线性代数学习指导与例题分析

牛少彰　刘吉佑　编

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北 京·

内 容 简 介

本书是“线性代数”课程的学习辅导书，内容包括：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型等。全书按章节编排，按知识点分类，知识点出现的次序与教材一致，每个知识点均有内容提要、例题的分析和解答、练习题及练习题的详尽解答，每章的后面还有综合练习题和解题提示。本书例题和练习丰富，所选题型基本而新颖，包括近年来研究生入学考试中线性代数的部分典型试题，题目广泛而不重复。通过例题讲解，练习题解答和综合练习题的解题提示，使得解题训练循序渐进，在很大程度上充实和提高了课堂教学的内容。本书可作为“线性代数”课程的同步学习、复习和考研的教学参考书和辅导书，也可作为教师的习题课教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与例题分析/牛少彰，刘吉佑编．—北京：北京邮电大学出版社，2003

ISBN 7-5635-0749-3

Ⅰ．线… Ⅱ．①牛…②刘… Ⅲ．线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 077266 号

出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮 编：100876 发行部电话：(010)62282185 62283578(传真)
电子信箱：publish@bupt.edu.cn
经 销：各地新华书店
印 刷：
开 本：850 mm×1168 mm 1/32
印 张：10.75
字 数：280 千字
印 数：1—6 000 册
版 次：2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0749-3/O·57 定价：16.00 元

·如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系·

目　　录

前　　言

线性代数是理工科学生的一门重要的基础课，它主要讨论有限维空间的线性理论，具有较强的抽象性和逻辑性．随着计算机的日益普及，线性代数在理论和应用上的重要性越来越突出，从而对线性代数课程的内容从深度和广度上都相应地提出了更高的要求．但是由于线性代数的一些内容比较抽象，以及线性代数的授课时数少，教材编写简练例题较少，使得学生学习时普遍感到困难，为此，根据多年的教学实践，我们编写了这本学习辅导书，内容包括：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型．

全书按章节编排，按知识点分类，知识点出现的次序与教材一致，每个知识点均有内容提要、例题的分析和解答、练习题及练习题的详尽解答，每章的后面还有复习题和解题提示，复习题是对这一章所学内容的综合练习．每个知识点中出现的例题与练习题所涉及的知识均不超出本知识点及本知识点前面的内容，每章后面的复习题目侧重于本章各知识点的内容的综合掌握，所用知识不超过本章及本章以前各章的内容，便于读者与教材配套使用，进行同步训练，加强对所学概念和定理的理解．

本书例题和练习题丰富，所选题型基本而新颖，包括近年来研究生考试中线性代数的部分典型试题，题目广泛而不重复．通过例题讲解，练习题解答和综合练习题的解题提示，使得解题训练循序渐进，在很大程度上充实和提高了课堂教学的内容．

在本书的编写过程中，得到了理学院数学部许多老师的帮助，

赵启松、闵祥伟和罗守山审阅了部分稿件,与数学部老师丁金扣、黄 铮、郭玉翠、史 悦、莫 娇、温巧燕、李叶舟、章卫平、刘宝生、吴波、贺祖国等的教学研讨使编者获益非浅,并丰富了本书的内容,特此表示感谢.

本书作为我校承担的教育部21世纪初高等教育"理工融合"教学改革项目的子课题研究内容的一部分,得到了北京邮电大学教学改革项目《理工融合培养模式中数学系列课程教学内容和课程体系改革方案及其实践》的大力支持,在此表示衷心感谢.

限于编者水平,书中难免有疏漏和错误之处,恳请读者批评指正.

编者

2003年8月

第一章　行列式

本章主要介绍行列式的定义、性质与计算.要求掌握 n 阶行列式的定义、性质和展开定理,会用行列式的性质和展开定理计算行列式,会用 Cramer 法则求解线性方程组.

第一节　n 阶行列式的定义

一、内容提要

1.全排列及其逆序数

自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成一排,称为一个 n 元排列,n 元排列共有 $n!$ 个.

在一个排列中,任何一对数(无论是相邻的或者不相邻的),如果大数排在小数之前,就称这对数构成一个逆序,一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

n 元排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

将一个排列中的某两个数的位置互换,而其余的数不动,就称对此排列作一次对换.

对换改变排列的奇偶性.

2.n 阶行列式的定义

n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里$\sum$表示对所有 n 元排列求和,上式右端称为 n 阶行列式的展开式.

n 阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和,这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列,由于 n 元排列共有 $n!$ 个,所以行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

二、例题分析

求一个 n 元排列的逆序数,只需对这个排列的 n 个数从左到右顺序地计算每个数与它前面的数有多少个逆序,然后把它们加起来就是这个排列的逆序数.

【例 1】 求排列 $1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \cdots\ 4\ 2$ 的逆序数,并确定它的奇偶性.

【解】 在这个排列中,前 $n+1$ 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1,2n$ 中的每一个数与它前面的数都没有逆序.第 $n+2$ 个数 $2n-2$ 的前面有 2 个数 $2n-1,2n$ 比它大,组成 2 个逆序,第 $n+3$ 个数 $2n-4$ 的前面有 4 个数 $2n-3,2n-1,2n$ 和 $2n-2$ 比它大,组成 4 个逆序,依次类推,得

$$\begin{aligned}&\tau[1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \cdots 4\ 2]\\ &=0+\cdots+0+2+4+\cdots+(2n-4)+(2n-2)\\ &=2[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)]\\ &=n(n-1)\end{aligned}$$

由于 n 和 $(n-1)$ 中一定有一个数为偶数，从而 $n(n-1)$ 为偶数，这个排列为偶排列.

【例 2】 选择 i 与 k，使 9 元排列 $1\ i\ 2\ 5\ k\ 4\ 8\ 9\ 7$ 为偶排列.

【解】 由于这个 9 元排列中缺少 3 和 6，因此 i 和 k 只可能取 3 和 6 这两个数，因此有两种可能性：$i=3$, $k=6$ 或 $i=6$, $k=3$. 先取 $i=3$, $k=6$，计算排列 $1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9\ 7$ 的逆序数，由于

$$\tau(1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9\ 7)=0+0+1+0+0+2+0+0+2=5$$

该排列是奇排列，由于对换改变排列的奇偶性，因此，当 $i=6$, $k=3$ 时，排列 $1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4\ 8\ 9\ 7$ 为偶排列.

由 n 阶行列式的定义，我们知道：行列式的展开式中共有 $n!$ 项；每一项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；在计算每一项所带的正负号时，应把这 n 个元素的行标排成自然排列，即 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 计算列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时，该项带正号，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时，该项带负号.

【例 3】 选择 k 与 l，使

$$a_{26}a_{5k}a_{33}a_{4l}a_{64}a_{12}$$

在 6 阶行列式中带有负号.

