $\int_V y^2 dx dy dz$, 其中 $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$;

(5) $\int_V (x+y+z) dV$, 其中 V 是由不等式组 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 所限定的区域;

(6) $\int_V y[1 + xf(z)] dV$, 其中 V 是由不等式组 $-1 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$ 所限定的区域. 函数 $f(z)$ 为任一连续函数.

3. 将下列累次积分化为柱面或球面坐标系下的累次积分, 并计算之.

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \int_0^{1-x^2-y^2} (x^2 + y^2) dz;$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_0^{2x-x^2} dy \int_0^a z(x^2 + y^2) dz.$$

4. 计算下列三重积分.

(1) $\int_V (z + x^2 + y^2) dV$, 其中 V 是由曲线 $\begin{matrix} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{matrix}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的立体;

(2) $\int_V \frac{1}{1+x^2+y^2} dV$, 其中 V 是由锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 及平面 $z = 1$ 所围的空间区域;

(3) $\int_V (x^2 + y^2) dV$, 其中 V 是旋转抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 2, z = 8$ 围成的空间区域;

(4) $\int_V (x^2 + y^2) dV$, 其中 V 是两个半球面 $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a)$ 及平面 $z = 0$ 所围成的区域;

(5) $\int_V (x+z) dV$, 其中 V 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域;

(6) $\int_V \frac{x^2 + y^2}{z^2} dV$, 其中 V 由不等式组 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ 所确定的空间区域;

1 所确定的空间区域;

(7) $\int_V (x^3 y - 3xy^2 + 3xyz) dV$, 其中 V 是球体 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 \leq 1$.

5. 已知曲面 $x = y - z^2$ 与 $\frac{1}{2}y = x$ 及平面 $y = 1$ 所围之立体的体密度为 $|z|$, 求其质量 m .

6. 用三重积分求下列立体的体积 V .

(1) 由曲面 $az = x^2 + y^2, 2az = a^2 - x^2 - y^2$ ($a > 0$) 所围成的立体;

(2) 由不等式组 $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 所确定的立体.

7. 设 $f(x)$ 连续, $F(t) = \int_V [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV$, 其中 V 由不等式组 $0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2$ 确定, 求 $\frac{dF}{dt}$.

8. 有一融化过程中的雪堆, 高 $h = h(t)$ (t 为时间), 表面方程为 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (长度单位为厘米, 时间单位为小时). 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数为 0.9). 问原高 $h(0) = 130$ cm 的这个雪堆全部融化需要多少小时?

10 4

1. 计算下列对弧长的 (第一型) 曲线积分:

(1) $\int_l 2y ds$, 其中 l 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱;

(2) $\int_l (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 l 为星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 在第一象限内的弧;

(3) $\int_c x^2 + y^2 ds$, 其中 c 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(4) $\int_l x ds$, 其中 l 为双曲线 $xy = 1$ 上点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 到点 $(1, 1)$ 的弧段;

(5) $\int_l |y| ds$, 其中 l 为 $x = 1 - y^2$;

(6) $\int_c e^{x^2 + y^2} ds$, 其中 c 为曲线 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴正半轴在第一象限内所围平面区域的边界线;

(7) $\int_L z ds$, 其中 L 为空间曲线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$, 从 $t = 0$ 到 $t = t_0$ 的弧段;

(8) $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ 从 $t = 0$ 到 $t = 2$ 的弧段;

(9) $\int_c (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$, 其中 c 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 设其周长为 a ;

(10) $\int_L (2yz + 2zx + 2xy) ds$, 其中 L 是空间圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = \frac{3}{2}a; \end{cases}$

(11) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 是空间圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$

(12) $\int_C (2x^2 + 3y^2) ds$, 其中 C 是曲线 $x^2 + y^2 = 2(x + y)$.

2. 求下列柱面片的面积.

(1) 圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 介于坐标面 Oxy 及柱面 $z = R + \frac{x^2}{R}$ 之间的一块;

(2) 圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被抛物柱面 $x = z^2$ 截下的一块 (用定积分表示, 不必计算).

3. 试用曲线积分计算由曲线 $l: y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x (1 \leq x \leq 2)$ 绕直线 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}$ 旋转所成旋转曲面的面积.

4. 设悬链线 $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 上每一点的密度与该点的纵坐标成反比, 且在点 $(0, a)$ 处的密度等于 1, 试求曲线在横坐标 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = a$ 之间一段的质量 ($a > 0$).

10 5

1. 计算下列对面积的 (第一型) 曲面积分:

(1) $\int_s (2x + \frac{4}{3}y + z) dS$, 其中 S 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分;

(2) $\int_s x^2 y^2 dS$, 其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

(3) $\int_s \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS$, 其中 S 是下半球面 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

(4) $\int_S |y| z dS$, 其中 S 是曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$;

(5) $\int_S (xy + yz + zx) dS$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所截下的部分;

(6) $\int_S (3x^2 + y^2 + 2z^2) dS$, 其中 S 为球面 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

2. 已知抛物面薄壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量面密度 $\mu(x, y, z) = z$, 求此薄壳的质量.

3. 证明不等式

$$\int_S (x + y + z + 3a)^3 dS \geq 108 a^5 \quad (a > 0),$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 2a^2 = 0$.

4. 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S$, ρ 为 S 在点 P 处的切平面, d 为原点 $(0, 0, 0)$ 到平面 ρ 的距离, 求

$$\int_S \frac{d}{(x, y, z)} dS.$$

10.6

1. 设平面薄片是由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 其面密度 $\mu = x^2 y$, 求该薄片的质心位置.

2. 设均质立体由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成, 试求其质心.

3. 设均质立体由抛物柱面 $y = x, y = 2 - x$, 平面 $z = 0$ 及 $x + z = 6$ 四个面围成, 求其质心.

4. 设锥面形薄壳 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq h, R, h$ 为常数) 的面密度 $\mu = 1$, 求其质心.

5. 求八分之一的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界线的质心, 设曲线的线密度 $\lambda = 1$.

6. 求半径为 r , 高为 h 的均匀圆柱体绕其轴线的转动惯量, 设体密度 $\mu = 1$.

7. 由上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围的均匀物体, 设体密度为 μ , 求其对 z 轴的转动惯量 I_z .

8. 已知均质的半球壳 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的面密度为 μ , 求其对 z 轴的转动惯量 I_z (试用球坐标计算 I_z).

9. 已知物质曲线

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 &= Rx \end{aligned} \quad (z \geq 0)$$

的线密度为 x , 求其对三个坐标轴的转动惯量之和 $I_x + I_y + I_z$.

10.7

1. 求曲面 $x + y + z = a$ ($a > 0$) 与三个坐标面所围成的立体的体积.

2. 计算 $\int_D dx dy$, 其中 D 是由不等式组: $x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^3 \leq 4a^2 x^2 y^2$ 所确定的区域 ($a > 0$).

3. 已知 $f(x)$ 具有三阶连续的导数, 且 $f(0) = f'(0) = f''(0) = -1, f(2) = -\frac{1}{2}$, 计算累次积分

$$I = \int_0^2 dx \int_0^x (2-x)(2-y)f(y)dy.$$

4. 计算二重积分 $\int_D |y - x^2| dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -1, x = 1, y = 0$ 及 $y = 2$ 所围成的区域.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 \int_x^1 f(x)f(y)dy dx$.

6. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

7. 证明: 抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 上任意点处的切平面与抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围成的立体的体积为一定值, 并求出此值.

8. 求抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 的一个切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 围成的立体体积最小, 并求出这个最小的体积.

9. 设有一个由 $y = \ln x, y = 0, x = e$ 所围成的均质薄片, 面密度 $\mu = 1$, 求此薄片绕直线 $x = t$ 的转动惯量 $I(t)$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

10. 设有一半径为 R , 高为 H 的圆柱形容器, 盛有 $\frac{2}{3}H$ 高的水, 放在离心机上高速旋转, 受离心力的作用, 水面呈旋转抛物面形, 问当水刚要溢出容器时, 液面的最低点在何处?

11. 设 $f(t)$ 连续, 试证

$$\int_D f(x-y) dx dy = \int_{-A}^A f(t)(A-|t|) dt,$$

其中 A 为正的常数, $D: |x| \leq A/2, |y| \leq A/2$.

12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续、正值、且单调下降, 试证

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

13. 试证

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(z) dx dy dz = \int_{-1}^1 f(u) (1-u^2) du.$$

并利用这个式子计算:

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (z^4 + z^2 \sin^3 z) dx dy dz.$$

14. 已知函数 $F(t) = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq t} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, 其中 f 为可微函数, 积分域为球体 $x^2+y^2+z^2 \leq t$, 求 $F'(t)$.

15. 计算 $\int_V |x^2+y^2+z^2-1| dV$, 其中 V 是由锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体.

16. 求 $\int_V (x+2y+3z) dV$, 其中 V 为圆锥体, 其顶点在原点 $(0,0,0)$ 处, 底为平面 $x+y+z=3$ 上以点 $(1,1,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆.

17. 试证: 由连续曲线 $y=f(x) > 0$, 直线 $x=a, x=b$, 及 x 轴所围的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体, 当体密度 $\mu=1$ 时, 对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(x) dx.$$

18. 已知

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{当 } z \geq x^2 + y^2 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } z < x^2 + y^2 \text{ 时,} \end{cases}$$

计算曲面积分 $\int_{x^2+y^2+z^2=R^2} f(x, y, z) dS$.

19. 理解曲面积分的定义, 试通过球面坐标计算均质球壳 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 对 z 轴的转动惯量 I_z , 设面密度为 μ .

20. 试用曲线积分求平面曲线段 $l: y = \frac{1}{3}x^3 + 2x, 0 \leq x \leq 1$ 绕直线 $L: y = \frac{4}{3}x$ 旋转一周所产生的旋转面的面积 S .

21. 计算对弧长的曲线积分 $\int_l (|x| + |y|)^2 (1 + \sin xy) ds$, 其中 l 是以原点为圆心的单位圆圆周.

附录 重积分的变量变换

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的计算有换元积分法, 设变换 $x = \varphi(t)$ 是单调的, 有连续的导数, 且 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, 则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

这里不但要把 $x = \varphi(t)$ 代到被积函数 $f(x)$ 中, 而且还要考虑微元区间 dx 与 dt 的关系: $dx = \varphi'(t) dt$, $\varphi'(t)$ 是微元区间 dx 与 dt 的比率, 最后, 要把积分区间 (x 的变化范围) 化为新的区间 (t 的变化范围) .

对重积分, 也有类似的换元积分公式. 如 10.2 节中介绍的直角坐标系下二重积分化为极坐标系下二重积分的变换公式(5)

$$f(x, y) dx dy = f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

实质上, 就是作变量变换

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta$$

的结果. 还有直角坐标系下三重积分化为柱坐标系或球坐标系下的三重积分的变换公式, 都是变量变换的结果. 下面将以二重积分为主, 介绍重积分的变量变换.

对二重积分 $\int_{xy} f(x, y) dx dy$, 作变量变换

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v). \end{aligned} \tag{1}$$

设变换(1)是 xy 平面区域 G_{xy} 和 uv 平面区域 G_{uv} 之间的一对一的映射, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数.

新的二重积分如何? 核心问题是 G_{uv} 内的面积微元 d_{uv} 与 G_{xy} 内的面积微元 d_{xy} 的关系. 为此, 在 G_{uv} 内取一小矩形 $ABCD$ (其面积记为 d_{uv}), 其中 $A(u, v)$, $B(u + \Delta u, v)$, $C(u + \Delta u, v + \Delta v)$, $D(u, v + \Delta v)$, 见图 1. 在变换(1)下, 小矩形 $ABCD$ 变为 G_{xy} 内小曲边四边形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ (它的面积记为 d_{xy}), 四个顶点的坐标为

$$A_1(x_1, y_1), \text{ 其中 } x_1 = x(u, v), y_1 = y(u, v);$$

$$B_1(x_2, y_2), \text{ 其中 } x_2 = x(u + \Delta u, v), y_2 = y(u + \Delta u, v);$$

$$C_1(x_3, y_3), \text{ 其中 } x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v), y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v);$$

$$D_1(x_4, y_4), \text{ 其中 } x_4 = x(u, v + \Delta v), y_4 = y(u, v + \Delta v).$$

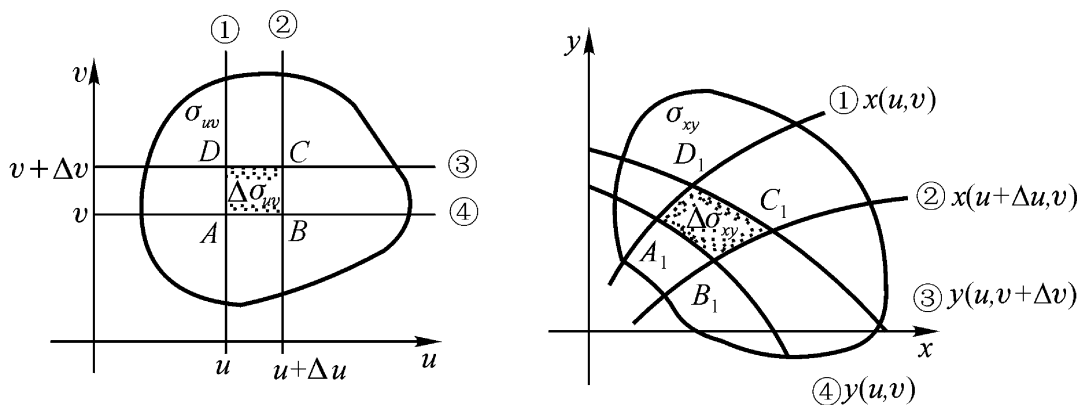


图 1.1

利用二元函数的一阶泰勒公式, 则有

$$x_2 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + o(\Delta u),$$

$$y_2 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + o(\Delta u).$$

$$x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + o(\Delta u^2 + \Delta v^2),$$

$$y_3 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + o(\Delta u^2 + \Delta v^2).$$

$$x_4 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + o(\Delta v),$$

$$y_4 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + o(\Delta v).$$

如果略去高阶无穷小 $o(\Delta u)$, $o(\Delta v)$, $o(\Delta u^2 + \Delta v^2)$, 则

$$x_2 - x_1 = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \quad y_2 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u,$$

$$x_4 - x_1 = \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \quad y_4 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v.$$

由此可见, 小曲边四边形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 的两对对边的长度近似相等. 视 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 为平行四边形, 则其面积近似为

$$|\overrightarrow{A_1 B_1} \times \overrightarrow{A_1 D_1}|.$$

因为

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1} = (x_4 - x_1) \mathbf{i} + (y_4 - y_1) \mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \mathbf{j}.$$

从而得到

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{A_1 B_1} \times \overrightarrow{A_1 D_1} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{x}{u} & u & -\frac{y}{u} & u & 0 \\ -\frac{x}{v} & v & -\frac{y}{v} & v & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{x}{u} & -\frac{y}{u} \\ -\frac{x}{v} & -\frac{y}{v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}.$$

于是有面积微元

$$d_{xy} = \begin{vmatrix} -\frac{x}{u} & -\frac{y}{u} \\ -\frac{x}{v} & -\frac{y}{v} \end{vmatrix} d_{uv} = \left| \frac{(x,y)}{(u,v)} \right| d_{uv} . \tag{2}$$

$\left| \frac{(x,y)}{(u,v)} \right|$ 表示在变换(1)之下面积微元 d_{xy} 与 d_{uv} 的比率 .

所以,在变换(1)下,二重积分的换元积分公式为

$$\int_{xy} f(x,y) dxdy = \int_{uv} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{(x,y)}{(u,v)} \right| dudv . \tag{3}$$

顺便指出,为了使变换(1)是一对一的,需要使其雅可比行列式不等于零 .

容易算出直角坐标到极坐标变换

$$x = r\cos \quad , \quad y = r\sin$$

的雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} -\frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{vmatrix} = r .$$

例 1 计算 $\int_D y^2 d\sigma$, 其中 D 为由 $x > 0, y > 0, 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$ 所限定的区域 .

解 先画出区域 D : 参见图 2 . 显然,若取 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 或从其解出

$$x = \frac{u}{v}, y = uv$$

时,区域 D 亦可表为

$$1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 2$$

由于雅可比行列式

$$\frac{(x,y)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2uv} & \frac{v}{2u} \\ -\frac{u}{2v} & \frac{u}{2v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

所以

$$y^2 \, d = uv \left| \frac{1}{2v} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_1^3 u du \int_1^2 dv = 2.$$

例 2 计算 $\int [(x+y)^2 + (x-y)^2] d$, 其中区域 σ 是以 $(0,0), (1,1), (2,0)$ 和 $(1,-1)$ 为顶点的正方形.

解 先画出区域 σ , 参见图 3. 显然, 若取

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

或

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v),$$

则区域 σ 可表为:

$$0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2.$$

而此时

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

从而有

$$\begin{aligned} \int [(x+y)^2 + (x-y)^2] d &= \int [u^2 + v^2] \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 du \int_0^2 (u^2 + v^2) dv \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

例 3 用变量代换 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$, 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积.

解 由所给变量代换知 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -br \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr.$$

于是有

$$1 d = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr = \pi ab.$$

同样, 若 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 有连续的一阶偏导数, 且其雅可比行列式

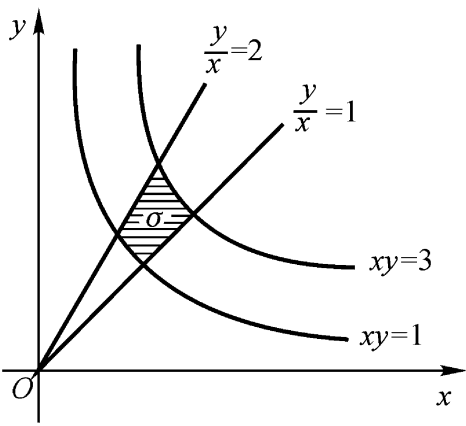


图 2

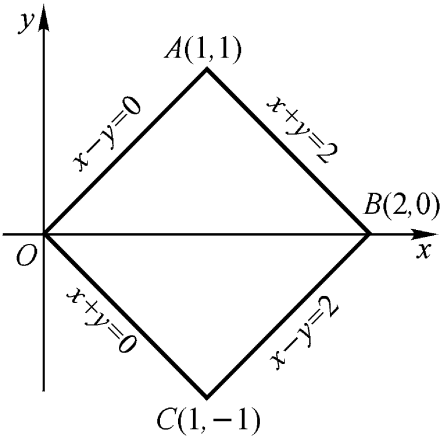


图 3

$$\frac{(x, y, z)}{(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{u} & \frac{y}{u} & \frac{z}{u} \\ \frac{x}{v} & \frac{y}{v} & \frac{z}{v} \\ \frac{x}{w} & \frac{y}{w} & \frac{z}{w} \end{vmatrix} = 0$$

时, 有三重积分的换元积分公式

$$\begin{aligned} & \int_{V_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{V_{uvw}} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{(x, y, z)}{(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (4) \end{aligned}$$

不难得到, 在直角坐标到柱坐标的变换

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

下, 有

$$\frac{(x, y, z)}{(r, \theta, z)} = r;$$

在直角坐标到球坐标的变换

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

下, 有

$$\frac{(x, y, z)}{(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \varphi.$$

例 4 计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积.

解 作变换

$$\begin{aligned} x &= a \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= b \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= c \cos \varphi. \end{aligned}$$

则

$$\left| \frac{(x, y, z)}{(\rho, \theta, \varphi)} \right| = abc^2 |\sin \varphi|.$$

且椭球体由不等式组

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

确定. 于是, 椭球体积为

$$\int_V dV = \int_V abc^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = abc \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} abc.$$

第十一章 第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场

第十章将积分的方法推广到几何形体上的多元函数 $f(P)$ 上去.本章根据实际需要,把这一方法进一步推广到向量场内的有向曲线与有向曲面上——介绍第二型曲线积分与第二型曲面积分.同时介绍向量场的基本概念散度与旋度.

11.1 向量场

11.1.1 向量场

在 9.8 节中,讨论了数量场及其基本概念——方向导数与梯度.还有一类场是向量场,如电磁场、力场、速度场、梯度场等.稳定的向量场的数学表示是在场 D 内定义的点 M 的向量函数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$, $M \in D$.对于平面向量场 (D 是平面区域),引入平面直角坐标系 Oxy 后, \mathbf{F} 是点 M 的坐标 (x, y) 的二元向量函数

$$\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}, \quad (x, y) \in D.$$

它相当于两个有序的二元数量函数 $P(x, y), Q(x, y)$.对空间的向量场,引入空间直角坐标系 $Oxyz$ 后, \mathbf{F} 是点 M 的坐标 (x, y, z) 的三元向量函数

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in D.$$

它相当于三个有序的三元数量函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$.

在向量场中,若曲线 l 上每点处的切线与该点的场向量重合,则称曲线 l 为向量场的向量线,参看图 11.1.流速场的流线,静电场的电力线,磁场的磁力线等都是向量线.

设向量线的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in T.$$

由于 $\{dx, dy, dz\}$ 是曲线的切向量,而场向量 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$.由它们共线的条件,得到向量线应满足的微分方程是

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

整个向量场 D 被向量线充满,一般地说,通过场内每点有

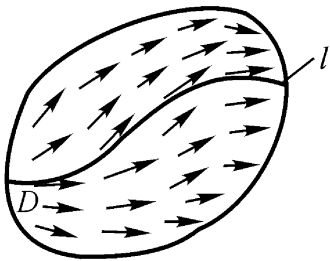


图 11.1

且仅有一条向量线穿过, 向量线互不相交.

例 在坐标原点处点电荷 q 产生的电场中, 点 $M(x, y, z)$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0,$$

其中 $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, \mathbf{r}^0 是 \mathbf{r} 方向的单位向量. 求电场强度场 \mathbf{E} 的向量线——电力线.

解 因

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

所以电力线方程为

$$\frac{dx}{\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}} = \frac{dy}{\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}} = \frac{dz}{\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}},$$

从而有

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

通解为

$$y = C_1 x, \quad z = C_2 x,$$

其中 C_1, C_2 为两个任意常数. 由此可见, 电力线是从原点 (电荷 q) 发出的射线族.

11.1.2 向径的导数

设曲线 l 的方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I.$$

当动点 M 在 l 上移动时, 动点的向径 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ 是 t 的向量函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. 它是曲线 l 的向量式方程 (称 l 为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 的终端曲线). 下面讨论向量函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 的导数. 参看图 11.2. 由于

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{MM_1} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j},$$

故

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

说明向量函数的导数等于对它的每个分量求导, 因为

$$x(t) = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \cos \alpha \frac{ds}{dt},$$

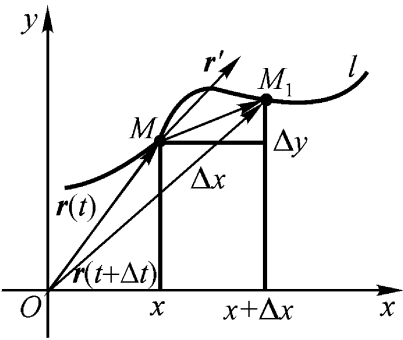


图 11.2

$$y'(t) = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \cos \alpha \frac{ds}{dt},$$

其中 $\cos \alpha$, $\cos \beta$ 为曲线在 t 的对应点处沿弧长 s 增加方向的方向余弦. 所以

$$\mathbf{r}'(t) = \left\{ \cos \alpha, \cos \beta \right\} \frac{ds}{dt}.$$

说明 $\mathbf{r}'(t)$ 表示曲线 l 在 t 的对应点处沿 t 增加方向的切向量, 其大小等于弧长的导数的绝对值. 如果 t 表示时间, $\mathbf{r}(t)$ 表示质点作曲线运动的位置向量, 则 $\mathbf{r}'(t)$ 就是速度向量.

$$d\mathbf{r} = \left\{ \cos \alpha, \cos \beta \right\} ds = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j},$$

有时将 $d\mathbf{r}$ 记为 $d\mathbf{s}$, 称为弧长微元向量.

对空间的向量函数的导数与微分, 有类似的结果:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \right\} \frac{ds}{dt},$$

$$d\mathbf{r} = \left\{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \right\} ds = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k},$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 上点 t 处的切向方向余弦.

11.2 第二型曲线积分

11.2.1 变力做功与第二型曲线积分的概念

例 1 设有一平面连续力场

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}, \quad (x, y) \in D.$$

一质点在场内从点 A 沿光滑曲线弧 l 移动到点 B , 求力 \mathbf{F} 对质点作的功 W .

解 当 \mathbf{F} 为常力, l 为有向直线段 \overline{AB} 时, 力所作的功为:

$$W = \mathbf{F} \cdot \overline{AB}.$$

一般情况下, 借助定积分的方法来解决. 首先用曲线弧 l 上的点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B$$

将 AB 分为 n 段, 设 $M_k(x_k, y_k)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

然后, 任取一典型的有向弧段 $M_{k-1}M_k$ 来分析 (参看图 11.3). 由于它光滑且很短, 可以用位移向量

$$\overline{M_{k-1}M_k} = \Delta x_k \mathbf{i} + \Delta y_k \mathbf{j}$$

近似替代 $M_{k-1}M_k$, 又因 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 是连续的, 可以用

$M_{k-1}M_k$ 上任一点 (ξ_k, η_k) 处的力

$$\mathbf{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k) \mathbf{i} + Q(\xi_k, \eta_k) \mathbf{j}$$

近似代替其上的变力. 这样变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 沿有向弧段

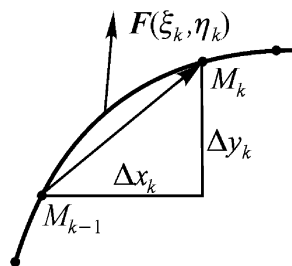


图 11.3

$M_{k-1} M_k$ 所作的功

$$W_k = \mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot \overline{M_{k-1} M_k},$$

即

$$W_k = [P(x_k, y_k) dx_k + Q(x_k, y_k) dy_k].$$

于是

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^n W_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot \overline{M_{k-1} M_k} \\ &= \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k) dx_k + Q(x_k, y_k) dy_k]. \end{aligned}$$

最后, 让分点数无限增加, 使小弧段中最长的弧长 $\rightarrow 0$, 取极限, 就得到所求的功

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot \overline{M_{k-1} M_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [P(x_k, y_k) dx_k + Q(x_k, y_k) dy_k]. \end{aligned}$$

从类似的实际问题中抽去它们的实际意义, 就产生了下面重要的概念.

定义 11.1 设 l 为 Oxy 平面上由点 A 到点 B 的一条光滑的有向曲线段, 向量函数

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

在 l 上有定义. 用 l 上的点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B$$

将 AB 分为 n 段, 设 $M_k(x_k, y_k)$, $x_k = x_k - x_{k-1}$, $y_k = y_k - y_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$); 在每个有向弧段 $M_{k-1} M_k$ 上任取一点 (ξ_k, η_k) , 作点乘积的和式

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \overline{M_{k-1} M_k} = \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) x_k + Q(\xi_k, \eta_k) y_k].$$

记 $\Delta s_k = \overline{M_{k-1} M_k}$ 的弧长, 如果极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \overline{M_{k-1} M_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) x_k + Q(\xi_k, \eta_k) y_k]$$

存在, 且与 $M_k, (\xi_k, \eta_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 的取法无关, 则称此极限值为向量函数 $\mathbf{F}(x, y)$ 在有向弧 l 上的曲线积分, 或称为函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在有向曲线弧 l (AB) 上的第二型曲线积分, 记为

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{或} \quad \int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中 $d\mathbf{r}$ 称为弧长微元向量: $|d\mathbf{r}| = ds$, 其方向为有向曲线 l 的正向的切线方向,

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j},$$

见图 11.4. 注意这里的 $d\mathbf{r}$ 也常常写为 $d\mathbf{s}$.

称

$$\int_l P(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k) \Delta x_k \quad (1)$$

为函数 $P(x, y)$ 沿有向弧 l 对坐标 x 的曲线积分. 称

$$\int_l Q(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Q(x_k, y_k) \Delta y_k \quad (2)$$

为函数 $Q(x, y)$ 沿有向弧 l 对坐标 y 的曲线积分.

完全类似地, 可以定义向量函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

在空间有向曲线弧 l 上的曲线积分

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy + R dz,$$

其中 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, 而

$$\begin{aligned} P dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k, \\ Q dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Q(x_k, y_k, z_k) \Delta y_k, \\ R dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) \Delta z_k \end{aligned}$$

分别称为函数 P, Q, R 沿有向曲线段 l 对坐标 x, y, z 的曲线积分.

这样, 例 1 中力 \mathbf{F} 所作的功 $W = \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

当被积函数在积分路径上连续时, 第二型曲线积分存在.

由第二型曲线积分的定义易知它有下列性质(通过对坐标 x 的曲线积分表述, 假设所涉及到的积分都存在):

$$1^\circ \int_{AB} (k_1 f_1 + k_2 f_2) dx = k_1 \int_{AB} f_1 dx + k_2 \int_{AB} f_2 dx \quad (k_1, k_2 \text{ 为常数}); \quad (\text{线性性})$$

$$2^\circ \int_{AB} f dx = \int_{AC} f dx + \int_{CB} f dx \quad (\text{点 } C \text{ 位于 } AB \text{ 上}); \quad (\text{弧段可加性})$$

$$3^\circ \int_{AB} f dx = - \int_{BA} f dx. \quad (\text{有向性})$$

性质 3 说明: 第二型曲线积分与积分路径的方向有关, 若改变它(把 AB 换为 BA), 则积分值差一个符号. 这是与定积分一致的, 但与第一型曲线积分不同, 这是为什么?

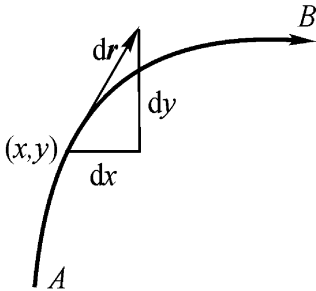


图 11.4

11 2 2 第二型曲线积分的计算

设以 A 为起点 B 为终点的平面曲线段 AB 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), \quad t \text{ 在 } [a, b] \text{ 之间}$$

且起点 A 对应 $t = a$, 终点 B 对应 $t = b$, 函数 $x(t), y(t) \in C^1$ (曲线段 AB 是光滑的), 且其导数不同时为零. 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 AB 上连续. 在这些条件下, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 沿有向曲线段 AB 的第二型曲线积分存在. 下面说明它的计算方法.

设定义 11.1 中的分点 M_k 对应 $t = t_k$, 由拉格朗日中值定理有

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k) \Delta t_k,$$

其中 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, ξ_k 介于 t_k, t_{k-1} 之间的一点. 于是由定义 11.1 有

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(x(\xi_k), y(\xi_k)) \Delta x_k.$$

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, 必有 $\max_k |\Delta t_k| \rightarrow 0$, 所以上式右边的和式的极限恰好等于函数 $P(x(t), y(t)) x'(t)$ 从 a 到 b 区间上的定积分 $\int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt$, 于是有公式

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt,$$

同理有

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

空间光滑的曲线上的第二型曲线积分有类似的结果. 总之, 第二型曲线积分可以化为定积分来计算. 只要将曲线的参数方程代入到被积表达式中, 曲线起点对应的参数为定积分下限, 终点对应的参数为上限 (这是与第一型曲线积分不同的), 就化为定积分了.

例如, AB 的方程为

$$y = y(x),$$

当 A 的坐标为 $(a, y(a))$, B 的坐标为 $(b, y(b))$ 时, 视 x 为参量, 就有

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, y(x)) dx,$$
$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx.$$

例 2 计算 $\int_{AB} xy \, dx$, 其中 AB 是抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的有向弧段.

解 参看图 11.5. 若把 AB 表为 x 的函数, 需将 AB 分为两段:

$AO: y = -x, x \text{ 从 } 1 \text{ 变到 } 0;$

$OB: y = x, x \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1,$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{AB} xy dx &= \int_{AO} xy dx + \int_{OB} xy dx \\ &= \int_1^0 -x \cdot x dx + \int_0^1 x \cdot x dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

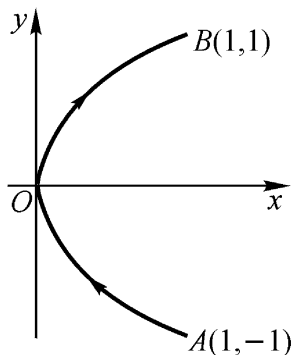


图 11.5

若把 AB 的方程写为 y 的函数

$$x = y^2, \quad y \text{ 从 } -1 \text{ 变到 } 1,$$

则

$$\int_{AB} xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

提醒注意的是:例 2 中 AB 关于 x 轴对称, 被积函数 xy 是 y 的奇函数, 但这个第二型曲线积分不等于零. 这是因为第二型曲线积分是在有向曲线上进行的, 还有方向问题, 所以它与第一型曲线积分不同, 在 11.2.1 段, 第二型曲线积分的性质中没有讲过对称性. 当然, 把它化为定积分后, 若定积分有对称性是可以利用的.

例 3 计算 $\int_C x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, 其中 C 是由点 $A(1, 1, 1)$ 到点 $B(2, 3, 4)$ 的直线段.

解 直线 AB 的方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

化成参数式方程为

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 3t.$$

A 点对应 $t = 0$, B 点对应 $t = 1$, 于是

$$\begin{aligned} \int_C x dx + y dy + (x + y - 1) dz &= \int_0^1 (1 + t) dt + (1 + 2t) 2 dt + (1 + 3t) 3 dt \\ &= \int_0^1 (6 + 14t) dt = 13. \end{aligned}$$

例 4 计算 $\int_l x^2 dx + (y - x) dy$, 其中

1° l 是上半圆周 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 反时针方向;

2° l 是 x 轴上由点 $A(a, 0)$ 到点 $B(-a, 0)$ 的线段.

解 1° 参看图 11.6, l 的参数方程为

$$x = a \cos t, y = a \sin t.$$

A 点对应 $t = 0$, B 点对应 $t = \pi$, 于是

$$\begin{aligned} \int_l x^2 dx + (y - x) dy &= \int_0^\pi a^2 \cos^2 t d(a \cos t) + (a \sin t - a \cos t) d(a \sin t) \\ &= \int_0^\pi a^3 \cos^2 t d \cos t + \int_0^\pi a^2 \sin t d \sin t - \int_0^\pi a^2 \cos^2 t dt \\ &= -\frac{2}{3} a^3 - \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

2° l 的方程为

$$y = 0.$$

x 从 a 到 $-a$, 于是

$$\int_l x^2 dx + (y - x) dy = \int_a^{-a} x^2 dx = -\frac{2}{3} a^3.$$

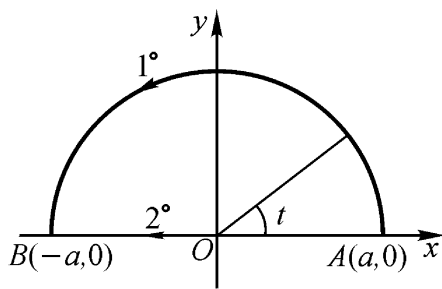


图 11.6

例 5 位于原点 $(0, 0, 0)$ 处的电荷 q 产生的静电场中, 一单位正电荷沿光滑曲线 :

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

从点 A 移动到点 B, 设 A 对应 $t = t_1$, B 对应 $t = t_2$, 求电场所作的功 W .

解 设点 $M(x, y, z)$ 的向径 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 即

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

根据库仑定律, 位于点 M 处的单位正电荷受到的电场力

$$\mathbf{F} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r},$$

因此所求的功

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = q \int_{t_1}^{t_2} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= q \int_{t_1}^{t_2} \frac{xx' + yy' + zz'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dt = q \int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \frac{dr}{r^2} \\ &= q \left[-\frac{1}{r} \right]_{r(t_1)}^{r(t_2)}, \end{aligned}$$

其中 $r(t_1)$, $r(t_2)$ 分别是点 A 和 B 到原点的距离.

这个例子表明, 静电场电场力作功只与单位正电荷运动的起点和终点的位置有关, 而与运动的路径无关. 凡是具有这种特性的力场, 都叫做保守力场, 如重力场也是保守力场.

11.2.3 第二型曲线积分与第一型曲线积分的关系

设曲线段 l 的方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

起点对应 $t = a$, 终点对应 $t = b$, $x(t), y(t), z(t)$ 有连续的导数, 且不同时为零 . 由于

$$\mathbf{t}=\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$$

是 C 上 t 的对应点处, 与 t 的增加方向一致的切向量 . 其方向余弦为

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}, \\ \cos\beta &= \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}.\end{aligned}$$

由两类曲线积分的计算公式知

$$\begin{aligned} \int_C P(x,y,z)dx &= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt \\ &= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\cos\alpha\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt \\ &= \int_C P(x,y,z)\cos\alpha\,ds,\end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned} \int_C Q(x,y,z)dy &= \int_C Q(x,y,z)\cos\beta\,ds, \\ \int_C R(x,y,z)dz &= \int_C R(x,y,z)\cos\gamma\,ds,\end{aligned}$$

所以, 向量 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 沿有向曲线 C 的曲线积分(第二型曲线积分), 等于 \mathbf{F} 在曲线 C 的切线正向上的投影 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ ($\mathbf{t} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$) 沿 C 的第一型曲线积分, 即

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds = \text{Prj}_{\mathbf{t}}\mathbf{F}ds,$$

因此, 可以把第二型曲线积分视为一种特殊的第一型曲线积分, 它的被积函数与 \mathbf{F} 的方向有关 .

11.3 格林公式、平面流速场的环量与旋度

牛顿 - 莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 将定积分与被积函数的原

函数在积分区间端点的值联系起来.类似地,本节介绍格林公式.把平面区域上的二重积分和区域的边界上的曲线积分联系起来.格林公式在平面向量场里有重要的实际背景,它在数学上和物理场论中都是重要的.

11 3 1 格林公式

定理 11.1 设 Oxy 平面上闭区域 D 由分段光滑且不自相交的闭曲线 C 围成,函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数,则有格林公式

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{1}$$

其中闭曲线积分按 C 的正向进行.所谓闭曲线 C 的正向,是指你沿此方向前进时, C 所围成的区域 D 在你的左边(图 11.7),亦记作 C^+ ;反之,称为闭曲线 C 的负向,记作 C^- .

证明 设区域 D 是 x -型的,即由不等式组

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

确定(图 11.8),则由二重积分计算法知

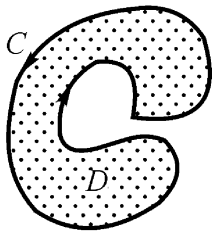


图 11.7

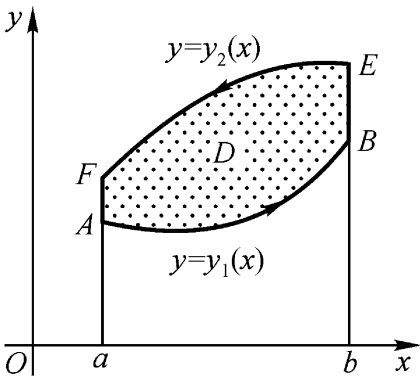


图 11.8

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx,$$

而由曲线积分计算法得

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y)dx &= \int_{AB+BE+EF+FA} P(x, y)dx \\ &= \int_a^b P(x, y_1(x))dx + \int_b^a P(x, y_2(x))dx \\ &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx, \end{aligned}$$

格林 Green G.(英) 1793—1841.童年辍学在磨坊干活.但他自强不息,利用工作之余自学数学与物理.在读 Laplace 著的《天体力学》一书时,开展对位势的研究从而得到格林公式,奠定了电磁学的数学理论基础.在学术研究中他反对门阀偏见,勇于吸收各学派的先进思想,培育了剑桥学派.

因此

$$-\oint_D \frac{P}{y} dx dy = \oint_C P(x,y) dx.$$

当 D 不是 x -型区域时, 只要用一些分段光滑的曲线把 D 分为几块 x -型区域, 便可推出上面的等式. 如图 11.9 所示的区域 D , 用弧段 AB 将 D 分为 D_1, D_2 两个 x -型区域. 利用上面的结果和重积分的性质及第二型曲线积分的性质, 得到

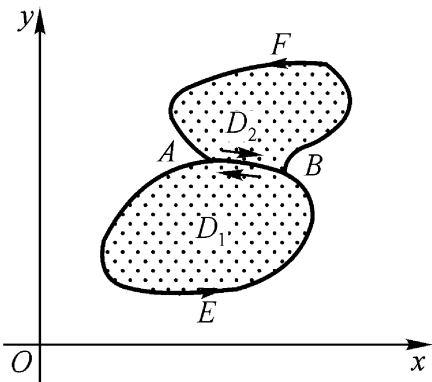


图 11.9

$$\begin{aligned} -\oint_D \frac{P}{y} dx dy &= -\oint_{D_1} \frac{P}{y} dx dy - \oint_{D_2} \frac{P}{y} dx dy = \int_{AEBA} P dx + \int_{ABFA} P dx \\ &= \int_{AEB} P dx + \int_{BA} P dx + \int_{AB} P dx + \int_{BFA} P dx \\ &= \int_{AEBFA} P dx = \oint_C P dx. \end{aligned}$$

同法可证

$$\oint_D \frac{Q}{x} dx dy = \oint_C Q dy. \quad \square$$

如果在一个平面区域 D 内, 任一闭曲线所围的区域都完全含于 D , 则说 D 是单连通域, 否则说它是复连通域(或多连通域)(图 11.10). 定理 11.1 对单连通域和复连通域都适用.

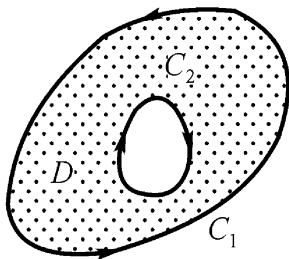


图 11.10

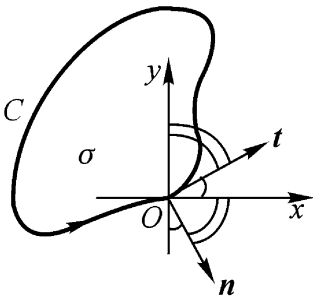


图 11.11

格林公式还有另一种形式. 设 \boldsymbol{t} 为曲线 C 同向的切向量, \boldsymbol{n} 为 C 的外法向量. 将 \boldsymbol{n} 向反时针方向转一直角即得 \boldsymbol{t} . 由图 11.11 可知, 它们与两坐标轴正向间的夹角满足关系

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{t}}, x) &= \pi - (\hat{\boldsymbol{n}}, y), \\ (\hat{\boldsymbol{t}}, y) &= (\hat{\boldsymbol{n}}, x), \end{aligned}$$

于是由两类曲线积分的关系

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_C [P \cos(\hat{t}, x) + Q \cos(\hat{t}, y)] ds,$$

得

$$\oint_C [-P \cos(\hat{n}, y) + Q \cos(\hat{n}, x)] ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

将上式中 Q 换为 P , P 换为 $-Q$, 得到格林公式的另一种形式:

$$\oint_C [P \cos(\hat{n}, x) + Q \cos(\hat{n}, y)] ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2)$$

作为格林公式(1)的一个简单应用, 若令 $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, 则有

$$\oint_C x dy - y dx = \iint_D dx dy = 2S,$$

其中 S 为 D 的面积, 所以闭曲线 C 所围的区域 D 的面积 S , 可由曲线积分计算:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx. \quad (3)$$

例 1 求椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 所围的面积 S .

解 由(3)式,

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

在计算上, 格林公式为平面曲线积分, 特别是闭曲线上的积分开拓了一个新的途径.

例 2 计算 $I = \oint_C (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 的正向.

解 这里

$$P = yx^3 + e^y, \quad Q = xy^3 + xe^y - 2y, \\ \frac{P}{y} = x^3 + e^y, \quad \frac{Q}{x} = y^3 + e^y, \quad \frac{Q}{x} - \frac{P}{y} = y^3 - x^3,$$

故由格林公式有

$$I = \iint_D (y^3 - x^3) dx dy = 0.$$

对平面闭曲线上的第二型曲线积分, 当 $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y}$ 比较简单时, 常常考虑通过格林公式化为二重积分来计算.

例 3 计算 $J = \int_{AO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, 其中 AO 是从点 $A(a, 0)$ 到点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

解 这里积分路径 AO 不是闭曲线, 但由

$$P = e^x \sin y - my, \quad Q = e^x \cos y - m,$$

$$\frac{Q}{x} = e^x \cos y, \quad \frac{P}{y} = e^x \cos y - m$$

知 $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} = m$, 特别简单. 为应用格林公式, 在 AO 的基础上, 再补充一段曲线, 使之构成闭曲线. 因为在补充的曲线上还要算曲线积分, 所以补充的曲线要简单, 通常是取与坐标轴平行的直线段或折线. 这里补加直线段 \overline{OA} , 则由格林公式,

$$\int_{AO+\overline{OA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \int_D m dx dy = \frac{1}{8} m a^2.$$

由于 \overline{OA} 的方程为 $y = 0, 0 \leq x \leq a$, 故

$$\int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \int_0^a 0 dx = 0,$$

因此,

$$J = \frac{1}{8} m a^2 - 0 = \frac{1}{8} m a^2.$$

11.3.2 平面流速场的环量与旋度

设在 Oxy 平面区域 G 内, 有一个不可压缩流体的流速场

$$\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}, \quad (x, y) \in G,$$

其中 $P(x, y), Q(x, y)$ 具有连续的偏导数. 设 C 是 G 内一条光滑的不自相交的正向闭曲线.

称曲线积分

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

为流速场沿闭曲线 C 的环量(环流).

显然在 C 上的每点处, \mathbf{v} 的方向与正向切线方向愈靠近环量愈大. 设想 C 为一片秋叶的边界线, 叶片在水面上. 当水面各点流速都相同时(水像刚体一样平动), 沿 C 的环量为零, 叶片不转动. 环量越大(如叶片处在旋涡处), 叶片转动得越快.

由格林公式(1),

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) dx dy.$$

这说明沿闭曲线 C 的环量, 取决于曲线 C 所围的区域 D 内各点处 $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y}$ 的值.

为了说明这个值的意义, 下面仅就 $\frac{Q}{x} > 0, \frac{P}{y} < 0$ 的情况进行分析.

$\frac{Q}{x} > 0$, 说明随着 x 的增加, 铅直分速度增大; $\frac{P}{y} < 0$, 说明随着 y 的增加,

水平分速度减小.我们不考查点 (x, y) 处流体微粒的平动,在图 11.12 中仅画出两个分速度对中心点 (x, y) 处的分速度的改变量.这里, $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} > 0$.由图11.12不难看出,微粒将作反时针转动,而且 $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y}$ 越大,转动越快.

易知,当 $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} < 0$ 时,微粒将作顺时针转动,当 $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} = 0$ 时,微粒只作平动,不转动.

总之, $\frac{Q}{x} - \frac{P}{y}$ 表示 (x, y) 处流体微粒转动的量.因转动是有方向的,所以称向量

$$\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \mathbf{k}$$

为平面流速场的旋度,记为 $\text{rot } v$.

由积分中值公式知

$$\oint_C v \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \bigg|_{M^*} S,$$

其中点 $M^* \in D$, S 是 D 的面积,从而

$$\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \bigg|_M = \lim_{C \rightarrow M} \frac{1}{S} \oint_C v \cdot d\mathbf{r},$$

其中 $C \rightarrow M$, 表示闭曲线 C 向所围的区域内一点 M 无限收缩, 故

$$\text{rot } v(M) = \lim_{C \rightarrow M} \frac{1}{S} \oint_C v \cdot d\mathbf{r} \mathbf{k} = \lim_{C \rightarrow M} \frac{1}{S} \oint_C v \cdot d\mathbf{r} \mathbf{k}.$$

这是平面流速场旋度的积分形式.若以此式定义旋度,可知它是与坐标的选择无关的量.

有了环量与旋度的概念,格林公式(1)的物理意义是:沿平面闭曲线 C 的环量,等于 C 所包围的平面区域内各点旋度的总积累.

格林公式(2)也有明确的物理意义,读者可就平面流速场 v 穿过闭曲线向外的流量问题,从表面现象到内在本质进行深入的分析,导出格林公式(2).

11.4 平面曲线积分与路径无关的条件、保守场

11.4.1 平面曲线积分与路径无关的条件

在一元函数的积分理论中,求原函数是一个重要问题.若 $f(x)$ 在区间 I 上

连续, 则 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ 就是它的一个原函数, 即满足

$$dF = f(x) dx, \quad x \in I.$$

若表达式 $Pdx + Qdy$ 是某一函数 u 的全微分, 即

$$du = Pdx + Qdy,$$

则称 u 是 $Pdx + Qdy$ 的原函数.

对平面区域 G 内的两个二元连续函数 $P(x, y), Q(x, y)$, 或者说对 G 内的向量场 $P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, 自然会想到, 从 G 内定点 (x_0, y_0) 沿曲线 l 到点 (x, y) 的曲线积分

$$u(x, y) = \int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

可能是 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 的原函数, 即可能满足

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in G.$$

可惜, 这里的 $u(x, y)$ 不仅依赖于 x, y , 一般还依赖于积分路径 l . 故按上述曲线积分, 在 G 内一般不能给出完全确定的函数. 除非曲线积分与路径无关, 固定起点, 按曲线积分可在 G 内定义一个确定的函数. 下面将说明在这种条件下, 也只有在这种条件下, 上述问题提法和处理问题的想法才是正确的. 这种条件代表了一类重要的自然现象, 在数学上也表示一个重要的方面.

如果对区域 G 内任意两点 A, B , 以及从 A 到 B 的任意两条曲线 l_1, l_2 , 都有

$$\int_{l_1} Pdx + Qdy = \int_{l_2} Pdx + Qdy,$$

则说在 G 内曲线积分 $\int_l Pdx + Qdy$ 与路径无关 (与起点和终点有关).