【解】 将行标排成自然排列，由于

$$a_{26}a_{5k}a_{33}a_{4l}a_{64}a_{12}=a_{12}a_{26}a_{33}a_{4l}a_{5k}a_{64}$$

要使其带有负号，则列标排列 $2\ 6\ 3\ l\ k\ 4$ 为奇排列. 由于 k 和 l 的选择只能是 $k=1$, $l=5$ 或 $k=5$, $l=1$. 当 $k=1$, $l=5$ 时，

$$\tau(2\ 6\ 3\ 5\ 1\ 4)=1+1+4+2=8$$

所以排列 $2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 4$ 为奇排列，应取 $k=5$, $l=1$.

【例 4】 写出 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 并且带有负号的项.

【解】 由于 5 阶行列式中每一项为

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$$

要使其含有因子 $a_{14}a_{23}$，则 p_1，p_2 已经固定，$p_1=4$，$p_2=3$，从而列标排列 $4\ 3\ p_3\ p_4\ p_5$ 只有 $3!=6$ 种取法，它们是

$$4\,3\,1\,2\,5,\ 4\,3\,1\,5\,2,\ 4\,3\,2\,1\,5,\ 4\,3\,2\,5\,1,\ 4\,3\,5\,1\,2,\ 4\,3\,5\,2\,1.$$

计算它们的逆序数，可知 $4\,3\,1\,2\,5$，$4\,3\,2\,5\,1$，$4\,3\,5\,1\,2$ 为奇排列.因此 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 并且带有负号的项为

$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55},\ -a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51},\ -a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}.$$

【例 5】 利用行列式定义计算下面的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

【解】 在 D 中只有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个元素可能不为零，而它们恰好位于不同行不同列，所以 D 中可能不为零的项只能是这 n 个元素的乘积，即 $a_1a_2\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$.

由于 a_1 位于第 1 行第 $n-1$ 列，a_2 位于第 2 行第 $n-2$ 列，$\cdots$，a_{n-2} 位于第 $n-2$ 行第 2 列，a_{n-1} 位于第 $n-1$ 行第 1 列，a_n 位于第 n 行第 n 列，所以 $a_1a_2\cdots a_n$ 的行标排列为自然排列，列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$，

$$\begin{aligned}\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n] &= 0+1+\cdots+(n-3)+(n-2)+0 \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零，所以其余各项均为零，故

$$D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

【例 6】 用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & x-2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & x & 0 \\ 5 & 3 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 项的系数 .

【解】 若先将行列式展开再求系数,则很繁琐,所以不妨按定义直接考虑,由于行列式中每一项都是由不同行不同列元素乘积组成,因而所给行列式的展开式中 x^4 与 x^3 项只能在对角线上的 4 个元素相乘这一项中出现 .由于

$$(x-1)(x-2)x(x-1)=x^4-4x^3+\cdots$$

故 x^4 的系数为 1, x^3 的系数为 - 4 .

三、练习题

1 . 求排列 $(2k)\ 1\ (2k-1)\ 2\ \cdots\ (k+1)\ k$ 的逆序数 .

2 . 选择 i 与 k,使 9 元排列 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 为偶排列 .

3 . 选择 k 与 l,使 $a_{47}a_{53}a_{1k}a_{65}a_{7l}a_{24}a_{31}$ 在 7 阶行列式中带有负号 .

4 . 下列各项中,哪一项是 5 阶行列式的展开式中的项 ?

(1) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{12}a_{25}$;

(2) $a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}$;

(3) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$.

5 . 利用行列式定义计算下面的 n 阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

6. 确定下列 16 个元素皆不相同的 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & 7 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

中 $8\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot 6$ 一项前面应带有什么符号?

7. 用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 项的系数.

8. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0 .$$

四、练习题解答

1. $\tau[(2k)1(2k-1)2(2k-2)\cdots(k-1)(k+1)k]$

$= 0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k$

$= 2\cdot\dfrac{(k-1)k}{2}+k = k^2 .$

2. i 和 k 只能取 3 和 8 这两个数, 当 $i=3$, $k=8$ 时, 由于

$$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9) = 0+0+0+1+2+1+1=5$$

因此应取 $i=8$, $k=3$.

3. 由于

$$a_{47}\ a_{53}\ a_{1k}\ a_{65}\ a_{7l}\ a_{24}\ a_{31} = a_{1k}\ a_{24}\ a_{31}\ a_{47}\ a_{53}\ a_{65}\ a_{7l}$$

列标排列为 $k\ 4\ 1\ 7\ 3\ 5\ \ l$, **当** $k=6$, $l=2$ **时为奇排列**, **因此应取** $k=6$, $l=2$.

4 . (1) **因为** a_{42} , a_{12}**都是取自第** 2 **列**, **所以该项不是** 5 **阶行列式的展开式中的项** .

(2) **虽然该项的** 5 **个元素取自不同行不同列**, **但由于**

$$a_{12}\ a_{41}\ a_{35}\ a_{53}\ a_{24} = a_{12}\ a_{24}\ a_{35}\ a_{41}\ a_{53}$$

列标排列的逆序数 $\tau(2\ 4\ 5\ 1\ 3)=5$, **因此应带负号**, **所以此项不是** 5 **阶行列式的展开式中的项** .

(3) **该项的** 5 **个元素取自不同行不同列**, **又**

$$a_{52}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{15}\ a_{43} = a_{15}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43}\ a_{52}$$

且 $\tau(5\ 1\ 4\ 3\ 2)=7$, **该项应带负号**, **所以此项是** 5 **阶行列式的展开式中的项** .

5 . $D=(-1)^{\tau(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)}\,n\,!\ =(-1)^{n-1}\,n\,!$

6 . **将** $8\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot 6$ **写成** $8\cdot 6\cdot(-2)\cdot(-5)$, **则行标排列为自然排列**, **列标排列** 3 4 2 1 **为奇排列**, **所以该项前应带有负号** .

7 . **含** x^4 **的项为**$(-1)^{\tau(1\ 2\ 3\ 4)}\,a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}=10x^4$,

含 x^3 **的项为**$(-1)^{\tau(2\ 1\ 3\ 4)}\,a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44}=-2x^3$

和$(-1)^{\tau(4\ 2\ 3\ 1)}\,a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41}=-3x^3$.

因此 x^4 **的系数为** 10, x^3 **的系数为**$(-2)+(-3)=-5$.

8 . **由于**

$$a_{3p_3}=0 \quad (p_3=1,2,3);$$

$$a_{4p_4}=0 \quad (p_4=1,2,3);$$

$$a_{5p_5}=0 \quad (p_5=1,2,3) .$$

而 5 **阶行列式的一般项为**

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4p_5)}\,a_{1p_1}\,a_{2p_2}\,a_{3p_3}\,a_{4p_4}\,a_{5p_5}$$

只要 p_3, p_4, p_5 中有一个取到 1,2 或 3,对应项便为 0,又 p_3, p_4, p_5 应取 1,2,3,4,5 中互不相同的三个数,故其中必有 1,2 或 3,因此行列式的展开式中每一项都为 0,故该行列式等于零 .

第二节 行列式的性质、展开定理和计算

一、内容提要

1 .行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等 .

性质 2 对换行列式的任意两行(列),行列式变号 .

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式 .或者说,行列式中某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面 .

性质 4 行列式中如果有两行(列)对应元素成比例,则此行列式等于零 .

性质 5 如果行列式的某一行(列)元素都是两个数之和,则此行列式可表示为两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6　将行列式的某一行(列)乘以同一数后加到另一行(列)对应元素上去,行列式的值不变.

2.**行列式按一行(列)展开**

(1) **行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即**

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

(2) **行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即**

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

3.**一些特殊的行列式**

(1) **对角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) **三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$

(3) **范德蒙行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) .$$

二、例题分析

行列式的计算是第一章的重点,计算行列式的方法很多,除了前面已经介绍的用行列式的定义直接计算外,主要是用行列式的性质和展开定理进行计算,常用的方法有以下几种:

1 .**利用行列式性质化行列式为三角形行列式**

【例 1】 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

解法一 计算等号左边的行列式,将第 1 **列乘** -1 **后加到以后各列,则有**

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix}
$$

$$
= -x(1-x)\cdots(n-2-x) = 0 .
$$

因此 $x_1 = 0, x_2 = 1, \cdots, x_{n-1} = n-2$.

本题也可直接使用行列式性质求得.

解法二　令方程左边的行列式为 $f(x)$, **由** n **阶行列式的定义可知**, $f(x)$ **是关于** x **的** $n-1$ **次多项式**, **所以** $f(x)$ **的根最多有** $n-1$ **个**.**根据行列式的性质易知**

$$
f(i) = 0,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n-2 .
$$

故原方程的根为 $x_1 = 0, x_2 = 1, \cdots, x_{n-2} = n-2$.

【例 2】　计算 n **阶行列式**

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},
$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

【解】 从第 1 行到第 n 行,依次提出公因子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}.$$

由于上述行列式的每列元素之和均为 $1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$,所以从第 2 行起各行都加到第 1 行并提出公因子 $1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$,得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

第 1 行分别乘 $-\frac{1}{a_i}$后加到第 i 行, $i=2,3,\cdots,n$,得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

2 . 按行列式某一行(列)展开

【例 3】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

【解】

$$D \xlongequal[c_4+2c_1]{c_3+2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ a & b & c+2a & d+2a \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 行展开}} 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ b & c+2a & d+2a \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+3c_1]{c_2-3c_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ b & c+2a-3b & d+2a+3b \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 行展开}} (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} c+2a-3b & d+2a+3b \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=16a-6b+5c+3d.$$

【例 4】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

【解】 从第 2 行开始，每行乘 -1 后加到上一行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

从第 $n-1$ **列开始,依次用前一列乘** -1 **后加到后一列,得**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

按第 1 **列展开,得**

$$\begin{aligned} D_n &= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} \\ &\quad + x\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^n \\ &= (-1)^n[(x-1)^n - x^n]\ . \end{aligned}$$

【例 5】 计算 n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} y & b & b & \cdots & b & b \\ c & x & a & \cdots & a & a \\ c & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ c & a & a & \cdots & x & a \\ c & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

【解】 将第 n 行乘以 -1 后分别加到第 $2,3,\cdots,n-1$ 行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} y & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & a-x \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & a-x \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \\ c & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

将第 2 列,第 3 列,$\cdots$,第 $n-1$ 列都加到第 n 列得

$$D_n = \begin{vmatrix} y & b & b & \cdots & b & (n-1)b \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ c & a & a & \cdots & a & x+(n-2)a \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开得

$$D_n = y\begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ a & a & \cdots & a & x+(n-2)a \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}c\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & (n-1)b \\ x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \end{vmatrix}$$

将上式中的第 2 个行列式按最后一列展开得

$$D_n = y(x-a)^{n-2}[x+(n-2)a]+(-1)^{2n+1}(n-1)bc(x-a)^{n-2}$$

$$=(x-a)^{n-2}[y(x+(n-2)a)-(n-1)bc].$$

3 .**递推公式法**

【例 6】 **计算** $n+1$ **阶行列式**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

【解】 **将所给行列式按第** 1 **行展开,得**

$$D_{n+1}=aD_n+(-1)^{1+2}\cdot(-1)\begin{vmatrix} ax & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ax^n & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=aD_n+xD_n$$

$$=(a+x)D_n$$

$$=(a+x)(a+x)D_{n-1}$$

……

$$=(a+x)^{n-1}D_2$$

$$=(a+x)^{n-1}\begin{vmatrix} a & -1 \\ ax & a \end{vmatrix}$$

$$=a(a+x)^n.$$

【例 7】 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}.$$

【解】 按第 1 行展开

$$D_{2n}=a_n\cdot\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+\ b_n(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

把这两个 $2n-1$ 阶行列式再按最后一行展开,有

$$\begin{aligned} D_{2n} &= a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_nD_{2n-2} \\ &= (a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)} \end{aligned}$$

以此作为递推公式,得

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \\
&= (a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) D_{2(n-2)} \\
&= \cdots = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_2 d_2 - b_2 c_2) D_2 \\
&= (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_2 d_2 - b_2 c_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) .
\end{aligned}
$$

4 .数学归纳法

【例 8】 证明 n 阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}
= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, \ a \neq b .
$$

【证明】 对阶数 n 使用数学归纳法 .

当 $n = 1$ 时, $D_1 = a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$,故结论成立 .

假设结论对小于等于 $n - 1$ 的自然数都成立,下证 n 的情形 .

将 D_n 按第 1 列展开,得

$$
D_n = (a+b) \begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}
$$

$$- \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

上式右端第 1 个行列式为 D_{n-1},将第 2 个行列式按第 1 行展开,使用归纳假设得

$$\begin{aligned} D_n &= (a+b)D_{n-1} - ab\,D_{n-2} \\ &= (a+b)\frac{a^n - b^n}{a-b} - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} \\ &= \frac{a^{n+1} - ab^n + ba^n - b^{n+1}}{a-b} - \frac{a^n b - ab^n}{a-b} \\ &= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}. \end{aligned}$$

由归纳法知,结论正确.

数学归纳法只能用于已有结论时的归纳证明,若对于行列式的计算,应先推测出结论,再进行归纳证明.