定理 11.2 设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通区域 G 内, 有连续的一阶偏导数, 则下列四条相互等价.

(i) 对 G 内任一闭路 C , 积分

$$\int_C Pdx + Qdy = 0.$$

(ii) 在 G 内, 曲线积分

$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

与路径无关.

(iii) 在 G 内, 表达式 $Pdx + Qdy$ 是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即有

$$du = Pdx + Qdy.$$

(iv) 在 G 内, P, Q 满足条件

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证明 (i) (ii) 设 A, B 为 G 内任意两点, AMB 和 ANB 是 G 内从 A 到 B 的任意两条曲线弧, 则有

$$\int_{AMB} Pdx + Qdy - \int_{ANB} Pdx + Qdy = \int_{AMBNA} Pdx + Qdy = 0,$$

于是

$$\int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy .$$

(ii) (iii) 因曲线积分与路径无关, 当起点 $A(x_0 , y_0)$ 固定时, 它是终点 $B(x, y)$ 的二元(点)函数, 记为

$$u(x, y) = \int_{(x_0 , y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy . \tag{1}$$

为了证明

$$du = Pdx + Qdy,$$

先证

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) .$$

由于

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0 , y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy$$

与积分路径无关, 为方便计, 对上面这个积分, 取先从点 $A(x_0 , y_0)$ 到点 $B(x, y)$, 然后沿平行于 x 轴的直线从点 $B(x, y)$ 到点 $B'(x + \Delta x, y)$ 的路径积分, 如图 11.13 所示. 易知

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy .$$

因在水平直线段 $\overline{BB'}$ 上, 纵坐标 y 为常数, 所以 $dy = 0$, 从而

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_x^{x + \Delta x} P(x, y) dx .$$

利用积分中值定理, 得

$$\Delta u = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1$$

因为 $P(x, y)$ 连续, 所以有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y) .$$

同法可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) .$$

由于两个偏导数连续, 所以 u 可微, 且

$$du = Pdx + Qdy .$$

(iii) (iv) 因为 $du = Pdx + Qdy$, 所以

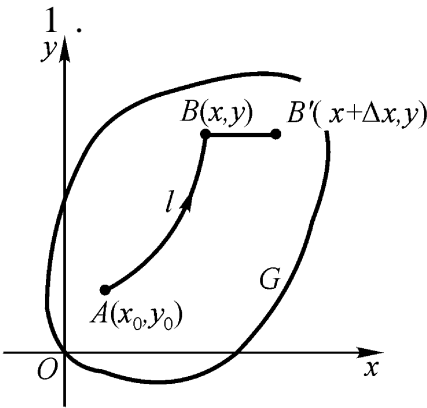


图 11.13

$$\frac{u}{x} = P, \quad \frac{u}{y} = Q.$$

又因 P, Q 有连续的一阶偏导数, 所以有

$$\frac{P}{y} = \frac{\frac{u}{x}}{y} = \frac{\frac{u}{y}}{x} = \frac{Q}{x}.$$

(iv) (i) 对 G 内任一闭曲线 C , 由于 G 是单连通的, 所以 C 所围的区域 D 含于 G . 利用格林公式及 (iv), 有

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) dx dy = 0. \quad \square$$

这样, 把四条循环地推导一圈, 就证明了它们之间都是相互等价的. 这一证明手段称为循环论证.

这个定理很重要, 它指出了曲线积分与路径无关的充要条件, 也指出了表达式 $P dx + Q dy$ 是某一函数的全微分的充要条件. 这些充要条件尤以条件 (iv) 最便于检查.

定理 11.2 关于区域 G 单连通的要求是不可少的. 例如函数

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

在复连通域

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2$$

上, 恒有

$$\frac{P}{y} = \frac{\frac{y}{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{Q}{x},$$

但沿域内单位圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的闭路积分

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_C xdy - ydx = 2 \neq 0.$$

在复连通区域内的连续可微的向量场, 条件 (iv) 不能保证 (i), (ii), (iii) 成立, 但此时 (i), (ii), (iii) 还是相互等价的.

当曲线积分与路径无关时, 曲线积分的计算可以换一个简便的路径.

例 1 计算 $\int_l (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, 其中 l 是从点 $O(0, 0)$ 到点

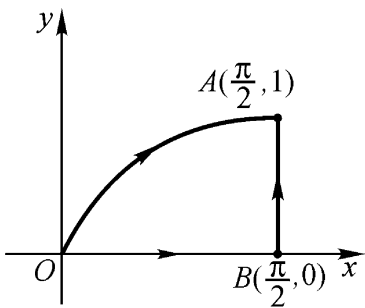
$A \frac{\pi}{2}, 1$ 的正弦曲线 $y = \sin x$.

解 因为

$$\frac{Q}{x} = 12xy^2, \quad \frac{P}{y} = 12xy^2, \quad \frac{Q}{x} = \frac{P}{y},$$

所以曲线积分与路径无关, 为计算方便, 将路径 l 换为从点 $O(0, 0)$ 到点

$B(\frac{\pi}{2}, 0)$, 再从点 B 到点 A 的折线(见图 11.14). 于是

$$\begin{aligned} & \int_{OB} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\ &= \int_{OB} + \int_{BA} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\ &= \int_0^{\pi/2} x^4 dx + \int_0^1 (6 \cdot \frac{\pi^2}{2} y^2 - 5y^4) dy = \frac{5}{160} + \frac{2}{2} - 1. \end{aligned}$$


顺便指出, 当曲线积分与路径无关时, 即被积表达式是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则由(1)式得公式

图 11.14

$$\int_A^B Pdx + Qdy = u \Big|_A^B. \tag{2}$$

如对例 1 用此方法, 由于

$$(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy = d\left(\frac{x^5}{5} - y^5 + 2x^2y^3\right),$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(\pi/2,1)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\ &= \left. \frac{x^5}{5} - y^5 + 2x^2y^3 \right|_{(0,0)}^{(\pi/2,1)} = \frac{5}{160} - 1 + \frac{2}{2}. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\int_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2}$, 其中 C 为不过原点的任意正向闭曲线.

解 因为

$$\frac{Q}{x} = \frac{4y^2 - x^2 - 8xy}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{P}{y}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

所以在不包含原点 $(0, 0)$ 的单连通区域内, 曲线积分与路径无关.

当 C 所包围的区域内不含原点时,

$$\int_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2} = 0.$$

当 C 所包围的区域内含有原点时, 可以用曲线 C 的参数方程化曲线积分为定积分计算. 由于本题中曲线 C 未具体给出, 这里采用扣除原点的方法. 考虑到被积函数分母是 $x^2 + 4y^2$, 为计算方便, 补充椭圆周 $G: x = 2 \cos t, y = \sin t, t$ 从 0 到 2π , $\epsilon > 0$ 适当小(见图 11.15), 则曲线 C 与 G 为边界的复连通区域上应用格林公式得

$$\int_{C+G_1^-} \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2} = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2} &= \oint_{C_1} \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2} \\
 &= \frac{1}{4^2} \oint_{C_1} (x+4y)dy + (x-y)dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [(2\cos t + 4\sin t)\cos t - (2\cos t - \sin t)2\sin t] dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi.
 \end{aligned}$$

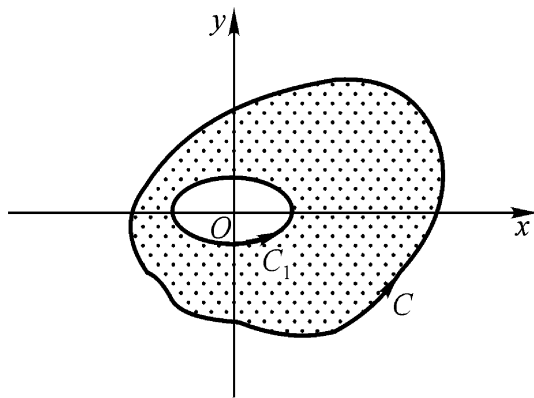


图 11.15

这种情况下,也可以先利用曲线方程简化被积函数,然后再用格林公式,如

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2} &= \frac{1}{4^2} \oint_{C_1} (x+4y)dy + (x-y)dx \\
 &= \frac{1}{4^2} \oint_{D_1} (1+1)dxdy = \pi,
 \end{aligned}$$

其中 D_1 是椭圆 C 所围成的区域.

这里 C 上的曲线积分换为 C_1 上的曲线积分,您能从曲线积分与路径无关的角度解释吗?

说“在 $-\frac{Q}{x} = -\frac{P}{y}$ 的区域内,闭曲线积分的积分路径可以任意连续变形”对吗?

例 3 设 $x > 0$ 时, $f(x)$ 可导,且 $f(1) = 2$. 在右半平面 ($x > 0$) 内的任一闭曲线 C 上,恒有

$$\oint_C 4x^3 y dx + x f(x) dy = 0.$$

试求 $\int_{AB} 4x^3 y dx + x f(x) dy$, 其中 AB 是从点 $A(1, 0)$ 到点 $B(2, 3)$ 的曲线.

解 由给定的条件知,在右半平面内,曲线积分与路径无关.因此, $-\frac{Q}{x} = -\frac{P}{y}$, 即有

$$x f'(x) + f(x) = 4x^3.$$

解此一阶线性方程,并利用条件 $f(1) = 2$, 得到

$$f(x) = \frac{1}{x} + x^3.$$

由于曲线积分与路径无关,取从点 $A(1, 0)$ 到点 $D(2, 0)$, 再从点 $D(2, 0)$ 到点 $B(2, 3)$ 的折线, 则

$$\begin{aligned}
 \int_{AB} 4x^3 y dx + x f(x) dy &= \int_{AB} 4x^3 y dx + (1+x^4) dy \\
 &= \int_{AD} + \int_{DB} 4x^3 y dx + (1+x^4) dy \\
 &= \int_1^2 0 dx + \int_0^3 (1+2^4) dy = 51.
 \end{aligned}$$

11.4.2 保守场、原函数、全微分方程

在连续的向量场 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, $(x, y) \in D$ 内, 若第二型曲线积分

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

与路径无关, 则称向量场 \mathbf{F} 为保守场.

在连续的向量场 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, $(x, y) \in D$ 内, 若存在单值可微的数量函数 $u(x, y)$, 使得

$$\mathbf{F} = \text{grad } u,$$

即 \mathbf{F} 是数量场 u 的梯度场, 则称向量场 \mathbf{F} 为有势场(或位场), 并称 $v(x, y) = -u(x, y)$ 为场 \mathbf{F} 的势函数.

在连续可微的向量场 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, $(x, y) \in D$ 内, 若各点的旋度均为零, 即

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

则称向量场 \mathbf{F} 为无旋场.

定理 11.2 说明, 连续可微的单连通的向量场, 若是保守场, 一定是有势场, 也必为无旋场, 反之亦然.

保守场

有势场

无旋场

以上对平面场的讨论, 对空间向量场完全适用, 后面不再重复.

对有势场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, 如何求势函数 v , 或者说如何求函数 u ($v = -u$), 也就是在多元函数中, 求 $P dx + Q dy$ 的原函数 u 的问题, 定理 11.2 的证明中的 (1) 式已给出明确答案:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C.$$

由于这时曲线积分与路径无关, 在可能的情况下, 通常取与坐标轴平行的折线作积分路径, 化为定积分(图 11.16). 当取图中折线 ARB 为路径时,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C; \quad (3)$$

当取图中折线 ASB 为路径时,

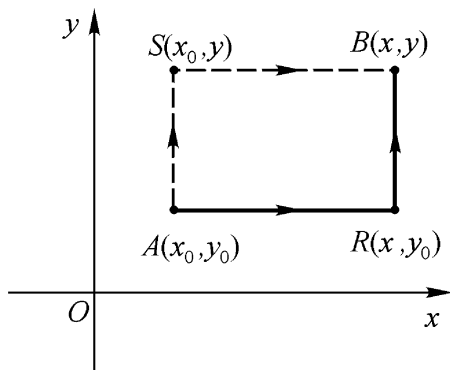


图 11.16

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C; \quad (4)$$

由于点 $A(x_0, y_0)$ 为 G 内任取的定点, 选取时要考虑(3)或(4)式中的 $P(x, y_0)$ 或 $Q(x_0, y)$ 便于积分.

例 4 试证 $(4x^3 + 10xy^3 - 3y^4)dx + (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4)dy$ 是全微分, 并求其原函数.

证明 由于

$$\frac{Q}{x} = 30xy^2 - 12y^3 = \frac{P}{y},$$

所以, $(4x^3 + 10xy^3 - 3y^4)dx + (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4)dy$ 在 Oxy 面上是全微分. 取点 $A(x_0, y_0) = (0, 0)$, 利用公式(3)得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 4x^3 dx + \int_0^y (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4) dy + C \\ &= x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5 + C. \end{aligned}$$

例 5 试证 $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ 在右半平面 $x > 0$ 上是有势场, 并求其势函数 v .

证明 由于

$$\frac{Q}{x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{P}{y} \quad (x > 0),$$

所以 \mathbf{F} 是在右半平面上的有势场. 取 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, 则由公式(3)得

$$u(x, y) = \int_1^x 0 dx + \int_0^y \frac{x}{x^2 + y^2} dy + C = \arctan \frac{y}{x} + C.$$

故场 \mathbf{F} 的势函数为

$$v(x, y) = -\arctan \frac{y}{x} + C,$$

其中 C 为任意常数.

如果一阶微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (5)$$

的左边是函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则称方程 (5) 为全微分方程. 这时方程 (5) 可变为

$$du(x, y) = 0,$$

于是

$$u(x, y) = C$$

是方程 (5) 的通解. 这里 $u(x, y)$ 可由 (3) 或 (4) 式确定.

例 6 解方程

$$(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy = 0.$$

解 因为

$$\frac{Q}{x} = 12x^3y^2 - 6y = \frac{P}{y},$$

所以原方程是全微分方程. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 由公式 (3) 得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 5dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy \\ &= 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y, \end{aligned}$$

于是方程的通解为

$$5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y = C.$$

例 7 解方程

$$[\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y\cos(x + y^2) + 3x]dy = 0.$$

解 求全微分的原函数, 或者解全微分方程时, 常常可凭借对全微分运算法则与公式的熟练来实现, 这里将方程左边写为

$$\begin{aligned} &\cos(x + y^2)(dx + 2ydy) + (3ydx + 3xdy) \\ &= \cos(x + y^2)d(x + y^2) + d(3xy) \\ &= d[\sin(x + y^2) + 3xy], \end{aligned}$$

因此方程的通解为

$$\sin(x + y^2) + 3xy = C.$$

例 8 求解方程

$$(2xy^2 + y)dx - xdy = 0.$$

解 因为

$$\frac{Q}{x} = -1, \quad \frac{P}{y} = 4xy + 1,$$

所以这不是全微分方程. 但若将方程写为

$$2xy^2dx + ydx - xdy = 0,$$

若用 $\frac{1}{y^2}$ 乘两边, 便得到

$$2x \, dx + \frac{y \, dx - x \, dy}{y^2} = 0,$$

即

$$d \left(x^2 + \frac{x}{y} \right) = 0$$

是个全微分方程, 其通解为

$$x^2 + \frac{x}{y} = C.$$

对非全微分方程

$$P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0,$$

若有非零函数 $\mu = \mu(x, y)$ 能使

$$\mu P(x, y) \, dx + \mu Q(x, y) \, dy = 0$$

为全微分方程, 则称 $\mu = \mu(x, y)$ 为该方程的积分因子. 如 $\frac{1}{y}$ 是例 8 中微分方程的积分因子. 通过乘积分因子, 将方程化为全微分方程, 求通解的方法叫做积分因子法. 它是解一阶微分方程的基本方法.

11.5 第二型曲面积分

11.5.1 预备知识

1. 有向曲面 通常光滑曲面都有两侧,如上下侧、前后侧、左右侧、内外侧. 一些问题需要区分曲面的侧,如流体从曲面的这一侧流向另一侧的净流量问题等.这时,曲面上任一点的法向量有两个不同的方向,可以通过规定法向量的方向来区分曲面的两侧.如曲面 $z = z(x, y)$,规定上侧法向量与 z 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$,下侧法向量与 z 轴正向夹角大于 $\frac{\pi}{2}$.闭曲面的外侧法向量向外,内侧法向量向内.总之使法向量的指向与曲面的侧一致.取定了法向量的曲面叫做有向曲面.

顺便指出,有两侧的曲面叫双侧曲面.也有的曲面只有一侧,称为单侧曲面.如默比乌斯(Möbius)带,它是由一长方形纸条 $ABCD$,扭转一下,将 A, D 粘在一起, B, C 粘在一起形成的环形带(图 11.17).小毛虫在默比乌斯带上,不通过边界可以爬到任何一点去,在双侧曲面上这是不能实现的.

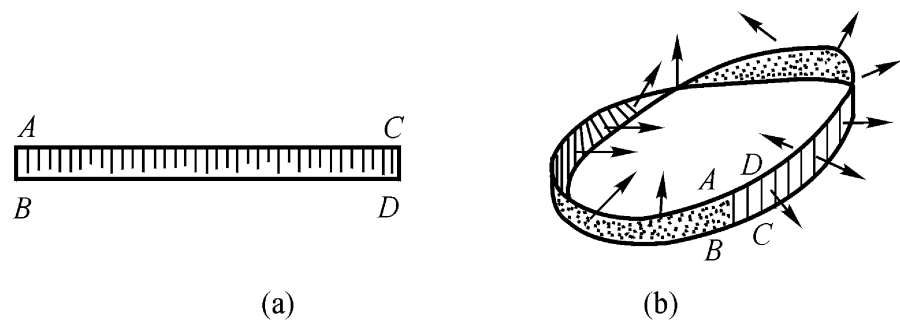


图 11.17

2. 有向平面在坐标面上的投影 设 Σ 是空间有向平面片,其面积为 S ,法向量方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.此时, $S \cos \alpha, S \cos \beta, S \cos \gamma$ 恰好等于 Σ 与坐标面 Oyz, Ozx, Oxy 的二面角(图 11.18).分别称数值

$$S_y = S \cos \alpha, \quad S_z = S \cos \beta, \quad S_x = S \cos \gamma$$

为有向平面 Σ 在坐标面 Oyz, Ozx, Oxy 上的投影(值).它们等于投影域的面积数附以一定的正负号.如当 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, \mathbf{n} 向上, $S \cos \alpha$ 是正的, $S_y = S \cos \alpha$; 当 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时, \mathbf{n} 向下, $S \cos \alpha$ 是负的, $S_y = -S \cos \alpha$, 这里 S_y 表示 Σ 在 Oxy 面的投影域的面积.

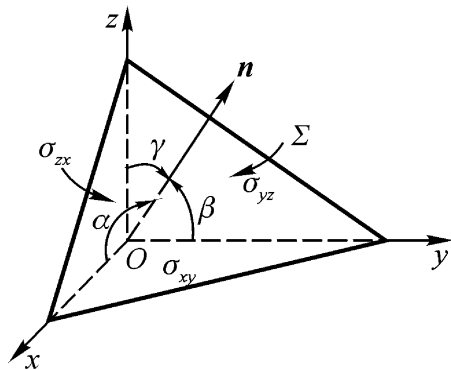


图 11.18

11.5.2 第二型曲面积分概念

例 1 设区域 G 内, 有连续的不可压缩的流体流速场

$$\mathbf{v} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

求单位时间通过 G 内有向曲面片 流到指定一侧的净流量 .

解 1° \mathbf{v} 为常向量, 为有向平面片情况

设 的面积为 S , 单位法向量为 \mathbf{n}^0 , 则

$$\Phi = S |\mathbf{v}| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{n}^0}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^0 S = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S},$$

其中 $\mathbf{S} = S \mathbf{n}^0$ (图 11.19) .

2° 一般情况

将曲面片 分割为 S_1, S_2, \dots, S_n (图 11.20), 同时表示其面积数, 记 $\Delta S_i = \max\{S_i \text{ 的直径}\}$. 任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, 设 $\mathbf{n}^0 = \{\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i\}$ 为有向曲面 在点 M_i 处指定的单位法向量. 取 $\mathbf{v}(M_i)$ 代替 S_i 上各点的流速, 并视 S_i 为过点 M_i , 以 \mathbf{n}^0 为法向量的平面片, 则通过 S_i 的流量

$$\Delta \Phi_i = \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{n}^0 \Delta S_i = \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{S}_i,$$

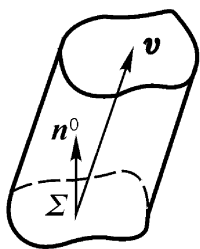


图 11.19

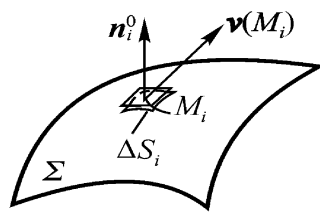


图 11.20

其中 $\mathbf{S}_i = \Delta S_i \mathbf{n}_i^0$, 于是单位时间通过有向曲面 到指定一侧的净流量

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{n}_i^0 \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{S}_i = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} dS$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i, z_i) \cos \alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i) \cos \beta_i + \\
&\quad R(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i.
\end{aligned}$$

类似的一些问题,产生了下面重要的概念.

定义 11.2 设 Σ 为光滑的有向曲面片,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

在 Σ 上有定义.将 Σ 分割为 S_1, S_2, \dots, S_n , 同时用它们表示其面积数, 记 $\Delta S_i = \max_{1 \leq i \leq n} \{S_i \text{ 的直径}\}$. 任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, 记 $\mathbf{n}^0 = \{\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i\}$ 为 Σ 在 M_i 处指定的单位法向量. 用 $\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i$ 表示 S_i 在 Oyz, Ozx, Oxy 面上的投影. 若不论 Σ 的分法和 M_i 的取法如何, 极限

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \mathbf{n}^0 \Delta S_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \quad (1)
\end{aligned}$$

存在, 且为同一值, 则称此极限值为向量函数 \mathbf{F} 在有向曲面片 Σ 上的曲面积分, 或称为函数 P, Q, R 在有向曲面片 Σ 上的第二型曲面积分. 记为

$$\mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{或} \quad P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

并依次称

$$P(x, y, z) dy dz, \quad Q(x, y, z) dz dx, \quad R(x, y, z) dx dy$$

为函数 P, Q, R 在有向曲面 Σ 上对坐标 yz, zx, xy 的曲面积分. 其中 $d\mathbf{S}$ 称为曲面面积微元向量, $d\mathbf{S} = dS \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, $dy dz = \cos \alpha dS$, $dz dx = \cos \beta dS$, $dx dy = \cos \gamma dS$ 依次为 $d\mathbf{S}$ 在 Oyz, Oxz, Oxy 面上的投影. 习惯上, 省略外积符号“ \cdot ”, 将 $dy dz$ 简记为 $dydz$, 将 $P dy dz$ 简记为 $P dydz$ 等等. 为书写方便, 我们也省去符号“ \cdot ”.

这样例 1 的净流量 $= \oint_M \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$.

当 P, Q, R 在 Σ 上连续时, 第二型曲面积分存在. 且由第二型曲面积分的定义式(1)易知有如下性质:

(i) 第二型曲面积分与第一型曲面积分的关系. 设 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是有向曲面 Σ 指定的法向量方向余弦, 则

$$Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS.$$

(ii) 若 Σ 表示有向曲面 Σ 相反的一侧, 则

$$Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Rdx dy. \quad (\text{有向性})$$

(iii) 若 k_1, k_2 为常数, 则

$$(k_1 R_1 + k_2 R_2) dx dy = k_1 \iint_{\Sigma_1} R_1 dx dy + k_2 \iint_{\Sigma_2} R_2 dx dy. \quad (\text{线性性})$$

(iv) 若有向曲面 Σ 被分为 Σ_1, Σ_2 两片, 则

$$Rdx dy = \iint_{\Sigma_1} Rdx dy + \iint_{\Sigma_2} Rdx dy. \quad (\text{积分曲面可加性})$$

(v) 当 Σ 为母线平行 z 轴的柱面时,

$$Rdx dy = 0.$$

性质(ii) ~ 性质(v)对关于坐标 yz, zx 的曲面积分, 也有类似的结果.

11.5.3 第二型曲面积分的计算

设曲面 Σ 的方程是

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy},$$

其中 D_{xy} 是曲面 Σ 在 Oxy 面上的投影域, $z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续的一阶偏导数 (即曲面 Σ 是光滑的); 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续. 由于

$$\mathbf{n} = \pm \{ -z_x, -z_y, 1 \}$$

是曲面 Σ 不同侧的两个法向量, 故单位法向量

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^0 &= \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \} \\ &= \frac{\pm 1}{1 + z_x^2 + z_y^2} \{ -z_x, -z_y, 1 \}. \end{aligned}$$

又

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

所以利用两类曲面积分的关系(i)及第一型曲面积分算法, 得第二型曲面积分的计算公式

$$\begin{aligned} & \iint_{(\Sigma)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} [-P(x, y, z(x, y)) z_x - Q(x, y, z(x, y)) z_y + \\ & \quad R(x, y, z(x, y))] dx dy \end{aligned} \quad (2)$$

它把第二型曲线积分化为曲面 Σ 在 Oxy 平面投影域 D_{xy} 上的二重积分. 当 Σ 取

上侧时,二重积分前取正号;取下侧时,二重积分前取负号.若曲面 的方程在 xy 上不是单值的,可将 分为几个单值分片处理.曲面 向其它坐标面投影的计算公式,请读者类比地给出.

公式(2)的向量形式为

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \int_{xy} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dx dy.$$

其中 $\mathbf{n} = \{-z_x, -z_y, 1\}$.

特别由公式(2)有

$$\int_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \int_{xy} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \tag{3}$$

类似地,将 的方程表为 $x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则有

$$\int_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \int_{yz} P(x(y, z), y, z) dy dz. \tag{4}$$

将 方程表为 $y = y(x, z), (x, z) \in D_{zx}$, 则有

$$\int_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \int_{zx} Q(x, y(x, z), z) dz dx. \tag{5}$$

可见对不同坐标的曲面积分,我们可以将曲面 向不同坐标面投影,化为投影域上不同的二重积分.用这种方法要注意:1°认定对哪两个坐标的积分,将曲面 表为这两个变量的函数,并确定 的投影域;2°将 的方程代入被积函数,化为投影域上的二重积分;3°根据 的侧(法向量的方向)确定二重积分前的正负号.

例 2 计算 $\int_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 是在 $x \geq 0, y \geq 0$ 部分内,球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

解 由图 11.21,将 Σ 分为 Σ_1, Σ_2 两部分.

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \quad z &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} && (\text{上侧}); \\ \Sigma_2: \quad z &= -\sqrt{1 - x^2 - y^2} && (\text{下侧}). \end{aligned}$$

它们在 Oxy 面的投影域均为

$$D_{xy}: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

故

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} xyz dx dy &= \int_{\Sigma_1} xyz dx dy + \int_{\Sigma_2} xyz dx dy \\ &= \int_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - \int_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 (1 - r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) dr d\theta = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

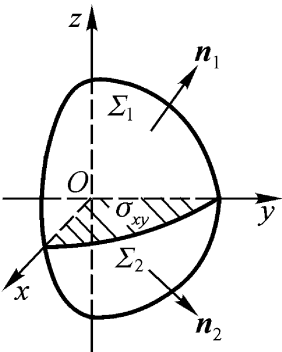


图 11.21

例 3 计算 $I = \int_C x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 C 是三个坐标平面与平面 $x = a, y = a, z = a (a > 0)$ 所围成的正方体表面的外侧 (图 11.22).

解 先计算

$$\int_C x^2 dydz,$$

由于平面 $z = 0, z = a, y = 0, y = a$ 都是母线平行于 x 轴的柱面, 在其上对坐标 y, z 的积分为零, $x = a$ 面在 Oyz 平面上的投影是正的, 而 $x = 0$ 面在 Oyz 平面投影是负的, 投影域均为 $D_{yz}: 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$, 故

$$\int_C x^2 dydz = \int_{yz} a^2 dydz - \int_{yz} 0^2 dydz = a^4.$$

由本题中 x, y, z 地位的对等性知, 题目中的后两个积分值也等于 a^4 , 因此有

$$I = 3a^4.$$

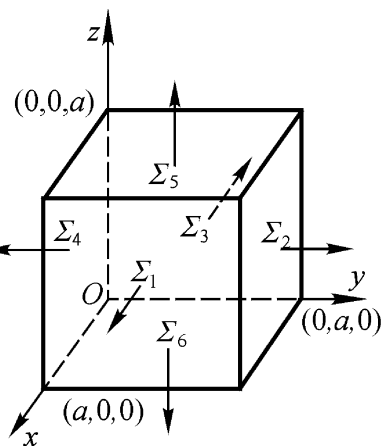


图 11.22

例 4 计算 $J = \int_C (x^2 + y^2) dzdx + z dxdy$, 其中 C 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$ 在第一卦限部分的下侧.

解法 1 参看图 11.23, 在 Ozx 面投影是正的, 投影域

$$D_{zx}: 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq z,$$

在 Oxy 面投影是负的, 投影域

$$D_{xy}: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

故

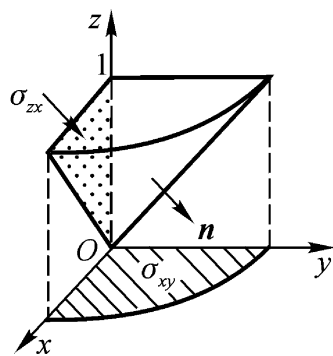


图 11.23

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) dzdx + z dxdy &= \int_{zx} (x^2 + y^2) dzdx - \int_{xy} (x^2 + y^2) dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^z z^2 dz dx - \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 dr d\theta = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

为避免向各坐标面投影, 也可按公式(2)来计算第二型曲面积分.

解法 2 由于曲面方程是 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 故

$$z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

由公式(2)知

$$\begin{aligned} J &= \int_{xy} [(x^2 + y^2) z_y - (x^2 + y^2)] dxdy \\ &= \int_{xy} [(x^2 + y^2) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2)] dxdy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (r^2 \sin \theta - r) r dr d\theta = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}.$$

11.6 高斯公式、通量与散度

格林公式把平面上的闭曲线积分与所围区域的二重积分联系起来.本节的高斯公式表达了空间闭表面上的曲面积分与曲面所围空间区域上的三重积分的关系.它也有明确的物理背景——通量与散度.

11.6.1 高斯公式

定理 11.3 设空间闭区域 V 是由分片光滑的闭曲面 Σ 围成, 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 V 上有连续的一阶偏导数, 则有高斯公式

$$\oint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (1)$$

即

$$\left(P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma \right) dS = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (2)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 的外法向量的方向余弦.

证明 设空间区域 V 在 Oxy 面上的投影域为 D_{xy} , 且

$$V: z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

即边界面 Σ 由 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 三部分构成(图 11.24):

$$\Sigma_1: z = z_1(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy};$$

$$\Sigma_2: z = z_2(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy};$$

Σ_3 : 以 D_{xy} 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 介于 z_1, z_2 之间的部分.

由曲面积分的算法, 有

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy \\ &= \int_{\Sigma_1}^{\text{下}} + \int_{\Sigma_2}^{\text{上}} + \int_{\Sigma_3}^{\text{外}} R(x, y, z) dx dy \\ &= - \int_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy + \\ & \quad \int_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

高斯 Gauss K.F.(德)1777—1855, 伟大的数学家、物理学家和天文学家.高斯认为:数学要学有灵感,必须接触现实世界.有些书上把高斯公式称为奥高公式,或奥斯特洛格拉斯基(M.B.(俄)1801—1861)公式.

另一方面,由三重积分算法,有

$$\begin{aligned} \int_V \frac{R}{z} dx dy dz &= \int_{xy} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{R}{z} dz \\ &= \int_{xy} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy, \end{aligned}$$

于是,有

$$\int_{\text{外}} R(x, y, z) dx dy dz = \int_V \frac{R}{z} dx dy dz.$$

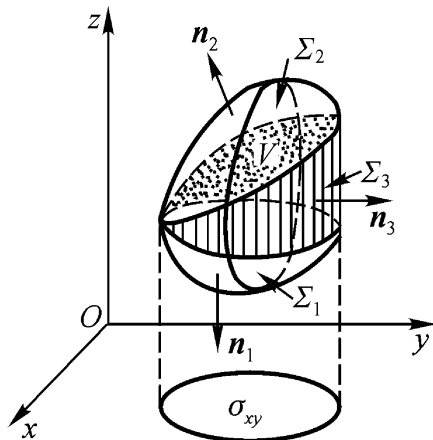


图 11.24

如果 V 不满足开始的要求,只需用光滑曲面片将 V 分成几个部分,使每个部分都满足要求.注意分界面的两侧上,对坐标的曲面积分值相互抵消.所以上面的等式对一般区域也成立.

同法可证

$$\begin{aligned} \int_{\text{外}} P(x, y, z) dy dz &= \int_V \frac{P}{x} dx dy dz, \\ \int_{\text{外}} Q(x, y, z) dz dx &= \int_V \frac{Q}{y} dx dy dz, \end{aligned}$$

故公式(1)成立. \square

高斯公式为计算(闭)曲面积分提供了一个新途径.

例 1 计算 $\int_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 因原点处被积函数无定义,不能直接利用高斯公式计算,但因被积函数中的点 (x, y, z) 在曲面上,可先用曲面方程将被积函数化简,然后再用高斯公式.

$$\begin{aligned} \int_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{1}{a} \int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \frac{3}{a} \int_V dx dy dz \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

例 2 计算 $I = \int_S x dy dz + y dz dx + (z^2 - 2z) dx dy$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 夹在 $0 \leq z \leq 1$ 之间的部分的上侧.

解 这里

$$\frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + \frac{R}{z} = 2z$$

较简单,但曲面 不是闭曲面,为了使用高斯公式,补一曲面

$$\Sigma_1: z=1 \quad (x^2+y^2 \leq 1)$$

下侧(图 11.25),则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + (z^2 - 2z) dx dy \\ &= - \int_V 2z dV + \int_{\Sigma_1} (1-2) dx dy \\ &= - \int_0^2 \int_0^{1-r} \int_0^{2\pi} r dz dr d\theta - \int_{\Sigma_1} 1 dx dy = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

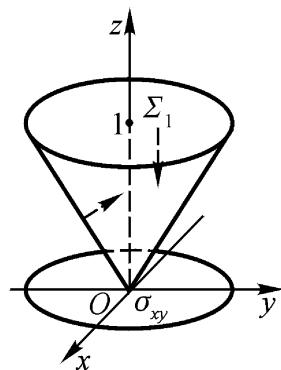


图 11.25

例 3 设函数 $f(u)$ 具有连续的导数, 计算

$$J = \oint_{\Sigma} x^3 dy dz + [y^3 + yf(yz)] dz dx + [z^3 - zf(yz)] dx dy,$$

其中 Σ 是锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 和球面 $x = 1 - y^2 - z^2$ 与 $x = 4 - x^2 - y^2$ 所围立体的表面外侧(图 11.26) .

解 被积函数中有一个抽象函数, 无法直接计算 .

由于

$$P = x^3, \quad Q = y^3 + yf(yz), \quad R = z^3 - zf(yz),$$

$$\frac{P}{x} = 3x^2, \quad \frac{Q}{y} = 3y^2 + f(yz) + yzf(yz),$$

$$\frac{R}{z} = 3z^2 - f(yz) - yzf(yz).$$

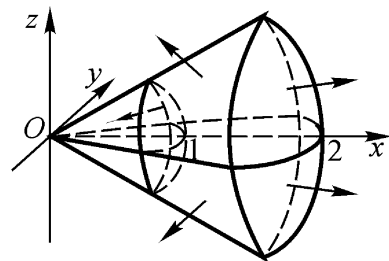


图 11.26

故由高斯公式

$$\begin{aligned} J &= \int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} r^2 dr d\theta dx \\ &= 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 \theta d\theta dx = \frac{93}{5} (2 - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

11.6.2 向量场的通量与散度

在 11.5 节中, 引入第二型曲面积分时已经知道, 对不可压缩的流体的流速场 $v(M)$, 穿过有向曲面 Σ 到指定一侧的净流量为

$$= \int_{\Sigma} v \cdot n^0 dS = \int_{\Sigma} v \cdot dS.$$

其中 $dS = dS n^0$, n^0 是有向曲面 Σ 的单位法向量 .

在电场强度场 E 中, 穿过有向曲面 Σ 的电通量为

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} E \cdot n^0 dS = \int_{\Sigma} E \cdot dS,$$

并把它视为穿过 的电力线数 .

在磁感应强度场 \boldsymbol{B} 中, 穿过有向曲面 的磁感应强度通量为

$$\Phi_B = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}^0 \, dS = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S},$$

并把它视为穿过 的磁力线数 .

在向量场的研究中, 常常需要考虑这种曲面积分, 它是十分重要的 .

定义 11.3 在向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 中, 设 为一有向曲面片, 称曲面积分

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}^0 \, dS = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{3}$$

为向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 穿过有向曲面 到指定一侧的通量 .

在直角坐标系下, 若

$$\boldsymbol{F}(M) = \{ P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \},$$

则通量

$$\Phi = \iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dz \, dx + R(x, y, z) \, dx \, dy.$$

下面以流速场为例, 说明通量为正、为负或为零的物理意义 . $\Phi > 0$, 表明穿过有向曲面 到指定一侧的净流量(指由另一侧流入指定一侧的流体量与反向流动的量之差)为正; $\Phi < 0$, 表明净流量为负, 就是流入指定一侧的量小于反向流动的量; $\Phi = 0$, 表示两个方向流动的量相等 .

对闭曲面 的外侧(法向量向外), 通量

$$\Phi = \oiint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

当 $\Phi > 0$ 时, 说明流出量大于流入量, 所围的立体 V 内有发出流体的“源” .

当 $\Phi < 0$ 时, 说明流出量小于流入量, 所围的立体 V 内有吸收流体的“洞” .

当 $\Phi = 0$ 时, 流入量与流出量相等, 所围的立体 V 内, 源与洞相抵 .

如果把“洞”视为负“源”, 则 V 内每一点都可看作“源”, 这时, 源有正有负, 有时为零, 有强有弱 . 在流速场的研究中, 源的强度无疑是十分重要的 . 在其他物理向量场中, 可以认为是发射向量线的能力, 虽然源的含义不同, 也是十分重要的 .

例 4 由原点 O 处的点电荷 q 产生的电场中, 点 M 处的电位移

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \boldsymbol{r}^0;$$

其中 $r = |OM|$, \boldsymbol{r}^0 是从点 O 指向点 M 的单位向量 . 设 是以 O 为中心, R 为半径的球面, 求穿出球面 的电位移通量 Φ_D .

解 因为球面上 $r = R$, 且 \boldsymbol{r}^0 与外法向量 \boldsymbol{n}^0 相等, 所以

$$\Phi_D = \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi R^2} \iint_S \boldsymbol{r}^0 \cdot \boldsymbol{n}^0 \, dS$$

$$= \frac{q}{4 R^2} \quad d S = \frac{q}{4 R^2} 4 R^2 = q .$$

可见,在球面内产生电位移通量 D 的源,就是电场中的自由电荷 q .当 q 为正电荷时,为正源,产生电位移线;当 q 为负电荷时,为负源,吸收电位移线. q 的大小,决定源的强弱.

在向量场 $\mathbf{F}(M)$ 中,穿过闭曲面 S 的通量 Φ ,是由 S 所围的区域 V 内诸点发射或吸收向量线能力的累积结果.显然,通量实际上是依赖于 S 包围的区域 V ,或者说是区域 V 的函数.

定义 11.4 设 M 为向量场 $\mathbf{F}(M)$ 内一点,任意作一个包围点 M 的小闭曲面 S (法向量向外),记 V 表示曲面 S 包围的立体及其体积, $\rho = \max_{M_1} d(M, M_1)$, 若当 $\rho \rightarrow 0$ 时,极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{V}$$

存在,且与 S 的收缩方式无关,则称此极限值为向量场 $\mathbf{F}(M)$ 在点 M 处的散度,记作 $\operatorname{div} \mathbf{F}(M)$, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4)$$

散度 $\operatorname{div} \mathbf{F}(M)$ 是由向量场确定的数量,是通量的体密度.

在直角坐标系下,向量场

$$\mathbf{F} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

在点 $M(x, y, z)$ 处散度(假设 P, Q, R 关于 x, y, z 的一阶偏导数连续)的计算公式为

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (5)$$

事实上,由高斯公式及中值定理

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(M) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M^*} V = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M^*}, \end{aligned}$$

其中 M^* 是 S 包围的区域 V 内一点.

有了散度概念,高斯公式可以表为向量形式

$$\int_V \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

物理意义是:通过有向闭曲面 S (向外)的通量等于 S 所包围的区域 V 内各点散度的体积分.

若在某一向量场 $\mathbf{F}(M)$ 中,各点的散度均为零,即恒有 $\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = 0$, 则称该

场为无源场(或管形场).在无源场的单连通区域内,对任何闭曲面,都有

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

这时,此区域内的任何曲面上的第二型曲面积分仅与曲面的边界线有关,而与曲面的形状无关,即在此区域内,以闭曲线为边界所张开的任何曲面上,通量都相等.

显然,在向量场里,有向闭曲面在散度为零的区域内,任意连续变形,其通量不变(图11.27).

由公式(5),容易推出散度的下列运算性质:

- (i) $\operatorname{div}(C\mathbf{F}) = C\operatorname{div}\mathbf{F}$ (C 为常数).
 - (ii) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \pm \mathbf{E}) = \operatorname{div}\mathbf{F} \pm \operatorname{div}\mathbf{E}$.
 - (iii) $\operatorname{div}(u\mathbf{F}) = u\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad}u$ (u 为数量函数).
- (iii)的证明 由于 $u\mathbf{F} = \{uP, uQ, uR\}$, 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\mathbf{F}) &= \frac{(uP)}{x} + \frac{(uQ)}{y} + \frac{(uR)}{z} \\ &= u \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + \frac{R}{z} + P \frac{u}{x} + Q \frac{u}{y} + R \frac{u}{z} \\ &= u\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad}u. \quad \square \end{aligned}$$

例 5 在点电荷 q 产生的静电场中,求电位移向量 \mathbf{D} 的散度.

解 设 q 位于坐标原点,则

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r},$$

其中 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{D} &= \frac{q}{4} \left(\frac{x}{r^3} + \frac{y}{r^3} + \frac{z}{r^3} \right) \\ &= \frac{q}{4} \left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right) = 0 \quad (r \neq 0). \end{aligned}$$

除电荷所在的点(0,0,0)以外,该电场内电位移的散度处处为零(都不能产生或吸收电位移线).电荷所在的点处散度不存在,是个奇异点,由例 4 和上面的讨论知,包围 q 的任何闭曲面的通量 $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$,所以,电位移线始于自由正电荷.

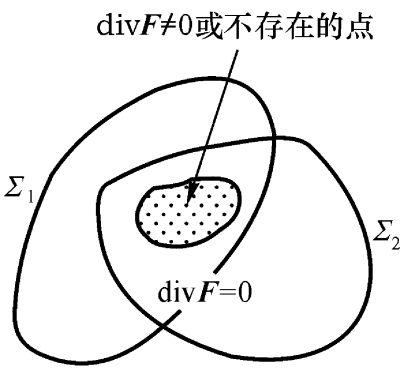


图 11.27

若空间区域 V 内,任何闭曲面所包围的区域完全含于 V ,则称 V 为空间单连通域.

11.7 斯托克斯公式、环量与旋度

本节介绍空间曲面积分与曲线积分之间的关系——斯托克斯公式,它在场论中占有重要地位.同时介绍向量场的两个重要概念——环量与旋度.

11.7.1 斯托克斯公式

定理 11.4 设 C 为分段光滑的有向闭曲线, Σ 是以 C 为边界的任一分片光滑的有向曲面, C 的方向与 Σ 的方向符合右手螺旋法则. 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在包含 Σ 的某区域内具有连续的一阶偏导数, 则有斯托克斯公式

$$\begin{aligned} & \oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \right) dydz + \left(\frac{P}{z} - \frac{R}{x} \right) dzdx + \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) dxdy, \end{aligned} \quad (1)$$

即有

$$\begin{aligned} & \oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{P}{z} - \frac{R}{x} \right) \cos \beta + \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) \cos \gamma \, dS, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是指定一侧的法向量方向余弦.

证明过程分三步: 第一步把曲面积分化为坐标面上投影域的二重积分; 第二步把空间闭曲线 C 上的曲线积分化为坐标面上的闭曲线积分; 第三步在坐标面上, 应用格林公式把第二步得到的平面闭曲线积分化为二重积分. 这个重要的定理最早公开出现在斯托克斯主持的 1854 年学生的竞赛试题中, 请读者自己去证明它.

当 Σ 为 Oxy 坐标面上的平面区域时, 斯托克斯公式就是格林公式, 因此斯托克斯公式是格林公式在空间上的推广.

为便于记忆, 我们借用三阶行列式, 把公式(2)中曲面积分的被积函数表为

斯托克斯 Stokes G.G. 1819—1903, 爱尔兰数学家与物理学家.

右手四指与 C 方向一致, 且手心对着 Σ , 则与 C 邻近的曲面 Σ 的法向量与拇指方向一致.

$$\begin{vmatrix} \cos P & \cos Q & \cos R \\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

例 1 计算 $I = \int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 其中闭曲线 C 是点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ 为顶点的三角形边界线 $ABCA$ (图 11.28).

解 取 S 为三角形 ABC : $x + y + z = 1$, $\mathbf{n} = \{1, 1, 1\}$ 为指定的法向量, 其方向余弦

$$\cos P = \cos Q = \cos R = \frac{1}{3}.$$

由斯托克斯公式(7), 得

$$\begin{aligned} I &= \int_S \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{-4}{3} \int_S (x + y + z) dS \\ &= \frac{-4}{3} \int_S dS = -2. \end{aligned}$$

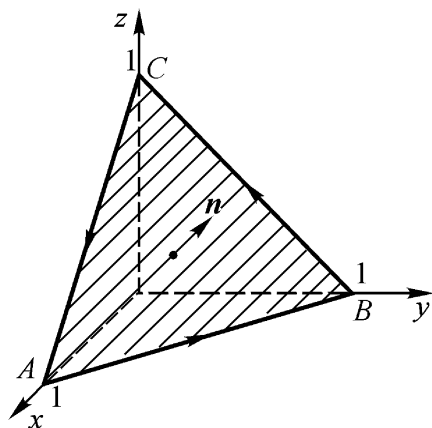


图 11.28

11.7.2 向量场的环量与旋度

设 C 为向量场内的有向闭曲线, \mathbf{t} 表示与 C 同向的单位切向量, $d\mathbf{r} = \mathbf{t} dS$. 在力场 $\mathbf{F}(M)$ 中, 闭曲线积分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} dS = \int_C \text{Prj}_{\mathbf{t}} \mathbf{F} dS$$

表示力 \mathbf{F} 沿闭路 C 所做的功.

在流速场 $\mathbf{v}(M)$ 中, 闭曲线积分

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS = \int_C \text{Prj}_{\mathbf{t}} \mathbf{v} dS$$

表示沿闭路 C 的环流.

在磁场强度为 $\mathbf{H}(M)$ 的电磁场中, 根据安培环路定律, 闭曲线积分

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dS = \int_C \text{Prj}_{\mathbf{t}} \mathbf{H} dS$$

表示 C 所张开的曲面通过的电流的代数和 .

由此可见,在向量场的研究中,向量在有向闭曲线上的积分是很重要的 .

定义 11.5 在向量场 $\mathbf{F}(M)$ 中,设 C 为一条有向闭曲线,则称曲线积分

$$= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3}$$

为向量场 $\mathbf{F}(M)$ 沿有向闭曲线 C 的环量 .

在直角坐标系下,若

$$\mathbf{F}(M) = \{ P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \},$$

则环量

$$= \oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

在 11.3.2 段里,我们曾介绍平面流速场的环量,并通过格林公式了解环量与闭曲线 C 所围的平面区域内诸点的旋度之间的关系.这里把它们扩展到空间的一般向量场上去.由于第二型曲线积分当积分路径的方向相反时,积分值差一个负号,所以环量有如下意义的可加性(参看图 11.29):在 C 所张开的曲面 Σ 上,任意作一网格来分割 Σ ,则向量场沿每个小曲面片的边界(其方向与曲面片的方向满足右手螺旋法则)的环量之和,等于向量场沿曲线 C 的环量,即沿曲线 C 的环量可以按 C 所张开的曲面进行累积 .

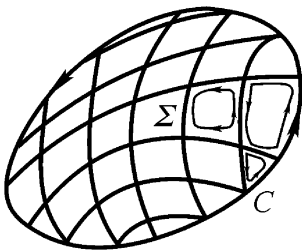


图 11.29

定义 11.6 设 M 为向量场 $\mathbf{F}(M)$ 中一点, \mathbf{n} 为取定的向量.过点 M 任意作一个非闭的光滑曲面片 Σ ,使之在点 M 处以 \mathbf{n} 为法向量(图 11.30).设 C 为 Σ 上包围着点 M 的闭曲线, S 是它包围的曲面, C 与 S 的方向满足右手螺旋法则,若 C 沿曲面 Σ 向点 M 无限收缩(记 $S \rightarrow M$)时,极限

$$\lim_{S \rightarrow M} \frac{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{S}$$

存在,且与 Σ 的取法及 C 的收缩法无关时,则称此极限值为向量场 $\mathbf{F}(M)$ 在点 M 处沿 \mathbf{n} 方向的环量面密度(或方向旋数) .