【例 9】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

【解】 由于不知道 D_n 的值,我们先计算 D_1, D_2, D_3,然后对 D_n 的值进行推测,由于

$$D_1 = 2a$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & a^2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2a & a^2 & 0\\ 1 & 2a & a^2\\ 0 & 1 & 2a\end{vmatrix}=4a^3$$

由此推测 $D_n=(n+1)a^n$.

下面用数学归纳法进行证明 .

当 $n=1$ 时, $D_1=2a$,结论成立 .

假设结论对于小于等于 $n-1$ 的自然数都成立,下证结论对 n 的情形也成立 .将 D_n 按第 1 列展开,得

$$D_n=2a\begin{vmatrix}2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a\end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a\end{vmatrix}$$

上式右端第 1 个行列式为 D_{n-1},将第 2 个行列式按第 1 行展开得 a^2D_{n-2},使用归纳假设,得

$$\begin{aligned}D_n&=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}\\&=2a(na^{n-1})-a^2[(n-1)a^{n-2}]\\&=(n+1)a^n .\end{aligned}$$

由归纳法知,结论正确 .

5 .化成范德蒙行列式的形式

对一些特殊的行列式可将其化成范德蒙行列式的形式,再利

用范德蒙行列式的结果计算出该行列式的值.

【例 10】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n+1$.

【解】 此行列式中从左到右各列 a_i 按降次幂排列,b_i 按升次幂排列,从第 1 行提出 a_1^n,第 2 行中提出 a_2^n,…,第 $n+1$ 行提出 a_{n+1}^n,再将所得的行列式转置便化成标准形式的范德蒙行列式,即

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{b_2}{a_2} & \cdots & \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \\ \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^n & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^n & \cdots & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\cdot\prod_{1\le j<i\le n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$=\prod_{1\le j\le i\le n+1}(b_ia_j-a_ib_j)$$

【例 11】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

【解】 将最后一行与它上面的各行依次互换,使其换到第 1 行,再将所得到的行列式的最后一行与它上面的 $n-2$ 行依次互换,使其换到第 2 行,一直下去,直到原行列式的第 $n+1$ 行变成第 1行,第 n 行变成第 2 行,…,第 1 行变成第 $n+1$ 行,共做了 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$次行对换,从而有

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}.$$

此时已将行列式化成了范德蒙行列式的形式,为便于处理上式右端行列式前的符号,将上式右端行列式的各列也做和上述行对换次序一致的列对换,则有

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a-n & a-n+1 & \cdots & a-1 & a\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ (a-n)^{n-1} & (a-n+1)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1}\\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & (a-1)^n & a^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leq j<i\leq n+1}[(a-n-1+i)-(a-n-1+j)]$$

$$=\prod_{1\leq j<i\leq n+1}(i-j)$$

6 .加边法

所谓加边法,就是在行列式中增加一行一列,将原来的 n 阶行列式加边成 $n+1$ 阶行列式再进行计算 .

【例 12】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

【解】 这道题的一种解法见例 2,下面给出另一种解法,将行列式加边成 $n+1$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 1 & 1 & & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

将行列式第一行的(-1)倍加到其余各行,则有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

将行列式中第 $i(i=2,\cdots,n+1)$列的$\left(-\dfrac{1}{a_{i-1}}\right)$倍加到第一列,则有

$$D_n=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

【例 13】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

【解】 由于此行列式与范德蒙行列式相似,仅缺少 x_i^{n-1} 行,故可作 $n+1$ 阶行列式

$$f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}.$$

根据范德蒙行列式的结果,有

$$\begin{aligned} f(y) &= \prod_{i=1}^{n} (y - x_i) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \\ &= [y^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) y^{n-1} + \cdots \\ &\quad + (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n] \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

如果将此 $n+1$ 阶行列式按最后一列展开,则其 y^{n-1} 的系数应为$(-1)^{n+n+1} M_{n,n+1} = -D_n$**,所以可得**

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

以上是计算行列式的一些方法,有时要几种方法一起使用,如例 13,先用加边法化成范德蒙行列式,再用展开定理,最后计算出 D_n.除此之外,有的题目还要一些技巧.

【例 14】 已知四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\3&1&8&0\\-2&1&4&3\\4&1&2&5\end{vmatrix},$$

求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$的值,其中 A_{ij}为行列式 D 中元素 a_{ij}的代数余子式.

【解】 如果直接计算 A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}的值,然后把它们加起来求结果,则计算量较大,且容易出错.由于

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}$$

它是行列式 D 中第 2 列元素与第 4 列对应元素代数余子式乘积之和,故由展开定理的推论知

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0.$$

由于行列式的计算还涉及以后各章的内容,因此,后面还将继续讨论行列式的计算.

三、练习题

1.计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&a_1&0&\cdots&0\\c_2&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\c_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix},\ a_i\neq0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

2.计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&1&2&\cdots&n-1\\3&2&1&\cdots&n-2\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\n&n-1&n-2&\cdots&1\end{vmatrix}.$$

3．**解方程**

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_1+a_2-x&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_2+a_3-x&\cdots&a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}+a_n-x\end{vmatrix}=0,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **是** n **个互不相同的数,且** $a_1\neq0$．

4．**计算** n **阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_1&x&x&\cdots&x\\x&a_2&x&\cdots&x\\x&x&a_3&\cdots&x\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\x&x&x&\cdots&a_n\end{vmatrix}.$$

5．**证明奇数阶反对称行列式等于零(行列式** $D=\det(a_{ij})$ **中元素** $a_{ij}=-a_{ji}$**时,称为反对称行列式)**．

6．**证明**

$$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}=0.$$

7．**计算** n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

8. **计算** $n+1$ **阶行列式**

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. **证明**

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

10. **计算** n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

四、练习题解答

1．将行列式 D 的第 i 列($i=2,3,\cdots,n+1$)的$\left(-\dfrac{c_{i-1}}{a_{i-1}}\right)$倍分别加到第 1 列,就有

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{c_i}{a_i}b_i & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left[a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}b_i\right].$$

2．从第 n 行开始依次将下一行减去上一行,

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

再从第 1 行开始依次将上一行减去下一行,

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

利用展开定理可得

$$D_n = 1\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 \\ -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\times(n+1)\times(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n}(-2)^{n-2}(n+1)$$

$$= (-1)^{n-1}(n+1)2^{n-2}\ .$$

3 . **方法一　先化简左边的行列式** D, **提出第 1 列的** a_1, **然后将第** i **列**($i=2,\cdots,n$)**减去第 1 列的** a_i **倍**, **则有**

$$D = a_1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 - x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 - x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

$$= a_1\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - x),$$

所以原方程化为

$$a_1(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x) = 0,$$

其解为
$$x = a_1,\ x = a_2,\ \cdots,\ x = a_{n-1}\ .$$

方法二　因为此方程左端为 $n-1$ **次多项式**, **所以此方程只有** $n-1$ **个根**, **由于当** $x = a_i(i=1,2,\cdots,n-1)$**时左边行列式有两列成比例**, **从而可断定方程的根就是** $x = a_i(i=1,2,\cdots,n-1)$.

4 . **当** $x=0$ **时**, $D = a_1a_2\cdots a_n$;

当 $x = a_i(i=1,2,\cdots,n)$**时**,

$$D = a_i \prod_{j \neq i} (a_j - a_i)$$

下设 $x \neq 0$ **且** $x \neq a_i$,**由于**

$$D = x^n \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{a_2}{x} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a_3}{x} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{a_n}{x} \end{vmatrix},$$

从第 2 **列开始均减去第** 1 **列,则有**

$$D = x^n \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x} & 1 - \frac{a_1}{x} & 1 - \frac{a_1}{x} & \cdots & 1 - \frac{a_1}{x} \\ 1 & \frac{a_2}{x} - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{a_3}{x} - 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_n}{x} - 1 \end{vmatrix}.$$

从第 $i(i = 2,3,\cdots,n)$**列提出因子**$\frac{a_i}{x} - 1$,**则有**

$$D = x^n \left(\frac{a_2}{x} - 1\right) \cdots \left(\frac{a_n}{x} - 1\right) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x} & \frac{x - a_1}{a_2 - x} & \frac{x - a_1}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x - a_1}{a_n - x} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

第一列减去以后各列,则可知

$$D = x(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\left[\frac{a_1}{x} - \frac{x - a_1}{a_2 - x} - \cdots - \frac{x - a_1}{a_n - x}\right]$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \cdots + \frac{1}{a_n - x}\right].$$

5 . 设行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的阶数为 n,则 n 为奇数,由于

$$a_{ij} = -a_{ji},\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

当 $i = j$ 时,由 $a_{ii} = -a_{ii}$,得

$$a_{ii} = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

从而行列式 D 为

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

从 D 的每一行中提出 -1,则有

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n D^{\mathrm{T}} = -D^{\mathrm{T}},$$

又因 $D = D^{\mathrm{T}}$,所以有 $D = 0$.

6 . $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1}}{=}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_3-2c_2\\c_4-3c_2}}{=}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

7 . **按第 1 列展开**

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= a\cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b\cdot b^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

8 . **可通过各行的两两互换和前 n 列的两两互换化为范德蒙行列式的形式,再根据公式写出结果 .**

$$D_{n+1} = (-1)^{1+2+\cdots+n}(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ n^n & (n+1)^n & \cdots & (2n-1)^n & (2n)^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0\le j\le i\le n} [(2n-j)-(2n-i)]$$

$$= (-1)^{n^2} \prod_{0\le j\le i\le n} (i-j)$$

$$= (-1)^{n^2} n!(n-1)!\cdots 2!1!.$$

9. $n=1$ 时, $D_1 = 2 = 1+1$, 故对一阶行列式结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 即 $D_{n-1} = (n-1)+1 = n$

现证结论对 n 阶行列式成立, 对 n 阶行列式 D_n, 将各列加到第1列, 再按第1列展开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = D_{n-1} + 1.$$

由归纳假设知 $D_{n-1} = n$, 得证 $D_n = n+1$. 由归纳法知结论正确.

10. 由于

$$D_1 = \alpha + \beta$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ \alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \beta & 0\\ \alpha & \alpha+\beta & \beta\\ 0 & \alpha & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3.$$

由此推测 $D_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$.下面用数学归纳法进行证明.

当 $n=1$ 时,$D_1=\alpha+\beta$,结论成立.

假设结论对小于等于 $n-1$ 的自然数都成立,下证 n 的情形.将 D_n 按第 1 列展开.

$$D_n=(\alpha+\beta)\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \beta & \cdots & 0 & 0\\ \alpha & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \beta\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$+\alpha(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \alpha & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \beta\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \alpha+\beta\end{vmatrix}.$$

再将上式右端的第 2 个行列式按第 1 行展开,得

$$\begin{aligned}D_n&=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}\\ &=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})\\ &\quad-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\alpha^{n-3}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-3}+\beta^{n-2})\\ &=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n\end{aligned}$$

由归纳法知结论成立.

第三节　克拉默法则

一、内容提要

设含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有惟一解,且其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \; x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \; x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若方程组(1.1)右端的常数列全为零,即

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0,
\end{cases} \tag{1.2}
$$

则称方程组(1.2)为齐次线性方程组.当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,称方程组(1.1)为非齐次线性方程组.

齐次线性方程组总有解, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一组解,称其为零解;若有一组不全为零的数是方程组(1.2)的解,则称其为非零解.

若方程组(1.2)式的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组有惟一零解,其逆否命题为:

若齐次线性方程组(1.2)有非零解,则它的系数行列式一定为零.

在学习中,应注意以下两点:

1.克拉默法则仅适用于系数行列式 $D \neq 0$ 的 n 个方程的 n 元线性方程组,也就是说当线性方程组中的变量个数与方程的个数不相等(此时没有系数行列式),或线性方程组中的变量个数与方程的个数虽然相等,但系数行列式 $D = 0$ 时,克拉默法则不适用.

2.克拉默法则在理论上是非常重要的,它给出了一种特殊情况下线性方程组的求解公式,但当 n 较大时,需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式,计算量太大,因此一般不用克拉默法则去求解线性方程组.

二、例题分析

【例1】 对于三次多项式 $f(x)$,已知 $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 4$, $f(-1) = 1$,求 $f(x)$.

【解】 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,根据已知条件有

$$f(0)=d=0$$

$$f(1)=a+b+c=-1$$

$$f(2)=8a+4b+2c=4$$

$$f(-1)=-a+b-c=1$$

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 8a+4b+2c=4 \\ -a+b-c=1 \end{cases}$$

由
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=12,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=12,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-24$$

解得 $a=1,\ b=0,\ c=-2$,因此 $f(x)=x^3-2x$.

【例 2】 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + kx_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + kx_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ kx_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

有非零解,求 k **的值.**

【解】
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & k \\ -1 & 1 & k & -1 \\ -1 & k & 1 & -1 \\ k & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k-1 \\ k-1 & 0 & k-1 \\ k-1 & k-1 & 1-k^2 \end{vmatrix}$$

$$= (k-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & k-1 \\ 1 & 1 & 1-k^2 \end{vmatrix}$$

$$= (k-1)^2 (k^2 + 2k - 3)$$

$$= (k-1)^3 (k+3)$$

由于线性方程组有非零解,因此 $D = 0$**,即** $k = 1$ **或** -3.