在直角坐标系下,设

$$\mathbf{F} = \{ P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \},$$

则由斯托克斯公式,有

$$\begin{aligned} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned}$$

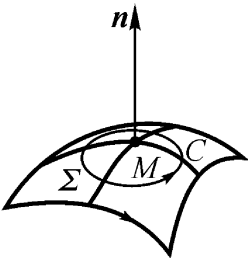


图 11.30

$$= \int_S \left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \cos \alpha + \frac{P}{z} - \frac{R}{x} \cos \beta + \frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \cos \gamma \right) dS.$$

利用积分中值定理,得

$$= \left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \cos \alpha + \frac{P}{z} - \frac{R}{x} \cos \beta + \frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \cos \gamma \right)_{M^*} S,$$

其中 M^* 为 S 上一点,当 $S \rightarrow M$ 时, $M^* \rightarrow M$,于是

$$\lim_{S \rightarrow M} \frac{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{S} = \left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \cos \alpha + \frac{P}{z} - \frac{R}{x} \cos \beta + \frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \cos \gamma \right),$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为指定的向量 \mathbf{n} 的方向余弦.

环量面密度既与点 M 的位置有关,又与 \mathbf{n} 的方向有关,它等于向量

$$\left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{P}{z} - \frac{R}{x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) \mathbf{k}$$

与

$$\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

的数量积.

定义 11.7 向量场 $\mathbf{F}(M)$ 在点 M 处的旋度是个向量,其方向指向点 M 处环量面密度最大的方向,其模等于这个最大值,记为 $\text{rot } \mathbf{F}(M)$

在直角坐标系下,旋度的计算公式为

$$\text{rot } \mathbf{F}(M) = \left(\frac{R}{y} - \frac{Q}{z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{P}{z} - \frac{R}{x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) \mathbf{k},$$

即

$$\text{rot } \mathbf{F}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F}. \tag{4}$$

旋度在任一方向上的投影,就是该方向上的环量面密度.

在大气中,手中的风车朝哪个方向转动最快,哪个方向就是风速场的旋度方向.

由旋度的定义,斯托克斯公式可以表为向量形式:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

这说明沿闭曲线 C 的环量等于由 C 所张开的任何有向曲面上诸点旋度向量的通量.

当 P, Q, R 具有二阶连续偏导数时,容易算出

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0,$$

这说明旋度场是无源场,也就说明了斯托克斯公式中曲面 S 可以是有向闭曲线

C 在场内张开的任何曲面 .

各点旋度均为零的场,叫做无旋场 .

旋度有如下的运算性质:

- (i) $\text{rot}(G \mathbf{F} + G_2 \mathbf{G}) = G_1 \text{rot} \mathbf{F} + G_2 \text{rot} \mathbf{G}$ (G_1, G_2 为常数);
- (ii) $\text{rot}(u \mathbf{F}) = u \text{rot} \mathbf{F} + \text{grad} u \times \mathbf{F}$ (u 为数量函数);
- (iii) $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot} \mathbf{G}$;
- (iv) $\text{rot}(\text{grad} u) = \mathbf{0}$ (梯度场是无旋场) .

例 2 计算曲面积分

$$\text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

其中 $\mathbf{F} = \{x - z, x^3 + yz, -3xy^2\}$, 是锥面 $z = 2 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 上侧 .

解 因旋度场是无源场,曲面积分只与曲面边界线 C 有关,与曲面 无关 .这里边界 C 是 Oxy 平面曲线 $x^2 + y^2 = 2^2$,所以可把 换为 C 所张开的平面区域 $D: z = 0, x^2 + y^2 \leq 2^2$ 上侧,由于

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - z & x^3 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix} \\ &= (-6xy - y)\mathbf{i} + (-1 + 3y^2)\mathbf{j} + 3x^2\mathbf{k} \\ d\mathbf{S} &= dydz \mathbf{i} + dzdx \mathbf{j} + dxdy \mathbf{k} = dxdy \mathbf{k} \end{aligned}$$

所以

$$\text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D 3x^2 dxdy = 12 \text{ .}$$

关于空间曲线积分与路径无关的条件问题,以及表达式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 为全微分的条件问题,有与定理 11.2 类似的结果,仅叙述如下:

定理 11.5 设函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲面单连通区域 G 内,有连续的一阶偏导数,则下列四件事相互等价:

- (i) 对 G 内任一闭曲线 C , 积分

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0 \text{ .}$$

- (ii) 在 G 内, 曲线积分

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

与路径无关(与起点 A 、终点 B 有关) .

曲面单连通区域,指区域内任何闭曲线都有以它为边界的曲面完全含于该区域 .

(iii) 在 G 内, 表达式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 是某函数 $u(x, y, z)$ 的全微分, 即有

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

(iv) 在 G 内任一点处, 恒有

$$\frac{R}{y} = \frac{Q}{z}, \quad \frac{P}{z} = \frac{R}{x}, \quad \frac{Q}{x} = \frac{P}{y}. \quad (5)$$

这个定理指明: (5) 式是曲线积分与路径无关的充要条件, 也是表达式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 是某函数 $u(x, y, z)$ 的全微分的充要条件, 且此时原函数

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz + C,$$

由于曲线积分与路径无关, 在可能的条件下, 通常取与坐标轴平行的折线作积分路径, 化为定积分, 如

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz + C, \quad (6)$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为 G 内任取的定点.

在向量场 $\mathbf{F} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ 里, 满足(i)和(ii)的叫做保守场; 满足(iii)的叫做有势场, 此时称 $v = -u$ 为势函数; 满足(iv)的叫做无旋场.

既无源、又无旋的场称为调和场.

例 3 表达式 $2xyz^2dx + [x^2z^2 + z\cos(yz)]dy + [2x^2yz + y\cos(yz)]dz$ 是否为某函数的全微分? 若是, 求此函数.

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{R}{y} &= 2x^2z + \cos(yz) - yz\sin(yz) = \frac{Q}{z}, \\ \frac{P}{z} &= 4xyz = \frac{R}{x}, \quad \frac{Q}{x} = 2xz^2 = \frac{P}{y}, \end{aligned}$$

所以表达式是某函数的全微分. 取 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, 则

$$u = \int_0^z [2x^2yz + y\cos(yz)]dz + C = x^2yz^2 + \sin(yz) + C.$$

函数 $u = x^2yz^2 + \sin(yz) + C$ 即为所述表达式的原函数.

11.8 例 题

例 1 计算 $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中 L 为折线 ABC , 且 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$,

$C(-1, 0)$.

解 将 L 分为两段,

$$\overline{AB}: y = 1 - x \quad (0 \leq x \leq 1, y \geq 0),$$

$$\overline{BC}: y = 1 + x \quad (-1 \leq x \leq 0, y \geq 0),$$

故

$$\begin{aligned} \int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|} &= \int_{\overline{AB}} \frac{dx+dy}{x+y} + \int_{\overline{BC}} \frac{dx+dy}{-x+y} \\ &= \int_1^0 \frac{dx-dx}{1} + \int_0^{-1} \frac{dx+dx}{1} = \int_0^{-1} 2dx = -2. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\int_L x^2 + y^2 dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy$, 其中 L 是一段正弦曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2$) 沿 x 增大方向.

解 本题直接计算太繁, 这里通过格林公式来换个积分线路. 换为从点 $A(0, 0)$ 到点 $B(2, 0)$ 的直线段 $y = 0$. 因为

$$\frac{Q}{x} = y^2 + \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{P}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_L x^2 + y^2 dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy \\ &= \int_{\overline{AB}} + \int_{L+\overline{BA}} x^2 + y^2 dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy \\ &= \int_0^2 x dx + \int_0^2 y^2 dy = \frac{3}{2} + \int_0^2 dx \int_{\sin x}^0 y^2 dy = \frac{3}{2} + \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

例 3 计算 $I = \int_{AmB} ((y)\cos x - y)dx + ((y)\sin x -)dy$, 其中 (y) 具有连续的导数; AmB 是从点 $A(\pi, 2)$ 到点 $B(3\pi, 4)$, 且在直线 \overline{AB} 下方的一条曲线, 它与 \overline{AB} 围成的区域的面积为 2 (图 11.31).

解 这里

$$\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} = ,$$

所以曲线积分与路径有关. 但这里的积分路径又不十分明确, 被积表达式中还有一未知的函数, 无法按第二型曲线积分直接化为定积分的办法计算. 在曲线积分与路径有关的条件下, 也可以通过格林公式来实现变换积分线路. 因为

$$AmB = AmB + \overline{BA} - \overline{BA},$$

记 $AmB + \overline{BA}$ 为闭曲线 C , 则因 $\overline{AB}: x = y - , 2 \leq y \leq 4$, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_C + \int_{\overline{AB}} ((y)\cos x - y)dx + ((y)\sin x -)dy \\ &= \int_D dx dy + \int_2^4 [(y)\cos(y -) - y] + \end{aligned}$$

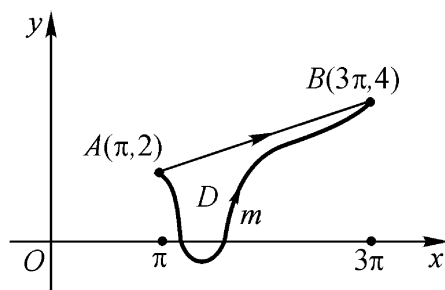


图 11.31

$$\begin{aligned}
 & [(-y)\sin(y-x) - x]\mathrm{d}y \\
 &= 2 - \int_2^4 (-x^2y + x)\mathrm{d}y + \int_2^4 [(-y)\cos(y-x) + (-y)\sin(y-x)]\mathrm{d}y \\
 &= -6x^2 + (-y)\sin(y-x) \Big|_2^4 = -6x^2.
 \end{aligned}$$

例 4 设函数 $Q(x, y)$ 在 Oxy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分

$\int_L 2xy \mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 并且对任意 t , 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy \mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy \mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

求二元函数 $Q(x, y)$.

解 由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x,$$

于是

$$Q(x, y) = x^2 + C(y),$$

其中 $C(y)$ 是待定函数. 又因

$$\begin{aligned}
 \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy \mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y &= \int_0^1 [t^2 + C(y)]\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y, \\
 \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy \mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y &= \int_0^t [1^2 + C(y)]\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y.
 \end{aligned}$$

由假设条件知

$$t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y.$$

两边对 t 求导, 得

$$2t = 1 + C(t),$$

故 $C(t) = 2t - 1$, 即 $C(y) = 2y - 1$, 从而所求的二元函数

$$Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

例 5 在力场 $\mathbf{F} = \{yz, zx, xy\}$ 内, 质点由原点运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

上位于第一卦限的点 $M(x, y, z)$ 处, 问当 x, y, z 取何值时, 场力做的功 W 最大, 并求出这个最大值.

解 因为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

即 \mathbf{F} 为无旋场, 所以曲线积分与路径无关.

直线段 \overline{OM} 的参数方程是

$$x = t, y = t, z = t, 0 \leq t \leq 1.$$

质点从原点沿直线运动到 M 点, 场力做的功

$$W = \int_{OM} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OM} yz dx + zx dy + xy dz = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

问题化为 $W = \frac{1}{3}xyz$ 在约束条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的条件极值问题. 令

$$F(x, y, z) = \frac{1}{3}xyz + \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right),$$

由方程组

$$F'_x = yz - \frac{2x}{a^2} = 0,$$

$$F'_y = xz - \frac{2y}{b^2} = 0,$$

$$F'_z = xy - \frac{2z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

解得

$$x = \frac{3}{3}a, \quad y = \frac{3}{3}b, \quad z = \frac{3}{3}c.$$

由此实际问题知最大值存在, 且

$$W_{\max} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} abc = \frac{3}{9} abc.$$

例 6 设在第一卦限内, 对任一有向闭曲面 恒有

$$2yz \cdot (x) dy dz + y^2 z \cdot (x) dz dx - yz^2 e^x dx dy = 0,$$

其中 $(x) = C^2$, $(0) = \frac{1}{2}$, $(0) = 1$, 求 (x) .

解 由题设的条件和高斯公式知, 对任何有界闭域 V 恒有

$$\int_V 2yz((x) + (x) - e^x) dV = 0,$$

所以

$$(x) + (x) = e^x.$$

其通解为

$$(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

由初始条件 $\varphi(0) = \frac{1}{2}, \quad \varphi'(0) = 1$ 确定 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$, 故所求

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\sin x + e^x) .$$

例 7 计算 $J = \int\limits_{\Sigma} yx^3 \, dydz + xy^3 \, dzdx + zdx dy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被围在柱面 $|x| + |y| = 1$ 内的曲面的下侧 .

解 显然这里不便通过使用补面的方法来利用高斯公式, 下面直接计算它 . 由于 Σ 在 Oyz 面上的投影域关于 z 轴 ($y = 0$) 对称, 所以

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Sigma} yx^3 \, dydz &= \int\limits_{\Sigma_{\text{前}}} yx^3 \, dydz + \int\limits_{\Sigma_{\text{后}}} yx^3 \, dydz \\ &= \int\limits_{yz} y(z - y^2)^3 \, dy - \int\limits_{yz} y(-z - y^2)^3 \, dy \\ &= 2 \int\limits_{yz} y(z - y^2)^3 \, dy = 0, \end{aligned}$$

最后一步用到二重积分的对称性, 再由 x 与 y 的可轮换性(地位对等性)知

$$\int\limits_{\Sigma} xy^3 \, dzdx = 0,$$

于是(图 11.32)

$$\begin{aligned} J &= 0 + 0 + \int\limits_{\Sigma} zdx dy \\ &= - \int\limits_{xy} (x^2 + y^2) \, dxdy = - 2 \int\limits_{xy} x^2 \, dxdy \\ &= - 8 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x^2 \, dy = - \frac{2}{3} . \end{aligned}$$

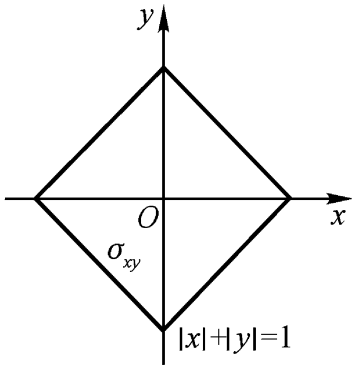


图 11.32

例 8 试证阿基米德浮力定律: 浸没在液体中的任何物体, 所受的浮力铅直向上, 大小等于它排开的液体的重量 .

证明 设液体的密度为 ρ , 将 x, y 轴置液面上, z 轴铅直向下 . 设物体的边界面为 Σ , 体积为 V .

在 Σ 上任取一面积微元 dS , 设 dS 浸没深度为 z , 于是 dS 受到的压力的大小为:

$$dP = \rho g z dS,$$

且与面积微元 dS 的法方向相反, 所以, 这个压力在三个坐标轴上的投影为:

$$dP_x = - \rho g z \cos \alpha \, dS, \, dP_y = - \rho g z \cos \beta \, dS, \, dP_z = - \rho g z \cos \gamma \, dS,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 dS 处的法向量方向余弦, 因此, 物体受到的总压力在三个坐标轴上的投影分别为:

$$\begin{aligned}
 P_x &= -g \quad z \cos \theta \, dS = -g \quad z \, dy \, dz, \\
 P_y &= -g \quad z \cos \theta \, dS = -g \quad z \, dx \, dz, \\
 P_z &= -g \quad z \cos \theta \, dS = -g \quad z \, dx \, dy.
 \end{aligned}$$

由高斯公式得

$$P_x = -g \quad \int_V 0 \, dV = 0,$$

$$P_y = -g \quad \int_V 0 \, dV = 0,$$

$$P_z = -g \quad \int_V 1 \, dV = -g \, V.$$

这说明了液体对物体的浮力铅直向上,大小等于排开液体的重量. \square

例 9 利用高斯公式计算三重积分

$$I = \int_V (xy + yz + zx) \, dV,$$

其中 V 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1$ 以及圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 围在第一卦限内的立体.

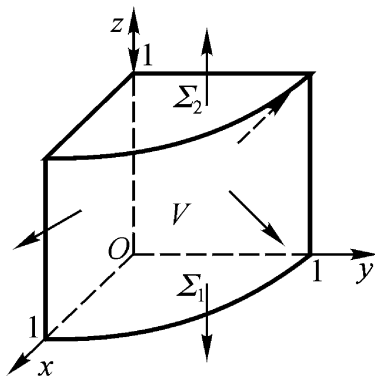


图 11.33

解 由于 $\frac{P}{x}, \frac{Q}{y}, \frac{R}{z}$ 选取相当自由, 考虑到 V 的边界面(图11.33), 取

$$P = Q = 0, \quad R = xyz + \frac{1}{2} yz^2 + \frac{1}{2} xz^2,$$

则

$$\frac{R}{z} = xy + yz + zx.$$

由高斯公式,

$$I = \int_V (xy + yz + zx) \, dV$$

$$= \int_{\text{外}} \left[xyz + \frac{1}{2}(x+y)z^2 \right] dx dy.$$

由 V 的侧面(母线平行于 z 轴的柱面), 底面 $\Sigma_1: z=0$, 和上面 $\Sigma_2: z=1$ 构成, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Sigma_1(\text{下})} + \int_{\Sigma_2(\text{上})} \left[xyz + \frac{1}{2}(x+y)z^2 \right] dx dy \\ &= 0 + \int_{\Sigma_2} \left[xy + \frac{1}{2}(x+y) \right] dx dy \\ &= \int_0^{1/2} d\theta \int_0^1 [r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2}r(\sin \theta + \cos \theta)] r dr = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

仔细分析上述计算过程, 与柱坐标系下三重积分计算无异.

习 题 十 一

11.1

1. 求向量场 $\mathbf{F} = (z-y)^2 \mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ 的向量线方程.

2. 电流 I 流过无限长的直导线, 在导线周围产生磁场, 当取导线为 z 轴时, 磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

求磁力线方程.

11.2

1. 计算 $\int_l x dy$, 其中 l 是由坐标轴和直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 所围成的三角形逆时针方向的回路.

2. 计算 $\int_l (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 l 为抛物线 $y = x^2$ 上, 对应于 x 由 -1 增加到 1 的那一段弧.

3. 计算 $\int_l (2a - y)dx - (a - y)dy$, 其中 l 为旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 一拱, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. 计算 $\int_l \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 l 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 顺时针方向.

5. 计算 $\int_l (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 l 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ 上对应于 x 由 0 变到 2 的一段.

6. 计算 $\int_C ydx + zd y + xdz$, 其中 C 为螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

7. 计算 $\int_C xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, 其中 C 是从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(4, 7, 10)$ 的直线段.

8. 计算 $\int_l 2xe^{xy}dx + ye^{xy}dy$, 其中 l 是从点 $A(1, 0)$ 沿椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 至点 $B(0, 2)$, 反时针的弧段.

9. 计算 $\int_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 其中 C 为

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4x(x - 0), \\ x^2 + y^2 &= 2x \end{aligned}$$

从 z 轴正向看 C 取逆时针方向.

10. 设 AB 在极坐标系下的方程为 $r = f(\theta)$, 其中 $f(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上具有连续的导数, 且 $\theta = 0$ 对应点 A , $\theta = 2\pi$ 对应点 $B(0, 2\pi)$, 试证:

$$\int_{AB} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

11. 设 MEN 是由点 $M(0, -1)$ 沿右半圆 $x = 1 - y^2$ 经点 $E(1, 0)$ 到点 $N(0, 1)$ 的弧段, 求 $\int_{MEN} |y|dx + y^3dy$.

12. 设 Oxy 平面内有一力场 $\mathbf{F}(M)$, 它的方向指向原点: 大小等于点 M 到原点的距离.

(1) 求质点从点 $A(a, 0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 反时针移动到点 $B(0, b)$ 时, 力场做的功;

(2) 质点按反时针方向沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 运动一周时, 力场做的功.

13. 设 C 是光滑的弧长为 s 的曲线段, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 C 上连续, 且 $M = \max_{C} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$, 证明

$$\left| \int_C Pdx + Qdy + Rdz \right| \leq Ms.$$

11.3

1. 利用曲线积分计算星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 所围图形的面积.

2. 计算 $\int_C x^2dx + xe^{y^2}dy$, 其中 C 是由直线 $y = x - 1, y = 1$ 及 $x = 1$ 所围成

的三角形区域边界线的正向 .

3 . 设 C 是 xOy 平面一顺时针方向简单闭曲线, 且 $\int_C (x - 2y)dx + (4x + 3y)dy = -9$, 求曲线 C 所围的区域的面积 .

4 . 计算 $\int_C e^x [(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$, 其中 C 为区域 $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$ 的边界的正向闭曲线 .

5 . 计算 $\int_C (x^3 - x^2 y)dx + (xy^2 - y^3)dy$, 其中 C 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 顺时针方向一周 .

6 . 计算 $\int_C y(2x - 1)dx - x(x + 1)dy$, 其中 C 是正向椭圆周 $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

7 . 计算 $\int_C \frac{yx^2 dx - xy^2 dy}{1 + x^2 + y^2}$, 其中 C 是由曲线 $l_1: y = \sqrt{1 - x^2}$ 和直线 $l: y = 0 (-1 \leq x \leq 1)$ 构成的顺时针闭曲线 .

8 . 计算 $\int_l (x + y)^2 dx + (x + y^2 \sin y)dy$, 其中 l 是从点 $A(1, 1)$ 沿曲线 $y = x^2$ 到点 $B(-1, 1)$ 的弧段 .

9 . 计算 $\int_l x^2 + y^2 dx + [x + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy$, 其中 l 是从点 $B(2, 1)$ 沿上半圆 $y = 1 + \sqrt{1 - (x - 1)^2}$ 至点 $A(0, 1)$ 的弧段 .

10 . 计算 $\int_l (3xy + \sin x)dx + (x^2 - ye^y)dy$, 其中 l 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(4, 8)$ 的抛物线段 $y = x^2 - 2x$.

11 . 计算曲线积分

$$I = \int_l [u_x(x, y) + xy]dx + u_y(x, y)dy,$$

其中 l 是从点 $A(0, 1)$ 沿曲线 $y = \frac{\sin x}{x}$ 到点 $B(\pi, 0)$ 的曲线段. $u(x, y)$ 在 Oxy 平面上具有二阶连续偏导数, 且 $u(0, 1) = 1, u(\pi, 0) = 0$.

12 . 设有平面流速场 $v(x, y) = [e^x(y^3 - 2y) - y^2]\mathbf{i} + [e^x(3y^2 - 2) - x]\mathbf{j}$,

(1) 求各点的旋度;

(2) 求沿椭圆 $C: 4(x - 3)^2 + 9y^2 = 36$ 逆时针方向的环流 .

13 . 设 $u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的一阶偏导数, C 是 D 的边界线, 证明

$$\int_D \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} w(u dy - v dx) = \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) w dx dy .$$

11.4

1. 证明曲线积分 $\int_l e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ 只与 l 的起点和终点有关, 而与所取的路径无关, 并求

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$$

2. 证明曲线积分 $\int_l \frac{y dx - x dy}{x^2}$ 只与 l 的起点和终点有关, 而与所取的路径无关, 其中 l 为不过 y 轴的任意曲线, 并求

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}.$$

3. 计算 $\int_l \frac{1}{x} \sin xy - \frac{1}{4} dx + \frac{1}{y} \sin xy - \frac{1}{4} dy$, 其中 l 是由点 $A(1, \frac{1}{2})$ 到点 $B(\frac{1}{2}, 2)$ 的直线段.

4. 计算 $\int_l (x^2 + 1 - e^y \sin x) dy - e^y \cos x dx$, 其中 l 是由点 $O(0, 0)$ 沿 $y = x^2$ 到点 $A(1, 1)$ 的曲线.

5. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 而且曲线积分

$$\int_l [f(x) + 6f'(x) + 4e^{-x}] y dx + f(x) dy$$

与路径无关. 计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} [f(x) + 6f'(x) + 4e^{-x}] y dx + f(x) dy.$$

6. 设 $f(1) = 1$, 试求可微函数 $f(x)$, 使曲线积分

$$\int_{AB} [\sin x - f(x)] \frac{y}{x} dx + [f(x) - x^2] dy$$

与路径无关 (AB 不穿过 y 轴). 并求从点 $A = \frac{3}{2}, 1$ 到点 $B = \frac{1}{2}, 0$ 的这个积分值.

7. 设曲线积分 $\int_l F(x, y) (y dx + x dy)$ 与积分路径无关, $F(x, y)$ 可微, 且由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数的图形过点 $(1, 2)$, 试求方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 $y = f(x)$.

8. 设 $f(x), g(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且曲线积分

$$\int_l g(x) y dx + f(x) dy$$

与路径无关. 试证

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt.$$

9. 计算闭曲线积分 $\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 是逆时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$

1.

10. 已知 C 是平面上任意一条不自相交的闭曲线, 问常数 a 为何值时, 曲线积分

$$\oint_C \frac{x dx - a y dy}{x^2 + y^2} = 0,$$

其中 C 是不穿过原点 $(0, 0)$ 的闭曲线.

11. 设有平面力场 $\mathbf{F} = (2xy^3 - y^2 \cos x) \mathbf{i} + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) \mathbf{j}$, 求质点沿曲线 $l: 2x = y^2$, 从点 $O(0, 0)$ 运动到点 $A \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ 时, 场力 \mathbf{F} 所做的功.

12. 设质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ (k 为常数), r 为点 A 与 M 之间的距离, 将质点 A 固定于点 $(0, 1)$ 处, 质点 M 沿 $y = 2x - x^2$ 自点 $(0, 0)$ 处移动到点 $(2, 0)$ 处, 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.

13. 验证表达式

$$\frac{y dx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} - \frac{x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$$

在不含原点的任何单连通区域内是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并在 $x > 0$ 区域上求函数 $u(x, y)$.

14. 验证表达式 $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求函数 $u(x, y)$, 计算曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy.$$

15. a 为何值时, 表达式

$$\frac{(x + ay) dx + y dy}{(x + y)^2}$$

是某函数的全微分.

16. 确定常数 a , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $\mathbf{F}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2) \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2) \mathbf{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

17. 已知函数 $z = f(x, y)$ 在任一点 (x, y) 处的两个偏增量:

$$\Delta_x z = (2 + 3x^2 y^2) \Delta x + 3xy^2 \Delta y - x^2 + y^2 - x^3,$$

$$\Delta_y z = 2x^3 y \Delta y + x^3 - y^2,$$

且 $f(0, 0) = 1$, 求 $f(x, y)$.

18. 验证下列方程是全微分方程, 并求其通解.

$$(1) (3x^2 + 6y^2x)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0;$$

$$(2) [\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y\cos(x + y^2) + 3x]dy = 0;$$

$$(3) (x\cos y + \cos x)y - y\sin x + \sin y = 0.$$

19. 设 $f(x)$ 是有二阶连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 且

$$[xy(x + y) - f(x)y]dx + [f(x) + x^2y]dy = 0$$

为一全微分方程, 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

20. 证明: 解一阶微分方程的分离变量法, 本质上就是将方程乘以积分因子, 化为全微分方程来求解.

21. 设有平面向量场 $\mathbf{F} = \{2x\cos y - y^2\sin x, 2y\cos x - x^2\sin y\}$,

(1) 证明 \mathbf{F} 是保守场;

(2) 求势函数;

(3) 求从点 $(-1, 0)$ 到点 $(3, \frac{\pi}{2})$ 的曲线积分.

11.5

1. 计算曲面积分 $\int_S (z - 1) dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的内侧.

2. 计算 $\int_S xyz dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分的外侧.

3. 计算 $\int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 S 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 1$ 部分)的上侧.

4. 计算 $\int_S (x + y + z) dx dy - (y - z) dy dz$, 其中 S 是三个坐标面与平面 $x = 1, y = 1, z = 1$ 所围成的正方体表面外侧.

5. 设有流速场 $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

(1) 求穿过锥面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 向下侧的净流量 I_1 ;

(2) 求穿过平面 $\Sigma_2: z = h$ ($x^2 + y^2 \leq h$) 向上侧的净流量 I_2 .

6. 计算 $\int_S \frac{xdydz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R$ ($R > 0$) 所围成立体表面的外侧.

7. 计算 $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$, S 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的下侧.

8. 设 Σ_{xy} 是曲面 S 在 Oxy 面上的投影域, 问

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{xy} f(x, y) dx dy$$

是否成立,为什么?

11.6

1. 试证闭曲面 S 所围的立体体积

$$V = \frac{1}{3} \iint_S [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma] dS,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法向量方向余弦.

2. 计算 $\iint_S xz^2 dy dz + yx^2 dz dx + zy^2 dx dy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

3. 计算 $\iint_S xz dy dz + x^2 y dz dx + y^2 z dx dy$, 其中 S 由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和坐标面在第一卦限所围立体表面的外侧.

4. 设函数 $f(u)$ 有连续的导数, 计算曲面积分

$$\iint_S \left(\frac{x}{y} f' \left(\frac{x}{y} \right) dy dz + f' \left(\frac{x}{y} \right) dz dx + \left(z - \frac{z}{y} f' \left(\frac{x}{y} \right) \right) dx dy \right),$$

其中 S 是由 $y = x^2 + z^2 + 1$ 和 $y = 9 - x^2 - z^2$ 所围立体表面的外侧.

5. 计算 $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的下侧.

6. 计算 $\iint_S (8y + 1) x dy dz + 2(1 - y)^2 dz dx - 4y z dx dy$, 其中 S 是由曲线 $\begin{cases} z = y - 1, \\ (1 - y)^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所生成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

7. 计算 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + 2c z dx dy$, 其中 S 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}$ 的下侧.

8. 设 $V = \{(x, y, z) \mid -2ax - x^2 - y^2 \leq z \leq 0\}$, S 为 V 的表面外侧, 求

$$\iint_S \frac{ax dy dz + 2(x + a) y dz dx}{(x - a)^2 + y^2 + z^2}.$$

9. 设空间区域 V 由曲面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 0$ 围成, 记 S 为 V 的表面外侧, V 为 V 的体积, 试证:

$$\int_S x^2 y z^2 dy dz - x y^2 z^2 dz dx + z(1 + x y z) dx dy = V.$$

10. 设空间有界闭区域 V 关于平面 $x=0$ 和平面 $y=x$ 都对称, S 为 V 的表面外侧, $f(t)$ 为连续函数, 试证

$$\int_S f(x) y z^2 dy dz - x f(y) z^2 dz dx + z(1 + x y f(z)) dx dy = V \text{ 的体积}.$$

11. 已知 $\mathbf{F} = \frac{2^y}{x^2 + z^2} \mathbf{j}$, 求

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

其中 S 为曲面 $y = x^2 + z^2$ 及 $y=1, y=2$ 所围成的立体的表面的外侧.

12. 设 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z=1$ 围成的立体的表面外侧, 求向量场 $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ 穿过 S 向外的通量.

13. 设有向量场

$$\mathbf{F} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 4z^2 + 3} (x y^2 \mathbf{i} + y z^2 \mathbf{j} + z x^2 \mathbf{k}),$$

求穿过椭球面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ 向外的通量.

14. 计算 $\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}$, 其中 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$,

(1) S 为不经过, 也不包围原点的任意简单闭曲面的外侧;

(2) S 为包围原点的任意简单闭曲面的外侧.

15. 求下列向量场 \mathbf{A} 在指定点 M 处的散度.

(1) $\mathbf{A} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}, M(1, 0, -1)$;

(2) $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}, M(7, 3, 0)$;

(3) $\mathbf{A} = xyz\mathbf{r}, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, M(1, 2, 3)$.

16. 设 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$,

(1) 求 $f(r)$, 使 $\operatorname{div} [f(r)\mathbf{r}] = 0$;

(2) 求 $f(r)$, 使 $\operatorname{div} [\operatorname{grad} f(r)] = 0$.

11.7

1. 计算空间闭曲线 C 上的积分

$$\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

其中曲线 C 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a>0, h>0)$ 的交线, 从 z 轴正向看 C 是逆时针方向的.

2. 设曲线 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 2rx (0 < r < R,$

$z=0$)的交线,从 z 轴正向看是顺时针的.计算

$$\int_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz.$$

3. 证明曲线积分

$$\int_C yzdx + zx dy + xydz$$

与路径无关(与起点和终点有关).并计算从点 $A(1,1,0)$ 到点 $B(1,1,1)$ 的这个积分.

4. 计算曲线积分

$$\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

其中 AmB 是从点 $A(a,0,0)$ 开始,沿螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{h}{2}t$ 到点 $B(a,0,h)$ 的曲线段.

5. 设向量 $\mathbf{A}(M)$ 的分量具有连续的二阶偏导数.试证在向量场 \mathbf{A} 内,任何按块光滑的闭曲面上,恒有

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

6. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 的上半部的上侧, C 为 Σ 的边界线, $\mathbf{A} = \{2y, 3x, -z^2\}$.试用下面指定的方法,计算 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.

- (1) 用第一型曲面积分计算;
- (2) 用第二型曲面积分计算;
- (3) 用高斯公式计算;
- (4) 用斯托克斯公式计算.

7. 求向量场 $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ (a 为常数)沿闭曲线 C 的环量.

- (1) C 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$,逆时针;
- (2) C 为圆周 $(x+2)^2 + y^2 = 1, z = 0$,逆时针.

8. 求下列向量场的旋度:

- (1) $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k};$ (2) $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k};$
- (3) $\mathbf{A} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k};$ (4) $\mathbf{A} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k};$
- (5) $\mathbf{A} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k});$ (6) $\mathbf{A} = P(x)\mathbf{i} + Q(y)\mathbf{j} + R(z)\mathbf{k}.$

9. 证明向量场 $\mathbf{A} = (y\cos(xy))\mathbf{i} + (x\cos(xy))\mathbf{j} + (\sin z)\mathbf{k}$ 是保守场,并求势函数.

10. 设函数 $Q(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数,且 $Q(0,y,0) = 0$,表达式

$$axzdx + Q(x,y,z)dy + (x^2 + 2y^2z - 1)dz$$

是某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分,求常数 a ,函数 Q 及 u .

11.8

1. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(a,0)$ 的曲线族 $y = a \sin x$ ($a > 0$) 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

2. 质点 M 沿着以 AB 为直径的右下半圆周, 从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 \mathbf{F} 作用, \mathbf{F} 的大小等于点 M 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OM , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\pi/2$, 求变力 \mathbf{F} 对质点 M 所做的功.

3. 计算平面曲线积分

$$\int_l \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2},$$

其中 l 为摆线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的弧段.

4. 确定参数 t 的值, 使得在不包含直线 $y=0$ 的区域上, 曲线积分

$$I = \int_l \frac{x(x^2 + y^2)^t}{y} dx - \frac{x^2(x^2 + y^2)^t}{y^2} dy$$

与路径无关, 并求出从点 $A(1,1)$ 到点 $B(0,2)$ 的积分值 I .

5. 在第一象限内, 已知曲线积分

$$\int_l f(x, y)(y dx + x dy)$$

与路径无关, 其中 $f(x, y)$ 有连续的一阶偏导数, $f_y(x, y) = 0$, 且 $f(1, 2) = 0$, 求方程 $f(x, y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$.

6. 计算曲面积分

$$(\frac{1}{z^2}x + ye^z) dy dz + x^2 y dz dx + (\sin^3 x + y^2 z) dx dy,$$

其中 S 为下半球面 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

7. 计算曲面积分

$$\int_S (2x - 2x^3 - e^x) dy dz + (zy^2 + 6x^2 y + z^2 x) dz dx - z^2 y dx dy,$$

其中 S 是由抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$, 坐标面 Oxz , Oyz 及平面 $z = \frac{1}{2}y$, $x=1$, $y=1$ 所围成的立体的表面外侧.

8. 试将曲面积分

$$\int_S \frac{xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma}{x^2 + y^2 + z^2} dS$$

化为三重积分, 其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是曲面 S 的内法向量方向余弦.

9. 求向量场 $\mathbf{A} = (x^3 - y^2)\mathbf{i} + (y^3 - z^2)\mathbf{j} + (z^3 - x^2)\mathbf{k}$ 的散度与旋度及 \mathbf{A} 穿过曲面 S 向外的通量, 其中 S 是由半球面 $y = R + \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$ ($R > 0$) 与锥

面 $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ 构成的闭曲面 Σ 沿曲线 C 的环量, 其中 C 是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的交线, 从 z 轴正向看为逆时针方向.

10. 设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 具有连续的偏导数, C 是平面区域 D 的边界线正向, 试证二重积分有分部积分公式:

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_C uv \cos(\mathbf{n}, x) ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy,$$

其中 \mathbf{n} 为曲线 C 的外法向量.

11. 设 $u = u(x, y, z)$ 有连续的二阶偏导数, 试证

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) dV,$$

其中 S 是 V 的边界面, \mathbf{n} 为 S 的外法向量.

12. 设 S 是简单光滑的闭曲面, 包围的闭区域为 $V, u = u(x, y, z)$ 在 V 上有连续的一阶偏导数, $v = v(x, y, z)$ 有连续的二阶偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

\mathbf{n} 是曲面 S 上在点 (x, y, z) 处的外法线向量, 试证:

$$\int_S u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx dy dz.$$

第十二章 无穷级数

定义 12.1 把无穷序列 $\{u_n\}: u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 的项依次用加号“+”连接起来的式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

叫做无穷级数(简称为级数), 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \tag{1}$$

其中 u_n 称为级数的一般项(或通项).

各项都是常数的级数, 叫做(常)数项级数, 例如

$$\begin{aligned} & \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots; \\ & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots; \\ & 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots. \end{aligned}$$

以函数为项的级数, 叫做函数项级数, 例如

$$\begin{aligned} & 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots; \\ & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots; \\ & \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x + \dots. \end{aligned}$$

为什么要研究无穷级数呢?

无穷级数是数和函数的一种无限的表现形式. 它是进行数值计算的有效工具, 计算函数值、构造函数值表都借助于它; 无穷级数在积分运算和微分方程求解时, 也将呈现出它的威力, 因为无穷级数中包含有许多非初等函数; 在自然科学和工程技术里, 也常常用无穷级数来分析问题, 如谐波分析等. 总之, 无穷级数是分析学的重要组成部分, 在理论上、计算上和实际应用方面都有重要意义.

12.1 无穷级数的敛散性

12.1.1 收敛与发散概念

无穷级数定义式(1)的含义是什么? 按通常的加法运算一项一项的加下去,

永远也算不完,那么如何计算?

称无穷级数(1)的前 n 项和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

为级数(1)的(前 n 项)部分和.这样,级数(1)对应一个部分和序列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \tag{2}$$

定义 **12 2** 若级数(1)的部分和序列(2)有极限,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S,$$

则说级数(1)收敛,并称其极限 S 为级数(1)的和,记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

否则,说级数(1)发散.

级数的敛散性是个根本性的问题,它与部分和序列是否有极限是等价的.

对于收敛级数(1),称差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

为级数(1)的余和.显然有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, 所以,当 n 充分大时,可以用 S_n 近似代替 S , 其误差为 $|r_n|$.

例 **1** 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

的敛散性.

解 由于 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 所以,部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

故所论级数收敛,其和为 1, 其余和

$$r_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}.$$

例 **2** 试证等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

本书带 号的例题可作为定理直接引用.

当 $|r| < 1$ 时, 收敛; 当 $|r| = 1$ 时, 发散.

证明 当公比 $r \neq 1$ 时, 部分和

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} \\ &= \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}. \end{aligned}$$

1° 若 $|r| < 1$, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \right) = \frac{a}{1 - r},$$

故当 $|r| < 1$ 时, 等比级数(3)收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - r}$.

2° 若 $|r| > 1$, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \infty$, 所以 S_n 无极限, 此时等比级数(3)发散.

当公比 $r = 1$ 时, $S_n = na$; 当公比 $r = -1$ 时,

$$S_n = \begin{cases} a, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

可见在 $n \rightarrow +\infty$ 时, S_n 无极限. 所以当 $|r| = 1$ 时, 等比级数(3)也发散. \square

例 3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛, 并求其和.

证明 因为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}, \\ 2S_n &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

后式减前式, 得

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

故

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \right) = 2.$$

这就证明了级数收敛, 且和为 2. \square

例 4 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (4)$$

发散 .

证明 利用不等式 $x > \ln(1+x)$ ($x > 0$), 有

$$\begin{aligned} S_n &> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln(n+1), \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, 说明调和级数(4)发散. \square

通过部分和序列的极限来判定无穷级数的敛散性, 虽然是最基本的方法, 但它常常是十分困难的. 因此需要寻找简便易行的判别方法, 这是下面几节的中心议题.

12.1.2 无穷级数的几个基本性质

由无穷级数的收敛、发散的概念和极限运算的性质, 容易得到无穷级数的下列性质:

性质 1 当 k 为非零常数时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性相同. 在收敛的情况下, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明 由级数的部分和

$$\sum_{i=1}^n ku_i = k \sum_{i=1}^n u_i$$

以及极限的性质

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n ku_i = k \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_i,$$

易知结论成立. \square

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 则逐项相加(减)的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

从第二项开始, 每项都是相邻两项的调和中项, c 称为 a, b 的调和中项是指它满足关系 $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. 这个调和级数的部分和增长得很缓慢, 欧拉曾计算过 $S_{1000} = 7.84\dots$, $S_{1000000} = 14.3900\dots$. 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

证明 由级数的部分和

$$\sum_{i=1}^n (u_i \pm v_i) = \sum_{i=1}^n u_i \pm \sum_{i=1}^n v_i$$

以及极限的性质

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (u_i \pm v_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_i \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n v_i,$$

知性质 2 成立. \square

由这条性质易知, 若在两个级数中, 有一个收敛, 另一个发散, 则它们逐项相加(减)的级数必发散; 而两个发散级数逐项相加(减)的级数不一定发散. 例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

都发散, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

是收敛的.

性质 3 在一个级数中, 任意去掉、增加或改变有限项后, 级数的敛散性不变. 但对于收敛级数, 其和将受到影响.

证明 假设在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中, 去掉 $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_l}$, 共 l 项, u_{i_l} 是最后一项, 得到新级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n.$$

设 $u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_l} = a$, S_n 和 \hat{S}_n 分别为两个级数的前 n 项部分和. 显然, 当 $n + l > i_l$ 时, 有

$$\hat{S}_n = S_{n+l} - a.$$

由此可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性一致. 但是, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n = S - a$.

有了上面的论证, 用反证法知, 在级数中任意增加有限项, 也不改变级数的敛散性, 但收敛级数的和要变.

改变有限项, 等于去掉这些项, 再于原位置上增加适当的项, 所以结论也是正确的. \square

性质 4 在收敛级数内可以任意加(有限个或无限个)括号, 即若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则任意加括号所得到的级数(每个括号内的和数为新级数的一项)

如

$$\begin{aligned} & (u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \dots + u_{k_2}) + \dots \\ & + (u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \dots + u_{k_n}) + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

也收敛,且其和与原级数和相等.

证明 因为新级数(5)的部分和数列 $\{\hat{S}_n\} = \{S_{k_n}\}$,而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{k_n} = S. \quad \square$$

由性质 4 知,发散级数去掉括号(拆项)后,仍发散.

要强调的是,收敛级数一般不能去掉无穷多个括号;发散级数一般不能加无穷多个括号.例如级数

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$$

是收敛的,其和为零,但级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

发散.

性质 5 (级数收敛的必要条件)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

即收敛级数的一般项必趋于零(是无穷小).

证明 设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$,于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

根据性质 5,若某级数的一般项不以零为极限,便可断言,该级数发散.例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n} \quad (a > 0),$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$,所以该级数发散.

一般项为无穷小仅仅是级数收敛的必要条件,不是充分条件.如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的一般项 $\frac{1}{n}$ 是无穷小,但调和级数发散.

例 5 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0,$$

故所论级数发散.

例 6 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{\ln^n 3}{3^n}$$

的敛散性.

解 因调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由性质 1 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 发散. 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 3}{3^n}$$

是以 $r = \frac{\ln 3}{3}$ 为公比的等比级数, $|r| = \frac{\ln 3}{3} < 1$, 所以这个等比级数收敛. 由性质 2 知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{\ln^n 3}{3^n}$$

发散.

例 7 试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} = 0,$$

其中 $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

证明 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \quad (6)$$

的部分和 S_n 是单增的, 且

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1+a_2)\dots(1+a_n) + a_2(1+a_3)\dots(1+a_n) + \dots + a_{n-1}(1+a_n) + a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \\ &= \frac{a_1(1+a_2)\dots(1+a_n) + a_2(1+a_3)\dots(1+a_n) + \dots + a_{n-1}(1+a_n) + (1+a_n) - 1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \\ &= \frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) - 1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} < 1, \end{aligned}$$

所以, $\{S_n\}$ 是单增有上界的数列, 故 $\{S_n\}$ 有极限, 即级数 (6) 收敛, 于是由性质 5 知, 级数 (6) 的一般项以零为极限. \square

12.2 正项级数敛散性判别法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项都是非负的实数, 则称其为正项级数. 由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单增的, 即有

$$S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots,$$

所以, 若部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界, 它必有极限, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\{S_n\}$ 无

上界, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散. 总之有:

定理 12.1 正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有上界.

不难看出, 正项级数可以任意加括号, 其敛散性不变, 对收敛的正项级数, 其和也不变. 若收敛的正项级数和为 S , 则 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

例 1 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ 的收敛性.

解 由于 $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$, 故级数的部分和

$$S_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

由定理 12.1 知, 该正项级数收敛.

这个例子启示我们, 判定一个正项级数的敛散性, 可以与另一个已知敛散性的正项级数比较来确定.

定理 12.2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个正项级数, 且满足不等式

$$u_n \leq v_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛; 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和依次为 S_n 和 σ_n , 由于 $u_n \leq v_n$, 所以 $S_n \leq \sigma_n$.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, σ_n 有上界, 从而 S_n 也有上界, 由定理 12.1 知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $S_n \rightarrow +\infty$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) v_n$ 发散. \square

推论 若对两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 存在常数 $C > 0$ 和正整数 N , 使得当 $n > N$ 时,

$$u_n \leq C v_n,$$

则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛; 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 2 试证 P -级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

当 $p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛.

证明 当 $p \leq 1$ 时, 有

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较判别法知 $p \leq 1$ 时, P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p > 1$ 时, 将 P -级数加括号如下:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} + \dots,$$

它的各项均不大于正项级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} + \dots,$$

即

$$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \dots$$

的对应项. 这最后的级数是收敛的等比级数, 公比 $r = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$. 故由比较判别法

知 $p > 1$ 时, P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛. \square

使用正项级数的比较判别法时, 需要知道一些级数的敛散性, 作为比较的标准. 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ 和 P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 常常被当做标准. 当估计某一正项级数可能收敛时, 就把它项适当放大, 若新级数是已知的收敛级数, 就可断定原级

当 $p > 1$ 时, P -级数的和是 p 的函数, 称之为黎曼函数 $\zeta(p)$, 在数论中起重要作用.

数收敛;当估计某一正项级数可能发散, 把它的项适当的缩小, 若得到一个发散的级数, 就可断定原级数也发散.

例 3 讨论下列正项级数的敛散性:

1° $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$; 2° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; 3° $\int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^2} dx$.

解 1° 因为

$$0 < u_n = 2^n \sin \frac{1}{3^n} < 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故由比较判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$$

收敛.

2° 因为

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^{2/3}},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2/3}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ 是发散的 P -级数 ($P = \frac{2}{3} < 1$), 故由比较判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

发散.

3° 因为

$$0 < u_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^2} dx < \int_0^{1/n} x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

又 P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛 ($P = \frac{3}{2} > 1$), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^2} dx$$

收敛.

定理 12.3 (比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = C,$$

则 (i) 当 $0 < C < +\infty$ 时, 两个级数敛散性一致;

(ii) 当 $C = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(iii) 当 $C = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

* 证明 只证 (i), $0 < C < +\infty$ 情形. 取 $\varepsilon = \frac{C}{2}$, $\forall N$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - C \right| < \frac{C}{2}, \text{ 即有}$$

$$\frac{C}{2} v_n < u_n < \frac{3C}{2} v_n, \quad n > N.$$

由比较判别法的推论知, 结论 (i) 成立. \square

(ii), (iii) 的证明留给读者作练习.

当 $u_n \rightarrow 0, v_n \rightarrow 0$ 时, 比较判别法的实质是通项无穷小比阶. 若 u_n, v_n 是同阶无穷小, 两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 敛散性相同; 若 u_n 是 v_n 的高阶无穷小, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛; 若 u_n 是 v_n 的低阶无穷小, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散. 因为 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 是无穷小, 考察 u_n 是 $\frac{1}{n}$ 的几阶无穷小, 就相当于和 P -级数比较来判定敛散性.

例 4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} \bigg/ \frac{1}{n} = 1,$$

又调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散.

例 5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $1 - \cos \frac{1}{n}$ 是 $\frac{1}{n}$ 的二阶无穷小 ($n \rightarrow +\infty$ 时), 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{1}{n}$ 收敛.

使用比较判别法时, 要找一个已知敛散性的级数与给定的级数对比, 一般说

来技巧性高,难度大.如果换一个角度看问题,只要取定一个已知敛散性的级数作标准,就可以判定一些级数的敛散性.如以等比级数为标准,就导出应用中很方便的两个充分性的判别法:比值法与根值法,它们的优点是由级数本身就能断定敛散性.

定理 12.4 (比值判别法或达朗贝尔判别法)对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时,级数收敛;当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时,级数发散.

证明 由数列极限定义, $\forall \epsilon > 0, \forall N, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有}$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \epsilon,$$

即

$$\rho - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \epsilon, \quad \forall n > N. \tag{1}$$

(i) 当 $\rho < 1$ 时,取 ϵ 适当小,使 $\rho + \epsilon = r < 1$. 于是由(1)式,得

$$u_{n+1} < r u_n, \quad \forall n > N.$$

从而

$$u_{N+k} < r u_{N+k-1} < \dots < r^k u_N \quad (k=1,2,\dots).$$

由于 $0 < r < 1$, 等比级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_N r^k$ 收敛, 由比较判别法知, $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收

敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 当 $\rho > 1$ 时,取 ϵ 适当小,使 $\rho - \epsilon > 1$, 于是由(1)式得

$$u_{n+1} > u_n, \quad \forall n > N.$$

注意,这时 u_n 单调上升,故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. \square

定理 12.5 (根值判别法或柯西判别法)对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时,级数收敛;当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时,级数发散.

证明方法与比值法类似,请自行证明.

强调指出:1° 若用比值法或根值法判定级数发散($\rho > 1$)时,级数的通项 u_n

达朗贝尔 D'Alembert J.L.R.(法)1717—1783.数学和力学大师,他把微积分学建立在“理性的”极限观念上,他的名言:“向前进,你就会产生信念.”

不趋于零.后面将用到这一点.2° 当 $p=1$ 时,比值法和根值法失灵.比如,对 P

- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}^p = 1,$$

所以比值判别法不能判定 P - 级数的敛散性.

例 6 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ($x>0$) 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \bigg/ \frac{x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} x = x,$$

所以,当 $0 < x < 1$ 时,级数收敛;当 $x > 1$ 时,级数发散;当 $x = 1$ 时,级数是调和级数,发散.

例 7 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cos^2 \frac{n}{3}$ 的敛散性.

解 因为 $0 \leq \cos^2 \frac{n}{3} \leq 1$, 所以

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \cos^2 \frac{n}{3} \leq \frac{n}{2^n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \bigg/ \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

所以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛,再由比较判别法知,所论级数也收敛.

例 8 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}^a$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1}^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1}^a = \left(\frac{1}{2}\right)^a,$$

所以,当 $a > 0$ 时, $\left(\frac{1}{2}\right)^a < 1$, 级数收敛;当 $a < 0$ 时, $\left(\frac{1}{2}\right)^a > 1$, 级数发散;当 $a = 0$

时,根值法失灵,但此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, 是发散的.

两点补充:

1° 比值法(或根值法)的一般形式.当 $n \geq N$ 时,若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r < 1$ (或 $\sqrt[n]{u_n} \leq r < 1$), 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (或 $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$), 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2° 如果用部分和 S_n 代替和 S , 用比值法时, 其误差 r_n 的估计为:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < ru_n + r^2 u_n + \dots = \frac{ru_n}{1-r}; \quad (2)$$

用根值法时, 则

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < r^{n+1} + r^{n+2} + \dots = \frac{r^{n+1}}{1-r}. \quad (3)$$

例 9 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} [2 + (-1)^n]^n$ 收敛, 并估计误差.

证明 由于

$$u_n = \frac{1}{3^n} [2 + (-1)^n]^n = \frac{1}{3} (1 + 2) < 1,$$

所以, 级数收敛.

若用前 n 项和 S_n 代替和 S , 其误差

$$r_n < \frac{\frac{1}{3} (1+2)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3} (1+2)} = \frac{(1+2)^{n+1}}{3^n (2-2)}.$$

例 10 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ 收敛, 并估计误差.

证明 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

所以, 级数收敛. 以 S_n 代替 S 时的误差

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n-1)! (n-1)}. \end{aligned}$$

例 11 利用级数收敛性, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

证明 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 0 < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛. 由级数收敛的必要条件知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0. \quad \square$$

定理 12.6 (积分判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上非负、连续、单调下降, 且

$$f(n) = u_n \quad (n \geq N),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 敛散性相同.

证明 为简便计, 设 $a = 1, N = 1$, 见图 12.1. 由已知条件, 对任何正整数 k , 有

$$u_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) = u_k,$$

从而有

$$S_{n+1} - u_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x) dx - S_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \leq u_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由于 $f(x) > 0$, 所以 $\int_1^b f(x) dx$ 是 b 的单增函数.

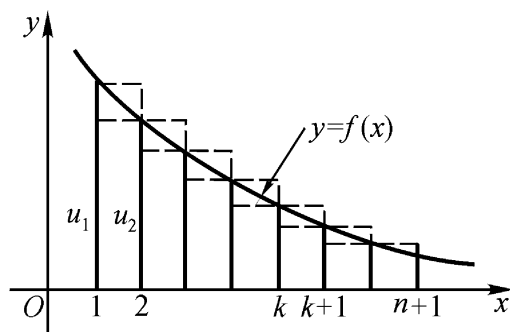


图 12.1

又 S_n 也是单增的, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛于 I , 则 $\int_1^{n+1} f(x) dx < I$, 于是

$S_{n+1} < I + u_{n+1}$, 即 $\{S_n\}$ 有界, 由定理 12.1 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = +\infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. \square

由定理 12.6 不难看出 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性相同.

例 12 试证级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, 当 $p > 1$ 时, 收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散.

证明 设

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}, \quad x \geq 2,$$

则函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上, 满足 $f(x) > 0$, 连续且单调下降, $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^p}$, 当 $p = 1$ 时,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty,$$

反常积分发散. 当 $p > 1$ 时,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^P} = \frac{1}{1-P} (\ln x)^{1-P} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{P-1} (\ln 2)^{1-P}, \quad \text{当 } P < 1 \text{ 时,}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^P} = \frac{1}{1-P} (\ln x)^{1-P} \Big|_2^{+\infty} = -\frac{1}{P-1} (\ln 2)^{1-P}, \quad \text{当 } P > 1 \text{ 时.}$$

故由积分判别法知: 当 $P > 1$ 时, 所论级数收敛; 当 $0 < P < 1$ 时, 所论级数发散.

12.3 任意项级数、绝对收敛

既有正项, 又有负项的级数, 叫做任意项级数. 如果在级数中出现的正项(或负项)的项数有限, 其余各项都取同一符号, 那么它的收敛性问题, 可以通过正项级数敛散性判别法来解决. 如果级数中正项和负项都有无穷多项, 它的收敛问题能否借助于正项级数敛散性判别法来解决呢? 设

$$u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

为任意项级数, 将其各项取绝对值, 得到一个正项级数

$$|u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

定义 12.3 如果级数(2)收敛, 则称级数(1)绝对收敛. 如果级数(2)发散, 而级数(1)收敛, 则称级数(1)条件收敛.

定理 12.7 级数(1)绝对收敛的充要条件是由(1)中正项构成的级数和负项构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2} \quad (3)$$

都收敛.

证明 注意这是两个正项级数, 且

$$0 \leq \frac{|u_n| + u_n}{2} \leq |u_n|, \quad 0 \leq \frac{|u_n| - u_n}{2} \leq |u_n|.$$

若级数(1)绝对收敛, 则由正项级数比较判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

均收敛.

反之, 若(3)中的两个级数均收敛, 则由级数的性质, 以及

$$|u_n| = \frac{|u_n| + u_n}{2} + \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

知级数(1)绝对收敛. \square

定理 12.8 若级数(1)绝对收敛, 则级数(1)必收敛.

证明 由于

$$u_n = \frac{|u_n| + u_n}{2} - \frac{|u_n| - u_n}{2},$$

利用定理 12.7 及级数的性质知, 级数(1)收敛. \square

注意, 级数绝对收敛是级数收敛的充分条件, 不是必要条件(图 12.2).

总之, 若(3)中的两个级数都收敛, 则级数(1)绝对收敛; 若(3)中的两个级数一个收敛, 一个发散, 则级数(1)必发散; 若(3)中两个级数都发散, 则级数(1)可能条件收敛, 也可能发散.

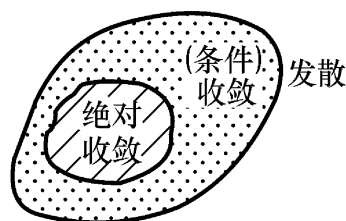


图 12.2

正项与负项相间的级数, 叫做交错级数. 设 $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 则交错级数形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (4)$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n + \dots \quad (5)$$

定理 12.9 (莱布尼茨判别法) 若交错级数(4)满足条件

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;
- (ii) $u_n > u_{n+1}, n = 1, 2, \dots$,

则级数(4)收敛, 且其和 $S = u_1$, 余项 $r_n = S - S_n$ 的绝对值 $|r_n| < u_{n+1}$.

证明 将级数(4)的前 $2m$ 项部分和 S_{2m} 写成以下两种形式

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m});$$

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

由条件(ii)知, $\{S_{2m}\}$ 单调上升, 且有界 $S_{2m} < u_1$, 故

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m} = S < u_1.$$

另一方面, 由条件(i), 有

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = S.$$

总之不论 n 为奇数还是偶数, 恒有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S,$$

故级数(4)收敛, 且 $S = u_1$.

其余项的绝对值

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \dots$$

也是一个交错级数. 由上面的证明知

$$|r_n| < u_{n+1}. \quad \square$$

例 1 判定下列级数的收敛性, 若收敛, 指明是条件收敛, 还是绝对收敛.

$$1^{\circ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n};$$

$$2^{\circ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2 + 1).$$

解 1° 因为调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散,所以级数 1° 不绝对收敛.因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots),$$

所以由莱布尼茨判别法知级数 1° 收敛.总之,级数 1° 是条件收敛的.

2° 因为

$$\begin{aligned} \sin(n^2 + 1) &= \sin[n + (n^2 + 1 - n)] \\ &= \sin n + \overline{\sin \frac{1}{n^2 + 1 + n}} = (-1)^n \sin \overline{\frac{1}{n^2 + 1 + n}}, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \overline{\frac{1}{n^2 + 1 + n}}$$

为交错级数.

由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \overline{\frac{1}{n^2 + 1 + n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\frac{1}{n^2 + 1 + n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

根据比较判别法的极限形式知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(n^2 + 1)|$$

发散,即原级数 2° 不是绝对收敛的.但由于 u_n 是无穷小,又

$$\begin{aligned} u_n = \sin \overline{\frac{1}{n^2 + 1 + n}} &> \sin \overline{\frac{1}{(n+1)^2 + 1 + (n+1)}} = u_{n+1} \\ &\quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以级数 2° 收敛.总之,级数 2° 条件收敛.

例 2 判定下列级数的敛散性,对收敛级数要指明是条件收敛还是绝对收敛.

$$1^{\circ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{2^n}; \quad 2^{\circ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n!}.$$

解 1° 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 所以级数 1 绝对收敛.

2° 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-n)^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = e > 1,$$

由正项级数的比值判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散, 从而级数 2° 不绝对收敛. 由于这里是用比值判别法来判定级数 2° 不绝对收敛, 因此级数 2° 是发散的.

例 3 设常数 $a > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{n^2 + 1}$ 的敛散性, 若收敛, 指明是条件收敛还是绝对收敛.

解 利用不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 得到

$$|a_n| \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{2} (|a_n|^2 + \frac{1}{n^2 + 1}).$$

由于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

都收敛, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (|a_n|^2 + \frac{1}{n^2 + 1})$$

收敛. 于是由正项级数的比较判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2 + 1}$$

收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{n^2 + 1}$ 是绝对收敛的.

讨论任意项级数的敛散性时, 通常先考查它是否绝对收敛 (用正项级数敛散性判别法), 如果不是绝对收敛的, 再看它是否条件收敛. 若使用比值法或根值法判定级数不绝对收敛 (这时级数的通项不趋于零), 便可断言级数发散. 对交错级数, 可以用莱布尼茨判别法. 还可利用无穷级数收敛的定义或性质 1、性质 2, 将级数拆开为两个级数, 然后讨论敛散性.

下面给出绝对收敛级数的两条性质, 不予证明.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 且其和为 S , 则任意交换其各项的次序后

所得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ (称为原级数的更序级数) 也绝对收敛, 其和亦为 S .

条件收敛的级数不具有这一性质. 对条件收敛的级数, 可以做适当的更序, 使更序级数收敛于任何预先指定的数 S , 也可以使它以任何方式发散.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 它们的和分别为 S 和 σ , 则它们的柯西乘积

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n &= (u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots \\ &+ (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots \end{aligned}$$

也是绝对收敛的, 且其和为 $S\sigma$.

* 12.4 反常积分敛散性判别法、函数

12.4.1 反常积分敛散性判别法

在第六章里, 介绍了反常积分, 它分为无穷区间上的反常积分和无界函数的反常积分. 那里, 用变限积分是否有极限定义了反常积分的收敛与发散概念. 12.2 节中的积分判别法, 把无穷级数与反常积分收敛性的判别法联系起来. 下面把判定级数敛散性的方法移植到反常积分上, 建立一套反常积分判别法. 这里仅叙述各种判别法, 不予证明.

首先讨论被积函数在积分区间上非负的情况.

比较原理 设函数 $f(x), g(x) \in C[a, +\infty)$, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则当 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛; 当 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 也发散.

因为反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散, 所以, 若以 $\frac{M}{x^p}$ ($M > 0$, 常数) 为比较函数, 就得到如下的比较判别法.

比较判别法 设 $f(x) \in C[a, +\infty)$ ($a > 0$), $f(x) \geq 0$,

(i) 若存在 $M > 0, p > 1$, 使 $f(x) \leq \frac{M}{x^p}, x \in [a, +\infty)$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收

敛;

(ii) 若存在 $M > 0, P > 1$, 使 $f(x) \leq \frac{M}{x^P}, x \in [a, +\infty)$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

例 1 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5 + 1} dx$ 的敛散性.

解 因

$$0 < \frac{1}{x^5 + 1} < \frac{1}{x^{5/3}}, \quad x \in [1, +\infty),$$

由比较判别法 知, 这个反常积分收敛.

无穷小比较法 设函数 $f(x) \in C[a, +\infty) (a > 0), f(x) \geq 0$. 如果存在常数 $P > 0$, 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^P f(x) = C$, 则

(i) 当 $P > 1$, 且 $0 < C < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(ii) 当 $P \leq 1$, 且 $0 < C < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 2 判定下列反常积分的敛散性:

1° $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} dx;$ 2° $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx.$

解 1° 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1,$$

$P = 2$, 故反常积分 1° 收敛.

2° 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$P = 1$, 故反常积分 2° 发散.

对无界函数的反常积分, 也有类似的判别法, 其比较原理不再叙述, 仅叙述比较判别法.

因为反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q} dx$, 当 $q < 1$ 时收敛, 当 $q \geq 1$ 时发散. 以此为标准比较, 有:

比较判别法 设函数 $f(x) \in C(a, b]$, 且 $f(x) \geq 0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$,

(i) 若存在常数 $M > 0$ 及 $q < 1$, 使 $f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} (a < x < b)$, 则反常积分

$\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(ii) 若存在常数 $M > 0$ 及 $q > 1$, 使 $f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q}$ ($a < x < b$), 则反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

无穷大比较法 设 $f(x) \in C(a, b]$, 且 $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$. 如果存在 $q > 0$, 使

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x) = l,$$

则

(i) 当 $0 < q < 1$, 且 $0 < l < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(ii) 当 $q \geq 1$, 且 $0 < l < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

例 3 判断下列瑕积分的敛散性:

$$1^\circ \int_1^3 \frac{dx}{\ln x}; \quad 2^\circ \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (k^2 < 1).$$

解 1° 由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 > 0,$$

$q=1$, 所以瑕积分 1° 发散.

2° 这里瑕点是 $x=1$, 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-k^2x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1+x)(1-k^2x^2)} \\ &= \frac{1}{2(1-k^2)}, \end{aligned}$$

$q = \frac{1}{2}$, 故瑕积分 2° 收敛 (此瑕积分叫做椭圆积分, 因在椭圆弧长的计算时遇到它. 它的特点是被积函数含有无重根的三次或四次多项式的平方根).

被积函数在积分区间上可以取到不同符号的情况时, 有:

绝对收敛定理 若 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^+ f(x) dx$ 也收敛. 这时称反常

积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 绝对收敛 (或绝对可积).

无界函数的反常积分也有类似的结论, 不再叙述.

例 4 判定反常积分 $\int_0^+ e^{-ax} \sin(bx) dx$ ($a, b > 0$ 常数) 的敛散性.

解 因为

$$|e^{-ax} \sin(bx)| \leq e^{-ax},$$

且 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛, 由比较原理知 $\int_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin(bx)| dx$ 收敛, 从而所论反常积分绝对收敛.

12.4.2 函数

本段研究反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, 因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

而积分 $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$, 当 $x \geq 1$ 时, 它是定积分; 当 $x < 1$ 时, $t=0$ 是瑕点, 它是反常积分, 由于

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-x} (e^{-t} t^{x-1}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = 1,$$

由无穷大比较法 知, 当 $0 < x < 1$ 时, 反常积分 $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ 收敛. 当 $x \leq 0$ 时, 由于

$$e^{-t} t^{x-1} \sim e^{-1} t^{x-1}, \quad t \in (0, 1],$$

而 $x \leq 0$ 时, 反常积分 $\int_0^1 e^{-1} t^{x-1} dt$ 发散, 所以反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, 在 $x \leq 0$ 时发散. 对于反常积分 $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, 由于 $x > 0$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{t} (e^{-t} t^{x-1}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{x+1} = 0,$$

所以反常积分 $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ 收敛. 总之, 当 $x > 0$ 时反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ 收敛, 其值与 x 有关, 称之为 Γ 函数, 记为 $\Gamma(x)$, 即

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0). \quad (1)$$

Γ 函数有如下重要性质:

性质 1 $\Gamma(1) = 1$.

由定义式(1)知, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

性质 2 $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (x > 0)$.

由分部积分法

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= -e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

$$= x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x) .$$

特别地,有

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n) \\ &= n(n-1) \Gamma(n-1) \\ &= \dots = n(n-1)\dots (1) = n! . \end{aligned}$$

根据性质 2,又可将 Γ 函数拓广到负半轴上去,当 $x<0$ 时,定义

$$\Gamma(x) = -\frac{\Gamma(x+1)}{x} .$$

这样, Γ 函数的定义应为

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ 当 } x > 0 \text{ 时;} \\ \Gamma(x) &= -\frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \text{当 } x < 0, x \neq -1, \\ &\quad \quad \quad -2, \dots \text{ 时,} \end{aligned}$$

其图形如图 12.3 所示 .

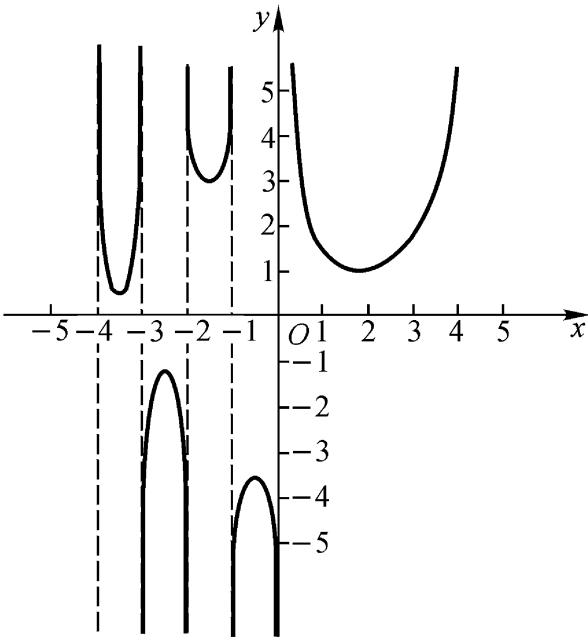


图 12.3

12.5 函数项级数、一致收敛

12.5.1 函数项级数

设函数 $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 都在集合 X 上有定义, 对函数项级数

$$u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

当点 $x_0 \in X$ 时, 若数项级数

$$u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

收敛, 则称 x_0 为函数项级数(1)的收敛点, 否则称为函数项级数(1)的发散点. 所有收敛点构成的集合, 称为函数项级数(1)的收敛域, 发散点集称为(1)的发散域.

设 J 是函数项级数(1)的收敛域, " $x \in J$, 级数(1)都有和. 显然, 这个和是 J 上的函数, 记为 $S(x)$, 称为函数项级数(1)的和函数.

例如, 等比级数

$$x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

它的收敛域为 $|x| < 1$, 发散域为 $|x| \geq 1$, 在收敛域内和函数是 $\frac{1}{1-x}$, 即有

$$x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

设 $S_n(x)$ 是函数项级数(1)的前 n 项和(部分和), 则当 $x \in J$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x). \quad (3)$$

称 $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 为函数项级数(1)的余项(余和), 显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0, \quad x \in J. \quad (4)$$

例 1 求函数项级数 $(-1)^{n-1} \frac{x^{3n}}{n}$ 的收敛域.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|x|^{3n+3}}{n+1}}{\frac{|x|^{3n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} |x|^3 = |x|^3,$$

根据正项级数的比值判别法知, 当 $|x| < 1$ 时, 所论级数绝对收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 该级数发散.

当 $x = 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 是条件收敛的; 当 $x = -1$ 时, 级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, 是发散的.

总之, 所讨论的级数的收敛域为区间 $(-1, 1]$.

把函数项级数中的变量 x 视为参数, 通过数项级数的敛散性判别法, 来判定函数项级数对哪些 x 值收敛, 哪些 x 值发散, 是确定函数项级数收敛域的基本方法.

12.5.2 一致收敛*

前面介绍的函数项级数(1)在收敛域 J 上, 收敛于和函数 $S(x)$, 是逐点收敛的. 用“ $\varepsilon - N$ ”语言精确定义如下:

$\varepsilon > 0$, $x \in J$, $\forall N = N(\varepsilon, x)$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|r_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

这个定义中, 对 J 中不同的 x , 可以有不同的 N , 对所有的 x 不一定有通用的正整数 N . 下面介绍一个较强的收敛, 它要求级数在某区间 I 内, 能有与 x 无关, 仅与 ε 有关的 N , 即对区间 I 内每个 x 都有通用的 N .

定义 12.4 如果 $\varepsilon > 0$, $\forall N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|r_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad x \in I,$$

则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛(或均匀收敛).

用几何的话说, 级数在区间 I 上一致收敛, 就是在区间 I 上部分和曲线整条向和函数曲线收敛.

例 2 考查级数

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \cdots - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} - \cdots$$

在 $0 < x < 1$ 上的一致收敛性.

解 由于

$$\frac{1}{(x+n-1)(x+n)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n},$$

所以, $S_n(x) = \frac{1}{x+n}$, 故

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+n} = 0,$$

即当 $x > 0$ 时, 级数收敛于和函数 0. 又因

$$|r_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}, \quad \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时,}$$

$\epsilon > 0$, 取 $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$, 则当 $n > N$ 时, 恒有

$$|r_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [0, TIF; E+ \infty),$$

所以在区间 $[0, TIF; E+ \infty)$ 上, 所论函数项级数是一致收敛的.

例 3 考查函数项级数

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) + \dots$$

在区间 $[0, 1]$ 上是否一致收敛.

解 由于

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{当 } x = 1, \end{cases}$$

所以, 当 $0 < x < 1$ 时,

$$|r_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| = x^n,$$

故 $\epsilon > 0$, 若要 $|r_n(x)| < \epsilon$, 必须 $n \ln x < \ln \epsilon$, 即

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln x} \quad (0 < x < 1).$$

当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 由于 $\frac{\ln \epsilon}{\ln x} \rightarrow +\infty$, 所以当 x 在区间 $(0, 1)$ 内时找不到通用的 N , 从

而, 所论级数在区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛, 在区间 $[0, 1]$ 上更不可能一致收敛 (图 12.4).

但是, 对于任何小于 1 的正数 r , 所论级数在区间 $[0, r]$ 上是一致收敛的, 因为这时可以取 $N = \frac{\ln \epsilon}{\ln r}$.

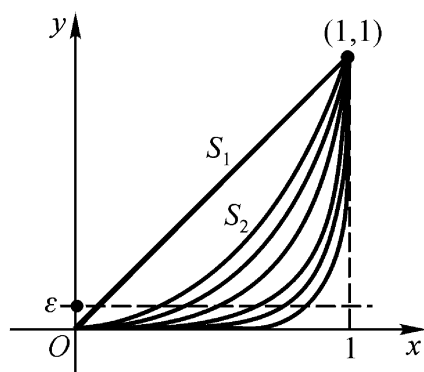


图 12.4

定理 12.10 (魏尔斯特拉斯 M - 检定法) 如果

有收敛的正项常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, 使得当 $x \in I$ 时,

$$|u_n(x)| \leq M_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

证明 根据定理的条件及正项级数的比较判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 对每个 $x \in I$ 都是绝对收敛的.

因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, $\epsilon > 0$, $\forall N = N(\epsilon)$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$r_N = M_{N+1} + M_{N+2} + \dots + M_{N+p} + \dots < \epsilon,$$

于是对任何 $x \in I$ 和任意正整数 P , 恒有

$$\begin{aligned} &|u_{N+1}(x) + u_{N+2}(x) + \dots + u_{N+P}(x)| \\ &= |u_{N+1}(x)| + |u_{N+2}(x)| + \dots + |u_{N+P}(x)| \\ &= M_{N+1} + M_{N+2} + \dots + M_{N+P} = r_N < \epsilon. \end{aligned}$$

令 $P \rightarrow +\infty$, 并注意到 $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上是绝对收敛的, 从而当 $n > N$ 时, 恒有

$$|u_{N+1}(x) + u_{N+2}(x) + \dots| = r_N < \epsilon, \quad \forall x \in I.$$

这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上是一致收敛的. \square

定理 12.10 中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 称为控制级数或优级数.

例 4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上的一致收敛性.

解 因为 $\frac{x}{1+n^4 x^2} \leq \frac{1}{2n^2}, x \in \mathbb{R}$, 所以

$$\frac{x}{1+n^4 x^2} \leq \frac{1}{2n^2},$$

而常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的 P -级数, 故所论函数项级数在区间 $[-\infty, +\infty)$ 上是一致收敛的.

一致收敛级数有许多重要的分析性质, 介绍如下:

性质 1 (函数项级数的和函数的连续性) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 且级数的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上连续, 则和函数 $S(x)$ 也在区间 $[a, b]$ 上连续.

证明 对任意的 $x, x_0 \in [a, b]$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 所以对任给的 $\epsilon > 0$, 可以找到一个仅与 ϵ 有关的 n_1 , 使得

$$|S(x) - S_{n_1}(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

$$|S_{n_1}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\epsilon}{3},$$

又因每一项 $u_n(x)$ 连续, 所以前 n_1 项的和 $S_{n_1}(x)$ 在 x_0 处连续, 从而存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|S_{n_1}(x) - S_{n_1}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

总之, 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|S(x) - S(x_0)| \\ |S(x) - S_{n_1}(x)| + |S_{n_1}(x) - S_{n_1}(x_0)| + |S_{n_1}(x_0) - S(x_0)|$$

$$\overline{3} + \overline{3} + \overline{3} = \quad .$$

这就证明了和函数 $S(x)$ 在点 x_0 处是连续的. 由 x_0 的任意性知, $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. \square

对于例 3 中的函数项级数

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) + \dots,$$

虽然每一项 $(x^n - x^{n-1})$ 都在区间 $[0, 1]$ 上连续, 但其和函数

$$S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

在点 $x = 1$ 处不连续, 所以该级数在区间 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

类似地不难得到: 对一致收敛的级数, 若每一项都有极限, 则和函数的极限等于每一项取极限后的级数和, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x),$$

也就是说, 在一致收敛的条件下, 极限号和级数的和号可以换序:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

性质 2 (函数项级数的逐项积分性) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 且级数的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上连续, 则和函数 $S(x)$ 可积, 且可逐项积分, 即

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \dots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx + \dots,$$

其中 x_0, x 是区间 $[a, b]$ 内任意两点. 逐项积分后的级数也在区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明 由性质 1 知, $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 故积分 $\int_{x_0}^x S(x) dx$ 存在.

因为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在只与 ϵ 有关的 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

于是, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \int_{x_0}^x S_n(x) dx - \int_{x_0}^x S(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^x [S_n(x) - S(x)] dx \right|$$

$$\left| \int_{x_0}^x |r_n(x)| dx \right| < |x - x_0| < (b - a), \quad x \in [a, b],$$

而且

$$\int_{x_0}^x S_n(x) dx = \int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \dots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx.$$

由函数项级数一致收敛概念知,级数

$$\int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \dots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx + \dots$$

在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $\int_{x_0}^x S(x) dx$, 故

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \dots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx + \dots \quad \square$$

性质 2 通常写成

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx, \quad x_0, x \in [a, b],$$

即一致收敛的函数项级数,和函数的积分等于各项积分之后的级数的和.也就是说,在一致收敛的条件下,积分号和级数的和号可以换序.

性质 3 (函数项级数的逐项微分性) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上收敛.如果它的各项 $u_n(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数,即 $u_n'(x) \in C[a, b] (n = 1, 2, \dots)$, 并且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots$$

在区间 $[a, b]$ 上一致收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在该区间上也是一致收敛的,和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数,并且可逐项求导,即

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots.$$

证明 设

$$S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a, b],$$

由性质 2,有

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x S^*(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x) - S(x_0). \end{aligned}$$

由性质 1 知, $S^*(x)$ 连续,故 $\int_{x_0}^x S^*(x) dx$ 可导.将上式两边求导,得

$$S^*(x) = S'(x), \quad x \in [a, b].$$

这说明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 在上面的证明中可以看出, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 是个收敛的数项级数 (常数), $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(t) dt$ 是由一致收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 逐项积分得到的 . 由性质 2 知, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(t) dt$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛 . 容易证明, 一致收敛的函数项级数与收敛的数项级数之和是一致收敛的, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛 . \square

性质 3 中, 逐项求导后的级数的一致收敛性, 是不能由原级数的一致收敛性代替的, 例如级数

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin(2^2 x)}{2^2} + \dots + \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} + \dots$$

因为 $\left| \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由魏尔斯特拉斯 M 判定法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ 在任何区间上都是一致收敛的, 但逐项微分后的级数

$$\cos x + \cos(2^2 x) + \dots + \cos(n^2 x) + \dots,$$

因其通项不趋于零, 所以级数的收敛域是空集, 所以原级数不可能逐项微分 .

性质 3 通常记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)',$$

即在 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛的条件下, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 可逐项微分 (求导), 也就是说, 导数符号和级数和号可以换序 .

下面几节, 将讨论两类重要的函数项级数: 幂级数和傅里叶级数 .

12.6 幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{1}$$

的函数项级数, 叫做 x 的幂级数, 其中常数 $a_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 叫做幂级数的系

数.更一般地,形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (2)$$

的函数项级数,叫做 $(x - x_0)$ 的幂级数,其中 x_0 为固定值.

显然,通过变换 $t = x - x_0$,就可把级数(2)化为级数(1)的形式,所以下面将着重讨论幂级数(1).幂级数(1)的每一项都是方幂为自然数的幂函数与常数之积,它的部分和为多项式.

12 6 1 幂级数的收敛半径和收敛域

阿贝尔 引理 如果幂级数(1)在点 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$)处收敛,则对开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内的任一点 x ,幂级数(1)都绝对收敛;如果幂级数(1)在点 $x = x_0$ 处发散,则当 $x > |x_0|$ 或 $x < -|x_0|$ 时,幂级数(1)均发散.

证明 (i) 设幂级数(1)在 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$)处收敛,即数项级数

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

收敛.由收敛的必要条件知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

从而数列 $\{a_n x_0^n\}$ 有界,即有常数 $M > 0$,使得

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

因此

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$,等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛.由比较判别法知,

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛,即幂级数(1)在开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内的任一点处都是绝对收敛的.

(ii) 设幂级数(1)在 $x = x_0$ 处发散,假设有点 x_1 ,满足 $|x_1| > |x_0|$,且使幂级数(1)在 x_1 处收敛.那么由(i)段的证明知,幂级数(1)必在 x_0 处收敛,这与前提条件矛盾. \square

因为幂级数的项都在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,所以对每个实数 x ,幂级数(1)或者收敛,或者发散.然而任何一个幂级数(1)在原点 $x = 0$ 处都收敛,所以由阿贝尔引理可直接得到如下推论:

阿贝尔 Abel N.H. (挪威) 1802—1829. 家境贫寒,但他追求真理,坚持研究,在数学史上写下了光辉的篇章,26岁时因贫病交加去世,死后三天收到柏林大学教授的聘书.

推论 幂级数(1)的收敛性有三种类型:

(i) 存在常数 $R > 0$, 当 $|x| < R$ 时, 幂级数(1)绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时, 幂级数(1)发散;

(ii) 除 $x = 0$ 外, 幂级数(1)处处发散, 此时记 $R = 0$;

(iii) 对任何 x , 幂级数(1)都绝对收敛, 此时记 $R = +\infty$.

称 R 为幂级数(1)的收敛半径. 称开区间 $(-R, R)$ 为幂级数(1)的收敛区间. 在收敛区间内幂级数(1)绝对收敛.

除 $R = 0$ 情况外, 幂级数(1)的收敛域一般是一个以原点为中心, R 为半径的区间. 对情况(i), 还要讨论 $x = \pm R$ 时的两个数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

是否收敛, 才能最后确定收敛域.

下面讨论收敛半径 R 的求法及收敛域的求法.

定理 12.11 对幂级数(1), 若

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b; \text{ 或 } (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b,$$

则幂级数(1)的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{b}, & \text{当 } 0 < b < +\infty \text{ 时,} \\ +\infty, & \text{当 } b = 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } b = +\infty \text{ 时,} \end{cases}$$

证明 只证(1), 因为正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (3)$$

的后项与前项比的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = b |x|,$$

依据比值判别法知,

(i) 当 $0 < b < +\infty$ 时, 如果 $|x| < \frac{1}{b}$, 即有 $b|x| < 1$, 则级数(3)收敛, 从而级数(1)绝对收敛; 如果 $|x| > \frac{1}{b}$, 即有 $b|x| > 1$, 则级数(3)发散, 从而可断言级数(1)发散(因为这里用的是比值判别法, 判定级数(1)不绝对收敛). 总之, 此时收敛半径 $R = \frac{1}{b}$.

(ii) 当 $b = 0$ 时, 恒有 $b|x| = 0$, 故级数(3)处处收敛, 即级数(1)处处绝对收敛, $R = +\infty$.

(iii) 当 $b = +\infty$ 时, 除 $x=0$ 外, $b|x| = +\infty$, 级数(3)除 $x=0$ 一点外处处发散, 所以级数(1)在 $x=0$ 时发散, $R=0$. \square

在定理 12.11 的条件下, 可按下式直接求幂级数的收敛半径:

$$R=\lim _n\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| ; \text { 或 } R=\lim _n \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} .$$

例 1 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n} ; \\ 2^{\circ} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n ; \\ 3^{\circ} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!!} ; \\ 4^{\circ} & \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n . \end{array}$$

解 1° 收敛半径

$$R=\lim _n\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim _n \frac{1}{2^n \cdot n} \bigg/ \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\lim _n \frac{2(n+1)}{n}=2 ,$$

所以收敛区间为 $(-2,2)$.

当 $x=-2$ 时, 级数 1° 为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, 是收敛的交错级数, 当 $x=2$ 时, 级

数 1° 为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 是调和级数, 发散 .

总之, 级数 1° 的收敛域为 $[-2,2)$.

2° 收敛半径

$$R=\lim _n\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim _n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \bigg/ \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}=\lim _n \frac{2(2n+1)}{(n+1)}=4 ,$$

所以收敛区间为 $(-4,4)$.

当 $x=4$ 时, 级数 2° 为正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n ,$$

因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2 n+2}{2 n+1}>1 ,$$

所以, $u_n \searrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$ 发散. 当 $x=-4$ 时, 级数 2° 对应的数项级数也发散. 因此, 幂级数 2° 的收敛域为 $(-4,4)$.

3° 因为收敛半径

$$R=\lim _n\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim _n \frac{1}{(2n)!!} \bigg/ \frac{1}{(2 n+2)!!}=\lim _n(2 n+2)=\infty ,$$

规定 $(2n)!!=2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 n, \quad 0!=1$.

所以,幂级数 3 的收敛域为 $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$.

4° 因为收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

所以,幂级数 4 仅在 $x=0$ 一点收敛 .

例 2 求 $(x-1)$ 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域 .

解 作变换,令 $t = x - 1$, 级数变为 t 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$, 因为

$$R_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \bigg/ \frac{1}{n+1} = 1,$$

当 $t = -1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, 发散; 当 $t = 1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 收敛, 所以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ 的收敛域为 $(-1, 1]$. 因此,原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域为 $(0, 2]$, 收敛半径 $R = 1$.

一般地说, $(x - x_0)$ 的幂级数的收敛区间是以点 x_0 为中心的, 所以也可以不作变换, 先求出收敛半径 R , 然后讨论在收敛区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 的两个端点处, 对应的数项级数的收敛性, 最后确定收敛域 .

例 3 讨论幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{3^n - 1}$ 的收敛域 .

解 这是缺项的幂级数, 不满足定理 12.11 的条件. 作变换, 令 $y = x^2$, 级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^n}{3^n - 1}$. 因为

$$R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n - 1} \bigg/ \frac{1}{3^{n+1} - 1} = 3,$$

当 $y = 3$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{3^n - 1}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n - 1} = 1 \neq 0$, 所以这个数项级数发散, 故 $y(=0)$ 的幂级数收敛域是 $0 \leq y < 3$. 因此, 原幂级数收敛域是 $0 \leq x^2 < 3$, 即 $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, 收敛半径 $R = \sqrt{3}$.

例 4 求函数项级数 $\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的收敛域 .

解 去掉第一项, 则原级数是缺偶次幂的幂级数. 直接用比值判别法也是求收敛域的方法, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

所以,去掉第一项,级数处处绝对收敛.由于第一项 $\ln x$ 的定义域为 $x > 0$,所以,整个级数的收敛域是 $(0, +\infty)$.

例 5 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-\sin x}{2}\right)^n$ 的收敛域.

解 作变换,令 $y = \frac{1-\sin x}{2}$, $0 \leq y < 1$,级数变为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2n+1}$, 因为

$$R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} (2n+3) = 1,$$

当 $y = 1$ 时,级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, 发散;又因 $0 \leq y < 1$,所以原函数项级数的收敛域为 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$.

12.6.2 幂级数的运算

设有两个幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \quad x \in (-A, A),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x), \quad x \in (-B, B).$$

记 $R = \min\{A, B\}$.显然,在区间 $(-R, R)$ 内两个幂级数都是绝对收敛的,由绝对收敛级数的性质有:

1. 加法与减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x), \quad x \in (-R, R),$$

且 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛.

2. 乘法

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n = f(x) g(x), \quad x \in (-R, R), \end{aligned}$$

且 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛.

3. 除法 因为除法是乘法的逆运算,当 $b_0 \neq 0$ 时,定义两个幂级数的商是个幂级数:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots} \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \end{aligned}$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

根据等式两边级数的对应项系数相等, 确定 $c_n (n=1, 2, \dots)$, 如

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 / b_0, \quad a_1 = (a_1 b_0 - a_0 b_1) / b_0^2, \\ a_2 &= (a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 - a_0 b_1 b_2 + a_0 b_1^2) / b_0^3, \dots, \end{aligned}$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{f(x)}{g(x)}$ 的收敛半径, 有时比上述的 R 小.

例如, 幂级数 1 和幂级数 $1-x$ 的收敛半径均为 $+$, 但它们的商的幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

的收敛半径 $R=1$.

对于加(减)法和乘法, 这里只肯定在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛. 当 $A \neq B$ 时, 可以肯定收敛半径就是这个 R ; 当 $A = B$ 时, 收敛半径不小于这个 R .

例 6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + n)(x+1)^n$ 的收敛域.

解 将原幂级数分为两个幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n.$$

前者的收敛半径

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

后者的收敛半径

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

于是, 所求幂级数的收敛半径 $R = \min \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} = \frac{1}{2}$, 即收敛区间为

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

当 $x = -\frac{3}{2}$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 对应的级数依次为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2^n + n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n}{2^n} = 1 \neq 0.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n}{2^n} = 1 \neq 0$, 所以这两个级数都发散, 从而原幂级数的收敛域为 $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.

下面讨论幂级数的分析运算性质, 先介绍幂级数一致收敛性的一个定理.

定理 12.12* 幂级数(1), 在它的收敛区间 $(-R, R)$ 内的任一闭子区间 $[-R_1, R_1]$ 上是一致收敛的(其中 $0 < R_1 < R$).

证明 因为 $R_1 \in (-R, R)$, 所以级数(1)在点 R_1 处绝对收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n R_1^n|$ 收敛. 对于区间 $[-R_1, R_1]$ 内任一点 x , 恒有

$$|a_n x^n| \leq |a_n R_1^n|, \quad n = 1, 2, \dots$$

因此, 由定理 12.10(魏尔斯特拉斯 M -判定法)知, 级数(1)在 $[-R_1, R_1]$ 上一致收敛. \square

幂级数有如下分析运算性质:

4. 在收敛域上, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $f(x)$ 是连续函数.

5. 在收敛域内, 幂级数可逐项积分, 且收敛半径不变, 即有

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

6. 在收敛域内, 幂级数可逐项微分, 且收敛半径不变, 即有

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

幂级数逐项积分或微分后, 虽然收敛半径不变, 收敛区间不变, 但收敛域有可能变, 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

的收敛域是 $(-1, 1)$, 但逐项积分后的幂级数

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

的收敛域是 $(-1, 1]$. 这是因为, 当 $x=1$ 时, 左边函数(和函数)有定义、连续, 右边级数收敛.

从运算性质 6 知, 幂级数表示的函数是无穷次连续可微的“好”函数. 幂级数的收敛区间有时与和函数的表达式的定义域不一致. 在收敛域内, 幂级数的运算类似于多项式的运算. 幂级数的和函数, 有时不是初等函数, 这使得幂级数在积

分运算和微分方程求解时起着一定的作用 .

12.7 函数的幂级数展开

将函数表为幂级数的形式,在理论上和应用中都是重要的.比如,对函数做数值分析时,总离不开用多项式逼近给定的函数,而幂级数的部分和恰是多项式.所以有了函数的幂级数展开,一些函数的多项式逼近,函数值的近似计算,以及一些积分、微分方程问题就迎刃而解了.哪些函数在怎样的区间上可以表为幂级数?这时幂级数的系数如何确定?这些就是本节讨论的主要问题.此外,本节还将介绍某些幂级数求和的方法.

12.7.1 直接展开法,泰勒级数

回顾第四章介绍过的泰勒公式:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数,则 $f(x)$ 可表为:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (1)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{介于 } x_0, x \text{ 之间}.$$

公式(1)就是函数 $f(x)$ 在 x_0 处展开的泰勒公式, $R_n(x)$ 是拉格朗日型余项.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内是无穷次连续可微的,记为 $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$,我们就自然会想到,函数 $f(x)$ 是否可展为如下的幂级数:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (2)$$

不管怎样,人们称幂级数(2)为函数 $f(x)$ 在 x_0 处(诱导出)的泰勒级数.特别地,当 $x_0 = 0$ 时,称幂级数

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (3)$$

为 $f(x)$ (诱导出)的麦克劳林级数.

显然,泰勒级数(2)在什么范围上收敛于函数 $f(x)$,取决于在什么范围上有 $R_n(x) \rightarrow 0$.

定理 12.13 设函数 $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$,则它的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

在 $U(x_0)$ 内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in U(x_0). \quad (4)$$

证明 用 $S_n(x)$ 表示泰勒级数(2)的前 $n+1$ 项和, 由泰勒公式(1)知

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x), \quad S_n(x) = f(x) - R_n(x).$$

(必要性) 设泰勒级数(2)在 $U(x_0)$ 上收敛于 $f(x)$, 则 $\forall x \in U(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$, 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0, \quad \forall x \in U(x_0).$$

(充分性) 设(4)式成立, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x), \quad \forall x \in U(x_0),$$

即在 $U(x_0)$ 上, 泰勒级数(2)收敛于 $f(x)$. \square

在条件(4)不成立的范围内, 函数 $f(x)$ 的泰勒级数(2)即使收敛, 也不收敛到 $f(x)$. 譬如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

见图 12.5. 由于

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0,$$

所以, 函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数各项系数均为零, 显然它在整个数轴上收敛到零. 除 $x=0$ 外, 在任何点 x 处都未收敛到原来的函数 $f(x)$ 上. 这就是因为除原点外, (4)式都不成立之故.

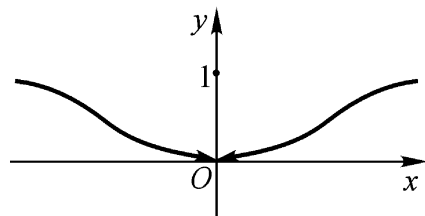


图 12.5

定理 12.14 (函数幂级数展开的惟一性) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (5)$$

则其系数

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

这里规定 $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

证明 由于幂级数在收敛区间内可逐项微分, 于是

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \\
 f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots, \\
 f''(x) &= 2!a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots, \\
 &\dots\dots\dots \\
 f^{(n)}(x) &= n!a_n + \dots, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

在上述各式中, 令 $x = x_0$, 得

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \dots \quad \square$$

这两个定理说明: 在 x_0 的某邻域内, 若函数 $f(x)$ 具有各阶导数, 且其泰勒公式的余项 $R_n(x)$ 趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 则 $f(x)$ 可展开为幂级数, 且其展开式是惟一的, 就是 $f(x)$ 的泰勒级数. 据此, 要将函数在 x_0 附近展开为幂级数, 有如下的直接展开法:

- 第一步, 求 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$;
- 第二步, 计算 $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots$;
- 第三步, 写出泰勒级数

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

并确定其收敛半径及收敛域;

第四步, 在收敛域内, 求使 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 的区间, 就是函数的幂级数展开区间.

例 1 将函数 $f(x) = e^x$ 展为 x 的幂级数.

解 由 $f^{(n)}(x) = e^x (n = 0, 1, 2, \dots)$, 有 $f^{(n)}(0) = 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$, 于是 e^x 的泰勒级数为

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

其收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

泰勒公式的余项

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{介于 } 0, x \text{ 之间}.$$

它满足不等式

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

对任一确定的 $x \in (-\infty, +\infty)$, $e^{|x|}$ 是确定的数, 而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是处处

收敛的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ 的一般项,所以在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

于是,有展开公式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (6)$$

例 2 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开为 x 的幂级数.

解 由 $\sin x$ 的泰勒公式知它的泰勒级数为

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

其收敛半径 $R = \infty$.

对收敛区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任一点 x , 有 $x \in (0, x)$, 使

$$\begin{aligned} |R_{n+2}(x)| &= \left| \frac{f^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \\ &= \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \left| \sin \xi + (2n+3) \frac{\xi}{2} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

从而得到展开公式

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \\ &\quad (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (7) \end{aligned}$$

例 3 将函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 展开为 x 的幂级数, 其中 α 为任意实常数.

解 由 $(1+x)^\alpha$ 的泰勒公式知它的泰勒级数为

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots,$$

其收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1,$$

所以 $(1+x)^\alpha$ 的泰勒级数的收敛区间是 $(-1, 1)$. 在 $x = \pm 1$ 处, 对不同的 α , 敛散性不同.

为了避免讨论余项的极限, 设在区间 $(-1, 1)$ 内 $(1+x)^\alpha$ 的泰勒级数的和函数为 $F(x)$, 即设

$$F(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

下面证明 $F(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, 1)$. 由逐项微分得

$$F(x) = 1 + \frac{-1}{1!}x + \dots + \frac{(-1)\dots(-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots,$$

两边同乘以 $(1+x)$ 后,注意右边方括号内 x^n 的系数为

$$\frac{(-1)\dots(-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(-1)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)\dots(-n+1)}{n!},$$

于是,有微分方程

$$\begin{aligned}(1+x)F(x) &= 1 + x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{(-1)\dots(-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ &= F(x), \quad x \in (-1, 1),\end{aligned}$$

满足条件 $F(0) = 1$.由分离变量法解得

$$F(x) = (1+x)^{-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

故有展开公式

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \dots + \frac{(-1)\dots(-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1), \quad (8)$$

称之为牛顿二项式展开式.当 n 为正整数时,(8)式就是代数中的二项公式.

当 $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ 时,依次有展开式

$$\begin{aligned}1+x &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots + \\ &\quad (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}x^n + \dots, \quad x \in [-1, 1]. \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots + \\ &\quad (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1]. \quad (10)\end{aligned}$$

12.7.2 间接展开法

将函数用直接法展开为幂级数,一般计算量大,而且对许多函数来说,求各阶导数与讨论拉格朗日型余项 $R_n(x)$ 趋于零的范围都是困难的.下面介绍间接展开法,它是利用已知的幂级数展开式(如公式(6),(7),(8)及等比级数的和等),通过变量代换,幂级数的运算等,得到函数的幂级数展开式的方法.根据展开的惟一性,它与直接展开法得到的结果是一致的.

例4 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开为 x 的幂级数.

解 将 $\sin x$ 的展开式(7)两边逐项微分,得到 $\cos x$ 的展开公式:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$x \in (-1, 1). \quad TIF; E+ \quad (11)$$

例 5 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展为麦克劳林级数 .

解 因为 $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$, 而

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1), \quad (12)$$

从 0 到 x 逐项积分, 得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1]. \quad (13)$$

展开式(13)对 $x=1$ 也成立, 这是因为在 $x=1$ 时, 右边级数收敛, 左边函数在 $x=1$ 处连续的缘故, 所以有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots .$$

例 6 对展开式(13)做变量替换, 以 $-x$ 替换 x , 得到展开式:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad x \in [-1, 1). \quad (14)$$

(13) 式减去(14) 式, 再除以 2, 可得

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1). \quad (15)$$

例 7 将展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

从 0 到 x 逐项积分, 得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1, 1]. \quad (16)$$

展开式(16)对 $x = \pm 1$ 也成立, 从而有

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

利用间接展开法时, 要注意区间端点的收敛性 .

例 8 将 $\sin x$ 展为 $(x - \frac{\pi}{4})$ 的幂级数 .