【例 3】 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 + \cdots + a_3^{n-1} x_n = 1 \\ \cdots \\ x_1 + a_n x_2 + a_n^2 x_3 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

其中 $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

【解】 方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

其转置为范德蒙行列式,因此

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0$$

方程组有惟一解 .由于 $D_1 = D \neq 0$,**而在** $D_2, D_3, \cdots, D_n$ **中均有两列完全一样,所以** $D_2 = D_3 = \cdots = D_n = 0$ **.从而方程组的解为**

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \ x_2 = \cdots = x_n = 0 \ .$$

【例 4】 一个函数 $\phi(x)$**在**$[0,1]$**区间中** $n+1$ **个不同点** $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$**上,给定不全为零的函数值** $\phi(t_1), \phi(t_2), \cdots, \phi(t_{n+1})$**,是**

否可以找到惟一的一个 n 次多项式

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n,$$

使

$$f(t_i) = \phi(t_i), \ i = 1, 2, \cdots, n+1 .$$

【解】　假设可以找到一个 n 次多项式

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

使

$$f(t_i) = \phi(t_i), \ t = 1, 2, \cdots, n+1$$

则有

$$\begin{cases} a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \cdots + a_n t_1^n = \phi(t_1) \\ a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 + \cdots + a_n t_2^n = \phi(t_2) \\ \qquad \cdots \\ a_0 + a_1 t_{n+1} + a_2 t_{n+1}^2 + \cdots + a_n t_{n+1}^n = \phi(t_{n+1}) \end{cases}$$

上式可看成是以 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为未知数的线性方程组,由于它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n+1} \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_1^n & t_2^n & \cdots & t_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (t_i - t_j) \neq 0$$

所以由克拉默法则知 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 有惟一解,因而可以找到满足

题目要求的惟一的一个 n 次多项式 .

【例 5】 设 a, b, c, d 是不全为 0 的实数,证明线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$$

只有零解 .

为便于计算该方程组的系数行列式,首先给出两个 n 阶行列式的乘法定理 .

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

下面给出例 5 的证明 .

【证明】 该方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$$

直接计算这个行列式比较繁琐,下面利用两个行列式的乘法定理进行计算,由于

$$D^2 = D \cdot D^T = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

所以

$$D = \pm (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

由于行列式 D 的展开式中 a^4 的系数是 -1,所以上式必须取负号,因此

$$D = -(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

因为 a, b, c, d 是不全为 0 的实数,所以 $D \neq 0$,由克拉默法则知该方程组只有零解 .

三、练习题

1 . 问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (6-\lambda)y = 0 \\ 2x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

有非零解?

2 . 求一个二次多项式 $f(x)$,使 $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$.

3 . 问 λ, μ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_2 + \mu x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0\end{cases}$$

有非零解?

4 . **用克拉默法则求解线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2\\ x_1 + x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 2\\ \cdots\\ x_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2\\ nx_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2\end{cases}$$

5 . **设** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **为互不相同的数**, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ **是任意一组给定的数,用克拉默法则证明:存在惟一的次数小于** n **的多项式** $f(x)$,**使得**

$$f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \cdots, n .$$

四、练习题解答

1 . **线性方程组的系数行列式为**

$$D = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 2\cdot(4-\lambda) + 2[-2(6-\lambda)]$$

$$= (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 8(5-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)(24 - 10\lambda + \lambda^2 - 8)$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

由 $D = 0$,**得** $\lambda = 2, 5$ **或** 8 .

2 . **设所求的二次多项式为** $f(x) = ax^2 + bx + c$,**其中** a, b, c

为待定常数,由已知条件得

$$f(1)=a+b+c=-1$$

$$f(-1)=a-b+c=9$$

$$f(2)=4a+2b+c=-3$$

求解以 a, b, c 为未知数的线性方程组,由于

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\4 & 2 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$$

类似有 $D_1=6, D_2=-30, D_3=18$,由克拉默法则

$$a=\frac{D_1}{D}=1,\quad b=\frac{D_2}{D}=-5,\quad c=\frac{D_3}{D}=3$$

所求的二次多项式为 $f(x)=x^2-5x+3$.

3.线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \mu & 1\\1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1-\lambda & \mu-1 & 0\\1-\lambda & 2\mu-1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1-\lambda & \mu-1\\1-\lambda & 2\mu-1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & \mu-1\\1 & 2\mu-1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda)$$

由 $D=0$,得 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$.

$$4.\ D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\1 & 1 & \cdots & 2 & 1\\\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\1 & n-1 & \cdots & 1 & 1\\n & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!$$

由于 $D_1, \cdots, D_{n-1}$ **中有两列成比例**,**所以** $D_1 = \cdots = D_{n-1} = 0$,**类似计算** D_n,**有**

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2 \cdot (n-1)!$$

因此方程组的解为

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0, x_n = 2.$$

5 . **设次数小于** n **的多项式为**

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

由于要求 $f(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$,**因此有**

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_1^2 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ c_0 + c_1 a_2 + c_2 a_2^2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2 \\ \cdots \\ c_0 + c_1 a_n + c_2 a_n^2 + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

由于系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0$$

所以由克拉默法则知 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ **有惟一解**,**故所求的多项式**

$f(x)$是惟一的.

复习题一

1.填空题

(1) 排列$(2k)\ 1\ (2k-1)\ 2\ \cdots\ (k+1)\ k$的逆序数为________.

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

(3) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$,则 $f(x)$中 x^3 项的系数为________.

(4) 设三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2,\text{则 } D_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}-a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}-a_{12} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}=$$

________.

(5) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} (k-1)x_1+kx_2=0 \\ -2x_1+(k-1)x_2=0 \end{cases} \quad (k\text{为实数})$$

仅有零解,则 k 为________.

2.选择题

(1) 设 $D=\det(a_{ij})$为3阶行列式,且该行列式的值为1,则行

列式 $\det(-2a_{ij})$**的值为**(　　).

(A) -2;　　(B) -8;　　(C) 2;　　(D) 8.

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = $(　　).

(A) $-a_1a_2\cdots a_n$;　　(B) $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$;

(C) $a_1a_2\cdots a_n$;　　(D) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$.

(3) **多项式** $\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix}$ **最高可能的次数为**(　　).

(A) 4;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 16.

(4) 4**阶行列式** $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ **的值等于**(　　).

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$;

(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$;

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$;

(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

(5) **齐次线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解,则 λ 必须满足(　　).

(A) $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 4$;　　(B) $\lambda = -1$;

(C) $\lambda = -4$;　　(D) $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 4$.

3.**试证在一个 n 阶行列式中,等于零的元素如果比 $n^2 - n$ 还多,那么这个 n 阶行列式必为零.**

4.**已知** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \alpha_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \alpha_4 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \beta_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \beta_4 \end{vmatrix} = 1$.