解 作变换, 令 $t = x - \frac{\pi}{4}$, 则 $x = t + \frac{\pi}{4}$, 故

$$\sin x = \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \cos t + \cos \frac{\pi}{4} \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t + \sin t)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{2}{2} \left(1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{5!} - \dots \right), \\
 &\quad x \in (-\infty, +\infty). \text{ TIF; } E+
 \end{aligned}$$

例 9 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ 在 $x_0 = -2$ 处展开的泰勒级数.

解 作变换, 令 $t = x + 2$, 则 $x = t - 2$,

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{t}{2}}.$$

由于

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-t} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1, 1), \\
 \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{t}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2}\right)^n, \quad t \in (-2, 2),
 \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{1-t} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} t^n, \quad t \in (-1, 1),$$

故

$$\frac{1}{x^2 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} (x+2)^n, \quad x \in (-3, -1).$$

例 10 将 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数, 并求 $f(0)$.

解 由

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1, \\
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad |x| < +\infty
 \end{aligned}$$

相乘得

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x}{1-x} &= 1 + \left(1 + \frac{1}{1!}\right)x + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \dots + \\
 &\quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots, \quad |x| < 1.
 \end{aligned}$$

因为 $f^{(n)}(0) = n!a_n$, 所以

$$f(0) = 3! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) = 16.$$

例 11 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 试将函数 $\ln f(x)$ 的麦克劳林展开式写到

x^4 项.

解 因为

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots, \quad t \in (-1, 1],$$

故

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)^2 + \dots \\ &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^4}{2(3!)^2} + \dots \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \dots, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

无穷级数有时也用来推广新概念, 比如, 由 e^x 的展开式定义指数矩阵: 设 \mathbf{A} 是 $n \times n$ 方阵, 定义

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots, \tag{17}$$

其中 \mathbf{E} 为 n 阶单位矩阵.

又如, 以 ix (其中 $i = \sqrt{-1}$) 替换 x , 定义

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots, \tag{18}$$

容易推出

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned} \tag{19}$$

以 $-x$ 替换 (19) 式中的 x , 得

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{20}$$

(19), (20) 两式相加除以 2, 相减除以 $2i$, 得

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{21}$$

(19) ~ (21) 各式称为欧拉公式, 它表明了三角函数与指数函数的关系.

12.7.3 幂级数求和

本段讨论与上段相反的问题——求幂级数的和函数. 因为幂级数的和函数不一定是初等函数, 所以不能任意指一个幂级数就来求和. 但是, 现在可以利用等比级数求和公式, 以及 e^x , $\sin x$ 等函数的展开式, 通过变量变换, 幂级数的运算等, 求某些幂级数的和函数.

例 12 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

解 将级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{4n+1} \quad (t = x^4, 0),$$

则

$$R_t = \lim_n \frac{1}{4n+1} \bigg/ \frac{1}{4n+5} = 1,$$

又当 $t=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$, 发散, 所以, t 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{4n+1}$ 的收敛域是 $[0, 1)$, 因此所论级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 设和函数为 $S(x)$, 即设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \quad x \in (-1, 1),$$

则 $S(0) = 0$. 通过逐项求导, 并利用等比级数求和公式, 得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4}.$$

从 0 到 x 积分, 得所求的和函数

$$\begin{aligned} S(x) &= S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{t^4}{1-t^4} dt = \int_0^x \frac{1/2}{1-t^2} + \frac{1/2}{1+t^2} - 1 dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x - x, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

例 13 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ 的和函数, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解 收敛半径

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

又当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n-1)$ 都发散. 总之, 所论幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

设其和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1},$$

则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

据此,不难求所给数项级数的和.令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} S\left(\frac{1}{2}\right) = 8. \end{aligned}$$

例 14 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的和函数.

解 收敛半径

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} \right| = 2.$$

当 $x = 2$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, 发散, 当 $x = -2$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}$, 收敛, 故原级数的收敛域为 $[-2, 2)$.

设所求的和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}, \quad x \in [-2, 2),$$

那么有

$$\begin{aligned} x S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \\ [x S(x)]' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2-x}. \end{aligned}$$

上式两边从 0 到 x 积分, 得

$$\begin{aligned} x S(x) &= \int_0^x \frac{dx}{2-x} = -\ln(2-x) \Big|_0^x = -\ln(2-x) + \ln 2 \\ &= -\ln \left(1 - \frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

因此

$$S(x) = -\frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right), \quad x \in [-2, 0) \cup (0, 2).$$

当 $x = 0$ 时, 显然有

$$S(0) = \frac{1}{2}.$$

总之, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln 1 - \frac{x}{2}, & \text{当 } x \in (-2, 0) \cup (0, 2), \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

例 15 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ 的和.

解 这个数项级数是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$ 在 $x = 1$ 时对应的级数. 显然这个幂级数收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 先来求此幂级数的和函数, 因为

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1) + 3n + 1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = (x^2 + 3x + 1)e^x, \end{aligned}$$

这里用到 e^x 的泰勒级数, 从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = S(1) = 5e.$$

12.8 幂级数的应用举例

有了函数的幂级数展开式, 便可方便地解决一些函数的多项式逼近和函数值的近似计算问题. 同时, 因幂级数的和函数中有一些不是初等函数, 因此利用幂级数可以使一些积分和微分方程问题得到完满的解决.

12.8.1 函数值的近似计算

例 1 计算 e 的值, 精确到小数点后第四位 (即误差 $r_n < 0.0001$).

解 因为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

所以, 当 $x = 1$ 时, 有

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

若取前 $n+1$ 项近似计算 e , 其截断误差

$$\begin{aligned} |r_n| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \right| \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

要使 $\frac{1}{n!n} < 0.0001$, 只需取 $n=7$, 于是

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{7!} = \frac{1370}{504} \approx 2.7183.$$

例 2 计算 $\ln 2$ 的近似值, 精确到小数点后第四位.

解 由 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数知,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots.$$

这是个交错级数, 其截断误差

$$|r_n| < \frac{1}{n+1}.$$

要使 $|r_n| < 0.0001$, 至少取 $n=9999$. 看来这个级数收敛得太慢, 计算量太大. 我们再找一个收敛快的幂级数来计算 $\ln 2$.

由 12.7 节例 6 中公式(15)知

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \dots \right), \quad x \in (-1, 1).$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$, 解得 $x = \frac{1}{3}$, 代入上式得

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} + \dots \right).$$

若取前 n 项作 $\ln 2$ 的近似值, 则截断误差

$$\begin{aligned} |r_n| &= 2 \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{3^{2n+5}} + \dots \right) \\ &< \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots \right) \\ &= \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}. \end{aligned}$$

要使 $|r_n| < 0.0001$, 只需取 $n=4$, 故

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \right).$$

考虑到舍入误差,每项计算到小数点后五位,

$$\frac{1}{3} = 0.333\,33, \quad \frac{1}{3 \cdot 3^3} = 0.012\,35, \\ \frac{1}{5 \cdot 3^5} = 0.000\,82, \quad \frac{1}{7 \cdot 3^7} = 0.000\,07,$$

于是,有

$$\ln 2 = 0.693\,1.$$

通过这两个例子可以看出,用泰勒级数的部分和作近似计算时,其截断误差通常有如下两种估计法:

1. 如果展开式是收敛的交错级数,取前 n 项作近似计算时,其截断误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值,即 $|r_n| < |u_{n+1}|$.

2. 对一般的收敛级数,取前 n 项作近似计算时,其截断误差是个无穷级数. 把它的每一项适当放大,成为一个收敛的等比级数. 由等比级数求和公式,便可得到截断误差的估计.

12.8.2 在积分计算中的应用

一些初等函数,如 e^{x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x^2$, $1+x^3$ 等,它们的原函数不是初等函数,但在它们的连续区间内原函数是存在的,而且变上限定积分就是它的一个原函数,如 $\int_0^x e^{t^2} dt$ 是 e^{x^2} 的一个原函数. 因此,将这样的被积函数展为幂级数,然后在收敛区间内,逐项积分,所得到的幂级数就是被积函数的原函数的另一种表示方式,如

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{x^2} dx &= \int_0^x \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} + \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

这个幂级数就是函数 e^{x^2} 的一个原函数的级数形式.

例 3 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值,精确到 10^{-4} .

解 因为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

所以

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty), x \neq 0.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ 是通常的定积分 (不是反常积分) .

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \right) dx \\ &= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots + \\ &\quad (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! (2n+1)} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

令上限 $x=1$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} - \frac{1}{7! \cdot 7} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! (2n+1)} + \dots. \end{aligned}$$

这是个交错级数, 若取前三项作为近似值, 其截断误差

$$|r_3| < \frac{1}{7! \cdot 7} = \frac{1}{35280} < 10^{-4},$$

故

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} = 1 - \frac{97}{1800} \approx 0.94611 \approx 0.9461.$$

12.8.3 方程的幂级数解法

例 4 方程

$$xy - e^x + e^y = 0 \tag{1}$$

确定 y 是 x 的函数, 试将 y 表为 x 的幂级数 (只要求写出前几项) .

解 设

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

由方程(1)知, 当 $x=0$ 时, $y=0$. 从而 $a_0=0$. 于是

$$xy = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots, \tag{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) + \frac{1}{2!} (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^3 + \frac{1}{4!} (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^4 + \dots \\ &= 1 + a_1 x + \frac{a_1^2}{2} x^2 + a_2 x^2 + \frac{a_1^3}{6} x^3 + a_1 a_2 x^3 + a_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{a_1^4}{24} + \frac{1}{2} a_1^2 a_2 + \frac{1}{2} a_2^2 + a_1 a_3 + a_4 x^4 + \dots \tag{4}$$

将(2),(3),(4)式代入(1)式,由 x 的各次幂的系数皆应为零,得到

$$\begin{aligned} -1+a&=0, \\ a_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2+a&=0, \\ a_2-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}a^3+a\,a_2+a_3&=0, \\ a_3-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}a_1^4+\frac{1}{2}a_1^2a_2+\frac{1}{2}a_2^2+a_1a_3+a_4&=0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

解此方程组,得

$$a_1=1,\,a_2=-1,\,a_3=2,\,a_4=-4,\,\dots,$$

于是由方程(1)确定的隐函数 y 的幂级数展开式为:

$$y=x-x^2+2x^3-4x^4+\dots.$$

例 5 求解零阶贝塞尔 方程:

$$xy'+y+xy=0.$$

解 这是一个变系数的线性方程,设方程有幂级数形解

$$y=\sum_{n=0}a_nx^n.$$

由于

$$y'=\sum_{n=1}na_nx^{n-1},\,y''=\sum_{n=2}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

代入方程,合并 x 的同次幂项, x^n 的系数为:

$$a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}+(n+1)na_{n+1}=a_{n-1}+(n+1)^2a_{n+1},\quad n=1,2,\dots,$$

常数项为 a_0 .比较等式两边 x 同次幂的系数得

$$a_1=0,\,a_{n+1}=-\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2},\quad n=1,2,\dots,$$

于是

$$\begin{aligned} a_1&=0,\,a_3=a_5=a_7=\dots=a_{2k+1}=\dots=0; \\ a_2&=-\frac{a_0}{2^2},\,a_4=-\frac{a_2}{4^2}=\frac{(-1)^2a_0}{2^4(2!)^2},\,\dots,\,a_{2k}=\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}(k!)^2},\quad \dots, \end{aligned}$$

贝塞尔 Bessel F.W(德)1784—1846.一般贝塞尔方程为

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{2}{x^2}\right)y=0,$$

其中 α 是常数,称为贝塞尔方程的阶或其解的阶,贝塞尔方程在解偏微分方程时常见到.

所以零阶贝塞尔方程的幂级数解为：

$$y = a \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} + \dots \right].$$

若取 $a = 1$ ，得到方程一个特解，称之为零阶贝塞尔函数，记为 $J_0(x)$ ，即

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{x^{2k}}{2^{2k}}.$$

12.9 傅里叶级数

在自然界和人类的生产实践中，周而复始的现象、周期运动是司空见惯的。譬如行星的运转，飞轮的旋转，蒸汽机活塞的往复运动，物体的振动，声、热、光、电的波动等。数学上，用周期函数来描述它们。最简单最基本的周期函数是正弦函数

$$A \sin(x + \varphi),$$

也叫做谐函数。它的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，最大值 A ，叫做振幅， ω 称为(角)频率， φ 称为初相位。这三个量一经确定，谐函数就完全确定了。除了正弦函数外，经常遇到的是非正弦周期函数，它们反映较复杂的周期现象。如电子技术中遇到的矩形波(如图 12.6 所示)。

对复杂的周期运动如何进行定量分析呢？大家知道，光的传播是波动，通过三棱镜的色散可以看到白光是由七种不同频率的单色光组成。反之，几种单色光叠加又可构成复光。同样，复杂的声波、电磁波也是由不同频率的谐波叠加而成。不同频率的谐振动可以组成复杂的周期运动。这促使人们考虑，复杂的周期运动是由哪些不同频率的谐振动合成的，它们各占的分量如何？这在理论上和应用中都是非常重要的，是许多学科的重要课题。从数学角度上看，无非是把一个周期函数分解为不同频率的正弦函数和的形式，即将周期为 T 的函数 $f(x)$ 表为

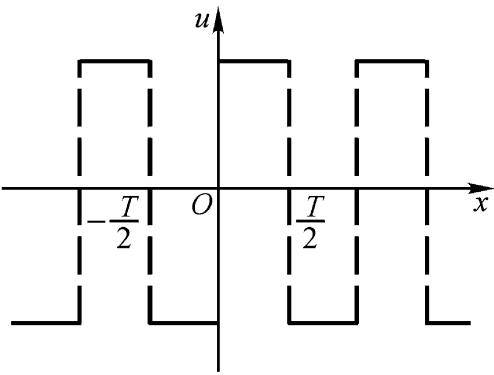


图 12.6

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

的形式，其中 $A_0, A_n, \varphi_n (n = 1, 2, \dots)$ 都是常数。利用三角公式

$$\sin(n\omega x + \varphi_n) = \sin \varphi_n \cos n\omega x + \cos \varphi_n \sin n\omega x,$$

并令 $a = 2A_0, a_n = A_n \sin \varphi_n, b_n = A_n \cos \varphi_n (n = 1, 2, \dots)$ ，则(1)式变为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2)$$

(2) 式表示的函数项级数, 叫做三角级数.

自然要问: 函数 $f(x)$ 满足什么条件, 才能展为三角级数 (2)? 系数 a_0, a_n, b_n 如何确定? 为简便计, 先来讨论以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 此时, $\pi = 1$. 解决上述问题起着关键作用的是下面介绍的三角函数系的正交性.

12.9.1 三角函数系的正交性

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

具有如下两条性质:

1. (正交性) 任何两个不同的函数的乘积在一个周期长的区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于零.

2. 任何一个函数自乘(平方)在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于零.

即有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n \text{ 时,} \\ \pi, & \text{当 } m = n \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n \text{ 时,} \\ \pi, & \text{当 } m = n \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0,$$

其中 $m, n = 1, 2, \dots$. 利用三角函数的积化和差公式, 不难验证上述各式. 如当 $m \neq n$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

当 $m = n$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

12.9.2 傅里叶级数

定理 12.15 如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 能够展开为

可逐项积分的三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx], \tag{3}$$

则其系数公式为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{4}$$

证明 将(3)式两边在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分, 利用三角函数系的正交性, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] dx = \pi a_0,$$

故

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

将(3)式两边同乘 $\cos kx$, 再从 $-\pi$ 到 π 积分, 得

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx] dx \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi a_k, \end{aligned}$$

故

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

类似地, 用 $\sin kx$ 乘(3)式两边, 然后在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分, 利用三角函数系的正交性可推出

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \square$$

从系数公式(4)知, 只要函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 无论 $f(x)$ 是否可以展为可逐项积分的三角级数(3), 都可以算出公式(4)中各数 $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$, 称之为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数. 由这些系数作成的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

傅里叶 Fourier J.B.J. (法)1768—1830. 8岁失去双亲, 曾随拿破仑远征埃及, 任总督, 他兴趣广泛, 想像力丰富, 勤奋好学, 忠诚老实, 又能挺身保护受迫害的科学家. 他的名言:“对自然界的深入研究是数学发现的最丰富的源泉.”

称为函数 $f(x)$ (诱导出) 的傅里叶级数, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

注意, $f(x)$ 的傅里叶级数不见得处处收敛, 即使收敛也未必收敛到 $f(x)$ 上. 所以, 不能无条件的把符号“ \sim ”换为“ $=$ ”. 哪些函数的傅里叶级数收敛到它自己呢? 也就是说, 满足什么条件的函数可以展开为傅里叶级数呢? 下面仅叙述一个收敛定理, 希望能正确理解它的全部含义, 由于它的证明还需要较多的知识, 这里不予证明.

定理 12.16 (收敛的充分条件) 如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄利克雷条件:

- (i) 除有限个第一类间断点外, 处处连续;
- (ii) 分段单调, 单调区间个数有限,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上处处收敛, 且

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ & \quad f(x), \quad \text{当 } x \text{ 是 } f(x) \text{ 的连续点时,} \\ & = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)], \quad \text{当 } x \text{ 是 } f(x) \text{ 的第一类间断点时,} \\ & \quad \frac{1}{2} [f(-\pi^+) + f(\pi^-)], \quad \text{当 } x = \pm \pi \text{ 时.} \end{aligned}$$

这个定理说明满足狄利克雷条件的函数的傅里叶级数, 在 $f(x)$ 的连续点处, 都收敛到 $f(x)$; 在间断点处, 收敛到左右极限的算术平均值; 在端点 $x = \pm \pi$ 处, 收敛到左端点的右极限和右端点的左极限的算术平均值. 把函数展开为傅里叶级数的条件远比展开为幂级数的条件低.

顺便指出, 周期函数的三角级数展开是惟一的, 就是其傅里叶级数. 它的常数项 $\frac{a_0}{2}$, 就是函数在一个周期内的平均值.

例 1 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\pi < x < 0 \text{ 时,} \\ x^2, & \text{当 } 0 < x < \pi \text{ 时,} \end{cases}$$

其傅里叶级数的和函数记为 $S(x)$, 求 $S(0)$, $S(1)$, $S(\pi)$, $S(2\pi)$.

解 由于 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄利克雷条件, 可以将 $f(x)$ 展为傅里叶级数. 且

$$\begin{aligned} S(0) &= -\frac{1}{2}, \quad S(1) = 1, \\ S(\pi) &= \frac{\pi^2 - 1}{2}, \quad S(2\pi) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\pi \leq x < 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 0 \leq x < \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

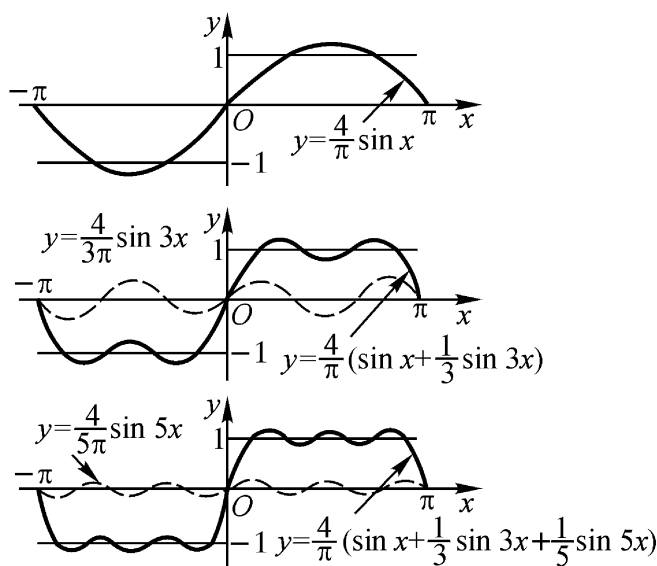


图 12.7

解 首先计算傅里叶系数, 注意到 $f(x)$ 是奇函数,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= -\frac{2 \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n} [1 - \cos n\pi]$$

$$= \frac{2}{n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{4}{n}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

故 $f(x)$ 的傅里叶级数为:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

由于 $f(x)$ 满足狄利克雷条件, 所以由定理 12.16 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0, \pm\pi \text{ 时.} \end{cases}$$

图 12.7 中的一组图形,说明这个级数是如何向 $f(x)$ 收敛的.

例 3 函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,且

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数(图 12.8).

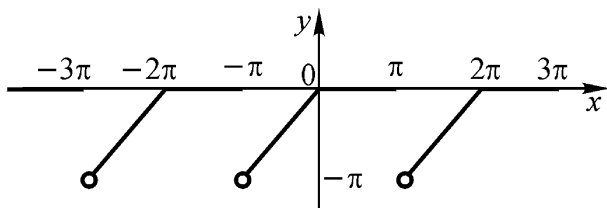


图 12.8

解 首先计算傅里叶系数,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = -\frac{\pi}{2}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] \\ &= \frac{2}{n^2}, n = 1, 3, 5, \dots, \\ &= 0, n = 2, 4, 6, \dots. \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 = -\frac{\cos n\pi}{n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$\begin{aligned} f(x) &\sim -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2} [1 - (-1)^n] \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right] \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{1^2} \cos x + \frac{2}{3^2} \cos 3x + \frac{2}{5^2} \cos 5x + \dots + \\ &\quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 满足狄利克雷条件,由定理 12.16 得

$$-\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$f(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$= -\frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

12.9.3 正弦级数和余弦级数

由奇函数与偶函数的积分性质,容易得到下面的结论.

1. 当 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数时,它的傅里叶系数

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

此时, $f(x)$ 的傅里叶级数中只含有正弦项,即

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (6)$$

称之为正弦级数.

2. 当 $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数时,它的傅里叶系数

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

此时, $f(x)$ 的傅里叶级数中仅含余弦项和常数项,即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (8)$$

称之为余弦级数.

将函数展开为傅里叶级数时,先考查函数是否有奇偶性是有益的.

例 4 试将周期为 2π 的函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

展开为傅里叶级数.

解 函数的图形如图 12.9 所示(电学上称为锯齿波),这是个偶函数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2} [(-1)^n - 1]$$

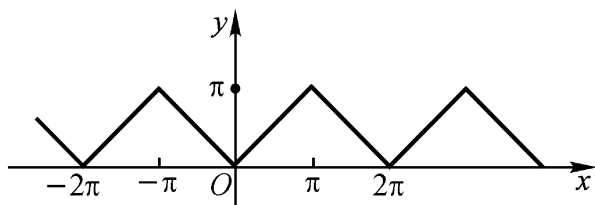


图 12.9

$$= -\frac{4}{n^2}, \quad n=1, 3, 5, \dots,$$

$$0, \quad n=2, 4, 6, \dots$$

由于 $f(x)$ 处处连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

+

利用这个展开式, 容易得到几个数项级数的有趣的结果, 令 $x=0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

设

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$S_3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

因为 $S_2 = \frac{\pi^2}{8} = \frac{1 + S_3}{4}$, 所以,

$$S_3 = \frac{1}{3} = \frac{\pi^2}{24}, \quad S_4 = S_1 + S_3 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_5 = S_1 - S_3 = \frac{\pi^2}{12}.$$

12.9.4 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

前面讨论以 2 为周期的函数的傅里叶级数, 现在讨论一般的周期函数的傅里叶级数. 设 $f(x)$ 是以 $2l (l>0)$ 为周期的周期函数. 作变换, 令

$$t = \frac{x}{l},$$

则当 x 在区间 $[-l, l]$ 上变化时, t 就在区间 $[-\pi, \pi]$ 上变化, 函数 $f(x)$ 变为以 2π 为周期的 t 的函数, 记

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t).$$

只要 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上可积, $g(t)$ 就在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 于是, $g(t)$ 有傅里叶级数

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

其傅里叶系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ntdt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

将 $t = \frac{\pi}{l}x$ 代入, 就得到以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{9}$$

和傅里叶系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{10}$$

当 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上满足狄利克雷条件时, $f(x)$ 的傅里叶级数 (9), 在 $f(x)$ 的连续点处收敛于 $f(x)$, 间断点 x_0 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$; 在 $\pm l$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(-l^+) + f(l^-)]$.

如果 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数, 其傅里叶级数是正弦级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{11}$$

系数

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

如果 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的偶函数, 其傅里叶级数是余弦级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (13)$$

系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

例 5 计算周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq x < 0, \\ E \sin \omega x, & 0 \leq x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

的傅里叶系数 b_n .

解 参看图 12.10 (电学上叫做半波整流波

形). $l = \frac{T}{2}$, $\frac{n\pi x}{l} = n\omega x$ 故

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \omega x \sin n\omega x dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \omega x \sin n\omega x dx$$

$$= \frac{E}{2l} \int_0^{\frac{T}{2}} [\cos(n-1)\omega x - \cos(n+1)\omega x] dx$$

$$= \frac{E}{2} \left[\frac{\sin(n-1)\omega x}{(n-1)} - \frac{\sin(n+1)\omega x}{(n+1)} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} = 0, \quad n=2, 3, \dots$$

上面计算中, 要求 $n \neq 1$, 所以 b_1 需单独计算,

$$b_1 = \frac{E}{2l} \int_0^{\frac{T}{2}} (1 - \cos 2\omega x) dx = \frac{E}{2} \left[x - \frac{\sin 2\omega x}{2\omega} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{E}{2}.$$

例 6 函数 $f(x)$ 的周期为 6, 且当 $-3 \leq x < 3$ 时, $f(x) = x$, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.

解 这里 $l=3$, $f(x)$ 是奇函数, 所以 $a_n = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$. 由公式(12)得

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x \sin \frac{n\pi x}{3} dx \\ &= -\frac{2}{n} \left[x \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{3}{n} \sin \frac{n\pi x}{3} \right] \Big|_0^3 = (-1)^{n+1} \frac{6}{n}, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

又 $f(x)$ 满足狄利克雷条件, 故有

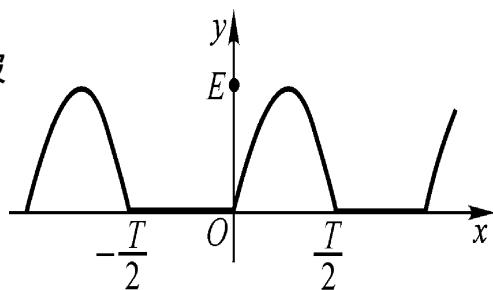


图 12.10

$$\frac{6}{3} \sin \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{3} - \dots = \begin{cases} x, & -3 < x < 3, \\ 0, & x = \pm 3. \end{cases}$$

例 7 将周期为 1 的函数

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x, \quad 0 \leq x < 1$$

展开为傅里叶级数.

解 这里 $2l = 1$, 由周期函数积分的性质, 傅里叶系数公式(10)中的积分区间, 只要保持一个周期长的区间即可. 本题函数图形如图 12.11 所示. 故系数

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx = e - 1,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} e^x \cos 2n\pi x dx = \frac{e - 1}{1 + (2n\pi)^2},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} e^x \sin 2n\pi x dx = \frac{-2n\pi(e - 1)}{1 + (2n\pi)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

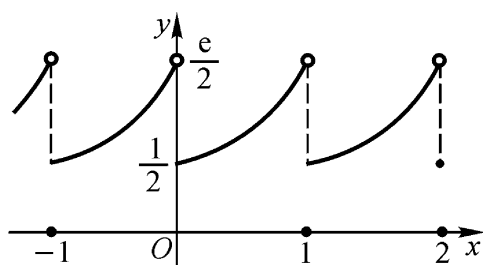


图 12.11

$f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足狄利克雷条件, 故有

$$\begin{aligned} & \frac{e - 1}{2} + (e - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (2n\pi)^2} (\cos 2n\pi x - 2n\pi \sin 2n\pi x) \\ &= \frac{1}{2} e^x, \quad 0 < x < 1, \\ &= \frac{e + 1}{4}, \quad x = 0, 1. \end{aligned}$$

12.9.5 有限区间上的函数的傅里叶展开

对于在有限区间 $[a, b]$ 上定义的函数 $f(x)$, 只要在区间 $[a, b]$ 之外适当的补充函数的定义, 把它延拓为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 的傅里叶级数限定 $x \in [a, b]$ 时, 就是 $f(x)$ 的傅里叶级数. 比如, 要将区间 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ 展开为傅里叶级数, 展开过程同例 7 一样, 只不过是展开式成立的区间应为 $(0, 1)$.

但是, 有限区间上定义的函数 (非周期的) 与周期函数的傅里叶展开也有不同之处, 就是怎样向区间外延拓函数, 确定周期都有很大的灵活性, 所以展开的傅里叶级数不惟一. 这使得有选择的余地, 一般视其方便和要求来确定. 如函数 $f(x)$ 定义在区间 $[0, l]$ 上, 并满足狄利克雷条件时, 可以把它展开为正弦级数, 也可展开为余弦级数. 根据不同的要求, 只需在区间 $[-l, 0]$ 上补充函

数定义时,使延拓了的函数成为奇函数或偶函数即可,其实也不必真正实施这一手续.

例 8 将函数

$$f(x)=x+1, \quad 0 \leq x < \pi$$

分别展开为正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数,这时,周期为 2π (见图 12.12),系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(x+1)\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n} [1 - (-1)^{n+1}] = \frac{2}{n} [1 + (-1)^{n+1}], \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 满足狄利克雷条件,故有正弦级数

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2}(\pi+2)\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots \right] \\ &= \begin{cases} x+1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x=0, \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

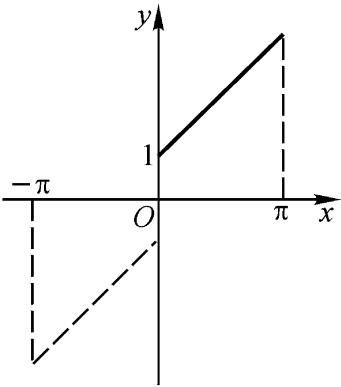


图 12.12

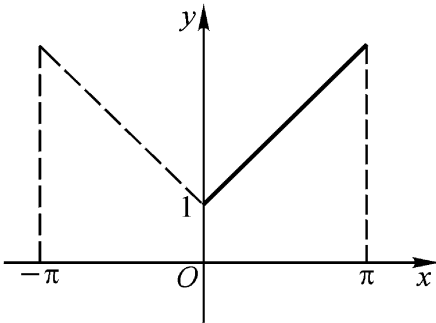


图 12.13

函数 $f(x)=x+1$ 的余弦级数 (见图 12.13),可由例 4 的展开式加 1 便得到:

$$1 + \frac{4}{\pi^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots = x+1, \quad 0 \leq x < \pi.$$

将区间 $[0, l]$ 上连续函数展开为余弦级数时,级数在端点 $x=0, l$ 处收敛到原来函数,正弦级数未必如此.此外,若将 $f(x)$ 的展开式加上常数 c ,就得到 $f(x)+c$ 的傅里叶展开式.这种做法,余弦级数还是余弦级数,但正弦级数加非零常数后,不再是正弦级数,而是一般的傅里叶级数.

例 9 已知有限区间 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)=x^2$ 的正弦级数的和函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin n\pi x,$$

求 $S(x)$ 的周期和 $S(1/2)$ 的值.

解 因为 $n=1$ 时

$$\sin nx$$

的周期为 2, 所以 $S(x)$ 的周期为 2.

这里的正弦级数是将 $f(x)$ 奇延拓为

$$F(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

之后展开的傅里叶级数, 而 $x = -\frac{1}{2}$ 是函数 $F(x)$ 的连续点, 由定理 12.16 知

$$S(-\frac{1}{2}) = F(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}.$$

* 12.9.6 傅里叶级数的复数形式

傅里叶级数的复数形式, 在电子技术中经常用到. 利用欧拉公式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

则

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{l} + b_n \sin \frac{nx}{l} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{i\frac{nx}{l}} + e^{-i\frac{nx}{l}}) - \frac{ib_n}{2} (e^{i\frac{nx}{l}} - e^{-i\frac{nx}{l}}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{nx}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{nx}{l}}. \end{aligned}$$

若记

$$a_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

上面的级数变为

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{nx}{l}} + c_{-n} e^{-i\frac{nx}{l}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\frac{nx}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{nx}{l}}.$$

将最后的表达式写在一起, 得到傅里叶级数的复数形式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{nx}{l}}, \quad (15)$$

其系数 c_n 的表达式为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{nx}{l} dx - \frac{i}{2} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{nx}{l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) (\cos \frac{nx}{l} - i \sin \frac{nx}{l}) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\frac{nx}{l}} dx \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

同理,

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

以上所有系数可以通过一个式子表达,即

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{16}$$

傅里叶级数的两种形式本质上一样,但复数形式(15)比较简洁,且系数公式统一为(16)式.

例 10 把宽为 τ ,高为 h ,周期为 T 的矩形波(图 12 .14)展开为复数形的傅里叶级数.

解 在一个周期 $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$ 内的波形函数为:

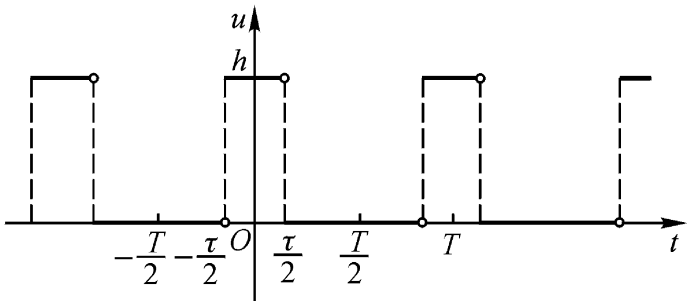


图 12 .14

$$\begin{aligned} &0, \quad -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2}, \\ u(t) = &h, \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}, \\ &0, \quad \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

由系数公式(16),有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h dt = \frac{h}{T}, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-i \frac{2n\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h e^{-i \frac{2n\pi t}{T}} dt \\ &= \frac{h}{T} \left[-\frac{T}{i2n} e^{-i \frac{2n\pi t}{T}} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{h}{n} \sin \frac{n\pi \tau}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

又 $u(t)$ 满足狄利克雷条件,故 $u(t)$ 的复数形傅里叶级数为:

$$u(t) = \frac{h}{T} + \frac{h}{n} \sin \frac{n}{T} e^{i \frac{2\pi}{T} t}, \quad t = \pm kT \pm \frac{T}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

12.10 例题

例 1 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证法 1 由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 及一阶麦克劳林公式知,

$$f(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) x^2 \quad (0 < \xi < 1).$$

再由题设, $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 因而 $f''(\xi)$ 在此邻域内闭区间上有界, 即存在 $M > 0$, 使当 x 在此闭区间内时, 恒有 $|f''(\xi)| \leq M$, 于是, 当 x 很小时, 有 $|f(x)| \leq \frac{M}{2} x^2$. 取 $x = \frac{1}{n}$, 当 n 充分大时, 恒有

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的 ($p=2$), 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是绝对收敛的. \square

证法 2 由证法 1 前半部分知 $f(0) = f'(0) = 0$, 由洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0),$$

令 $x = \frac{1}{n}$, 得

$$\lim_n \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} |f''(0)|,$$

故由比较判别法的极限形式知, $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是绝对收敛的. \square

例 2 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

证法 1 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 收敛, 所以通项趋于零, 即有

$$\lim_n (-1)^n a_n 2^n = 0,$$

从而有

$$\lim_n \frac{\frac{|a_n|}{1}}{2^n} = \lim_n |a_n| 2^{-n} = 0.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 是收敛的等比级数, 由比较判别法的极限形式知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. \square

证法 2 由给定的条件知, 幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

在 $x = -2$ 处收敛. 由阿贝尔引理知, 此幂级数在区间 $(-2, 2)$ 内处处绝对收敛.

特别地, 当 $x = 1$ 时, 此幂级数化为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 也是绝对收敛的. \square

例 3 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$ 的和.

解法 1

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3e. \end{aligned}$$

解法 2 令

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n},$$

从 0 到 x 积分得

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x e^{x^2}, \quad |x| < +\infty,$$

故

$$S(x) = (x e^{x^2})' = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = (1 + 2x^2) e^{x^2}.$$

令 $x = 1$, 得

$$S(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} = (1 + 2x^2) e^{x^2} \Big|_{x=1} = 3e.$$

解法 3 令

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = x e^{x^2}, \quad |x| < +\infty,$$

则两边求导得

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = (1 + 2x^2) e^{x^2}.$$

令 $x = 1$, 得

$$S(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} = 3e.$$

例 4 求幂级数 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$ 的和函数.

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_n \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_n \left| \frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| \\ &= \lim_n \frac{|x^2|}{2(n+1)(2n+1)} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

据比值判别法知,此幂级数收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

设和函数

$$S(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty,$$

则

$$S'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty,$$

于是有

$$S'(x) + S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

由此可见,这个和函数是如下初值问题的解:

$$\begin{aligned} S'(x) + S(x) &= e^x, \\ S(0) &= 1. \end{aligned}$$

不难解得

$$S(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty.$$

例 5 确定函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$ 的收敛域.

解 对任意固定的 x , 当 n 充分大时, 有 $u_n(x) = \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} > 0$, 且

$$u_n(x) = \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} = \frac{1}{n^x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

于是

$$\lim_n \frac{u_n(x)}{\frac{1}{n^x}} = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 是 $P = x$ 的 P -级数, 所以, $x > 1$ 时, 它收敛, $x \leq 1$ 时它发散. 据

此, 由比较判别法的极限形式知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$ 的收敛域为 $x > 1$.

例 6 将函数 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x$ 展开为 x 的幂级数.

解 由于

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{1}{1-x^4} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}, \quad -1 < x < 1, \end{aligned}$$

所以将上式两端从 0 到 x 进行积分, 并注意 $f(0) = 0$, 使得

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}, \quad -1 < x < 1.$$

可以看出此例恰是 12.7.3 段例 12 的反问题.

例 7 证明在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4},$$

并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

证明 欲证之等式等价于

$$x^2 = 4 \left(\frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx \right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

将 x^2 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上展开成傅里叶级数, 由于 x^2 为偶函数, 故

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad (n=1, 2, \dots), \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

于是得到

$$x^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

在上式中, 令 $x=0$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad \square$$

例 8 将 $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ 展开为傅里叶级数.

解 因为 $\cos x$ 是以 2π 为周期的偶函数, 所以 $f(x)$ 也是以 2π 为周期的偶函数, 可展开为余弦级数. 系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx = 0, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{n} \sin \frac{n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1} \frac{4}{(2k-1)}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

于是由定理 12.16 有

$$\operatorname{sgn}(\cos x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \quad (-x < x < x).$$

习 题 十 二

12.1

1. 写出下列级数的一般项 u_n .

$$(1) \quad -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \dots;$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \dots;$$

$$(3) \quad \frac{3}{2} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots.$$

2. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \frac{2n}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$),

(1) 求此级数的一般项 u_n ; (2) 判定此级数的敛散性.

3. 用定义判定下列级数的敛散性, 对收敛级数, 求出其和.

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{2};$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)};$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+2 - 2^{n+1} + n);$$

$$(7) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots;$$

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

4. 设数列 $\{nu_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

5. 将 0.73 化为分数.

6. 用性质判定下列级数的敛散性.

$$(1) \quad \frac{1}{11} + \frac{2}{12} + \frac{3}{13} + \dots;$$

$$(2) \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots;$$

$$(3) \frac{1}{6} + \frac{8}{9} + \frac{1}{6^2} + \frac{8^2}{9^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{8^3}{9^3} + \dots;$$

$$(4) \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10n} + \dots;$$

$$(5) \sum_{n=1} \ln \frac{n+1}{n}; \quad (6) \sum_{n=1} \frac{2^n + 3^n}{6^n};$$

$$(7) \sum_{n=1} \frac{(-1)^n n^2}{2n^2 + n}.$$

7. 分别就级数 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛和发散的两种情况, 讨论下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1} (u_n + 0.0001); \quad (2) 1000 + \sum_{n=1} u_n;$$

$$(3) \sum_{n=1} \frac{1}{u_n}.$$

8. 已知 $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{6}$, 求级数 $\sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

9. 一类慢性病人需每天服用某种药物, 按药理, 一般患者体内药量需维持在 20~25 mg 之间. 设体内药物每天有 80% 排泄掉, 问病人每天服用的药量为多少?

10. 计算机中的数据都是二进制的, 求二进制无限循环小数 $(110.110110\dots)_2$ 在十进制下的值.

12.2

1. 用比较法判别下列级数的敛散性.

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots; \quad (2) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \dots;$$

$$(3) \sum_{n=1} \sin \frac{1}{2^n}; \quad (4) \sum_{n=1} \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

2. 用比值法判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=0} \frac{n!}{n^n}; \quad (2) \sum_{n=0} \frac{5^n}{n!}.$$

$$(3) \sum_{n=1} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad (4) \sum_{n=1} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}.$$

3. 用根值法判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1} \frac{n}{3n+1}^n; \quad (2) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \dots.$$

4. 用积分判别法判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}; \quad (2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

5. 判别下列级数的敛散性.

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}; \\ (3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\alpha} n} \quad (\alpha > 0); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arcsin \frac{1}{n}; \\ (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0); \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \\ (7) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{2^{n+1}}; \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2 + \frac{1}{n}}; \\ (9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \quad (x > 0); \quad (10) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln \ln n}; \\ (11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b}{a_n}^n, \text{ 假设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad b, a \text{ 均为正数.} \end{aligned}$$

6. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$ 的敛散性, 其中 α 为任意实数, α 为非负实数.

7. 设 a 为正数, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛, 而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2 - n-2}{n^a}$ 发散, 则 ().

$$(A) a > e \quad (B) a = e \quad (C) \frac{1}{2} < a < e \quad (D) a = \frac{1}{2}$$

8. 证明:

$$\begin{aligned} (1) \text{ 若正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 收敛;} \\ (2) \text{ 若正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 均收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^p}, p > 1 \text{ 均收敛;} \\ (3) \text{ 若正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散, } S_n = u_1 + \dots + u_n, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2} \text{ 收敛;} \\ (4) \text{ 若 } u_n, v_n > 0, \text{ 且 } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ 则当 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛时, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛; 当 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发} \end{aligned}$$

散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

9. 利用收敛级数性质证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1).$$

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且对一切正整数 n 都有 $a_n < c_n < b_n$, 证明

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

11. 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = a \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

12. 设 $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, 试证 $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

13. 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (u_n^2 + 1)$, $n = 1, 2, \dots$. 针对首项 (1) $u_1 = \frac{1}{2}$

和 (2) $u_1 = 2$ 两种情况讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

14. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+x^2} dx$ 的敛散性.

12.3

1. 判定下列级数的敛散性, 如果收敛, 是条件收敛? 还是绝对收敛?

(1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots;$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n};$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3 \cdot 2^n};$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}};$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n \sin \frac{n}{5}}{n^n};$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} - \frac{1}{n};$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (常数 > 0);

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{n^n}$ (> 0 常数); (9) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin n + \frac{1}{\ln n}.$

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a_n + b_n)^2$ 均收敛.

3. 设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ ().

(A) 发散

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 收敛或发散与 k 的取值有关

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 又设 $u_n^* = \frac{u_n + |u_n|}{2}$, $u_n^{**} = \frac{u_n - |u_n|}{2}$, 则级数

() .

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{**}$ 都收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{**}$ 都发散
- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{**}$ 发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{**}$ 收敛

5. 判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ 的敛散性 .

6. 设部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 () .

- (A) 充分条件, 但非必要条件 (B) 必要条件, 但非充分条件
- (C) 充分必要条件 (D) 非充分条件, 又非必要条件

7. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [|u_n| + |v_n|]$ 的敛散性 .

8. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1}$ 是否收敛? 并说明理由 .

9. 对无穷数列 $\{u_n\} (u_n \neq 0)$, 如果引入无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \cdot \dots$$

概念, 你认为首要讨论的问题应为什么?

12.4

1. 判定反常积分的敛散性:

- (1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$; (2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}$;
- (3) $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3}$; (4) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - 3x + 2}$;
- (5) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} \quad (p, q > 0)$.

12.5

1. 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数 .

- (1) 设 $u_1 = \frac{x}{2}$, $u_n = \frac{x^n}{2^n} - \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}$, $n \geq 2$;

(2) 设 $u_n = \frac{x}{2}$, $u_n = \frac{nx}{n+1} - \frac{(n-1)x}{n}$, $n \geq 2$.

2. 求下列函数项级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1-x^n}{1+x^n}$; (2) $x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots$;

(3) $x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \dots$.

3. 判别下列级数是否一致收敛.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$, $0 \leq x \leq 1$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4 + x^4}$, $|x| < +\infty$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, $x \in [1+\frac{1}{e}, +\infty)$ ($e > 0$);

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0 < x < +\infty$.

12.6

1. 求下列幂级数的收敛半径及收敛区间.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n + 3 \cdot 2^n} x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} (x - x_0)^n$ ($0 < a < b$).

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2 , 且 $R_1 < R_2$, 试

证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 R_1 .

3. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^p}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} x^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n} x^n}{n^2 + 1}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$ ($a > 0, b > 0$);

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$; (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{5n}$; (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n}$;

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}; \quad (13) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(14) 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots; \quad (15) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

4. 求下列函数项级数的收敛域.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 + x + 1)^n}{n(n+1)}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{1}{2^n}.$$

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 试确定此幂级数的收敛半径, 并阐明理由.

6. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ($a_n > 0$) 条件收敛, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域, 并说明理由.

7. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 且当 $x=-3$ 时, 该级数条件收敛, 试确定此幂级数的收敛域, 并阐明理由.

8. 求幂级数

$$1 + \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 3^2} + \frac{(x-1)^4}{2 \cdot 3^4} + \dots + \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 3^{2n}} + \dots$$

的收敛区间.

9. 已知

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

求函数 $\ln(1-x)$ 和 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 的幂级数表达式.

10. 在原点附近, 用一个 x 的五次多项式近似表达 $\tan x$; 用 x 的四次多项式近似表达 $e^{\sin x}$.

12.7

1. 用直接展开法, 将函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 展开为 x 的幂级数.

2. 若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 试证:

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 必有 $a_{2k} = 0$, $k=0, 1, 2, \dots$;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 必有 $a_{2k+1} = 0$, $k=0, 1, 2, \dots$.

3. 用间接展开法, 将下列函数展开为 x 的幂级数.

$$(1) \sin^2 x;$$

$$(2) \sin x + \frac{1}{4};$$

$$(3) \frac{x}{1-2x};$$

$$(4) \ln(1+x-2x^2);$$

$$(5) \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(6) \frac{d}{dx} \frac{e^x - 1}{x};$$

$$(7) \arcsin x;$$

$$(8) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x;$$

$$(9) \frac{1}{(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}.$$

4. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的幂级数展开式 (麦克劳林级数).

5. 将下列函数在指定点 x_0 处, 展开为 $x - x_0$ 的幂级数.

$$(1) x^3, \quad x_0 = 1;$$

$$(2) \cos x, \quad x_0 = -\frac{1}{3};$$

$$(3) \frac{x}{x^2 - 5x + 6}, \quad x_0 = 5.$$

6. 设 $f(x) = (\arctan x)^2$, 求 $f^{(n)}(0)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $|x| < r$ 时, 可以展开成麦克劳林级数 $g(x) = f(x^2)$, 试证:

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2m+1, \\ \frac{(2m)!}{m!} f^{(m)}(0), & n = 2m \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

8. 求下列级数在收敛区间内的和函数.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \quad |x| < +\infty; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, \quad |x| < 2, \text{ 并求 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n, \quad |x| < 1, \text{ 并求 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n};$$

$$(5) x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad |x| < 1, \text{ 并求 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \frac{3}{4}^n;$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty.$$

9. 求下列幂级数的收敛区间及和函数.

$$(1) \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 4^n} + \dots; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

10. 利用 $\frac{d}{dx} \frac{\cos x - 1}{x}$ 的幂级数展开式, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}}$ 的和.

11. 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

12. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n^2}{(2n)! 2^n}$ 的和.

13. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 和函数为 $S(x)$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间及和函数.

14. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n; \quad (2) \lim_n \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \dots + \frac{n}{a^n} \quad (a > 1);$$

$$(3) \lim_n \frac{3}{2 \cdot 1} + \frac{5}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{2n+1}{2^n \cdot n!}.$$

15. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^n + 2}$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的().

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶, 但不等价无穷小
(C) 低阶无穷小 (D) 高阶无穷小

12.8

1. 求下列各数的近似值, 精确到小数点后第四位.

$$\begin{aligned} (1) e; & \quad (2) {}^5 245; \\ (3) \ln 3; & \quad (4) \cos 10^\circ; \\ (5) \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx; & \quad (6) \int_0^{1/10} \frac{\ln(1+x)}{x} dx. \end{aligned}$$

2. 试用幂级数解下列微分方程:

$$\begin{aligned} (1) \quad y'' + y^3, & \quad (2) \quad (1-x)y' + y = 1+x, \\ y|_{x=0} = \frac{1}{2}; & \quad y|_{x=0} = 0; \\ (3) \quad y' + y = e^x; & \quad (4) \quad y' = x^2 y. \end{aligned}$$

3. 在区间 $[1, 2]$ 上, 用函数 $\frac{2(x-1)}{x+1}$ 近似函数 $\ln x$, 估计其误差.

4. 已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 在 $(-T, T)$ 上是微分方程 $y'' + y' + by =$

e^x 的解, 确定常数 b , 并利用这一结果求该级数的和函数.

12 9

1. 将下列以 2 为周期的函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数, 其中 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的表达式分别为:

$$(1) f(x) = \frac{x}{4} - \frac{x}{2};$$

$$(2) f(x) = e^x + 1;$$

$$(3) f(x) = 3x^2 + 1;$$

$$(4) f(x) = 2\sin \frac{x}{3};$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} e^x, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

2. 设函数 $f(x) = x + x^2$ ($-1 < x < 1$) 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

求系数 b_n , 并说明常数 $\frac{a_0}{2}$ 的意义.