求 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} & 4\alpha_1 - 3\beta_1 \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} & 4\alpha_2 - 3\beta_2 \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} & 4\alpha_3 - 3\beta_3 \\ a_{41} & 2a_{42} & 3a_{43} & 4\alpha_4 - 3\beta_4 \end{vmatrix}$.

5.**求下列方程的解**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 3-x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$.

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个不同的实数.

6 .**计算下列行列式**

(1) $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}$.

(2) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

(3) $D_n = \det(a_{ij})$,**其中** $a_{ij} = |i - j|$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

(4) $D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$.

(5) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

(6) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$

7 . **试证**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1} .$$

8 . **试用数学归纳法证明**

(1) $$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = 1 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 .$$

(2) $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) .$$

9 . **计算** $n+2$ **阶行列式**

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu \\ x_1 & a & b & \cdots & b & y_1 \\ x_2 & b & a & \cdots & b & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ x_n & b & b & \cdots & a & y_n \\ \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} .$$

10 . **计算** n **阶行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

11．**计算** n **阶行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}.$$

12．**设** $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，**试证：如果** $f(x)$ **有** $n+1$ **个不同的根，则** $f(x)$ **是零多项式，即** $f(x)\equiv 0$．

复习题一答案或提示

1．(1) k^2； (2) x^4； (3) $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$；(4) -2； (5) **任意实数**．

2．(1) B； (2) D； (3) B； (4) D； (5) D．

3．n **阶行列式** D_n **中一共有** n^2 **个元素，如果等于零的元素比** n^2-n **还多，则** D_n **中最多有** $n-1$ **个元素不为零，所以** D_n **的** $n!$ **项中每项的** n **个元素（取自不同行不同列）中必有零元素出现，即** $n!$ **项的每一项都是零，因此** $D_n=0$．

4．$D=54$．

5．(1) $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$； (2) $x_1=a_1$，$x_2=a_2$，$\cdots$，$x_n=a_n$．

6．(1) $-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$； (2) $n!$；

(3) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

从最后一行开始将上一行的 -1 倍加到本行,再将所得新行列式的最后一列加到前面 $n-1$ 列,可得

$$D = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

(4) 将各列都加到第 1 列可得

$$D_n = (-1)^n m^{n-1}\left(m - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

(5) 第 $1,2,\cdots,n$ 行分别提取 $1,2,\cdots,n$,然后利用范德蒙行列式结果,得

$$\begin{aligned} D_n &= n!\prod_{1\le j<i\le n}(i-j) \\ &= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!\cdot 1! \end{aligned}$$

(6) 将第 1 列乘 -1 后分别加到第 2 列,$\cdots$,第 n 列得

$$D_n = \begin{cases} a_1 - b_1, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2), & \text{当 } n=2 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\ge 3 \text{ 时}. \end{cases}$$

7. 提示:将各列元素都加到第 1 列,提出公因子,再从下到上,用下面一行减去上面一行,然后按第 1 列展开.将得到的 $n-1$ 阶行列式的各列加到第 1 列,并把得到的第 1 列再加到其他各列,即可得到所需要的结果.

8. (1) $n=1$ 时显然,假设 $n-1$ 时结论成立,将 D_n 按第 1 列拆成两个行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ 0 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^2 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + a_2^2 & a_2 a_3 & \cdots & a_2 a_n \\ a_3 a_2 & 1 + a_3^2 & \cdots & a_3 a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n a_2 & a_n a_3 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + 1 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2$$

$$= 1 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 .$$

(2) **在** D_n **中将第** $n-1$ **行的** $-x_n^2$ **倍加到第** n **行,然后从第** $n-1$ **行开始,依次减去上一行的** x_n **倍,再按第** n **列展开** .

$$D = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} + x_{n-1}^{n-2} x_n \end{vmatrix},$$

最后将右边行列式分成两行列式的和,并分别利用归纳性假设和范德蒙行列式的结果 .

9 . **按第** 1 **行展开,最后得**

$$D_{n+2}=(\lambda^2-\mu^2)(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$$

10 . 从第 2 行开始, 前一行乘 - 1 加到后一行, 再利用范德蒙行列式的结果可得

$$D=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)\ .$$

11 . 将第 n 列最后一个元素 x 写成 $x=a+(x-a)$, 按最后一列将 D_n 拆成两个行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a & 0 \\ -a & -a & x & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x-a \end{vmatrix}$$

将上式右端的第 1 个行列式的第 n 列依次加到第 $1, 2, \cdots, n-1$ 列, 第 2 个行列式按第 n 列展开, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x & 2a & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & a+x & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & 0 & a+x & \cdots & 2a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(x-a)D_{n-1}$$

$$=a(a+x)^{n-1}+(x-a)D_{n-1}\ .$$

再将 D_n 的第 n 列最后一个元素 x 写成 $x=(x+a)-a$, 按最后一列拆开成两个行列式可得

$$D_n=-a(x-a)^{n-1}+(a+x)D_{n-1}$$

联立得

$$\begin{cases} D_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1} \\ D_n = -a(x-a)^{n-1} + (a+x)D_{n-1} \end{cases}$$

解得
$$D_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}.$$

12．设 $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ 是 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同根，代入得 $f(t_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n+1$，由此得到关于未知数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的由 $n+1$ 个方程组成的方程组，利用范德蒙行列式的结果，可知系数行列式不为零，从而方程组只有零解，即 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$．

第二章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要研究对象,在自然科学和工程技术的各个领域都有广泛的应用.要求理解矩阵的概念,掌握矩阵的运算及运算规律,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法,掌握分块矩阵及其运算.

第一节 矩阵的运算

一、内容提要

1.矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做一个 m 行 n 列的矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵.这 $m\times n$ 个数叫做矩阵的元素,a_{ij}称为该矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

矩阵常常用大写字母 $A, B, C,\cdots$来表示.$m\times n$ 矩阵记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$或 $A_{m\times n}$,有时简记作 $A=(a_{ij})$或 A.

当 $m=n$ 时,矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$称为 n 阶方阵.

只有一行的矩阵称为行矩阵,行矩阵又称为行向量.只有一列

的矩阵称为列矩阵,列矩阵又称为列向量.

2.矩阵的基本运算

1) 矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$,则

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵加法适合下面的运算规律:

(1) 交换律: $A+B=B+A$;

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2) 数与矩阵的乘法

数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 相乘为

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

$-A=(-1)A=(-a_{ij})_{m\times n}$,称 $-A$ 为 A 的负矩阵.矩阵 A 与 B 的减法定义为

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法与数乘运算称为矩阵的线性运算,满足下面的运算律(设 A, B 为 $m\times n$ 矩阵, k, l 为数).