3. 将区间 $[0, 1]$ 上的下列函数 $f(x)$ 展为正弦级数.

$$(1) f(x) = \frac{x}{2};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{x}{2}, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

4. 将区间 $[0, 1]$ 上的下列函数 $f(x)$ 展开为余弦级数.

$$(1) f(x) = \cos \frac{x}{2};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < h, \\ 0, & h < x < 1. \end{cases}$$

5. 将下列周期函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数, 其中 $f(x)$ 在一个周期的表达式分别为:

$$(1) f(x) = x^2 - x, \quad -2 < x < 2;$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -3 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 3; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

并利用它的傅里叶级数, 证明等式:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0, \\ x^3, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0, \frac{1}{2}, 1$ 处各自的和为多少?

7. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

展开为正弦级数.

8. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 0, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

展开为余弦级数.

9. 将函数 $f(x) = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) 分别展开成正弦级数和余弦级数, 并指出它们在收敛性上的差别.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & -\infty < x < 0, \\ e^x + 1, & 0 \leq x < \infty, \end{cases}$ a_0, a_n ($n = 1, 2, \dots$) 为 $f(x)$ 的傅里叶

系数, 则数项级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和为_____.

12.10

1. 设 $a > 0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a^0)(1+a^1)(1+a^2)\dots(1+a^{n-1})}$ 的敛散性.

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k} + 1}$ 的敛散性, 其中 k 为实数.

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-1 + \frac{1}{n}}$ 是否收敛, 如果收敛, 要指明是条件收敛还是绝对收敛.

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = 5$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和.

5. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{2}{8}$, 求 $P=2$ 时的 P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

6. 证明级数

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{8} + \dots + \arctan \frac{1}{2n^2} + \dots$$

是收敛的, 并求其和 S .

7. 证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2}{(2n)!} x^n$ 在 $(-3, 3)$ 内绝对收敛.

8. 求极限

$$\lim_n \frac{1 + \frac{4}{5!} + \frac{8}{9!} + \dots + \frac{4(n-1)}{(4n-3)!}}{\frac{1}{3!} + \frac{4}{7!} + \frac{8}{11!} + \dots + \frac{4(n-1)}{(4n-1)!}}.$$

9. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ($x_0 \neq 0$) 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=2x_0$ 处发散, 指出此幂级数的收敛半径 R 和收敛域, 并说明理由.

10. 求下列幂级数的收敛半径及收敛区间.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n-1}}{n} (x-2)^{2n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} 8^n (2x-1)^{3n+1}.$$

11. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$ 的收敛域.

12. 利用幂级数展开式, 求下列函数在 $x=0$ 处的指定阶数的导数.

$$(1) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \text{ 求 } f^{(7)}(0); \quad (2) f(x) = x^6 e^x, \text{ 求 } f^{(10)}(0).$$

13. 利用函数的幂级数展开式, 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}.$$

14. 设 $f(x) = \frac{1+x^2}{x} \arctan x, \quad x \neq 0,$ 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数, 并求 $f(0)$, $x=0,$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \text{ 的和.}$$

15. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数, a_n, b_n 是其傅里叶系数, 求函数

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) f(x+t) dt$$

的傅里叶系数 A_n, B_n , 并证明

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上傅里叶级数; (2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

17. 将函数 $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 展为傅里叶级数.

18. 已知周期为 2 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n , 试计算“平移”了的函数 $f(x+h)$ (h 为常数) 的傅里叶系数 $\overline{a_n}, \overline{b_n}$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

附录 幂级数的收敛半径

每一个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

都有一个收敛半径 R , 使得幂级数(1)在收敛区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛. 下面仅给出求收敛半径的通用方法.

柯西 - 阿达马 定理 若上极限

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则幂级数(1)的收敛半径

$$R = \frac{1}{\rho}$$

(当 $\rho = 0$ 时, $R = +\infty$; 当 $\rho = +\infty$ 时, $R = 0$).

例 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^3} e^{-n^2 x}$ 的收敛域.

解 令 $y = e^{-x} > 0$, 级数变为幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^3} y^{n^2},$$

其收敛半径

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^3}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{1 + \frac{1}{n}}^{-n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \end{aligned}$$

故 $0 < y < e$ 时, 幂级数收敛, 而当 $y = e$ 时, 对应的数项级数通项

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^3} e^{n^2} = \frac{e}{1 + \frac{1}{n}} > 1,$$

由级数的性质知, 此时数项级数发散. 总之, 区间 $(0, e)$ 是 y 的幂级数的收敛域, 因此所论之函数项级数的收敛域为 $(-1, \ln e)$.

第十三章 复变函数初步

复变函数论是数学科学的一个重要分支,在流体力学、天体力学、电磁学、热学、自动控制和空气动力学、理论物理及数学的其他分支里都要用到它.本章仅简要介绍复变函数的部分知识.

13.1 复数与复变函数

13.1.1 复数的表示及其运算

在高中数学里介绍过复数,现在作扼要的复习和少量的补充.

形如 $z = x + iy$ 的数称为复数,其中 $i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位. x, y 都是实数,分别叫做 z 的实部与虚部,记为

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$$

当 $x = 0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数;当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是实数,因此,实数是特殊的复数.说两个复数相等是指它们的实部和虚部分别相等.两个复数无大小关系.

复数 $z = x + iy$, 由实部 x 与虚部 y 惟一确定,即由一对有序实数 (x, y) 惟一确定,而有序实数对 (x, y) 又与平面直角坐标系中的点 $P(x, y)$ 一一对应,于是可以用平面上的点来表示复数,此时的平面称为复平面(或 z 平面), x 轴称为实轴, y 轴称为虚轴(见图 13.1).

在复平面上,点 P 的向径 \overline{OP} 与复数 z 也是一一对应的,复数 0 与零向量对应.因此,又可以用向量来表示复数.向量 \overline{OP} 的长度 r , 称为复数 z 的模,记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

向量 \overline{OP} 与 x 轴正向的夹角 θ , 称为复数 z 的辐角,记作

$$\operatorname{Arg} z = \theta.$$

由于复数 $z (z \neq 0)$ 有无穷多个辐角,彼此之间相差 2π 的整数倍,通常把满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的辐角,称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值,记为 $\arg z$, 于是

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

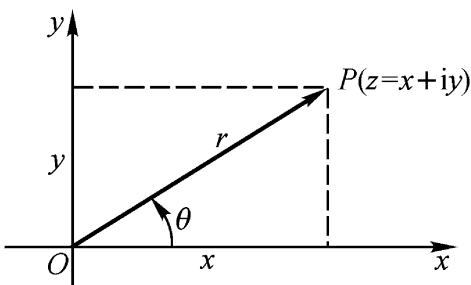


图 13.1

复数 0 对应零向量,其辐角 是不确定的.有了模 r 和辐角 θ 后,就可以用它们来表示复数.由于 $x = r\cos \theta$, $y = r\sin \theta$, 因此

$$z = r(\cos \theta + i\sin \theta) . \tag{1}$$

(1)式称为复数 z 的三角形式,利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta ,$$

又可将复数 z 表为

$$z = re^{i\theta} . \tag{2}$$

(2)式称为复数 z 的指数形式 .

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的四则运算定义如下:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) ;$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) ;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) .$$

复数的加减法与向量加减的平行四边形法则一致 .

复数的积、商及乘方、开方运算,用指数形式或三角形式表示较方便 .

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] , \end{aligned}$$

即复数的乘积,等于模相乘,辐角相加.从向量角度看,就是将向量 z_1 伸长 $|z_2|$ 倍,再反时针旋转 $\arg z_2$ 角度 .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] ,$$

即复数的商,等于模相除,辐角相减.就是将向量 z_1 的模压缩 $|z_2|$ 倍,再顺时针转 $\arg z_2$ 角度 .

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) .$$

对给定的复数 z , 方程 $w^n = z$ 的根,称为 z 的 **n** 次方根,记作 nz 或 $z^{\frac{1}{n}}$.设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $w = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$,则由乘方运算得

$$r^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots) .$$

故

$$\begin{aligned} |w| &= r^{\frac{1}{n}} , \\ \text{Arg } w &= \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \dots) . \end{aligned}$$

于是

$$w = ^nz = r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} ,$$

这就是复数 z 的 n 次方根.可以看出,当 $k = 0, 1, \dots, n - 1$ 时,得到 n 个互异的

值.当 k 取其他整数值时,将重复出现上述的 n 个值.所以, nz 有 n 个值,它们的模均为 $^n|z|$,辐角从 $\frac{2\pi}{n}$ 开始,相邻两个差 $\frac{2\pi}{n}$ 角度,几何上, nz 的 n 个值分布在原点为圆心, $^n|z|$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点上.

n 次方根也可用指数形式表示为

$$^nz = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,\dots,n-1).$$

称 $x-iy$ 为复数 $x+iy$ 的共轭复数,记为 \overline{z} .在复平面上,点 z 与 \overline{z} 关于实轴对称,不难验证下列等式:

- 1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

2° $\overline{\overline{z}} = z$;

3° $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ($z_2 \neq 0$);

4° $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$;

5° $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$;

6° $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$;

7° $\overline{\overline{z}} = z$.

利用复数的向量形式知,有三角不等式

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|; \\ ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

13.1.2 复变函数、极限、连续

定义 13.1 设 G 是复数的一个集合,若 $z \in G$ 都有一个(或多个)确定的复数 w 与之对应,则说 w 是集合 G 上复变量 z 的复变函数,记为 $w = f(z)$.

如果 G 内的每个 z ,仅有一个 w 与之对应,则说 $f(z)$ 是单值函数,否则称为多值函数.例如

$$w = |z|, \quad w = \overline{z}, \quad w = \frac{z+1}{z-1} \quad (z \neq 1)$$

都是单值函数.而

$$w = \operatorname{Arg} z, \quad w = ^nz \quad (n \geq 2)$$

都是多值函数.

几何上,复变函数 $w = f(z)$ 是 z 平面上点集 G 到 w 平面点集 G^* 的一个映射(或变换).与点 $z \in G$ 对应的点 $w = f(z)$ 称为 z 的象点,相应地,称 z 为 $w = f(z)$ 的原象(见图 13.2).

$w = f(z)$ 的逆映射 $z = f^{-1}(w)$ 称为 $w = f(z)$ 的反函数.

当函数与反函数都是单值函数时,称 z 与 w 之间的函数是双方单值的,此时映射是一对一的.

定义 13.2 设复变函数 $w = f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ 内有定义, A 为复常数.若 $\varepsilon > 0, \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < R$,使得当 $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ 时,恒有

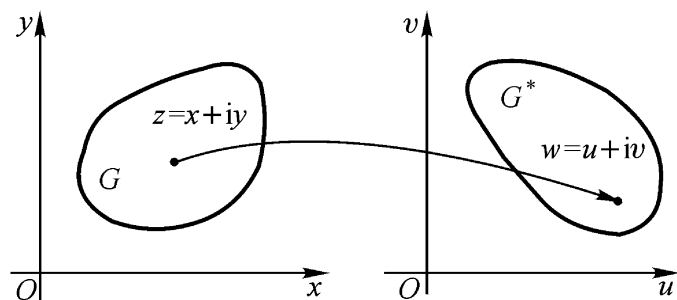


图 13.2

$$|f(z) - A| < \epsilon,$$

则说 $z \rightarrow z_0$ 时, $f(z)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A,$$

或 $f(z) \rightarrow A$, 当 $z \rightarrow z_0$ 时.

由于复数由它的实部和虚部完全确定, 所以一个复变函数相当于两个有序的二元实变函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的组合

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

定理 13.1 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = a + ib$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

的充要条件是

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b.$$

事实上, 由不等式

$$\begin{aligned} |u - a| &\leq |f(z) - A| \leq |u - a| + |v - b|, \\ |v - b| &\leq |f(z) - A| \leq |u - a| + |v - b| \end{aligned}$$

知, 结论正确.

定义 13.3 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则说函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都连续, 则说 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 记为 $f(z) \in C(D)$.

由连续的定义及定理 13.1, 有:

定理 13.2 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是: $u(x, y)$, $v(x, y)$ 都在 (x_0, y_0) 处连续.

与实变函数的极限、连续相关的性质、法则和定理, 都可照搬到复变函数上来, 如闭区域上连续函数的性质应是: 闭区域上连续的复变函数 $f(z)$ 的模必有界; 模在闭区域上必有最大(小)值.

13.2 解析函数

在实际问题中,所出现的复变函数的实部与虚部有着内在的关系,所以把它们放在一起研究更简洁,更能反映事物的本质.这类函数就是所谓的“解析函数”.它是复变函数论的主要研究对象.

13.2.1 复变函数的导数与解析函数的概念

定义 13.4 设 $w = f(z)$ 是区域 D 内的单值函数, $z_0, z_0 + \Delta z \in D$, 若极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,且与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式、途径无关,则说 $f(z)$ 在点 z_0 处可导(可微),并称此极限值为 $f(z)$ 在点 z_0 处的导数,记为 $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$, $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$ 或 $f'(z_0)$.

定义 13.5 若 $f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内处处可导,则说 $f(z)$ 在点 z_0 处解析. z_0 称为解析点(或正则点),否则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

若在区域 D 内的每一点处, $f(z)$ 均可导,则说 $f(z)$ 在 D 内解析,或者说 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数.

由定义 13.5 知,解析点不会是孤立的.

例 1 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解 $f(z)$ 在复平面上处处有定义,对任意的 z , 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z \Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = 2z, \end{aligned}$$

故

$$f'(z) = (z^2)' = 2z.$$

可见, z^2 是复平面上的解析函数.

例 2 试证 $f(z) = x + 2yi$ 处处不解析.

证明 因为

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x + 2yi}{x + yi}. \end{aligned}$$

当 $x=0, y \neq 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \neq 0}} \frac{x+2yi}{x+yi} = 2,$$

当 $y=0, x \neq 0$ 时,

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x \neq 0}} \frac{x+2yi}{x+yi} = 1,$$

所以, $f(z) = x + 2yi$ 处处不可导, 故处处不解析.

复变函数的导数定义的形式, 与实变函数的一致. 因而复变函数的和、差、积、商以及复合函数的求导法则与实变函数相应的法则相同. 设 $f(z), g(z)$ 均可导, 则有

- 1° $[cf(z)] = cf(z), \quad c \text{ 为复常数};$
- 2° $[f(z) \pm g(z)] = f(z) \pm g(z);$
- 3° $[f(z)g(z)] = f(z)g(z) + f'(z)g(z);$
- 4° $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{g^2(z)}[g(z)f'(z) - f(z)g'(z)], \quad g(z) \neq 0;$
- 5° $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z), \text{ 其中 } w = g(z);$
- 6° $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z), \text{ 其中 } f(z) \text{ 与 } (f^{-1})(w) \text{ 互为单值反函数, } f'(z) \neq 0.$

容易证明:

$$(c)' = 0, \quad (z^n)' = nz^{n-1}.$$

解析函数这一重要概念, 是与定义的区域密切相关的. 如 $w = z^2$ 是复平面上的解析函数, $w = \frac{2z}{1-z}$ 在复平面上去掉点 $z = 1$ 的多连通区域内解析. 复变函数在区域内解析与在区域内可导等价. 但是, 在一点处解析和可导是两个不同的概念. 如果函数仅在一点处可导, 在该点处是不解析的.

显然, 任意两个在点 z_0 处解析的函数的和、差、积、商 (分母不为零), 在点 z_0 处仍解析. 解析函数的复合函数是解析的.

由于 z 的任意性和 w, z 的二元性, 复变函数在一点处可导的要求是很强的, 从几何上看, 由于复数的商 $\frac{w}{z}$ 的模等于 $\left| \frac{w}{z} \right|$, $\frac{w}{z}$ 的辐角等于 w 的辐角减去 z 的辐角, 所以, 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 导数 $f'(z_0)$ 表示在 z_0 处, 映射前后各方向长度放大率均为 $|f'(z_0)|$, 辐角增加量均为 $\arg f'(z_0)$.

解析函数 $w = f(z)$ 作为从 z 平面到 w 平面的映射 (变换), 当 $f'(z) \neq 0$ 时, 映射具有保角性. 保角性是指任意两条相交曲线在交点处的夹角, 映射前后大小不变, 这是复变函数的一个重要内容, 非常有用. 利用它可以将边界复杂的区域上的问题, 转化为边界简单的区域上的问题来处理. 这里不再讨论它.

13 2 2 函数解析的充要条件

复变函数的极限与连续等价于它的实部、虚部两个二元函数的极限与连续。但可导性不等价,如例 2 中函数 $f(z) = x + 2iy$, 在复平面上实部和虚部处处有连续的偏导数,但 $f(z)$ 不可导。

定理 13 3 复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + iy$ 处可导的充要条件是 $u(x, y), v(x, y)$ 在该点 (x, y) 处可微,且满足柯西 - 黎曼方程(条件):

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x}. \quad (1)$$

(1)式简称为 C - R 方程(条件)。

证明 $w = f(z)$ 在 z 处可导, $f(z) = a + ib$, 等价于

$$\frac{w}{z} - f(z) = \frac{u + i v}{x + i y} - a - ib = \alpha + i \beta, \quad (2)$$

当 $z \rightarrow 0$ 时, $\alpha, \beta \rightarrow 0$ 。(2)式即

$$u + i v = (a + ib)(x + i y) + (\alpha + i \beta)(x + i y).$$

分开实部与虚部是

$$\begin{aligned} u &= a x - b y + (\alpha x - \beta y), \\ v &= b x + a y + (\beta x + \alpha y). \end{aligned} \quad (3)$$

由此可见,两个二元函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在点 $z = (x, y)$ 处可微,且

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x}. \quad \square$$

推论 若 $f(z)$ 可导,则它的导数有如下四种表现形式

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} = \frac{u}{x} - i \frac{u}{y} \\ &= \frac{v}{y} + i \frac{v}{x} = \frac{v}{y} - i \frac{u}{y}. \end{aligned} \quad (4)$$

定理 13 4 复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 内可微,且满足 C - R 方程。

例 3 讨论 1° $w = \bar{z}$ 2° $w = z \operatorname{Re} z$ 的可导性和解析性。

解 1° $\bar{z} = x - iy$, 故 $u = x, v = -y$ 从而

$$\frac{u}{x} = 1, \quad \frac{v}{y} = -1,$$

可见在任何点处, u, v 都不满足 C - R 方程 所以 $w = \bar{z}$ 处处不可导,不解析。

2° $z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + ixy$, 故 $u = x^2, v = xy$ 从而

$$\frac{u}{x} = 2x, \quad \frac{u}{y} = 0,$$

$$\frac{v}{x} = y, \quad \frac{v}{y} = x.$$

这四个偏导数都连续,但仅在点 $(0,0)$ 处, u, v 满足 C - R 条件.因此, $w = z\operatorname{Re} z$ 仅在原点处可导,所以 $w = z\operatorname{Re} z$ 处处不解析.

例 4 试证 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在 z 平面上解析,且有公式

$$(e^z)' = e^z.$$

证明 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$, 故

$$\frac{u}{x} = e^x \cos y, \quad \frac{u}{y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{v}{x} = e^x \sin y, \quad \frac{v}{y} = e^x \cos y.$$

在复平面上四个偏导数处处连续,所以 u, v 可微,又 u, v 满足 C - R 方程,因此 e^z 在复平面上是解析函数,并有公式

$$(e^z)' = e^z. \square$$

13 2 3 解析函数与调和函数

因为解析函数 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 满足 C - R 方程

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x}.$$

若 u, v 具有二阶连续偏导数(在下节将证明解析函数的实部和虚部有任意阶偏导数),将上述两式分别对 x 与 y 求偏导,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

两式相加,知实部 u 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

类似地,知虚部 v 也满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

具有二阶连续偏导数,且满足拉普拉斯方程的二元实函数,称为(二元)调和函数.

因此,解析函数的实部和虚部都是调和函数.但是,如果 u, v 是区域 D 内的任意两个调和函数,那么 $u + i v$ 在 D 内不一定解析.若要 $u + i v$ 在 D 内解析, u, v

拉普拉斯 Laplace P. S. (法)1749—1827.他才华横溢,著作如林,重视研究方法,曾说:“认识一位巨人的研究方法,对于科学的进步,……并不比发现本身用处少,科学研究的方法经常是极富兴趣的部分.”

还须满足 C - R 条件 .

在区域 D 内满足 C - R 方程的两个调和函数 u, v 称为共轭调和函数 .

定理 13 5 复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是:在 D 内, $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 为共轭调和函数 .

由定理 13 5 及常微分方程理论得:

推论 对单连通区域 D 内给定的调和函数 $u(x, y)$, 必有一族解析函数, 使其实部(或虚部)为 $u(x, y)$. 这族解析函数中的任何两个相差一个纯虚数(或实数) .

例 5 已知调和函数 $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, 求一个满足条件 $f(0) = 0$ 的解析函数 $f(z) = u + iv$.

解 因为 $\frac{u}{x} = 2x + y, \frac{u}{y} = -2y + x$, 由 C - R 方程知

$$\frac{v}{y} = \frac{u}{x} = 2x + y,$$

于是

$$v = (2x + y)dy = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C(x),$$

其中 $C(x)$ 是 x 的任一可微函数 . 又由

$$\frac{v}{x} = -\frac{u}{y} = 2y - x,$$

有

$$2y + C(x) = 2y - x,$$

即有

$$C(x) = -x.$$

所以

$$C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C,$$

其中 C 为任意实常数 . 从而得

$$v(x, y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

于是有解析函数

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C).$$

即

$$f(z) = x^2 + 2ixy + (iy)^2 - \frac{i}{2}[x^2 + 2ixy + (iy)^2] + iC = 1 - \frac{i}{2}z^2 + iC.$$

由条件 $f(0) = 0$, 知 $C = 0$. 故所求的解析函数为

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2).$$

即

$$f(z) = 1 - \frac{i}{2} z^2.$$

下面通过例 5, 介绍一个简便快速求解析函数的方法, 由定理 13.3 的推论知:

$$f(z) = \frac{u}{x} - i \frac{u}{y} = (2x + y) + i(2y - x),$$

令 $y=0$, 得

$$f(x) = 2x - ix,$$

积分得

$$f(x) = 1 - \frac{i}{2} x^2 + C.$$

由 $f(0)=0$ 知 $C=0$. 将 x 换为 z , 得到所求的解析函数

$$f(z) = 1 - \frac{i}{2} z^2.$$

这样做的根据是什么? 请读者在学完本章后, 自己回答.

13.2.4 几个常用的初等函数

1. 指数函数

复指数函数定义为

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (6)$$

由例 4 知, e^z 是复平面上的解析函数, 且

$$(e^z)' = e^z.$$

根据定义不难验证

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

由于

$$e^{z + i2k} = e^z e^{i2k} = e^z (\cos 2k + i \sin 2k) = e^z,$$

可见复指数函数是具有虚周期 $2i$ 的周期函数, 这是与实指数函数不同的.

2. 三角函数

复的正弦函数和余弦函数定义为

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (7)$$

由求导法则知, 这两个函数在复平面上均为解析函数, 且

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

这两个函数保持了实的正弦函数、余弦函数的若干特性,如奇偶性和周期性,满足实三角函数的一些恒等式关系.但必须注意: $|\sin z|, |\cos z|$ 都是无界的.比如

如 $\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$, 当 $y \rightarrow \infty$ 时, 此外, 分别定义

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, & \csc z &= \frac{1}{\sin z}\end{aligned}$$

为 z 的正切、余切、正割及余割函数.这四个函数在 z 平面上, 除分母为零的点外, 处处解析.

3. 对数函数

复对数函数定义为复指数函数的反函数, 即满足方程 $e^w = z (z \neq 0)$ 的反函数 $w = f(z)$ 称为对数函数, 记为 $w = \text{Ln } z$.

设 $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$, 则

$$e^{u+iv} = re^{i\theta},$$

所以

$$e^u = r = |z|, \quad u = \ln |z|, \quad v = \theta = \text{Arg } z,$$

故

$$\begin{aligned}\text{Ln } z &= u + iv = \ln |z| + i\text{Arg } z \\ &= \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \dots\end{aligned}\tag{8}$$

对数函数 $w = \text{Ln } z$ 是多值函数, 并且每两个值相差 $2\pi i$ 的整数倍. 记

$$\ln z = \ln |z| + i\arg z,$$

称之为 $\text{Ln } z$ 的主值, 则有

$$\text{Ln } z = \ln z + i2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

对每个固定的 k , 得到一个单值函数, 称为 $\text{Ln } z$ 的一个分支.

$\ln z$ 在复平面上除去点 $z = 0$ 和负实轴的单连通区域内解析, 且由反函数求导法知

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

4. 幂函数

设 α 是任意复常数, 定义 z 的 α 次幂函数

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z} \quad (z \neq 0).\tag{9}$$

当 α 为正实数时, 补充定义 $0^\alpha = 0$.

由于 $\text{Ln } z$ 是多值函数, 所以 z^α 一般是多值函数, 但当 α 是整数时, $w = z^\alpha$ 是单值函数.

由复合函数求导法, 不难看出幂函数 z^α 的各个分支, 在除去原点和负实轴的

复平面上解析,且

$$(z) = z^{-1}.$$

在实变函数中,这些初等函数看来无关,但在复变函数中,它们有密切的关系,其定义都与 e^z 有关.

13.3 复变函数的积分

本节介绍复变函数的积分,并着重讨论解析函数积分的性质,建立一个最基本的定理——柯西积分定理,给出一个基本公式——柯西积分公式,它们是解析函数论的基本理论.

13.3.1 复变函数的积分

定义 13.6 设 l 是复平面上从点 z_0 到点 Z 的分段光滑的有向曲线, $f(z)$ 在 l 上有定义.在 l 上依次取分点(图 13.3)

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = Z$$

分割 l , 记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \max_k \{ |z_k - z_{k-1}| \}$, 其中 $|z_k - z_{k-1}|$ 表示弧长.任取弧 $z_{k-1} z_k$ 上一点 ζ_k , 做乘积的和式

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k.$$

若不论 $\Delta z_k, \Delta s_k$ 的取法如何,极限

$$\lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

都存在,且为同一值,则说 $f(z)$ 在 l 上可积,并称此

极限值为复变函数 $f(z)$ 在有向曲线 l 上的积分,记为 $\int_l f(z) dz$, 即

$$\int_l f(z) dz = \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k. \tag{1}$$

试想,复变函数的积分与第十一章中的第二型曲线积分有什么关系呢?

设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z_k = x_k + i y_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)] [\Delta x_k + i \Delta y_k] \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &\quad i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k], \end{aligned}$$

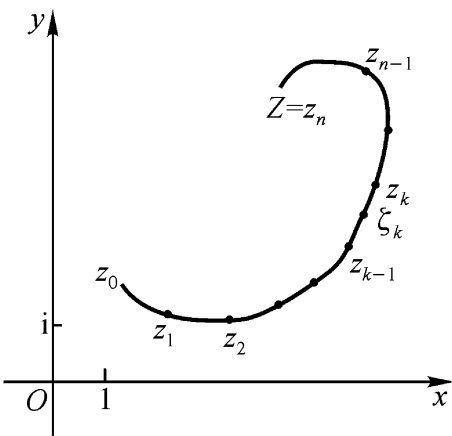


图 13.3

故由复变函数积分和曲线积分的定义知:

$$\int_l f(z) dz = \int_l u dx - v dy + i \int_l v dx + u dy. \quad (2)$$

由这个关系知, 当 $f(z)$ 在曲线 l 上连续时, $f(z)$ 在 l 上可积.

由第二型曲线积分的性质和计算方法, 容易得到复变函数积分的性质和计算方法.

设 $f(z)$, $g(z)$ 在曲线 l 上可积, 则有下列性质:

$$1^\circ \quad \int_{l^{-}} f(z) dz = - \int_l f(z) dz, \quad l^{-} \text{ 是与 } l \text{ 反向的曲线}.$$

$$2^\circ \quad \int_l [A f(z) + B g(z)] dz = A \int_l f(z) dz + B \int_l g(z) dz, \quad A, B \text{ 为复常数}.$$

$$3^\circ \quad \int_l f(z) dz = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz, \quad l_1, l_2 \text{ 是 } l \text{ 被一点分开的两个弧段}.$$

$$4^\circ \quad \text{设 } l \text{ 的弧长为 } s, \text{ 在 } l \text{ 上, } |f(z)| \leq M, \text{ 则}$$

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq \int_l |f(z)| ds \leq Ms.$$

如果曲线 l 的参数方程是

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \text{ 从 } a \text{ 到 } b,$$

即 l 的复数式方程为

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \text{ 从 } a \text{ 到 } b.$$

因为

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

$$\begin{aligned} \int_l f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt + \\ &\quad + i \int_a^b [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt, \end{aligned}$$

所以复变函数的计算公式为:

$$\int_l f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3)$$

它是将曲线 l 的复数式方程代入被积表达式后, 化为从起点对应的参数 a 到终点对应的参数 b 上的定积分.

例 1 计算 $\int_l \operatorname{Re} z dz$, 其中 l 是从点 O 到点 $1+i$ 的 1° 直线; 2° 抛物线 $y = x^2$.

解 1° l 的参数方程

$$x = t, \quad y = t, \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } 1,$$

表为复数式为

$$z = (1+i)t, \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } 1.$$

由于 $z(t) = 1 + i$, 所以

$$\int_l \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t(1+i) \, dt = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

2° l 的方程为

$$z = x + ix^2, \quad x \text{ 从 } 0 \text{ 到 } 1.$$

因此

$$\begin{aligned} z &= 1 + i2x, \\ \int_l \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 x(1 + i2x) \, dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

例 2 试证 $\frac{1}{C(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$ 其中 $n=0, \pm 1, \dots$. C 是以 z_0

为圆心, R 为半径的正向圆周.

解 C 的方程为

$$z = z_0 + Re^{it}, \quad \text{从 } 0 \text{ 到 } 2\pi,$$

因此

$$\begin{aligned} z &= z_0 + Re^{it}, \\ \frac{1}{C(z-z_0)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{R^{n+1}e^{i(n+1)t}} dt = \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt \\ &= \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} [\cos nt - i \sin nt] dt \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n=0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n \neq 0 \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

这个积分结果以后不止一次用到它, 注意它与 z_0 及 R 均无关.

13.3.2 解析函数的积分

第二型曲线积分运算有一类特别简单的情况, 就是在一定条件下, 曲线积分与路径无关的情况, 它反映客观事物的和谐性, 有着广泛的应用. 复变函数的积分是否也有类似的情况呢? 解析函数作为一类特殊的复变函数, 它的积分有何特性?

由于解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部和虚部, 满足 C-R 方程

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x},$$

所以, (2) 式右边的两个第二型曲线积分均与路径无关, 因此, 解析函数的积分有如下的重要结论:

定理 13.6 (柯西积分定理) 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则在 D 内的任一简单且分段光滑的有向闭曲线 C 上.

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

习惯上, 将简单且分段光滑的正向闭曲线, 称为闭路.

推论 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则在 D 内, 积分 $\int_l f(z) dz$ 与路径无关, 仅与起点和终点有关.

当积分 $\int_l f(z) dz$ 与路径无关时, 常常把它记为

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

其中 z_0 为 l 的起点, z 为终点, 如果固定起点 z_0 , 这个积分就是 D 内点 z 的单值复变函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad (4)$$

定理 13.7 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 (4) 式表达的函数 $F(z)$ 也在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

证明 由于 u, v 满足 C - R 方程, 所以

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx - v dy + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v dx + u dy \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\left(\int u dx - v dy\right) + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\left(\int v dx + u dy\right) \\ &= \left[\int u dx - v dy\right]_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} + i \left[\int v dx + u dy\right]_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}, \end{aligned}$$

其中 $\int u dx - v dy$, $\int v dx + u dy$ 分别是 $u dx - v dy$, $v dx + u dy$ 的原函数. 显然, $\int u dx - v dy = \int u dx - v dy - \int u dx - v dy$, $\int v dx + u dy = \int v dx + u dy - \int v dx + u dy$ 为 $F(z)$ 的实部与虚部, 它们都是可微的, 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int u dx - v dy \right) &= u(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\int u dx - v dy \right) &= -v(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\int v dx + u dy \right) &= v(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\int v dx + u dy \right) &= u(x, y), \end{aligned}$$

所以, $F(z)$ 满足 C - R 方程, 故 $F(z)$ 解析, 且

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int u dx - v dy \right) + i \frac{\partial}{\partial x} \left(\int v dx + u dy \right) = u + iv = f(z). \quad \square$$

称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数, $F(z) + C$ 为 $f(z)$ 的不定积分, 其中 C 是任意复常数. 由定理 13.7 的证明, 还可看出如下结论:

推论 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数, 则有公式

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(\zeta) \Big|_{z_0}^z = F(z) - F(z_0).$$

例 3 $\int_{1+i}^0 z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{1+i}^0 = -\frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(1-i).$

$$\oint_C z^2 dz = 0.$$

设 $f(z)$ 在多连通区域 D 内解析, C 为 D 内一条简单闭曲线. 如果 C 所包围的区域的点都属于 D , 则 $f(z)$ 在 C 所围成的闭区域上

解析. 从而 $\oint_C f(z) dz = 0$. 如果 C 所包围的区域内有不

属于 D 的点, 则在这个区域内, 用 n 条简单闭曲线 C_1, C_2, \dots, C_n 将这些不属于 D 的点包围起来, 且使这 n 条闭曲线互不相交, 互不包围, 都在 C 包围的区域内 (见

图 13.4), 则 $f(z)$ 在以 $\Gamma = C + C_1 + \dots + C_n$ 为复合边界的区域 G 及 Γ 上解析. 于是有如下结论:

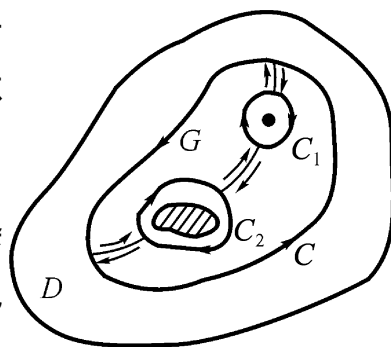


图 13.4

定理 13.8 (复合闭路定理) 设 $f(z)$ 在以复合闭路 Γ 为边界的闭区域 G 上解析, 则

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

即

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz. \quad (5)$$

对区域 G , Γ 的方向始终一致. C_k 与 C 反向.

定理 13.6 的推论和定理 13.8, 说明曲线积分的路径在解析区域内可以任意连续变形.

13.3.3 柯西积分公式和导数公式

利用复合闭路定理, 能够得到另一个重要定理. 在许多重要场合, 柯西积分定理的作用是通过它表现出来的.

定理 13.9 若 $f(z)$ 在闭路 C 所围成的闭区域 G 上解析, z_0 为 D 内的任一点, 则有柯西积分公式:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (6)$$

证明 因为 $f(z)$ 在 D 上解析, 故在 z_0 处连续, 这样, $\delta > 0, \eta > 0$, 使得当 $z \in U(z_0, \delta) \cap D$ 时, 恒有

$$|f(z) - f(z_0)| < \eta.$$

取圆周 $K: |z - z_0| = R (R < \delta)$, 则由复合闭路定理有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= f(z_0) \oint_K \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

$$= 2 \pi i f(z_0) + \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz,$$

从而

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2 \pi i f(z_0) \right| = \left| \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{R} \cdot 2 \pi R = 2 \pi.$$

由 ϵ 的任意小性知

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad \square$$

柯西积分公式(6)表明,只要知道解析函数在区域边界上的值,它在区域内部任一点的值就确定了,特别地,有重要结论:

如果两个解析函数在区域边界上处处相等,则它们在整个区域上恒等.

例 4 求积分 $\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)} dz$, 其中 C 是以点 $3i$ 为圆心, 2 为半径的圆周.

解 复变函数 $f(z) = \frac{e^z}{z}$ 在圆 C 及圆内解析, 因此, 利用柯西积分公式有

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2 \pi i f(2i) = 2 \pi i \cdot \frac{e^{2i}}{2i} = (\cos 2 + i \sin 2).$$

例 5 计算积分 $\int_{C_k} \frac{dz}{1+z^2}$, 其中: $1^\circ C_1: |z-i|=1$; $2^\circ C_2: |z+i|=1$;

$3^\circ C_3: |z|=2$.

解

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}.$$

$1^\circ C_1: |z-i|=1$, 在 C_1 所围的闭区域上, 函数 $\frac{1}{z+i}$ 解析, 由柯西积分公式得

$$\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{C_1} \frac{1}{z-i} dz = 2 \pi i \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi i.$$

$2^\circ C_2: |z+i|=1$. 在 C_2 所围的闭区域上, 函数 $\frac{1}{z-i}$ 解析, 由柯西积分公式得

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{C_2} \frac{1}{z+i} dz = 2 \pi i \frac{1}{z-i} \Big|_{z=-i} = -\pi i.$$

$3^\circ C_3: |z|=2$. 在 C_3 所围的闭区域上, 除 $z = \pm i$ 外, 处处解析, 由复合闭路定理和 $1^\circ, 2^\circ$ 的结果得

$$c_3 \frac{dz}{1+z^2} = c_1 \frac{dz}{1+z^2} + c_2 \frac{dz}{1+z^2} = - = 0 .$$

定理 13.10 若 $f(z)$ 在闭路 C 所围成的闭区域 \bar{D} 上解析, z_0 为 D 内的任一点, 则 $f(z)$ 在 z_0 处有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n=1, 2, \dots \quad (7)$$

证明略. 公式(7)称为解析函数的导数公式.

这个定理表明, 在一个区域内, 复变函数若有导数就有各阶导数. 这是与实变函数的一个重大差别, 也就是说解析函数有任意阶导数.

要强调指出的是: 定理 13.9 和定理 13.10 中的闭路 C , 可以是复合闭路, 所以区域 D 也可以是多连通的.

例 6 求积分 $\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$, 其中 C 是包围着点 i 的任意简单光滑正向闭曲线.

解 设 $f(z) = \cos z$, 由导数公式(7), 得

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)' \Big|_{z=i} = -i \cos i = -\frac{1}{2}(e + e^{-1})i .$$

13.4 解析函数的级数表示

第十二章介绍了无穷级数, 以复数为项的无穷级数称为复无穷级数. 它收敛的充要条件是它的实部和虚部构成的两个实无穷级数都收敛. 本节将利用复无穷级数, 进一步讨论解析函数.

13.4.1 幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \dots + C_n (z - z_0)^n + \dots \quad (1)$$

的函数项级数, 称为复幂级数, 当 $z_0 = 0$ 时, 级数(1)变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C_0 + C_1 z + \dots + C_n z^n + \dots \quad (2)$$

与实幂级数类似, 复幂级数(1)有一个收敛圆 $|z - z_0| < R$, R 称为收敛半径,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} .$$

在收敛圆 $|z - z_0| < R$ 内, 级数(1)绝对收敛(即各项取模后的正项级数收

敛);且级数(1)可逐项积分和逐项求导,因此幂级数的和函数在收敛圆内是解析函数.

例 1 求 $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ 的收敛圆.

解 因为

$$R=\lim _n \frac{\left|C_n\right|}{\left|C_{n+1}\right|}=1,$$

所以收敛圆为

$$|z|<1 .$$

解析函数是否可以用幂级数表示呢?

定理 13.11(泰勒展开定理) 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D, R$ 为 z_0 到 D 的边界的距离, 则当 $|z-z_0|<R$ 时, 有

$$f(z)=C_0+C(z-z_0)+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\ldots, \tag{3}$$

其中系数

$$C_n=\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}, \quad n=0,1,2, \ldots . \tag{4}$$

证明 由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D$. 取 $r<R$, 记圆周 $C:|z-z_0|=r$, 则由柯西积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2 \pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d \zeta, \quad \text { 当 }|z-z_0|<r \text { 时,} \tag{5}$$

由于 $|z-z_0|<| \zeta-z_0|$, 故由等比级数的敛散性知

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\left(\zeta-z_0\right)\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\zeta-z_0\right)^n}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}},$$

代入(5)式, 逐项积分, 并利用柯西积分公式得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z-z_0\right)^n}{2 \pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}} d \zeta=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}\left(z-z_0\right)^n . \quad \square$$

(3) 式称为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开式.

推论 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析的充要条件是 $f(z)$ 在 z_0 附近可表为幂级数.

不难得到下列函数的泰勒展开式:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots, \quad|z|<1 .$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \quad|z|< \infty .$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n \frac{z^{2 n+1}}{(2 n+1)!}+\ldots, \quad|z|< \infty .$$

解析函数的泰勒级数(3)在收敛圆内就等于原来的解析函数,这与实变函数不同,实变函数的泰勒级数何时收敛到原来函数上,还要讨论它的泰勒公式的余项何时趋于零.

解析函数能够用幂级数表示,这一事实具有深远的数学意义.

13.4.2 洛朗级数

在实际问题中,常常遇到在 z_0 点不解析,但在 z_0 点附近的某个圆环内解析的函数 $f(z)$.此时 $f(z)$ 不能仅用含有 $(z - z_0)$ 的正幂项的级数表示、本段将说明,这种在圆环域内解析的函数可以用含有 $(z - z_0)$ 的正、负幂项的级数——洛朗级数表示,因而洛朗级数也是研究解析函数的重要工具,尤其在研究解析函数局部性质方面扮演着重要的角色.

定义 13.7 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n \tag{6}$$

的级数称为洛朗级数,其中 $z_0, C_n (n=0, \pm 1, \dots)$ 均为复常数.

把洛朗级数(6)分成含有正幂项和负幂项的级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \dots + C_n (z - z_0)^n + \dots, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n} = C_{-1} (z - z_0)^{-1} + \dots + C_{-n} (z - z_0)^{-n} + \dots. \tag{8}$$

级数(7)称为(6)的解析部分,级数(8)称为(6)的主要部分,当级数(7), (8)同时在点 z 处收敛时,说洛朗级数(6)在点 z 处收敛,且它的和等于(7), (8)的和相加.

级数(7)是一个幂级数,设其收敛半径为 $R_2 > 0$,则级数(7)在 $|z - z_0| < R_2$ 内绝对收敛,它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析.

对级数(8),令 $w = \frac{1}{z - z_0}$,则(8)化为 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} w^n$ 的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} w^n = C_{-1} w + C_{-2} w^2 + \dots + C_{-n} w^n + \dots. \tag{9}$$

设级数(9)的收敛半径为 ρ ,若 $\rho > 0$,则幂级数(9)在圆域 $|w| < \rho$ 内绝对收敛,它的和函数在 $|w| < \rho$ 内解析,因此级数(8)在 $R_1 < |z - z_0| < +\infty, R_1 = \frac{1}{\rho}$ 内绝对收敛,它的和函数在 $R_1 < |z - z_0| < +\infty$ 内解析.

当 $R_1 < R_2$ 时,级数(7)与(8)有公共的收敛域,因此,洛朗级数(6)的收敛域

洛朗 Laurent P. M. H. 1813—1854,法国数学家.

是圆环域

$$R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

有时 $R_1 = 0, R_2 = +\infty$.

定理 13.12 若洛朗级数(6)有收敛域, 则必为圆环域 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ ($0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$), 级数(6)在 D 内绝对收敛, 其和函数在 D 内解析, 可逐项积分和逐项微分.

还可以证明如下定理:

定理 13.13 若函数 $f(z)$ 在圆环域 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 则在 D 内 $f(z)$ 可展开为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

其中系数

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (10)$$

闭路 C 为圆周 $|z - z_0| = R, R_1 < R < R_2$.

例 2 求 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在如下圆环域内的洛朗展开式, $1^\circ 1 < |z| < 2$; $2^\circ 2 < |z| < +\infty$.

解

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

第一项的奇点为 $z=2$, 第二项的奇点为 $z=1$.

1° 在圆环域 $1 < |z| < 2$ 内, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, 故

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z}^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

2° 在圆环域 $2 < |z| < +\infty$ 内, $\left|\frac{2}{z}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, 故

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z}^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}. \end{aligned}$$

例 3 求函数 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开式.

解 注意到当 $|z| < +\infty$ 时, 有

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

而当 $0 < |z| < +\infty$ 时, $0 < \left| \frac{1}{z} \right| < +\infty$, 故在上式中, 令 $w = \frac{1}{z}$, 得

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots,$$

于是

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n} + \dots, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

设 $f(z)$ 在点 z_0 的某邻域 $|z - z_0| < \rho$ 内, 除点 z_0 外都解析, z_0 为奇点, 则说 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 由定理 13.13, 在挖去孤立奇点 z_0 而形成的环域上解析函数 $f(z)$ 可以展开为洛朗级数 (6). 洛朗展开是研究解析函数在孤立奇点附近性状的工具.

在洛朗级数中, $(z - z_0)^{-1}$ 的系数

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

具有特殊重要的地位, 称之为孤立奇点 z_0 的留数, 记为 $\text{Res}(f, z_0)$. 利用它可计算某些奇异积分, 还可推出自动控制论中重要的辐角原理. 本章对复变函数的留数理论及保角变换未作介绍, 有兴趣的读者可查看复变函数书籍.

13.5 解析函数的应用举例

从物理学知道, 如果在一个平面静电场

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$$

内没有带电物体, 那么该场是一个无源无旋平面向量场.

由于其无源性, 有

$$\frac{E_x}{x} = - \frac{E_y}{y}. \tag{1}$$

由场论知

$$- E_y dx + E_x dy$$

必是某一二元函数 $\varphi(x, y)$ 的全微分, 即

$$d\varphi(x, y) = - E_y dx + E_x dy.$$

不难看出, 静电场 \mathbf{E} 在等值线 $\varphi(x, y) = C$ 上任意一点处的向量 \mathbf{E} 与等值线相切, 即等值线都是向量线, 即场中的电力线. 因此, 称 $\varphi(x, y)$ 为力函数.

又由于场 \mathbf{E} 的无旋性, 得

$$\frac{E_y}{x} = \frac{E_x}{y}, \quad (2)$$

因此在单连通区域内

$$- E_x dx - E_y dy$$

也是某一二元函数 (x, y) 的全微分, 即

$$d(x, y) = - E_x dx - E_y dy, \quad (3)$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial x} = - E_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} = - E_y. \quad (4)$$

(4) 式恰好是 的梯度 grad 的两个分量, 即

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} = - E \mathbf{i} - E \mathbf{j} = - \mathbf{E} \quad (5)$$

所以 (x, y) 是场 E 的势函数, 也可称为场的电势或电位. 等值线 $(x, y) = C_2$ 称为等势或等位线.

由方程(1)及(2)不难看出, 是 的共轭调和函数. 解析函数

$$w = f(z) = (x, y) + i(x, y)$$

称为静电场的复势(或复电位).

由(5)可知, 场 \mathbf{E} 可以用复势表示为:

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial x} = - i \overline{f'(z)}. \quad (6)$$

利用静电场的复势, 可以研究场的等势线和电力线的分布情况, 描绘出场的图像.

例 求均匀带电的无限长直线所产生的静电场的复势, 已知直线上电荷线密度为 .

解 根据库仑定律, 平面上任意一点 $z = x + iy$ 的电场强度的大小为

$$|\mathbf{E}| = \frac{2}{r},$$

式中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. 考虑到 \mathbf{E} 的方向, 我们得到

$$\mathbf{E} = \frac{2}{r} \mathbf{r}^0,$$

式中 \mathbf{r}^0 是指向点 z 的向径上的单位向量, 可以用复数 $\frac{z}{|z|}$ 表示. 因此有

$$\mathbf{E} = \frac{2}{z},$$

从而由(6)式就有

$$f(z) = i \overline{\mathbf{E}} = - \frac{2i}{z},$$

所以, 场的复势为

$$f(z) = 2i \operatorname{Ln} \frac{1}{z} + C.$$

力函数和势函数分别为

$$(x, y) = 2 \operatorname{Arg} z + C_1, \quad (x, y) = 2 \ln \frac{1}{|z|} + C_2.$$

该场的图像描绘如图 13.5 (实线表示电力线, 虚线表示等势线) .

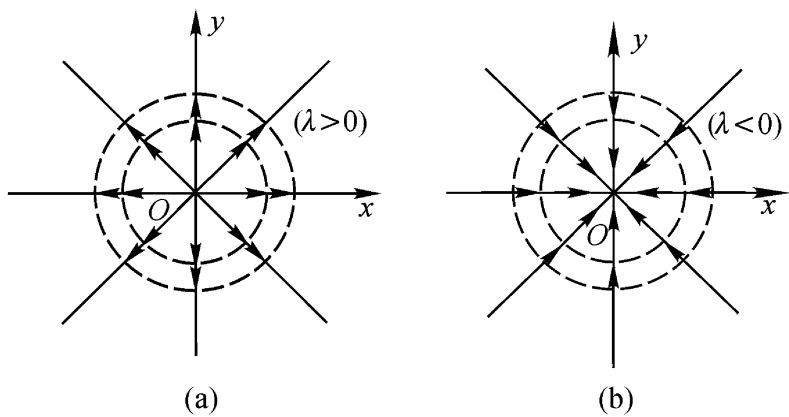


图 13.5

如果导线竖在 $z = z_0$, 则复势为

$$f(z) = 2i \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_0} + C$$

习 题 十 三

13.1

1. 求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角 .

$$(1) \frac{1}{3 + 2i}; \quad (2) \frac{(3 + 4i)(2 - 5i)}{2i};$$

$$(3) i^8 - 4i^{21} + i.$$

2. 将下列复数化成三角表示式和指数表示式 .

$$(1) i; \quad (2) -1; \quad (3) 1 + i\sqrt{3}; \quad (4) 1 - \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

3. 指出下列各题中点 z 的存在范围, 并作图 .

$$(1) |z - i| = 6; \quad (2) |z + 2i| = 1;$$

$$(3) |z + i| = |z - i|; \quad (4) |1/z| < 3;$$

$$(5) \left| \frac{z-3}{z-2} \right| = 1.$$

4. 设函数 $w = z^2$, 试问它把 z 平面上的下列曲线分别变成 w 平面上的何种

曲线？

- (1) 以原点为心、2 为半径, 在第一象限里的圆弧;
- (2) 倾角 $= \pi/3$ 的直线(可以看成两条射线 $\arg z = \pi/3$ 及 $\arg z = \pi/3 + \pi$);
- (3) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

13 2

1. 下列函数何处可导？何处解析？

- (1) $f(z) = x^2 - iy$;
- (2) $f(z) = xy^2 + ix^2y$;
- (3) $f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + i \frac{x-y}{x^2+y^2}$;
- (4) $f(z) = \operatorname{Im} z$.

2. 试确定下列函数的解析区域, 并求出导数.

- (1) $f(z) = (z-1)^2(z^2+3)$;
- (2) $f(z) = z^3 + 2iz$;
- (3) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$;
- (4) $f(z) = \frac{2z+1}{z^3+1}$.

3. 试证下列函数在 z 平面上任何点都不解析.

- (1) $x+y$;
- (2) $\operatorname{Re} z$;
- (3) $\frac{1}{|z|}$.

4. 证明: 如果函数 $f(z) = u+iv$ 在区域 D 内解析, 并满足下列条件之一, 那么 $f(z)$ 是常数.

- (1) $f(z)$ 恒取实值;
- (2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析;
- (3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

5. 验证下列函数是调和函数, 并求出以 $z = x+iy$ 为自变量的解析函数 $w = f(z) = u+iv$.

- (1) $v = \arctan \frac{y}{x}, \quad x > 0$;
- (2) $u = e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y, \quad f(0) = i$;
- (3) $u = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$;
- (4) $v = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f(2) = 0$.

6. 求 $\operatorname{Ln}(-i), \operatorname{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值.

7. 求 $e^{1-i\sqrt{2}}, \exp[(1+i)\sqrt{4}], \sqrt[3]{i}$ 和 $(1+i)^i$ 的值.

8. 设 $f(z) = u+iv$ 为解析函数, 且 $f'(z) \neq 0$, 证明等值线 $u = C$ 和等值线 $v = C$ 正交.

13 3

1. 分别沿 $y = x$ 与 $y = x^2$ 算出积分 $\int_0^{1+i} (x^2 + iy) dz$ 的值.

2. 计算积分 $\int_C \frac{1}{z} dz$, 其中 C 是一条闭路, 由直线段: $-1 \leq x \leq 1, y = 0$

与上半单位圆周组成.

3. 直接得出下列积分的结果, 并说明理由.

$$(1) \int_{|z|=1} \frac{3z+5}{z^2+2z+4} dz;$$

$$(2) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos z} dz;$$

$$(3) \int_{|z|=2} e^z (z^2+1) dz;$$

$$(4) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}.$$

4. 沿指定曲线的正向计算下列各积分.

$$(1) \int_C \frac{e^z}{z-2} dz, \quad C: |z-2|=1;$$

$$(2) \int_C \frac{\cos z}{(z-1)^5} dz, \quad C: |z|=r>1;$$

$$(3) \int_C \frac{\sin z}{z-\frac{1}{2}} dz, \quad C: |z|=2;$$

$$(4) \int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, \quad C: |z|=\frac{3}{2};$$

$$(5) \int_C \frac{3z^2+7z+1}{(z+1)^3} dz, \quad C: |z+i|=1;$$

$$(6) \int_C \frac{dz}{z^2-a^2}, \quad C: |z-a|=a(a>0);$$

$$(7) \int_C \frac{2z+2}{(z^4-1)} dz, \quad C: |z-(1+i)|=2.$$

13.4

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛, 而在 $z=3$ 发散?

2. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式, 并指出它们的收敛半径.

$$(1) \frac{z-1}{z+1}, \quad z_0=1; \quad (2) \frac{1}{4-3z}, \quad z_0=1+i.$$

3. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数.

$$(1) \frac{1}{z(1-z)^2}, \quad 0<|z|<1, \quad 0<|z-1|<1;$$

$$(2) \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad 0<|z-1|<1, \quad 1<|z-2|<+\infty;$$

$$(3) \frac{1}{z(i-z)}, \quad 0<|z-i|<1;$$

(4) $\sin \frac{1}{1-z}, \quad 0 < |z-1| < +\infty.$

4. 设 D 为单连通区域, 下述条件中与函数 $f(z) = u + iv$ 在 D 上解析不等价的是().

(A) 在 D 内, $f(z)$ 处处可导

(B) 在 D 内, u, v 可微, 且满足 C - R 方程

(C) 在 D 内, u, v 都是调和函数

(D) 在 D 内, 积分 $\int_{\gamma} f(z) dz$ 与路径无关

(E) 在 D 中任一点的某邻域内, $f(z)$ 可展为泰勒级数

第十四章 微分几何基础知识

微分几何是用微积分方法研究曲线、曲面的数学分支.因为工程中物体的运动和机件的形状都与曲线及曲面有关,所以微分几何在有形工程问题的研究中是必不可少的基础,特别是在计算机辅助设计中微分几何有着广泛的应用.本章仅概述微分几何的基础知识,为进一步学习奠定基础.

14.1 向量分析概述

坐标与向量是研究几何问题的主要工具.向量代数是大家熟知的,向量分析的部分知识在前几章也曾分散地接触过,现在做简要的整理和补充.

对给定的(单参数的)向量函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I,$$

若固定起点,则终点描出的曲线称为 $\mathbf{r}(t)$ 的图形.反之,称 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 为曲线的方程.在空间直角坐标系下, $\mathbf{r}(t)$ 用分量表示为

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I,$$

则

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in I$$

就是曲线的参数方程.

一元函数的极限、连续、导数、微分、积分和无穷级数等分析概念和运算都以同样的形式推广到向量函数上来,而且,它们与其各个分量相应的概念和运算关系如下:

$$1^\circ \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0.$$

$$2^\circ \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

$$3^\circ \quad d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) dt.$$

$$4^\circ \quad \mathbf{r}'(t) dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}_0 \quad (\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}'(t), \mathbf{R}_0 \text{ 为任意常向量}).$$

$$5^\circ \quad \int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{i} \int_a^b x(t) dt + \mathbf{j} \int_a^b y(t) dt + \mathbf{k} \int_a^b z(t) dt.$$

由于向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 的导数 $\mathbf{r}'(t)$ 是曲线在 t 处指向 t 增加方向的切向量,所以,当 $dt > 0$ 时,微分

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) dt = (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

也是指向 t 增加方向的切向量, 其模

$$|d\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = ds,$$

ds 是曲线的弧微分. 因此, 若用 \mathbf{T} 表示曲线在 t 处指向 t 增加方向的单位切向量时.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T} ds,$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}.$$

向量函数的微积分运算与数量函数微积分运算有同样的法则与公式, 如

$$1^\circ (\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.$$

$$2^\circ (\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{r}.$$

$$3^\circ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2.$$

$$4^\circ (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{r}_2.$$

$$5^\circ (\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3).$$

$$6^\circ \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

提醒注意的是, 在向量分析中, 不能一概照搬微积分的结果.

1. 中值定理问题

对于向量的各个分量, 只要满足中值定理的条件, 引用中值定理的结论是正确的, 但将中值定理用在向量函数整体上, 会造成谬误. 如向量函数

$$\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, 0),$$

在 $[0, 2\pi]$ 上连续, 在 $(0, 2\pi)$ 内可导, 且 $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$, 满足罗尔定理的条件, 但因为

$$|\mathbf{r}'| = |(-\sin t, \cos t, 0)| = 1 \neq 0,$$

所以, 在 $(0, 2\pi)$ 内不存在使 $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$, 其原因是三个分量据罗尔定理所求得的值一般不等, 因此应当牢记: 中值定理及其相关理论在向量分析中只能用于分量表达式上.

2. 泰勒公式的余项问题

设 $\mathbf{r}(t)$ 在 t 的某邻域内有 $n+1$ 阶导数, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t+\Delta t) &= x(t+\Delta t)\mathbf{i} + y(t+\Delta t)\mathbf{j} + z(t+\Delta t)\mathbf{k} \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{x^{(l)}(t)}{l!} \Delta t^l + \frac{x^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \Delta t^{n+1} \mathbf{i} + \\ &\quad \sum_{l=0}^n \frac{y^{(l)}(t)}{l!} \Delta t^l + \frac{y^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \Delta t^{n+1} \mathbf{j} + \\ &\quad \sum_{l=0}^n \frac{z^{(l)}(t)}{l!} \Delta t^l + \frac{z^{(n+1)}(\xi_3)}{(n+1)!} \Delta t^{n+1} \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t) t + \frac{\mathbf{r}''(t)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t)}{n!} t^n + \frac{1}{(n+1)!} (x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}(t), z^{(n+1)}(t)) t^{n+1}.$$

虽然 $x_i(t, t+\Delta t) (i=1, 2, 3)$, 但一般不相等, 所以向量函数的泰勒公式余项只能简记为

$$t^{n+1} \text{ 或 } o(|t|^n),$$

不能以 $\frac{\mathbf{r}^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} t^{n+1}$ 形式出现.

最后, 介绍三类常用的特殊向量函数.

1. 定长向量函数, 它的图形是球面上的曲线, 所以向量与其导向量垂直.
2. 定向向量函数, 它的图形是直线, 所以向量与其导向量平行.
3. 平行于固定平面的向量, 它的一阶导向量、二阶导向量都与此平面平行, 即这些向量共面.

进一步有如下结论:

定理 14.1 设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 具有二阶连续导数, 则

- (i) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是定长向量函数的充要条件是 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$;
- (ii) 当 $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是定向向量函数的充要条件是 $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$;
- (iii) 当 $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是平行于固定平面的向量函数的充要条件是 $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0$.

证明 仅证 (i), (ii), (iii) 留作练习. 因为

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}|^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}',$$

所以, 当 $|\mathbf{r}| = C$ 时, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$; 当 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ 时, $|\mathbf{r}|^2 = C$, \mathbf{r} 是定长的. \square

14.2 曲线论的基本知识

曲线论研究曲线固有的局部属性, 它与坐标、参量的选取无关, 通常称这样的量为运动不变量.

本节假设 $\mathbf{r}(t)$ 具有三阶导数, 且 $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$. 对曲线:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I,$$

若 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, 则说 $\mathbf{r}(t)$ 是正则曲线. 下面讨论的曲线都是正则的.

选取恰当的坐标系将给研究工作带来方便. 比如战斗机的飞行员总要以自己时时刻刻的位置为坐标原点, 即以流动坐标来控制飞行, 而不是以地面指挥塔为原点的固定坐标系来控制飞行. 下面先介绍曲线上的流动坐标——弗

14 2 1 弗雷内标架

设 P 是曲线 C 上的点, 对应参量为 t , 即 $\mathbf{r}(t)$ 是点 P 的向径. 由于曲线 C 在点 P 处的切向量为 $\mathbf{r}'(t)$, 所以, 切线与法平面的方程依次为:

$$\begin{aligned} &= \mathbf{r}(t) + \mu \mathbf{r}'(t), \\ &\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = 0, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{r} 为切线或法平面上点的向径, μ 为实的参变数 .

在法平面上, 凡是通过点 P 的直线, 均称为曲线 C 在点 P 处的法线. 以切线为轴的平面束中, 每一个平面均称为曲线 C 在点 P 处的切平面 .

设 P_1 是曲线 C 上邻近 P 的点, 对应参量为 $t + \Delta t$, π_1 为过 P 点处的切线及点 P_1 的平面, 若 P_1 沿曲线 C 趋于 P 时, π_1 有极限位置平面, 则称此平面为曲线 C 在点 P 处的密切面 .

密切面是所有切平面中, 与曲线 C 在 P 点附近最贴近的切平面, 特别地, 当 C 为平面曲线时, 它所在的平面就是 C 上每一点的密切面. 密切面与法平面垂直 .

由于

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{r}''(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{r}'''(t) \Delta t^3] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'''(t) \Delta t^3 \end{aligned}$$

是平面 π_1 的一个法向量, 除以 $\frac{1}{2} \Delta t^2$ 仍然是 π_1 的法向量, 所以令 $\Delta t \rightarrow 0$, 易知

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

是密切面的法向量, 称之为曲线 C 在点 P 处的从法向量(或副法向量) .

过点 P 以从法向量为方向向量的直线, 称为曲线 C 在点 P 处的从法线(或副法线), 从法线和密切面的方程依次为

$$\begin{aligned} &= \mathbf{r}(t) + \mu(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)), \\ &(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = 0 . \end{aligned}$$

过从法线的切平面, 称为曲线 C 在点 P 处的从切面, 向量

$$(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}(t)$$

是从切面的法向量, 称为曲线 C 在点 P 处的主法向量 .

过点 P 以主法向量为方向向量的直线, 称为曲线 C 在点 P 处的主法线. 主

弗雷内 Frenet F . 1816—1868, 法国数学家 .

法线和从切面的方程依次为:

$$\begin{aligned} &= \mathbf{r}(t) + \mu [(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) \times \mathbf{r}(t)], \\ &[(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) \times \mathbf{r}(t)] \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t)) = 0. \end{aligned}$$

上述相互垂直的三条直线和三个平面构成的右手坐标系,称为曲线在点 P 处的弗雷内标架(见图 14.1),当 P 在 Γ 上移动时,弗雷内标架随之移动,所以,也称为流动标架.

单位切向量,主法向量,从法向量依次记为 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$,则

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}.$$

它们是弗雷内标架的基本单位向量,可以通过 $\{\mathbf{r}(t), \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ 来表示弗雷内标架.

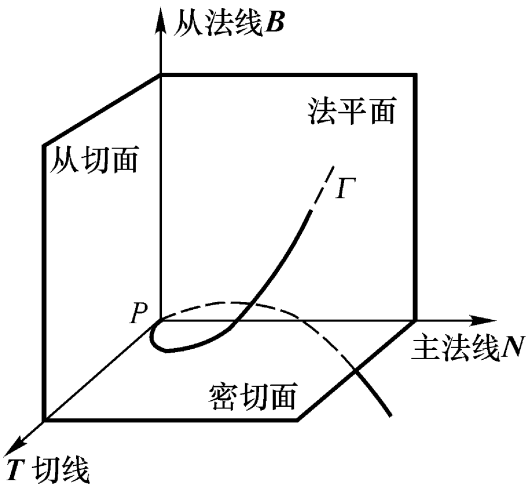


图 14.1

14.2.2 弧长、曲率、挠率

1. 弧长

由于曲线 $\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 从 t_0 到 t 的一段弧长

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt, \tag{1}$$

若 $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1$, 则

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0.$$

说明参数 t 是从 $t = t_0$ 算起的弧长.它指出了检验曲线方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 的参数 t 是否为弧长的方法.显然选择曲线弧长作参数时,会给曲线研究带来便利,这里特别约定,用字母正上方标圆点的记号

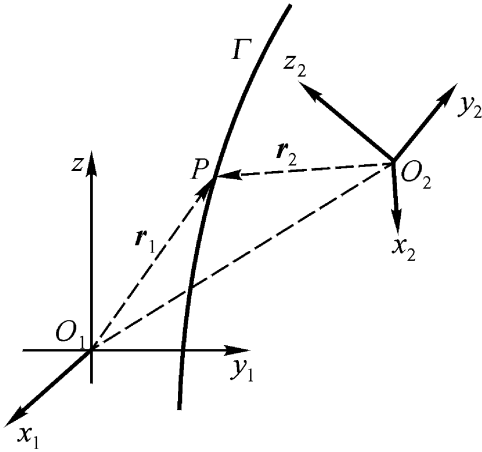


图 14.2

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

表示向量函数对弧长的导数.不难得到

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}', \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{r}''|} (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''). \tag{2}$$

2. 曲率

引理 设 $\mathbf{e}(s)$ 是曲线 $\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 上的任意一个可微的单位向量函数,则有

$$|\mathbf{e}'(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{e}(s) - \mathbf{e}(0)}{s} \right|,$$

其中 \angle 是 $\mathbf{e}(s)$ 与 $\mathbf{e}(s+\Delta s)$ 的夹角(图 14.3) .

证明 因为

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}(s+\Delta s) - \mathbf{e}(s)| &= \left| 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right|, \\ \left| \frac{\mathbf{e}(s+\Delta s) - \mathbf{e}(s)}{\Delta s} \right| &= \left| \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right| \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|, \end{aligned}$$

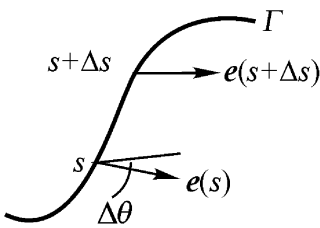


图 14.3

故令 $\Delta s \rightarrow 0$, 得

$$|\mathbf{k}(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{e}(s+\Delta s) - \mathbf{e}(s)}{\Delta s} \right|.$$

定义 14.1 称 $\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)|$ 为曲线 Γ 在 P (即 $\mathbf{r}(s)$) 处的曲率, 并称 $\mathbf{T}'(s)$ 为曲率向量(读作 kappa) .

当 $\kappa(s) \neq 0$ 时, 称 $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ 为 s 处的曲率半径 .

由引理知, 曲率是曲线切向量的转角 $\Delta\theta$ 对弧长 s 的变化率, 反映曲线上一点处切线方向随弧长变化的快慢, 它刻画了曲线在一点处的弯曲程度, 与第七章 7.3.2 段给出的平面曲线的曲率定义是一致的. 因为

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{r}}|, \tag{3}$$

$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{T}' = \ddot{\mathbf{r}}$ 及公式 (2), 故曲率向量

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}. \tag{4}$$

当曲线 Γ 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, t 是一般参数时, 由于

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \frac{dt}{ds}^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2},$$

所以

$$|\ddot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \left| \dot{\mathbf{r}} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right|^3,$$

因此得公式

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}(t)}{ds}|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}. \tag{5}$$

对平面曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$, 利用公式 (5) 得曲率公式

$$\kappa(t) = \frac{|x \ddot{y} - y \ddot{x}|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

特别地, 若曲线方程为 $y = y(x)$, 即 $\mathbf{r} = (x, y(x), 0)$ 时, 曲率公式为

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

3. 挠率

称数 $|\mathbf{B}(s)|$ 为曲线 Γ 在 P (即 $\mathbf{r}(s)$) 处的挠率的绝对值, 记为 $|\tau(s)|$.

由引理知, $|\mathbf{B}(s)|$ 是曲线 Γ 在 P 处从法向量转角 θ 对弧长 s 的变化率. 反映了 P 处密切面随弧长变化的快慢. 它刻画了曲线上的动点从 P 处的密切面扭出的速度(见图 14.4).

当 Γ 为平面曲线时, 它所在的平面就是曲线上每一点处的密切面, 因此从法向量 \mathbf{B} 是常向量, $|\mathbf{B}| = 0$, 故平面曲线挠率的绝对值为零.

非平面曲线称为挠曲线.

因为 $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, 所以由(4)式得

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

故 $\mathbf{B} \perp \mathbf{T}$, 又 \mathbf{B} 是单位向量, 故 $\mathbf{B} \perp \mathbf{B}$, 于是 \mathbf{B} 与 \mathbf{N} 共线, 设

$$\mathbf{B} = -\tau \mathbf{N}, \tag{6}$$

则 $\tau = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}$.

定义 14.2 称数 $\tau(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{N}(s)$ 为曲线 Γ 在 P (即 $\mathbf{r}(s)$) 处的挠率.

这个定义既刻画了曲线上动点扭出密切面的速度(相对弧长), 又区分了扭出方向,

$$\tau = \begin{cases} |\mathbf{B}|, & \text{当 } \mathbf{B} \text{ 与 } \mathbf{N} \text{ 反向时,} \\ -|\mathbf{B}|, & \text{当 } \mathbf{B} \text{ 与 } \mathbf{N} \text{ 同向时.} \end{cases}$$

若随着 s 的增大, 动点由密切面向从法向量一侧扭出, 则 τ 取正值; 若动点扭向密切面的另一侧, 则 τ 取负值.

因为

$$\tau = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = -(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{N}),$$

所以挠率的计算公式为

$$\tau = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2} (\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\ddot{\mathbf{r}}}). \tag{7}$$

当曲线 Γ 为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 时, 挠率计算公式为

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'|^2}. \tag{8}$$

根据曲率和挠率的定义知, 直线的曲率 $\kappa = 0$, 反之, 当 $\kappa = 0$ 时, 曲率 $\kappa = 0$ 的曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是直线. 平面曲线的挠率 $\tau = 0$, 反之, 当 $\tau = 0$ 时, 挠率 $\tau = 0$ 的曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是平面曲线. 所以, “曲”是相对“直”而言, “挠”是相对“平”而言.

例 求圆柱螺线 $\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, b) (a > 0)$ 的弗雷内标架、曲率和挠率.

解 求导得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (-a \sin t, a \cos t, 0), & \mathbf{r}'' &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \\ \mathbf{r}''' &= (a \sin t, -a \cos t, 0), & \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2), \end{aligned}$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}) = a^2 b, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\mathbf{r} \times \mathbf{r}| = a \sqrt{a^2 + b^2},$$

所以, 弗雷内标架的三个基本单位向量为

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin \theta, a \cos \theta, b),$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin \theta, -b \cos \theta, a),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0).$$

曲率和挠率依次为

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \\ \tau &= \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r})}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}|^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

14.2.3 曲线论的基本公式、基本定理和自然方程

由公式 $\mathbf{T}' = -\kappa \mathbf{N}$ 和 $\mathbf{B}' = \tau \mathbf{N}$ 可推出

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \frac{d}{ds} (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = \mathbf{B}' \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \mathbf{T}' \\ &= -\tau \mathbf{N} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times (-\kappa \mathbf{N}) = -\tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}, \end{aligned}$$

从而得到曲线论的基本公式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

它表明了弗雷内标架沿曲线运动的规律. 如果把向量 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 都用分量表示, 公式 (9) 可视为含有 9 个未知量的线性微分方程组. 由第八章定理 8.1 (线性方程组解的存在惟一性定理), 只要 $\kappa(s), \tau(s)$ 是连续的, $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 就由初始标架 $\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0$ 惟一确定.

另外, 可以看出, $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 的各阶导数都可由基本单位向量 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 线性表示出来, 所以公式 (9) 是曲线论中最重要的公式, 曲线的许多性质都可由它推出.

曲线的弧长、曲率、挠率是由曲线的形状确定的, 反过来, 已知曲线的曲率和挠率, 由 $\mathbf{r}' = \mathbf{T}$ 和 (9) 式构成的 12 个未知量的线性微分方程组, 也可确定出曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 而且在不考虑它的位置时, 曲线是惟一的, 即所有这些曲线经过刚体运动可以重合.

基本定理 设 $\kappa(s) > 0, \tau(s)$ 是区间 $[a, b]$ 上的任意两个连续可微的函数, 则有且仅有一条正则曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $a \leq s \leq b$, 它以弧长 s 为参数, 以 $\kappa(s)$ 为它的曲率, 以 $\tau(s)$ 为它的挠率.

根据基本定理, 若不计空间位置, 只考虑曲线形状, 则 $\kappa(s) > 0, \tau(s)$

确定惟一一条曲线,所以可以把

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad \kappa = \kappa(s) \tag{10}$$

视为曲线的方程,因为它与坐标无关,作为曲线的自然方程(或内在方程),而称 s 为自然参数(或弧长参数).

作为例子,由于圆柱螺线 $\mathbf{r} = (a\cos t, a\sin t, b t) (a > 0)$ 的曲率、挠率是常数:

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

则由基本定理知,曲率和挠率分别为常数

$$\kappa = \kappa_0 > 0, \quad \tau = \tau_0$$

的曲线必是圆柱螺线,其中一条的方程是

$$\mathbf{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} t.$$

14.3 曲面论的第一基本形式

14.3.1 曲面的参数表示

表面上的点有两个自由度,所以曲面的参数方程中含有两个参变量,即表面可表为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D. \tag{1}$$

如球心在原点半径为 a 的球面的参数方程为

$$\mathbf{r} = (a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi]$$

或

$$\mathbf{r} = (x, y, \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), \quad x^2 + y^2 \leq a^2.$$

又如,已知平面上点 P_0 的向径为 \mathbf{r}_0 ,及平面上两个不平行的向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} ,则此平面可通过参数 μ, ν 表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mu \mathbf{a} + \nu \mathbf{b}, \quad \mu, \nu \in \mathbf{R}.$$

若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为单位向量,且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$,此平面又可通过参数 ρ, φ 表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\cos \varphi) \mathbf{a} + (\sin \varphi) \mathbf{b},$$

其中 ρ 是表面上点 P 到 P_0 的距离, φ 是 $\overline{P_0 P}$ 与 \mathbf{a} 的夹角, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, +\infty)$ (图 14.5).

可见,若坐标与参数选取得不同,曲面方程就不同,所以在处理问题时,恰当地选取坐标和参数十分重要.

在曲面(1)上,若固定 $u = u_0$,只让 v 变,则得到曲面上一条曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$,称为 v 线;同样,称 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ 为 u 线. u 线和 v 线统称为曲面 (1) 的参数曲

线,所有参数曲线构成的网,叫做曲面的参数曲线网,这样可以把 u, v 看做曲面上点的坐标,比如地球表面由经纬线确定点的位置. u 线、 v 线的切向量依次为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \mathbf{r}_v &= \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

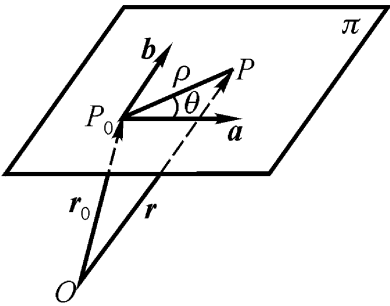


图 14.5

下面要求 $\mathbf{r}(u, v)$ 可微,且曲面方程 (1) 的雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{2}$$

的秩恒为 2,这样的曲面称为正则曲面,条件 (2) 保证了曲面 (1) 上每点处都有切平面.因为曲面 (1) 上的光滑曲线

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(t), v(t))$$

的切向量为

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}_u u'+\mathbf{r}_v v',$$

所以曲面上过点 (u, v) 的任何光滑曲线在该点的切线均在 \mathbf{r}_u 和 \mathbf{r}_v 决定的平面上,此平面就是曲面在点 (u, v) 处的切平面,它的法向量是 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$,也就是曲面在点 (u, v) 处的法向量.单位法向量记为 \mathbf{n} ,则

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right|}.$$

称 $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ 为曲面的活动标架.

14.3.2 曲面论的第一基本形式

微分几何的曲面论主要是研究曲面的局部内在性质:其一是局部度量性质,如曲面上曲线的弧长,两条相交曲线的交角,及曲面片的面积等.其二是曲面在一点处的弯曲性质.

本段讨论局部度量性质.在平面上,对长度、角度和面积起制约作用的是勾股定理,或其推广——余弦定理,对曲面

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$$

上的任一光滑曲线

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(t), v(t)),$$

由于 $ds^2=d\mathbf{r}^2$,及 $d\mathbf{r}=\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv$,于是有

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 \\ &= \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v du dv + \mathbf{r}_v^2 dv^2. \end{aligned}$$

这个二次微分形式在曲面度量性质的研究中将起核心支配作用,记

$$= ds^2, \quad E = \mathbf{r}_u^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v^2, \quad (3)$$

则有

$$\begin{aligned} &= Edu^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ &= (du \ dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

称(4)式为曲面论的第一基本形式,称 E, F, G 为曲面的第一类基本量.

由 $= ds^2$ 可知第一基本形式是正定二次微分形式,

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

许多数学家喜欢将 ds^2 称为线素,引入第一基本形式后,就可以用它直接处理曲面上的度量问题,不必关心曲面在空间的位置.

1. 曲面上曲线的弧长

曲面上曲线 $l: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ 的弧长

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^t \frac{ds}{dt} dt,$$

故由第一基本形式得弧长公式:

$$s(t) = \int_0^t \left(E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right) dt. \quad (5)$$

2. 曲面上曲线的交角

曲面上曲线的交角,是指曲面上两条相交曲线在交点处两切线的夹角,因此若记两切线方向向量为 $d\mathbf{r}$ 和 \mathbf{r} , 则有

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{|d\mathbf{r}| |\mathbf{r}|} = \frac{(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot (\mathbf{r}_u u + \mathbf{r}_v v)}{|ds| |s|},$$

故由第一基本形式和第一基本量得两曲线交角余弦的公式:

$$\cos \theta = \frac{E du u + F(du v + dv u) + G dv v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E u^2 + 2F u v + G v^2}}. \quad (6)$$

由此可见,两曲线正交的充要条件是:

$$E du u + F(du v + dv u) + G dv v = 0.$$

若两曲线是曲面的参数曲线,因为 $dv = 0, u = 0$, 所以参数曲线交角余弦公式为:

$$\cos \theta = \frac{F}{EG} \quad (7)$$

参数曲线正交的充要条件是

$$F = 0.$$

3. 曲面面积

设曲面 的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

D 是 u, v 平面区域, 由于曲面面积微元

$$dS = |\mathbf{r}_u du \times \mathbf{r}_v dv| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv,$$

所以曲面 的面积

$$S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

因为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$, 故

$$D^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2, \quad (8)$$

从而得曲面面积公式:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (9)$$

14.4 曲面论的第二基本形式

14.4.1 曲面论的第二基本形式

本节讨论曲面在一点附近的形状, 即曲面的弯曲情况. 设 P 是正则曲面 $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上一点, π 为曲面在点 P 处的切平面, 其单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{D} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

要刻画曲面 在点 P 处弯曲情况, 最直观的方法是观测曲面上 P 点附近的点 P_1 到切平面 的有向距离 (图 14.6).

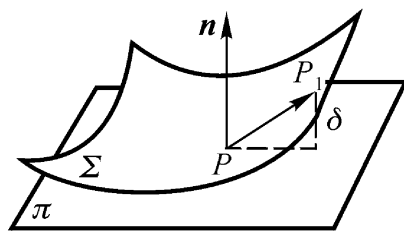


图 14.6

由泰勒公式得

$$\begin{aligned} \overline{PP_1} \cdot \mathbf{n} &= [\mathbf{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{n} \\ &= [\mathbf{r}_u \Delta u + \mathbf{r}_v \Delta v + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{uu} \Delta u^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \Delta u \Delta v + \mathbf{r}_{vv} \Delta v^2) + \\ &\quad \mathbf{o}(\Delta u^2 + \Delta v^2)] \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} \Delta u^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} \Delta u \Delta v + \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} \Delta v^2] + \mathbf{o}(\Delta u^2 + \Delta v^2). \end{aligned}$$

考查曲面在点 P 处的弯曲, 要去掉其他点的影响, 所以去掉高阶无穷小项, 保留的主部. 记这个主部的两倍为 II , 并称

$$\begin{aligned}
 &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \\
 &= (du \ dv) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

为曲面论的第二基本形式, 其中

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}, \tag{2}$$

称为曲面的第二类基本量.

提醒注意, 第二基本形式 与点 P 有关, 也与方向 (du, dv) 有关. 实际上曲面上一点附近, 不同方向上曲面弯曲的不同, 所以不能像曲线那样用一个常数刻画一点处的弯曲程度. 此外, 与 不同, 是可正可负也可取零值的.

人们已经证明, 曲面的形状是由第一、第二基本形式惟一确定的.

曲面上点 P 处, 使得 $\kappa = 0$ 的方向叫做曲面在 P 点处的渐近方向. 曲面上, 处处沿着渐近方向的曲线, 称为曲面的渐近曲线.

比如, 抛物柱面上的直母线方向, 就是渐近方向, 每条直母线都是抛物柱面的渐近线.

利用 \mathbf{n} 的表达式 $\mathbf{n} = \frac{1}{D} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, 第二类基本量 L, M, N 又可表为

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{D} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu}), \\
 M &= \frac{1}{D} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}), \\
 N &= \frac{1}{D} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

14.4.2 法曲率、主曲率

上段用第二基本形式刻画曲面弯曲情况. 本段讨论曲面上曲线的曲率, 并以此来描述曲面的弯曲程度.

设 $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ 是曲面 $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上过点 P 的光滑曲线, 其参量 s 为弧长, 则在 P 点处 (对应参量为 s) 的切向量为:

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds},$$

曲率向量为:

$$\mathbf{T} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}_u \frac{d^2 u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

在 P 点处, 曲线 γ 的曲率向量 $\mathbf{T} = \ddot{\mathbf{r}}$ 在曲面 Σ 的法向量 \mathbf{n} 上的投影, 称为曲线 γ 在 P 点处的法曲率. 记为 κ_n , 由于

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} \frac{d^2 u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} \frac{d^2 v}{ds^2}] / \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = \kappa_n,$$

所以

$$\kappa_n = \frac{1}{R} \cdot \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n}) \quad (4)$$

由(3)式知,曲面上通过 P 点,且有共同切线的曲线的法曲率相等, κ_n 仅与曲面上的点 P 和方向 (du, dv) 有关,所以,由(4)式确定的 κ_n 也称为曲面在 P 点处的法曲率.因为

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n}),$$

所以曲线在 P 点处的曲率和法曲率满足关系:

$$\kappa_n = \kappa \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n}), \quad (5)$$

(5)式称为梅尼埃(Meusnier)公式.只要曲线的主法向量 \mathbf{N} 与曲面的法向量 \mathbf{n} 不垂直,曲线在 P 点处的曲率都可由(5)式得到.

通过曲面在 P 点处的法线,且与切平面上某方向 (du, dv) 平行的平面,截曲面得到的截线称为曲面在 P 点处沿 (du, dv) 方向的法截线(图 14.7).显然,珙在 P 点处的主法向量 $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ (或 $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$).法截线珙在 P 点处的曲率珙 $\kappa_n = |\kappa \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n})|$,所以,曲面的法曲率的绝对值等于各个方向的法截线的曲率,它的正负号取决于曲面的弯曲方向是否与法向量 \mathbf{n} 的方向一致,因此法曲率也刻画了曲面弯曲的情况.

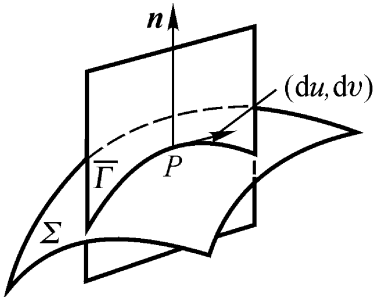


图 14.7

设 P 是曲面上一个定点,若沿曲面的任何方向 (du, dv) 法曲率均相等,则称点 P 为曲面的脐点,特别地,使 $\kappa_n = 0$ 的点,称为平点;使 $\kappa_n = a \neq 0$ 的点,称为圆点.显然,平面上的点都是平点,球面上的点都是圆点,它们又都是脐点.由法曲率公式

$$\kappa_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}$$

知,曲面上一点为脐点的充要条件是在该点处,

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

在曲面上一个定点处,各个方向法曲率的极值,称为曲面在该点的主曲率.取主曲率的方向,称为曲面在该点的主方向.

因为在方向 (du, dv) 中, du, dv 至少有一个不为零,无妨设 $dv \neq 0$,记 $\mu = \frac{du}{dv}$,则有

$$\kappa_n = \frac{L\mu^2 + 2M\mu + N}{E\mu^2 + 2F\mu + G}. \quad (6)$$

由极值的必要条件 $\frac{d\kappa_n}{d\mu} = 0$,对(6)式求导得

$$\frac{2(L\mu + M)(E\mu^2 + 2F\mu + G) - 2(E\mu + F)(L\mu^2 + 2M\mu + N)}{(E\mu^2 + 2F\mu + G)^2} = 0,$$

得驻点

$$n = \frac{L\mu + M}{E\mu + F}.$$

代入(6), 利用比例性质得

$$n = \frac{M\mu + N}{F\mu + G}.$$

两式联立, 消去 μ 或 n , 便得主曲率或主方向的方程, 依次为:

$$\begin{vmatrix} nE - L & nF - M \\ nF - M & nG - N \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

和

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

这是两个一元二次方程, 可以证明在非脐点处两个方程的判别式皆大于零, 于是有结论:

定理 14.2 在曲面的非脐点处有两个互异的主曲率和主方向.

曲面上处处沿着主方向的曲线称为曲率线.

由定理 14.2 知, 在不含脐点的曲面上有两族曲率线, 人们已经证明, 它们是正交的; 参数曲线为曲率线的充要条件是 $F = M = 0$.

14.4.3 欧拉公式

在不含脐点的曲面上, 选择曲率线为参数曲线, 则法曲率公式(4)化为

$$n = \frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Ed u^2 + Gd v^2},$$

此时 u 线($dv=0$)和 v 线($du=0$)的切方向 \mathbf{g}_1 和 \mathbf{g}_2 就是主方向, 对应的法曲率就是主曲率, 将 $dv=0$ 和 $du=0$ 分别代入上式, 得主曲率

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

设过非脐点 P 的 \mathbf{T} 方向与主方向 \mathbf{g}_1 夹角为 θ , 则因 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$, 有

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= [\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_1]^2 = (\mathbf{r}_u u + \mathbf{r}_v v) \cdot \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} \\ &= \frac{|\mathbf{r}_u|^2}{|\mathbf{r}_u|} \frac{du^2}{ds} = \frac{Ed u^2}{Ed u^2 + Gd v^2}, \end{aligned}$$

于是

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{Gd v^2}{Ed u^2 + Gd v^2},$$

从而有

$$\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_n, \tag{9}$$

称(9)为欧拉公式, 虽然推导是在非脐点处进行的, 然而在脐点处, 由于 $\kappa_n = \kappa_1 = \kappa_2$, 公式(9)仍成立.

下面证明 κ_1 和 κ_2 一个是曲率的最大值, 另一个是其最小值.

不妨设 $\kappa_1 > \kappa_2$, 则有

$$\kappa_1 - \kappa_n = \kappa_1 - \kappa_1 \cos^2 \theta - \kappa_2 \sin^2 \theta = (\kappa_1 - \kappa_2) \sin^2 \theta \geq 0,$$

等号仅在 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时出现, 这正是 κ_1 对应的主方向 \mathbf{g} , 又有

$$\kappa_n - \kappa_2 = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta - \kappa_2 = (\kappa_1 - \kappa_2) \cos^2 \theta \geq 0,$$

等号仅在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时出现, 这正是另一个主方向 \mathbf{g} , 上述两式表明

$$\kappa_2 \leq \kappa_n \leq \kappa_1,$$

因此, κ_1, κ_2 一个是法曲率的最大值, 另一个是其最小值.

例 1 见图 14.8. P 是半径为 r 的圆柱面上一点. 在过 P 点的切平面上, 作一条与直母线成 α 角的直线 l_1 , 在 P 点处的法向量 \mathbf{n} 和直母线确定的平面上, 作一条与 \mathbf{n} 成 β 角的直线 l_2 . 求 l_1, l_2 确定的平面与圆柱面的交线 Γ 在 P 点处的曲率.

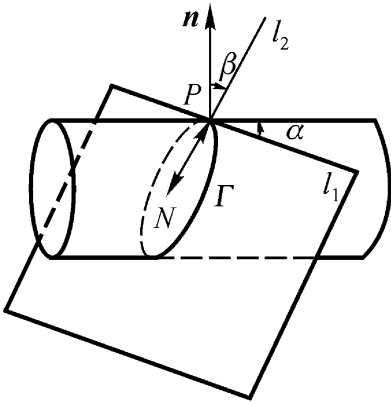


图 14.8

解 曲线 Γ 的曲率 κ_Γ 与 l_1 方向的法曲率 κ_n 满足梅尼埃公式.

$$\kappa_n = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{N}) = -\cos \beta.$$

而圆柱面在 P 点的主曲率 $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = -\frac{1}{r}$, 于是据欧拉公式(9)得

$$\kappa_n = -\frac{1}{r} \sin^2 \theta,$$

综合两式可得

$$\kappa_\Gamma = \frac{\sin^2 \theta}{r \cos \theta}.$$

例 2 求船用螺旋桨叶片工作面

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, b - r \tan \theta)$$

的主曲率(在数控机床加工时, 确定刀具的参数、步长与行距等都会遇到同样的问题).

解 因为

$$\mathbf{r}' = (\cos \theta, \sin \theta, -\tan \theta), \quad \mathbf{r}'' = (-\sin \theta, \cos \theta, b),$$

所以, 第一类基本量为:

$$E = \sec^2 \theta, \quad F = -b \tan \theta, \quad G = r^2 + b^2,$$

$$D = EG - F^2 = r^2 \sec^2 \varphi + b^2,$$

又由

$$\mathbf{r}_r = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \mathbf{r} = (-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, 0),$$

知第二类基本量为:

$$L = 0, \quad M = \frac{-b}{D}, \quad N = -\frac{r^2}{D} \tan \varphi.$$

代入主曲率方程(7)得

$$\begin{vmatrix} r^2 \sec^2 \varphi & -b \tan \varphi + \frac{b}{D} \\ -b \tan \varphi + \frac{b}{D} & -r^2 + b^2 + \frac{r^2}{D} \tan^2 \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$(r^2 \sec^2 \varphi + b^2) \tan^2 \varphi + \frac{1}{D} (2b^2 \tan \varphi + r^2 \tan \varphi \sec^2 \varphi) - \frac{b^2}{D^2} = 0.$$

解此一元二次方程得主曲率

$$\kappa_{1,2} = \frac{-(2b^2 \tan \varphi + r^2 \tan \varphi \sec^2 \varphi) \pm \sec \varphi \sqrt{4b^4 + 4b^2 r^2 \sec^2 \varphi + r^4 \tan^2 \varphi \sec^2 \varphi}}{2(r^2 \sec^2 \varphi + b^2)^{3/2}}.$$

14.5 曲面上一点的近旁结构、短程线

14.5.1 曲面上一点的近旁结构

设 κ_1, κ_2 为曲面 S 上点 P 处的两个主曲率, 则称数 $K = \kappa_1 \kappa_2$ 为曲面 S 上点 P 处的高斯曲率(或全曲率). 称数 $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ 为曲面 S 上点 P 处的平均曲率(或中曲率).

由 14.4 节的主曲率方程(7), 即

$$(EG - F^2) \kappa^2 - (EN - 2FM + GL) \kappa + (LN - M^2) = 0,$$

得高斯曲率和平均曲率的计算公式依次为:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{1}$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{2}$$

根据曲面论的第二基本形式的判别式, 曲面上的点可分为三类: 称 $LN - M^2 > 0$ 的点为椭圆点; 而 $LN - M^2 < 0$ 的点称为双曲点; $LN - M^2 = 0$ 的点为抛物点. 下面按这种分类分别分析曲面上点的近旁结构.

1 . 椭圆点

$LN - M^2 > 0$, 则 $K = \kappa_1 \kappa_2 > 0$, 可知在椭圆点法曲率 κ_n 取同一符号, 表明曲面在该种点近旁向同一方向弯曲 .

显然椭球上点均为椭圆点 .

2 . 双曲点

$LN - M^2 < 0$, $K = \kappa_1 \kappa_2 < 0$, 两主曲率异号, 据法曲率的连续性可知必有 $\kappa_n = 0$ 的渐近方向, 由欧拉公式

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi = 0,$$

可得渐近方向与主方向 \mathbf{g} 所成角 φ 满足

$$\tan 2\varphi = \pm \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2\kappa_1 \kappa_2}.$$

可见曲面在双曲点处有两个渐近方向, 且与主方向 \mathbf{g} 成等角 . 两渐近方向将曲面分成对顶角两个区域, 各自朝同一方向弯曲, 相邻角域则转向相反方向弯曲, 形似马鞍, 如图 14 . 9 所示 .

显然单叶双曲面和马鞍面上点均为双曲点 .

3 . 抛物点

$LN - M^2 = 0$, 则 $K = \kappa_1 \kappa_2 = 0$, 有两种情形, 其一是 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, 则该点 $\kappa_n = 0$, 可知为平点, 显然平面上所有点均为平点 . 其二 κ_1 和 κ_2 仅有一个为零, 无妨设 $\kappa_2 = 0$, 则据欧拉公式有

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \varphi,$$

可知除 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 方向、即除 \mathbf{g}_2 对应的渐近方向 (又是主方向) 外, 曲面朝同一方向弯曲 . 显然抛物柱面上的点均是这样的点 .

值得指出的是, 这里的“渐近方向除外”要理解为, 以此渐近方向为切线的曲面上曲线均在除外之列 . 否则对钟形曲面就不好理解了 . 钟形曲面如图 14 . 10, 其上 P 点 α 方向为渐近方向, 且为主方向 .

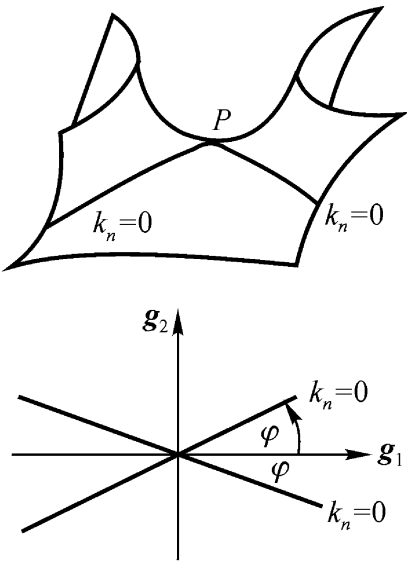


图 14 . 9

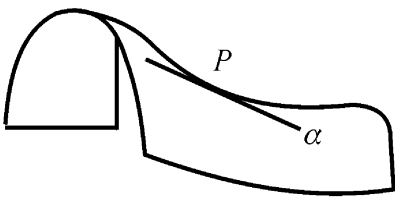


图 14 . 10

14 5 2 短程线

在曲面上点 P 处的切面上取向量

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{T},$$

则称曲率向量 \mathbf{T} 在 \mathbf{v} 上的投影 (即 \mathbf{T} 在切面上的投影) 为过 P 点的曲线 在 P 点的短程曲率, 记为 κ_g , 则

$$g = \mathbf{T} \cdot \nu = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{n}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n},$$

而

$$n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n},$$

于是,有

$$\frac{2}{g} + \frac{2}{n} = 2.$$

由上式可知,当 $g = 0$ 时, $|n|$, 对曲率线也不例外,如球面上的纬圆是曲率线,它的曲率一般不等于 $|n| = 1/a$ (a 为球半径),只有纬圆为过球心平面上的大圆时才有相等的可能.

称曲面上短程曲率恒等于零的曲线为短程线.它在大地测量和一些其他工程问题中有着较广泛的应用.

可以证明,在曲面上,而不在其边界上的足够接近的两点的短程线是这两点之间弧长最短的连线.

平面上的短程线就是直线,球面上的短程线是大圆,圆柱面上的短程线是圆柱螺线.

习 题 十 四

14 1

1. 求曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 使得 $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 1)$, $\mathbf{r}'(t) = (\dot{t}, t, e^t)$.

2. 证明: 当 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ 时, 可导的 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是定向向量函数的充要条件是 $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$.

3. 证明: 当 $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \neq \mathbf{0}$ 时, 具有二阶导数的 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是平行于固定平面的向量的充要条件是 $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0$.

14 2

1. 求曲线 $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$ 在 $t = 1$ 处的切线与法平面方程.

2. 求圆锥螺线 $\mathbf{r} = (t \cos t, -t \sin t, at)$ 在坐标原点处的从法线与密切面方程.

3. 求圆柱螺线 $\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 在任一点处的主法线和从切面方程, 并证明主法线都与 z 轴正交. 而从法线与 z 轴交角为定值.

4. 求曳物线 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \ln(\sec t + \tan t) - a \sin t)$ 从 0 到 t 的弧长 $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

5. 求圆柱螺线 $\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 的以弧长 s 为参数的方程.

6. 求下列曲线的弗雷内标架、曲率与挠率.

(1) $\mathbf{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t) \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$;

(2) $\mathbf{r} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$;

(3) $\mathbf{r} = (a(1 - \sin t), a(1 - \cos t), bt) \quad (a, b > 0)$.

7. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x \end{cases}$ 在点 $(1, 0, 0)$ 处的弗雷内标架、曲率和挠率.

8. 证明曲线的挠率计算公式(8).

9. 写出曲率 $\frac{1}{2}$, 挠率 $t - 1$ 的曲线方程.

10. 证明 $\mathbf{r} = (1 + 3t + 2t^2, 2 - 2t + 5t^2, 1 - t^2)$ 是平面曲线.

14.3 14.4

1. 写出曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 在点 (u, v) 处的切平面和法线的向量式方程.

2. 求下列曲面的第一、第二基本形式:

(1) 平面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 均为单位向量;

(2) 圆柱面 $\mathbf{r} = (a \cos u, a \sin u, v)$;

(3) 正螺旋面 $\mathbf{r} = (v \cos u, v \sin u, bu)$;

(4) 旋转面 $\mathbf{r} = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \quad (f(v) > 0)$.

3. 已知曲面 S 的第一基本形式为 $I = du^2 + \sinh^2 u dv^2$, 求 S 上曲线 $l: u = t, v = t \quad (0 \leq t \leq 1)$ 的弧长.

4. 已知曲面 S 的第一基本形式为 $I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$, 求 S 上两条曲线 $l_1: u + v = 0$ 和 $l_2: u - v = 0$ 在交点 $(0, 0)$ 处的交角.

5. 求螺旋面 $\mathbf{r} = (a \cos v, a \sin v, bv)$ 上四条曲线 $u = 0, u = \frac{b}{a}, v = 0, v = 1$ 围成的四边形的面积.

6. 证明曲面上的直线(如果有)是渐近线.

7. 求圆柱面 $\mathbf{r} = (a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, v)$ 的法曲率.

8. 试证在曲面上一点处, 任何两个正交方向的法曲率之和相等.

14.5

1. 求下列曲面的高斯曲率和平均曲率.

(1) 正螺面 $\mathbf{r} = (v \cos u, v \sin u, bu)$;

(2) 螺面 $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, u + v)$.

2. 试证在半径为 R 的球面上, 高斯曲率和平均曲率都是常数.

3 . 指出曲面上法截线与短程线的区别 .

$$(2) \quad z_{xx} = 2y(2y - 1)x^{2y-2}, \quad z_{xy} = 2x^{2y-1}(1 + 2y\ln x), \quad z_{yy} = 4(\ln x)^2 x^{2y};$$

$$(3) \quad z_{xx} = e^x \cos y, \quad z_{xy} = -e^x \sin y, \quad z_{yy} = -e^x \cos y;$$

$$(4) \quad z_{xx} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}, \quad z_{xy} = \frac{-e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}, \quad z_{yy} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}.$$

$$6. \quad u = C_1 \arctan \frac{y}{x} + C_2.$$

8. 否.

9. $z = f(x, y)$ 对每个确定的 y_0 , $f(x, y_0)$ 是 x 的连续函数; 曲线 $z = f(x, y_0)$ 有切线, $z = f(x, y_0)$ 单调上升.

9.3

$$1. \quad 1) \quad dz|_{M_0} = 4dx + 12dy, \quad dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy;$$

$$(2) \quad dz|_{M_0} = 0, \quad dz = e^{xy}(ydx + xdy);$$

$$(3) \quad dz|_{M_0} = dx + dy, \quad dz = [1 + \ln(xy)]dx + \frac{x}{y}dy;$$

$$(4) \quad du|_{M_0} = -\frac{3}{2}dx - \frac{1}{3}dy + dz,$$

$$du = -\sin(xy + xz)[(y + z)dx + xdy + xdz].$$

$$2. \quad dz|_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})} = -\frac{3}{4}dx - \frac{3}{4}dy$$

$$4. \quad 108.9078.$$

$$5. \quad 0.124 \text{ cm}.$$

6. $z = \varphi(y)$, 为任一函数; $z = \varphi(x) + \psi(y)$, φ, ψ 为任意两个函数; $z = C$, C 为常数.

$$8. \quad f(x, y) = 2x + x^3 y^2 + 1.$$

9.4

$$1. \quad 1) \quad z_x = \frac{1}{x^2 y}(x^4 - y^4 + 2x^3 y)\exp \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

$$z_y = \frac{1}{xy^2}(-x^4 + y^4 + 2xy^3)\exp \frac{x^2 + y^2}{xy};$$

$$(2) \quad z_x = \frac{y^2}{(x + y)^2} \arctan(x + y + xy) + \frac{xy(1 + y)}{(x + y)[1 + (x + y + xy)^2]},$$

$$z_y = \frac{x^2}{(x + y)^2} \arctan(x + y + xy) + \frac{xy(1 + x)}{(x + y)[1 + (x + y + xy)^2]}.$$

$$2. \quad 1) \quad \frac{du}{dt} = 3 - \frac{4}{t^2} - \frac{1}{2t} \sec^2 3t + \frac{2}{t^2} - t;$$

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = (\cos t - 6t^2)\exp(\sin t - 2t^3) - \frac{1}{t^2}.$$

$$3. \quad \frac{z}{x} = e^{xy}[y \sin(x - y) + \cos(x - y)], \quad \frac{z}{y} = e^{xy}[x \sin(x - y) - \cos(x - y)].$$

$$4. \quad 1) \quad z_x = f_1 + 2xf_2, \quad z_y = f_1 + 2yf_2;$$

$$(2) \quad z_x = \frac{1}{y} f_1 - \frac{y}{x^2} f_2, \quad z_y = -\frac{x}{y^2} f_1 + \frac{1}{x} f_2;$$

$$(3) \quad u_x = f y g, u_y = f x g + z f g, \quad u_z = f g y;$$

$$(4) \quad u_x = f_1 - 2x f_2 + y f_3, \quad u_y = -2y f_1 + f_2 + x f_3.$$

$$5. \quad 1) \quad z_{xy} = f_{uu} x e^{2y} + f_{uy} e^y + f_{xu} x e^y + f_{xy} + f_u e^y;$$

$$(2) \quad z_y = x^4 f_1 + x^2 f_2, z_{yy} = x^5 f_{11} + 2x^3 f_{12} + x f_{22}, \\ z_{xy} = 4x^3 f_1 + 2x f_2 + x^4 y f_{11} - y f_{22}.$$

$$7. \quad z_{uv} = 0.$$

$$8. \quad a = 3.$$

$$10. \quad 1) \quad dz = (f_1 + f_2) dx + (f_2 - f_1) dy, z_x = f_1 + f_2, z_y = f_2 - f_1;$$

$$(2) \quad dz = y f_1 + \frac{1}{y} f_2 dx + x f_1 - \frac{x}{y^2} f_2 dy, z_x = y f_1 + \frac{1}{y} f_2,$$

$$z_y = x f_1 - \frac{x}{y^2} f_2;$$

$$(3) \quad du = (f_1 \cos x - f_2 \sin x) dx + f_1 \cos y dy + f_2 \sin z dz,$$

$$u_x = f_1 \cos x - f_2 \sin x, u_y = f_1 \cos y, u_z = f_2 \sin z.$$

9.5

$$1. \quad 1) \quad \frac{z}{x} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{z}{y} = \frac{z^2}{y(x+z)}, \quad \frac{^2 z}{x^2} = \frac{-z^2}{(x+z)^3},$$

$$\frac{^2 z}{y^2} = -\frac{x^2 z^2}{y^2 (x+z)^3}, \quad \frac{^2 z}{x y} = \frac{x z^2}{y (x+z)^3};$$

$$(2) \quad \frac{z}{x} = \frac{2-x}{z+1}, \quad \frac{z}{y} = \frac{2y}{z+1}, \quad \frac{^2 z}{x^2} = -\frac{(z+1)^2 + (2-x)^2}{(z+1)^3},$$

$$\frac{^2 z}{y^2} = 2 \frac{(z+1)^2 - 2y^2}{(z+1)^3}, \quad \frac{^2 z}{x y} = \frac{2y(x-2)}{(z+1)^3}.$$

$$2. \quad (1) \quad dz = -\frac{x+yz(2-xyz)}{z+xy(2-xyz)} dx - \frac{y+zx(2-xyz)}{z+xy(2-xyz)} dy,$$

$$z_x = -\frac{x+yz(2-xyz)}{z+xy(2-xyz)},$$

$$z_y = -\frac{y+zx(2-xyz)}{z+xy(2-xyz)};$$

$$(2) \quad z = 1 + e^{z-y-x} / (z-y-x-1) dx + dy,$$

$$z_x = 1 + e^{z-y-x} / (z-y-x-1), z_y = 1.$$

$$6. \quad \frac{^2 z}{x y} = -\frac{4(z-x)(z-y)}{(F_1 + 2zF_2)^3} (F_1^2 F_{22} - 2F_1 F_2 F_{12} + F_2^2 F_{11}) -$$

$$\frac{2(F_1 + 2x F_2)(F_1 + 2y F_2)}{(F_1 + 2z F_2)^3} F_2.$$

$$7. \quad \frac{x}{y} = \frac{x-z}{y}.$$

$$8. \quad k = |F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2| (F_x^2 + F_y^2)^{-3/2}.$$

9. 1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{3z+1};$
 (2) $\frac{u}{x} = \frac{-uf_1(2yvg_2-1)-f_2g_1}{(xf_1-1)(2yvg_2-1)-f_2g_1},$
 $\frac{v}{x} = \frac{g_1(xf_1+uf_1-1)}{(xf_1-1)(2yvg_2-1)-f_2g_1},$
 (3) $\frac{u}{x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad \frac{v}{y} = \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$
10. $\frac{dy}{dx} = [f_x F_t - f_t F_x] / [f_t F_y + F_t].$
11. $\frac{du}{dx} = f_x + f_y \cos x - f_z (-3)^{-1} [2x^{-1} + e^{\sin x} \cos x \cdot -2].$

9.6

1. 1) $\frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{2b} = \frac{z-c}{2c}, \quad a(x-a) + 2b(y-b) + 3c(z-c) = 0;$
 (2) $x-1 = 1-y = z, \quad x-y+z = 0;$
 (3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}, \quad 2x+y+4z-7 = 0;$
 (4) $\frac{x+2}{25} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{12}, \quad 25x+28y+12z-50 = 0.$

2. 点 $(-1, 1, -1)$ 或点 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

3. $\arccos \frac{k}{a^2+k^2}.$

4. 1) $3x+4y-5z=0, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5};$
 (2) $x+11y+5z-18=0, \quad x-1 = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5};$
 (3) $12x-9y+z-9=0, \quad \frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}.$

5. 点 $(-3, -1, 3), \quad x+3 = \frac{y+1}{3} = z-3.$

10. $= \arccos \frac{u}{a^2+u^2}.$

11. 提示:证明法向量与某定向量垂直.

9.7

1. $\sin x \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2} (y - \frac{\pi}{4})^2 + o(\sqrt{2}),$
 $= (x - \frac{\pi}{4})^2 + (y - \frac{\pi}{4})^2.$

2. 1) 点 (a, a) 处取极大值 $a^3;$

(2) 点 $\frac{1}{2}, -1$ 处取极小值 $-\frac{e}{2}$.

3. 最大值 $f(2, 1) = 3$, 最小值 $f(-2, 1) = -37$.

4. $\frac{8}{5}, \frac{16}{5}$.

7. 1) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$;

(2) $-\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$,

$\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6}$,

$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6}$.

8. (1) $x = 0.75$ (万元), $y = 1.25$ (万元); (2) $x = 0$ (万元), $y = 1.5$ (万元) .

9. $x_1 = 6 \frac{p_2}{p_1}$, $x_2 = 6 \frac{p_1}{p_2}$.

10. $-\frac{2}{14}, \frac{1}{14}, \frac{6}{14}$.

11. $\frac{11 + \sqrt{13}}{6}$, $\frac{11 - \sqrt{13}}{6}$.

12. $a = 34$.

13. $x = y = \sqrt[3]{\frac{4V}{3}}$, $z = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{4V}{3}}$.

14. 设圆半径为 r , 正方形每边长 x , 正三角形每边长 y , 则当 $x = \frac{l}{+4+3\sqrt{3}}$,

$y = \frac{3l}{+4+3\sqrt{3}}$, $r = \frac{l}{2(+4+3\sqrt{3})}$ 时, 面积之和最小值为 $\frac{l^2}{4(+4+3\sqrt{3})}$.

9 8

1. $\text{grad } u|_{(1,2,3)} = \{14, 7, -12\}$, $\left| \frac{u}{\mathbf{l}} \right|_{(1,2,3)} = 7\sqrt{2}$.

2. 1) 点 $(-2, 1, 1)$; (2) $\text{grad } u|_{(2,0,1)} = \{7, 0, 0\}, 7$;

(3) 平面 $z=1$ 上任一点 .

4. $\pm 6\sqrt{2}$.

5. $2(a^2 + b^2)/(ab)$.

6. $\frac{\pm 1}{e^2} \frac{1}{1+e^2} - 1$.

7. $[1 + 1/(2\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})]\mathbf{c}$.

9. 当 $x_0 \neq 0$ 时, $y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2$; 当 $x_0 = 0$ 时, $x = 0$.

9.9

1. B .
2. 不一定,不一定 .
3. $z_{xyy} = z_{yxy} = z_{yyx} = -x[2\sin xy + xycos xy]$.
4. $\frac{u}{x} = \frac{(g,h)}{(v,w)} \bigg/ \frac{(f,g,h)}{(u,v,w)}$.
5. $\frac{z}{x} = \frac{(y,z)}{(u,v)} \bigg/ \frac{(y,x)}{(u,v)}, \quad \frac{z}{y} = \frac{(x,z)}{(u,v)} \bigg/ \frac{(x,y)}{(u,v)}$.
6. $grad\ z|_{p_0} = 3\mathbf{i} + (3-2)\mathbf{j}, \quad dz|_{p_0} = 3dx + (3-2)dy, \quad \left. \frac{u}{I} \right|_{p_0} = \frac{15-2}{13}$.
8. 提示:加一个条件,使不等式的一边为常量,不等式转化为条件极值问题 .
9. 不相邻的两角之和为 π 时,面积最大 .
10. $(x_0)^{4/3}y = (x)^{4/3}y_0, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1 \ (z=0)$ 的交线 .

习 题 十

10.1

1. $v = 2 \int_0^1 \int_0^1 (4-x^2-y^2)dx dy$, 其中 D 是圆域 $x^2+y^2 \leq 4$.
2. $Q = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2)dx dy$, 其中 D 是 $x^2+y^2 \leq 2ax$ 和 $x^2+y^2 \leq 2ay$ 的公共部分 .
3. $F_z = \int_V \frac{k(z-h)}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{3/2}}dV$, 其中 V 是球体 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, k 为引力常数 .
4. $m = \int_L (x^2+y^2)dl$, 其中 L 是空间圆周 $x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0$.
5. $W = \int_S \frac{1}{1+z}dS$, 其中 S 是旋转抛物面 $z = \frac{x^2+y^2}{4}, x^2+y^2 \leq 4$.
6. (1) $8 \int_0^1 \int_0^{5-2x} (x+y+10)dy dx = 8 \int_0^1 (5+2x)dx$;
(2) $0 \leq \int_V (x^2+y^2+z^2)dV \leq \frac{4}{3} R^5$.
7. (1) 0; (2) 1 .
9. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $4 \int_0^1 R^2 f(R^2) dR$.
10. (1) 3 阶; (2) 2 阶; (3) 1 阶 .
11. (1) $\int_D (x+y)^2 d\sigma < \int_D (x+y)^3 d\sigma$; (2) $\int_D \ln(x+y) d\sigma = \int_D xy d\sigma$.

12. C

10 2

$$1. \quad 1) \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy, \quad \int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^a dy \int_y^{2a+y} f(x, y) dx,$$

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_0^a f(x, y) dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^a f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy, \quad \int_{\sqrt{2}}^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_{-\frac{\sqrt{5-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{5-1}}{2}} dy \int_{y^2}^{1-y^2} f(x, y) dx,$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{5-1}}{2}} dx \int_{-x}^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{5-1}}{2}}^1 dx \int_{-1-x^2}^{1-x^2} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} dy \int_{y^2-4}^{\frac{1}{2}-36-9y^2} f(x, y) dx,$$

$$\int_{-4}^{-3} dx \int_{-x+4}^{x+4} f(x, y) dy + \int_{-3}^{-9/4} dx \int_{\frac{1}{3}-36-4x^2}^{x+4} f(x, y) dy +$$

$$\int_{-3}^{-9/4} dx \int_{-\frac{1}{3}-36-4x^2}^{-x+4} f(x, y) dy.$$

$$2. \quad 1) \frac{1}{12}; \quad (2) \frac{1}{2}; \quad (3) \frac{27}{64}; \quad (4) -2;$$

$$(5) \frac{1}{2}(1 - \sin 1); \quad (6) \frac{35}{12} a^4.$$

3. 提示:利用奇偶性.

$$(1) \frac{2}{15}(4 - 2 - 1); \quad (2) \frac{1}{4}; \quad (3) R^2.$$

$$4. \quad 1) \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^1 f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^y f(x, y) dx;$$

$$(6) \int_0^a dx \int_{\frac{2-x^2}{2a}}^{\frac{a^2-x^2}{2a}} f(x, y) dy.$$

$$5. \frac{1}{3}(2 - 1).$$

$$6. \frac{88}{105}.$$

$$7. \frac{16}{3} a^3.$$

$$8. 5 \ln 2 - 3.$$

$$9. \quad 1) (2 \ln 2 - 1); \quad (2) \frac{a^3}{6} - \frac{8-5}{3} a^2; \quad (3) -6 a^2;$$

$$(4) \frac{45}{2}; \quad (5) \frac{2}{15} + \frac{256-147}{5} \cdot 3;$$

$$(6) \frac{3}{16} \cdot 2 \text{ (反常二重积分)}; \quad (7) 80; \quad (8) \frac{d^3}{3} [2 + \ln(1+2)] .$$

$$10. (1) \frac{1}{4} a^2 + 2a^2; \quad (2) 4a^2 .$$

$$11. (1) 2a^2; \quad (2) 2; \quad (3) \frac{2}{3} (2^2 - 1);$$

$$(4) \frac{2}{3} [(1+a^2)^{3/2} - 1]; \quad (5) 2(3-3)a^2 .$$

$$12. R = \frac{4}{3} a .$$

$$13. \frac{a^2}{2} .$$

10 3

$$1. (1) \int_{-1}^1 dx \int_{-1-x^2}^{1-x^2} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz;$$

$$(2) \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{-1-2x}^{1-2x} dy \int_x^{1-x^2+y^2} f(x, y, z) dz;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dy \int_0^{1-y^2} dx \int_{\arcsin x}^{-\arcsin x} f(x, y, z) dz \text{ 或 } \int_0^{\sin z} dz \int_0^{1-x^2} dx \int_{-1-x^2}^{1-x^2} f(x, y, z) dy .$$

$$2. (1) \frac{1}{364}; \quad (2) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} - 1; \quad (3) [\text{提示:截面法}] \frac{1}{60} abc^3;$$

$$(4) [\text{提示:截面法}] \frac{4}{15} ab^3 c; \quad (5) [\text{提示:用对等性}] \frac{1}{2} abc(a+b+c);$$

$$(6) [\text{提示:用柱面 } y = -x^3 \text{ 将积分域分为两部分,利用积分域和被积函数的对称性}] \frac{80}{117} .$$

$$3. (1) \frac{1}{15}; \quad (2) \frac{8}{9} a^2 .$$

$$4. (1) \frac{256}{3}; \quad (2) \ln 2 - 2 + \frac{1}{2}; \quad (3) 336 \text{ (柱,截面法)};$$

$$(4) \frac{4}{15} (A^5 - a^5); \quad (5) \frac{1}{8} \text{ (对称性)}; \quad (6) \frac{5}{12}; \quad (7) \frac{4}{3} .$$

$$5. \frac{1}{12} .$$

$$6. (1) \frac{1}{12} a^3; \quad (2) \frac{2}{3} a^3 (2 - 2) .$$

$$7. F_t = 2 \cdot t \cdot \frac{h^3}{3} + hf(t^2) .$$

$$8. 100 \text{ 小时} .$$

10 4

$$1. (1) 4a \cdot a; \quad (2) a^{\frac{7}{3}}; \quad (3) 2a^2;$$

$$\cdot 308 .$$

$$(4) \frac{2}{2} - \frac{17}{8} + \frac{1}{2} \ln(4 + 17) - \frac{1}{2} \ln(1 + 2);$$

$$(5) [\text{提示:利用对称性}] \quad 2; \quad (6) 2(e^a - 1) + \frac{1}{4} ae^a;$$

$$(7) \frac{1}{3} [(2 + \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]; \quad (8) \frac{8-2}{3} a^3;$$

$$(9) 12a;$$

$$(10) [\text{提示:} 2yz + 2zx + 2xy = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \quad \frac{5}{4} a^3;$$

$$(11) [\text{提示:利用对等性}] \quad \frac{4}{3}; \quad (12) 20 \quad 2.$$

$$2. (1) 3 R^2; \quad (2) 4 \int_0^{\pi/2} \cos x dx.$$

$$3. \frac{1}{5} - \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \ln^2 2.$$

$$4. a.$$

10 5

$$1. 1) 4 \quad 61; \quad (2) \frac{2}{15} R^6; \quad (3) 2; \quad (4) \frac{5}{6} 5 + \frac{1}{30};$$

$$(5) \frac{64}{15} 2 a^4 [\text{提示:利用对称性}]; \quad (6) 144.$$

$$2. \frac{1}{15} (12 \sqrt{3} + 2).$$

$$4. \frac{3}{2}.$$

10 6

$$1. \frac{35}{48}, \frac{35}{54}. \quad 2. 0, 0, \frac{2}{3}. \quad 3. \frac{18}{7}, \frac{15-6}{16}, \frac{12}{7}.$$

$$4. 0, 0, \frac{2}{3} h. \quad 5. \frac{4R}{3}, \frac{4R}{3}, \frac{4R}{3}. \quad 6. I = \frac{1}{2} hr^4.$$

$$7. I_z = \frac{4}{15} (4 \sqrt{2} - 5) \mu_0. \quad 8. I_z = \frac{4}{3} \mu_0 a^4. \quad 9. I_z + I_y + I_x = (\sqrt{2} + 2) R^{\frac{7}{2}}.$$

10 7

$$1. \frac{d^3}{90}. \quad 2. \frac{1}{8} a^2. \quad 3. 6. \quad 4. \frac{1}{2} + \frac{5}{3}. \quad 5. \frac{A^2}{2}.$$

$$6. -\frac{1}{2}. \quad 7. \frac{1}{2}. \quad 8. z = 2x, \frac{1}{2}.$$

$$9. I(t) = \frac{2e^3 + 1}{9} - \frac{e^2 + 1}{2} t + t^2, t_0 = \frac{e^2 + 1}{4}, I_{\min} = \frac{2e^3 + 1}{9} - \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$10. h = \frac{1}{3} H.$$

11. 提示:对累次积分中的定积分作适当变量代换后,累次积分换序.

12. 提示:变为二重积分不等式,利用积分值与积分变量记号无关性.

13. $\frac{4}{35}$. **14.** $F(t) = 4 \int_0^t f(t^2) |t| dt$. **15.** $\frac{2-1}{6}$. **16.** $\frac{3-3}{2}$.

18. $\frac{8-5}{6} R^4$. **19.** $\frac{8}{3} \notin R^4$. **20.** $\frac{5}{3} (2^2 - 1)$.

21. $2 + 4$.

习 题 十 一

11 1

1. $y^2 - z^2 = C_1, x = z - z^2 + C_2$. **2.** $x^2 + y^2 = C_1^2, z = C_2$.

11 2

1. 3 . **2.** $-\frac{14}{15}$. **3.** a^2 . **4.** 2 . **5.** $\frac{4}{3}$.

6. $-a^2$. **7.** 81 . **8.** 0 . **9.** 4 . **11.** 0 .

12. (1) $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$; (2) 0 .

11 3

1. $\frac{3}{8} a^2$. **2.** $\frac{1}{2}(e-1)$. **3.** $\frac{3}{2}$. **4.** $\frac{1}{5}(1-e)$. **5.** $-\frac{a^4}{2}$.

6. 0 . **7.** $\frac{1}{8}$. **8.** $-\frac{12}{5}$. **9.** $\frac{1}{2} - 5 - \frac{1}{2} \ln(2+5)$.

10. $\frac{448}{3} - \cos 4 - 7e^8$. **11.** $+1$. **12.** (1) $(2y-1)\mathbf{k}$; (2) -6 .

11 4

1. $e^a \cos b - 1$. **2.** $-\frac{3}{2}$. **3.** 0 [提示:取路径 $xy =]$. **4.** $\frac{5}{2} - \cos 1 - (e-1) \sin 1$.

5. $\frac{6}{5}(e^3 - e^{-2}) + e^{-1}$.

6. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{3}x^3 - \cos x + \cos 1 + \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \cos 1 + \frac{2}{9} + \frac{3}{4}^3$.

7. $f(x) = \frac{2}{x}$. **9.** 2 . **10.** $a = -1$. **11.** $\frac{2}{4}$. **12.** $k \frac{1}{5} - 1$.

13. $-\frac{1}{2^2} \arctan \frac{3y-x}{2^2 x} + c$. **14.** $x^2 \cos y + y^2 \cos x + C, -\frac{2}{4}$.

15 . 2 .

16 . $= -1, u(x, y) = \arctan \frac{y}{x^2} + C.$

17 . $f(x, y) = 2x + x^3 y^2 + 1.$

18 . (1) $x^3 + 3x^2 y^2 + \frac{4}{3} y^3 = C;$ (2) $\sin(x + y^2) + 3xy = C;$

(3) $x \sin y + y \cos x = C.$

19 . $f(x) = 2 \cos x + \sin x + x^2 - 2, -2y \sin x + y \cos x + \frac{1}{2} x^2 y^2 + 2xy = C.$

21 . (2) $u = -x^2 \cos y - y^2 \cos x + C;$ (3) $\frac{7}{4} z^2.$

11 5

1 . $\frac{1}{12}.$ 2 . $\frac{1}{15}.$ 3 . $-\frac{1}{2}.$ 4 . 1 . 5 . (1) 0; (2) $h^3.$

6 . $\frac{1}{2} R^2.$ 7 . $-2 R^2.$

11 6

2 . $\frac{4}{5} a^5.$ 3 . $\frac{1}{8}.$ 4 . 16 . 5 . $-\frac{1}{10} h^5.$ 6 . $\frac{46}{3}.$

7 . $-\frac{4}{3} (a + b + c) R^3.$ 8 . $\frac{10}{3} a^3.$ 11 . $4 - \frac{1}{\ln 2}.$

12 . $\frac{2}{3}.$ 13 . $\frac{3}{20}.$

14 . (1) 0; (2) 4 .

15 . (1) 6; (2) -10; (3) 36 .

16 . (1) $f(r) = \frac{C}{r^3}$ (C 为任意常数); (2) $f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$ (C_1, C_2 为任意常数).

11 7

1 . $-2 a(a + h).$ 2 . $-2 R r^2.$ 3 . 1 . 4 . $\frac{h^3}{3}.$

6 . 9 . 7 . (1) 2 ; (2) 2 .

8 . (1) $-(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k});$ (2) $\mathbf{0};$ (3) $\mathbf{0};$

(4) $\{2(y - z), 2(z - x), 2(x - y)\};$

(5) $\{xz - xy, xy - yz, yz - xz\};$ (6) $\mathbf{0}.$

9 . $v = -\sin xy + \cos z + C.$

10 . $a = 2, Q = 2y^2 z^2, u = x^2 z + y^2 z^2 - z + C.$

11 8

1 . $y = \sin x.$ 2 . $2(-1).$ 3 . $-$ 4 . $t = -\frac{1}{2}, I_{AB} = 1 - 2.$

5. $\frac{2}{x}$. 6. $-\frac{2}{5} R^5$. 7. $\frac{37}{6}$.

8. $-2 \int_V \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$ (注意原点在 V 内情况的讨论) .

9. $\operatorname{div} A = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, $\operatorname{rot} A = 2(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})$, $= \frac{28}{5} R^6$, $= \frac{1}{4} R^3$.

习 题 十 二

12 1

1. (1) $u_n = \frac{n-2}{n+1}$; (2) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$; (3) $u_n = \frac{3^{n^2}}{2^n n!}$.

2. (1) $u_n = \frac{2}{n(n+1)}$; (2) $\lim_n S_n = 2$, 级数收敛 .

3. 1) 收敛, $S = 1$; (2) 发散; (3) 收敛, $S = \frac{1}{5}$;

(4) 收敛, $S = \frac{1}{4}$; (5) 收敛, $S = 3$; (6) 收敛, $S = 1 - 2$;

(7) 收敛, $S = \frac{1}{2}$; (8) 收敛, $S = \frac{1}{4}$.

5. $0.\dot{7}3 = \sum_{n=1}^{\cdot} \frac{73}{10^{2n}} = \frac{73}{99}$.

6. 1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散;
(5) 发散; (6) 收敛; (7) 发散 .

7. 当 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛时, (1) 发散; (2) 收敛; (3) 发散 .

当 $\sum_{n=1} u_n$ 发散时, (1) 不一定; (2) 发散; (3) 不一定 .

8. $\frac{2}{8}$.

9. $16 - x - 20$.

10. $6\frac{6}{7}$.

12 2

1. 1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛 .

2. 1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛 .

3. (1) 收敛; (2) 发散 .

4. (1) 发散; (2) $P > 1$ 时, 收敛; $P = 1$ 时, 发散 .

5. 1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛;

- (5) 当 $0 < a < 1$ 时, 发散, 当 $a > 1$ 时, 收敛; (6) 发散;
 (7) 收敛; (8) 收敛; (9) 当 $0 < x < 4$ 时, 收敛; 当 $x = 4$ 时, 发散;
 (10) 发散; (11) 当 $a < b$ 时, 发散; 当 $a > b$ 时, 收敛.
6. 当 < 1 时, 收敛; > 1 时, 发散; $= 1$ 时, 且 < -1 , 收敛; > -1 , 发散.
7. D.

13. (1) 收敛; (2) 发散.

14. 收敛.

12 3

- 1.** 1) 条件收敛; (2) 条件收敛; (3) 绝对收敛;
 (4) $P = 0$ 时, 发散, $0 < P < 1$ 时, 条件收敛, $P > 1$ 时, 绝对收敛;
 (5) 绝对收敛; (6) 发散; (7) 绝对收敛;
 (8) 当 $< e$ 时, 绝对收敛, 当 $= e$ 时, 发散; (9) 条件收敛.
3. (C). **4.** (B). **5.** 发散. **6.** (B). **7.** 发散. **8.** 收敛.

12 4

- 1.** 1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 收敛;
 (6) 当 $p < 1, q < 1$ 时, 收敛. 其他情况下, 发散.

12 5

- 1.** (1) $S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 2, \\ 1, & x = 2; \end{cases}$ (2) $S(x) = x, \quad x \in (-2, 2)$.
2. (1) $(0, +\infty); E^+$; (2) $(-\infty, +\infty); E^+$; (3) $(-1, 1)$.
3. (1) 非一致收敛; (2) 一致收敛; (3) 一致收敛;
 (4) 一致收敛.

12 6

- 1.** 1) $R = e, (-e, e)$; (2) $R = 3, (-3, 3)$; (3) $R = 1, (x_0 - 1, x_0 + 1)$.
3. (1) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; (2) $(-\infty, +\infty); E^+$;
 (3) 当 $P > 1$ 时为 $[-1, 1]$, 当 $0 < P < 1$ 时为 $[-1, 1)$, 当 $P = 0$ 时为 $(-1, 1)$;
 (4) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; (5) $[-1, 1]$;
 (6) 当 $0 < a < b$ 时为 $[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}]$, 当 $0 < b < a$ 时为 $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$;
 (7) $(-1, 1)$; (8) $[-1, 1)$; (9) $[4, 6)$;
 (10) $(0, 2]$; (11) $(0, 6)$; (12) $[-1, 0)$;
 (13) $[-1, 1]$; (14) $(-1, 1)$; (15) $[-1, 1]$
4. 1) $\frac{1}{10}, 10$; (2) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty); E^+$;

$$(3) [-1, 0]; \quad (4) \quad - \quad , \quad - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \cdot TIF; E+ \quad .$$

$$5. R=4. \quad 6. [-1, 1). \quad 7. [-3, 3). \quad 8. (-2, 4).$$

$$9. \ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in [-1, 1).$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

$$10. \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5; e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{4!}x^4.$$

12.7

$$1. a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$3. 1) \sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sin x + \frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \frac{x}{1-2x} = x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{x^{n+1}}{2}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$

$$(4) \ln(1+x-2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1} - 1}{n+1} x^{n+1}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$

$$(5) \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(6) \frac{d}{dx} \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^{n-2}, \quad x \neq 0;$$

$$(7) \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{2}{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2}, \quad |x| \leq 1;$$

$$(8) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}, \quad |x| < 1;$$

$$(9) 1 - x^2 + x^{16} - x^{18} + \dots + x^{16n} - x^{16n+2} + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$4. g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) x^n.$$

$$5. 1) x^3 = 1 + \frac{3}{2}(x-1) +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{3}{(n+1)(n+2)4^{n+1}} (x-1)^{n+2}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$(2) \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x + \frac{1}{3}}{(2n)!} + 3 \frac{x + \frac{1}{3}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}} (x-5)^n, \quad 3 < x < 7.$$

$$6. f^{(2n-1)}(0) = 0. \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^{n-1} 2^{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot (2n-1)!,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$8. \quad 1) \quad S(x) = \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{3}{2} x + \frac{1}{3} e^x, \quad |x| < +\infty;$$

$$(2) \quad S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1;$$

$$(3) \quad S(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad |x| < \sqrt{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3;$$

$$(4) \quad S(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, \quad |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} = -\frac{2}{27};$$

$$(5) \quad S(x) = \arctan x, \quad |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n = -\frac{3}{2} \arctan \frac{3}{2};$$

$$(6) \quad S(x) = e^x + x e^x, \quad |x| < +\infty.$$

$$9. \quad 1) \quad S(x) = -\ln \left(1 - \frac{x}{4}\right), \quad -4 < x < 4;$$

$$(2) \quad S(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 - e^{\frac{x}{2}}, \quad |x| < +\infty;$$

$$(3) \quad S(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

$$10. \quad 1 - \frac{1}{2}.$$

$$11. \quad \frac{22}{27}.$$

$$12. \quad \frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \sin \frac{1}{2}.$$

$$13. \quad (-2, 4), \quad (x-1)^2 S(x-1).$$

$$14. \quad (1) 2; (2) \frac{a}{(1-a)^2}; (3) 2 - e - 1. \quad 15. \quad (A).$$

12.8

$$1. \quad 1) \quad e = 1.6487; \quad (2) \quad 5^{245} = 3.0049; \quad (3) \quad \ln 3 = 1.0986;$$

$$(4) \quad \cos 10^\circ = 0.9848; \quad (5) \quad \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = 0.499;$$

$$(6) \quad \int_0^{10} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = 0.097.$$

$$2. \quad 1) \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \dots;$$

$$(2) \quad y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1};$$

$$(3) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-x} + \operatorname{sh} x;$$

$$(4) \quad y = a_0 + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[3 \times 4][7 \times 8] \dots [(4k-1)(4k)]} x^{4k} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[4 \times 5][8 \times 9] \dots [(4k)(4k+1)]} x^{4k+1}.$$

$$3. \quad \left| \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \right| < \frac{(x-1)^3}{12}, \quad 1 < x < 2.$$

4. $b=1, y=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}e^x.$

12 9

1. 1) $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$
 $=\frac{1}{4}, \quad \text{当 } x=(2k-1)\pi, k=\pm 1, \pm 2, \dots,$
 $=\frac{1}{4}-\frac{x}{2}, \quad \text{其他点}.$

(2) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}+2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)$
 $=\frac{e}{2}(e^{-x}+e^x), \quad x=(2k-1)\pi, k=\pm 1, \pm 2, \dots,$
 $e^x+1, \quad \text{其他点}.$

(3) $x^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=3x^2+1, \quad x\in(-\pi, \pi). TIF; E+\pi).$

(4) $\frac{18-3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{9n^2-1}\sin nx$
 $=0, \quad x=k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
 $=2\sin\frac{x}{3}, \quad \text{其他点}.$

(5) $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx=\begin{cases} x+2, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x=0, \pm\pi. \end{cases}$

(6) $\frac{1+e^{-x}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^ne^{-n}}{1+n^2}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n+(-1)^ne^{-n}}{1+n^2}+\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\sin nx$
 $=f(x), \quad -\pi < x < \pi,$
 $=\frac{1}{2}(1+e^{-x}), \quad x=\pm\pi.$

2. $b_3=\frac{2}{3}, \frac{a_0}{2}$ 等于函数在一个周期内的平均值.

3. 1) $\frac{1}{n}\sin nx=\begin{cases} \frac{-x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(2) $\frac{4}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)x=\begin{cases} \frac{-x}{2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1-\frac{x}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

4. 1) $\frac{2}{2}+\frac{4}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx=\cos\frac{x}{2}, 0 < x < \pi.$

$$1, \quad 0 < x < h,$$

$$(2) \quad \frac{h}{3} + \frac{2}{n=1} \frac{\sin nh}{n} \cos nx = \frac{1}{2}, \quad x = h,$$

$$0, \quad h < x.$$

$$5. \quad (1) \quad \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{16}{n^2} \cos \frac{nx}{2} + \frac{4}{n} \sin \frac{nx}{2} = \begin{cases} x^2 - x, & -2 < x < 2, \\ 4, & x = \pm 2; \end{cases}$$

$$(2) \quad -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{nx}{3} - \frac{1}{n} [1 + (-1)^n] \sin \frac{nx}{3}$$

$$2x + 1, \quad -3 < x < 1,$$

$$x, \quad 0 < x < 3,$$

$$= \frac{1}{2}, \quad x = 0,$$

$$-1, \quad x = \pm 3.$$

$$(3) \quad \frac{1}{4} - \frac{2}{2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots +$$

$$x, \quad 0 < x < 1,$$

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots = 0, \quad 1 < x < 2,$$

$$\frac{1}{2}, \quad x = 1.$$

$$6. \quad S(0) = 1, \quad S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad S(1) = \frac{3}{2}.$$

$$7. \quad \frac{4l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)x}{l} = f(x), \quad x \in [0, l].$$

$$8. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{l} - \frac{2}{n=1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos \frac{2nx}{l} = f(x), \quad x \in [0, l].$$

$$9. \quad \frac{8}{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3} [(1)^n - 1] \sin \frac{nx}{2} = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 2), \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{16}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{nx}{2} = x^2, \quad x \in [0, 2].$$

10. 1.

12. 10

1. 当 $0 < a < 1$ 时, 收敛; 当 $a > 1$ 时发散.

2. 当 $k = 0$ 时, 发散; 当 $0 < k < 1$ 时, 条件收敛; 当 $k > 1$ 时, 绝对收敛.

3. 条件收敛. 4. 8. 5. $\frac{2}{6}$.

6. 提示: 利用正切的和角公式, $S = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. 8. 2 .

9. $R = |x_0|$, 当 $x_0 > 0$ 时, 收敛域为 $[0, 2x_0)$, 当 $x_0 < 0$ 时, 收敛域为 $(2x_0, 0]$.

10. (1) $R = \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$; (2) $R = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

11. $x = -1$.

$$12. (1) f^{(7)}(0) = -7!; \quad (2) f^{(10)}(0) = \frac{10!}{4!}.$$

$$13. (1) \frac{1}{2}; \quad (2) \frac{1}{4}.$$

$$14. f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad |x| < 1; \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$15. A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2, B_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

$$F(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx.$$

$$16. 1) f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx, \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(2n)^2} = \frac{1}{2(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}})} - \frac{1}{2}.$$

$$17. f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x, \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$18. \overline{a_n} = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\overline{b_n} = b_n \cos nh - a_n \sin nh, \quad n = 1, 2, \dots$$

习 题 十 三

13.1

$$1. 1) \operatorname{Re} z = \frac{3}{13}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{2}{13},$$

$$\overline{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i, \quad |z| = \frac{13}{13}, \quad \arg z = -\arctan \frac{2}{3};$$

$$(2) e^z = -\frac{7}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -13,$$

$$\overline{z} = -\frac{7}{2} + 13i, \quad |z| = \frac{5}{2} \sqrt{26}, \quad \arg z = -\arctan \frac{26}{7} - \frac{\pi}{2};$$

$$(3) e^z = 1, \quad \operatorname{Im} z = -3,$$

$$\overline{z} = 1 + 3i, \quad |z| = 10, \quad \arg z = -\arctan 3.$$

$$2. 1) i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$(2) -1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi};$$

$$(3) 1+i\sqrt{3} = 2 \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

$$(4) 1 - \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})}.$$

$$3. 1) \text{以 } i \text{ 为中心, } 6 \text{ 为半径的圆周};$$

$$(2) \text{中心在 } -2i, \text{半径为 } 1 \text{ 的圆周及其外部区域};$$

- (3) 实轴;
 (4) 以原点为中心, $1/3$ 为半径的圆的外部, 不含边界;
 (5) 直线 $x = 5/2$ 及其左边的平面.

4. 1) 以原点为心, 4 为半径在 u 轴上方的半圆周;

(2) 在 w 平面上对应的图形为射线 $= \frac{2}{3}$;

(3) 直线 $u = 4$.

13 2

1. 1) 在直线 $x = -1/2$ 上可导, 但在复平面上处处不解析;

(2) 在原点 $z = 0$ 处可导, 但在复平面上处处不解析;

(3) 在复平面内除去 $z = 0$ 点的区域内解析;

(4) 不解析.

2. 1) 复平面, $f(z) = 2(z - 1)(2z^2 + 3 - z)$;

(2) 复平面, $f(z) = 3z^2 + 2i$;

(3) 除 $z = \pm 1$ 外在复平面上处处解析, $f(z) = \frac{-2z}{(z^2 - 1)^2}$;

(4) 复平面内除去 -1 及 $\frac{1 \pm 3i}{2}$ 的多连通区域 $f(z) = \frac{2 - 4z^3 - 3z^2}{(z^3 + 1)^2}$.

5. 1) $f(z) = \ln z + c$, $\operatorname{Re} z > 0$;

(2) $f(z) = -ize^z + (1 - i)z + i$;

(3) $(1 - i)z^3 + Ci$; (4) $\frac{1}{2} - \frac{1}{z}$.

6. $\operatorname{Ln}(-i) = 2k - \frac{1}{2}i$, 主值为 $-\frac{1}{2}i$;

$\operatorname{Ln}(-3 + 4i) = \ln 5 - i \arctan \frac{4}{3} + (2k + 1)i$, 主值为 $\ln 5 + - \arctan \frac{4}{3}i$.

7. $-ie$, $\frac{2}{2}e(1 + i)$, $e^{-2k}(\cos \ln 3 + i \sin \ln 3)$,

$e^{-2k + \frac{1}{4}} \cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2}$.

13 3

1. $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$, $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$,

2. i .

4. (1) $2e^2i$; (2) $-\frac{5i}{12}$; (3) 0 ; (4) 0 ; (5) 0 ; (6) $\frac{i}{a}$; (7) $(-1 + i)$.

13 4

1. 不能.

2. 1) $\frac{z-1}{2} - \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} - \frac{(z-1)^4}{2^4} + \dots, \quad |z-1| < 2;$
 (2) $\frac{1}{1-3i} + \frac{3}{(1-3i)^2} [z-(1+i)] + \frac{9}{(1-3i)^3} [z-(1+i)]^2 +$
 $\frac{27}{(1-3i)^4} [z-(1+i)]^3 + \dots, \quad |z-(1+i)| < \frac{10}{3}.$

3. 1) $\sum_{n=-1} (n+2)z^n, \quad \sum_{n=-2} (-1)^n (z-1)^n;$
 (2) $\sum_{n=-1} (z-1)^n, \quad \sum_{n=0} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^{n+2}};$
 (3) $\sum_{n=1} (i)^{n+1} (z-i)^{n-1}, \quad 0 < |z-i| < 1;$
 (4) $\sum_{n=0} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$

4. C.

习 题 十 四

14 1

1. $\mathbf{r} = \frac{t}{3} + 1, \frac{t^2}{2}, e^t.$

14 2

1. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad x+2y+3z=6.$
 2. $\frac{x}{-a} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}, \quad -ax+z=0.$
 3. $\frac{x-a\cos t}{\cos t} = \frac{y-a\sin t}{\sin t} = \frac{z-bt}{0}, \quad x\cos t+y\sin t=a.$
 4. $-a\ln \cos t.$
 5. $\mathbf{r} = a\cos \frac{s}{a^2+b^2}, a\sin \frac{s}{a^2+b^2}, \frac{bs}{a^2+b^2}.$
 6. 1) $\mathbf{T} = \frac{1}{5} (-3\cos t, 3\sin t, -4), \quad \mathbf{N} = (\sin t, \cos t, 0), \mathbf{B} = \frac{1}{5} (4\cos t, -4\sin t, -3),$
 $= \frac{3}{25|\sin t\cos t|}, \quad = \frac{4}{25\sin t\cos t}.$
 (2) $\mathbf{T} = \frac{1}{2(1+t^2)} (1-t^2, 2t, 1+t^2), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{1+t^2} (-2t, 1-t^2, 0),$
 $\mathbf{B} = \frac{1}{2(1+t^2)} (t^2-1, -2t, 1+t^2); \quad = \frac{1}{3(1+t^2)^2}, \quad = \frac{1}{3(1+t^2)^2}.$
 (3) $\mathbf{T} = \frac{1}{a^2+b^2} (-a\cos t, a\sin t, b), \quad \mathbf{N} = (\sin t, \cos t, 0),$
 . 320 .

$$\mathbf{B} = \frac{1}{a^2 + b^2} (-b \cos t, b \sin t, -a); \quad = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

$$7. \mathbf{T} = 0, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \quad \mathbf{B} = 0, -\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \quad \mathbf{N} = (-1, 0, 0); \quad = 1, \quad = \frac{3}{4}.$$

$$9. \mathbf{r} = \frac{2}{5} \cos t, \frac{2}{5} \sin t, -\frac{4}{5}t.$$

14 3 14 4

$$1. (\mathbf{r}, \mu) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{r}_u + \mu \mathbf{r}_v, \quad (\mathbf{t}) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{m}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v.$$

$$2. 1) \quad = d u^2 + d v^2, \quad = 0;$$

$$(2) \quad = a^2 d u^2 + d v^2, \quad = -a d u^2;$$

$$(3) \quad = (v^2 + b^2) d u^2 + d v^2, \quad = -\frac{2b d u d v}{b^2 + v^2};$$

$$(4) \quad = f^2 d u^2 + (f^2 + g^2) d v^2, \quad = \frac{-f g}{f^2 + g^2} d u^2 + \frac{f g - f g}{f^2 + g^2} d v^2.$$

$$3. \text{sh } 1.$$

$$4. \cos = \frac{|\vec{a} - 1|}{a^2 + 1}.$$

$$5. \frac{b}{2} \quad 2 + \ln(1 + 2).$$

$$7. n = \frac{-d u^2}{a(d u^2 + d v^2)}.$$

$$8. \text{提示, 利用欧拉公式}.$$

14 5

$$1. 1) \quad = -\frac{b^2}{(b^2 + v^2)^2}, \quad H = 0;$$

$$(2) \quad = -\frac{1}{(1 + 2 u^2)^2}, \quad H = \frac{1 + u^2}{(1 + 2 u^2)^{3/2}}.$$

索引

一 画

一致收敛	uniform convergence	12 5
------	---------------------------	------

二 画

二重积分	double integral	10 1
几何级数, 等比级数	geometric series	12 1
P - 级数	P - series	12 2

三 画

三重积分	triple integral	10 1
------	-----------------------	------

四 画

切平面	tangent plane	9 6
切向量	tangent vector	9 6
内点	inner point	9 1
双曲点	hyperbola point	14 5
方向导数	directional derivative	9 8
无穷级数	infinite series	12
无旋场	nonrotation field	11 4
从切面	secondary tangent plane	14 2
开集	open set	9 1
区域	range	9 1

五 画

主法线	principal normal	14 2
主曲率	principal curvature	14 4
主方向	principal direction	14 4
边界点	boundary point	9 1

六 画

多元函数	function of several variables	9 1
------	-------------------------------------	-----

有向曲线	directed curve	11 2
有界域	bounded region	9 1
有势场	potential field	11 4
麦克劳林级数	Maclaurin series	12 7
闭区域	closed region	9 1
全增量	total increment	9 3
全微分	total differential	9 3
曲面	curved surface	9 6
曲线积分	curvilinear integral	10 1
曲面积分	surface integral	10 1
曲率	curvature	14 2
闭曲线	closed curve	11 3
闭曲面	closed surface	11 5
向量场	vector field	9 8
向量分析	vector analysis	14 1
收敛	convergence	12 1
共轭调和函数	conjugate harmonic functions	13 2
发散	divergence	12 1
交错级数	alternate series	12 3
收敛半径	convergence radius	12 6
收敛域	convergence domain	12 5
级数	series	12

七 画

体积微元	volume element	10 3
条件收敛	conditional convegence	12 3
条件极值	constrained extreme value	9 7
运动不变量	invariant of motion	14 2
抛物点	parabola point	14 5

八 画

法向量	normal vector	9 6
法线	normal lines	9 6
法平面	normal plane	9 6
法曲率	mormal curvature	14 4
单连通区域	simply connected region	11 3
弧长	arc length	10 1
欧拉公式	Euler's formula	14 3

弧长微元	arc length element	10 .1
函数项级数	function series	12
拉格朗日乘数法	Lagrange multiplier	9 .7

九 画

点函数	point function	9 .1
洛朗级数	Laurent series	13 .4
度量	metric	10 .1
挠率	torsion	14 .2
重积分	multiple integral	10 .2
柱(面)坐标	cylindrical coordinates	10 .3
面积微元	area element	10 .1
绝对收敛	absolute convergence	12 .3
柯西 - 黎曼方程	Cauchy-Riemann equations	13 .2
柯西积分定理	Cauchy integral theorem	13 .3
柯西积分公式	Cauchy integral formula	13 .3
保守场	conservative field	11 .4

十 画

调和级数	harmonic series	12 .1
调和函数	harmonic functions	13 .2
脐点	umbilical point	14 .4
泰勒级数	Taylor series	12 .7
泰勒展开式	Taylor expansion	13 .4
逐项积分	termwise integration	12 .5
逐项微分	termwise differentiation	12 .5
通项	general term	12

十一 画

偏增量	partial increment	9 .2
偏导数	partial derivative	9 .2
混合偏导数	mixed partial derivative	9 .2
累次积分	repeated infegral	10 .2
球(面)坐标	spherical coordinates	10 .3
旋度	rotation (curl)	11 .3
梯度	gradient	9 .8
第一基本形式	first fundament form of a surface	14 .3
第二基本形式	second fundament form of a surface	14 .4

十二画

链导法则	chain rule for differentiation	9 4
椭圆点	ellipse point	14 5
短程曲率	geodesic curvature	14 5
短程线	geodesic	14 5
雅可比行列式	Jacobian	9 5
散度	divergence	11 6
幂级数	power series	12 6
傅里叶级数	Fourier series	12 9
傅里叶系数	Fourier coefficient	12 9
链导法	chain rules	9 4

十三画以上

解析函数	Analytic functions	13 2
聚点	cluster point(accumulation point)	9 1
黎曼积分	Riemann integral	10 1