(1) 结合律: $(kl)A=k(lA)$;

(2) 分配律: $k(A+B)=kA+kB$;

$$(k+l)A=kA+lA.$$

3) 矩阵的乘法

设 A 是 $m\times s$ 矩阵, B 是 $s\times n$ 矩阵,即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}.$$

规定 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 C,即

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{is} b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n).$$

矩阵的乘法满足下列运算律:

(1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$;

(2) 左分配律: $A(B + C) = AB + AC$,

右分配律: $(B + C)A = BA + CA$;

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;

4) 矩阵的转置

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

把矩阵 A 的所有行换成相应的列所得到的矩阵,称为矩阵 A 的转置矩阵,记为 A^{T},即

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算规律为

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$, k 为数;

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

5) 方阵的行列式

n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素按原来的位置构成的行列式叫做方阵 A 的行列式,记作 $|A|$ 或 det(A),即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n 阶方阵 A 的行列式运算规律为(设 A, B 为 n 阶方阵, k 为数):

(1) $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$;

(2) $|kA|=k^{n}|A|$;

(3) $|AB|=|A||B|$.

3 .矩阵的求逆运算

设 A 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 B,使得

$$AB=BA=E,$$

则称 B 为 A 的逆矩阵,并称 A 为可逆矩阵 .

可逆矩阵 A 的逆矩阵是惟一的,记为 A^{-1},则有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

设 A, B 为同阶方阵,则只要满足 $AB=E$(或 $BA=E$),则 A 与 B 就互为逆矩阵 .

n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件为 $|A|\neq 0$.

当 $|A|\neq 0$ 时,称 A 为非奇异矩阵;当 $|A|=0$ 时,称 A 为奇异矩阵.非奇异矩阵就是可逆矩阵,奇异矩阵就是不可逆矩阵 .

求逆矩阵的方法(伴随矩阵法)

若矩阵 A 可逆,则有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

其中

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵 .A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 .

方阵的逆矩阵满足下面的运算律:

(1) 若 A 可逆,则 A^{-1} 也可逆,且 $(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) 若 A 可逆,数 $k\neq 0$,则 kA 可逆,且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$;

(3) 若 A 可逆,则 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$;

(4) 若 A 可逆,则 A^{T} 也可逆,且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(5) 设 A,B 为 n 阶可逆方阵,则 AB 可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

4 . 一些特殊的矩阵

1) 单位矩阵

$$E=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

2) 对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

有时简记为 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

3) 三角形矩阵

(1) 上三角形矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

(2) 下三角形矩阵

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

4) 对称矩阵和反对称矩阵

设 A 为 n 阶方阵,若 $A^T = A$,则 A 为对称矩阵 .若 $A^T = -A$,则 A 为反对称矩阵 .

n 阶矩阵 A 为对称矩阵的充分必要条件为

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) .$$

n 阶矩阵 A 为反对称矩阵的充分必要条件为

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) .$$

由于 $i = j$ 时, $a_{ii} = -a_{ii}$,故 $a_{ii} = 0$,即反对称矩阵的主对角线上的元素全为零 .

二、例题分析

在学习矩阵的运算时应注意以下几点:

1 .矩阵和行列式是两个完全不同的概念,矩阵是由 $m \times n$ 个元素排成的一个 m 行 n 列的数表,它的行数与列数不一定相等,而行列式则是一个数,它的行数和列数必须相等 .

虽然矩阵和行列式是两个不同的概念,但对于方阵来说,可以做成一个行列式,方阵和行列式的这种联系可使我们利用行列式去研究矩阵,例如通过方阵 A 的行列式 $|A|$ 是否为零来判断矩阵 A 是否可逆.

2.在矩阵的乘法中,只有当左边矩阵 A 的列数等于右边矩阵 B 的行数时,A 与 B 才能相乘.

3.矩阵运算是一种关于数表的运算,它与数的运算规律并不完全相同,不能将数的所有运算规律都照搬到矩阵中来.例如两个数 a 与 b 的乘法满足交换律,即 $ab=ba$,但两个矩阵的乘法(在有意义下)一般不满足交换律,即 $AB\neq BA$,由此得

$$(AB)^n\neq A^nB^n,$$

$$(A\pm B)^2\neq A^2\pm 2AB+B^2$$

$$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2.$$

再如对两个数 a,b 来说,如果 $a\neq 0,b\neq 0$,则 $a\cdot b\neq 0$,但对于矩阵来说,如果取

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\neq 0,\ B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\neq 0$$

但是 $AB=0$.

4.矩阵的乘法不满足消去律,即由 $AB=AC$ 不能得到 $B=C$.例如取

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}=AC$$

但是 $B\neq C$.

但是,若 A 是可逆矩阵,在 $AB=AC$ 的两边左乘 A^{-1},则有

$$A^{-1}AB=A^{-1}AC$$

$$EB=EC$$

从而有 $B=C$.

5 . 当 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$为行矩阵, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$为列矩阵时,

$$A \cdot B=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n$$

为一个数,而

$$B \cdot A=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n)=\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & \cdots & a_n b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \cdots & a_n b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

为 n 阶方阵 .

特别地

$$A \cdot A^{\mathrm{T}}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geq 0$$

若已知 $A \cdot A^{\mathrm{T}}=0$, 则可得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 即 $A=0$.

【例 1】 已知 X 是 3×1 矩阵, 且

$$XX^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

求 $X^{\mathrm{T}} X$.

【解】 设 $X=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$XX^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_1a_2&a_2^2&a_2a_3\\a_1a_3&a_2a_3&a_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

由矩阵相等的定义有: $a_1^2=1$, $a_2^2=4$, $a_3^2=9$, **因此**

$$X^{\mathrm{T}}X=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=14.$$

【例 2】 **已知** $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,\cdots,0,1)$ **是** $1\times n$ **的行矩阵**, $A=E+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, $B=E-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, **求** AB **和** BA.

【解】 **因为**

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(1,0,\cdots,0,1)\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\\1\end{pmatrix}=2$$

所以

$$\begin{aligned}AB&=(E+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\left(E-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\\&=E+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\&=E+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}\\&=E+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}2\boldsymbol{\alpha}\\&=E\end{aligned}$$

因 A, B **为同阶方阵**, **由** $AB=E$, **即可得** $BA=E$.

【例 3】 **设** $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, **求所有与** A **可交换的矩阵**.

【解】 设 $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 与 A 可交换,则

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix}$$

因为 $AB=BA$,于是有

$$\begin{cases} a=a+b \\ a+c=c+d \\ b+d=d \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b=0 \\ a=d \end{cases}$$

因此与 A 可交换的矩阵为下列形式的矩阵

$$B=\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$$

其中 a, c 为任意实数.

【例 4】 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

求 A^n.

【解】 由于

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

假设

$$A^k=\begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2+\cdots+2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

则

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2+\cdots+2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2+\cdots+2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

因此由归纳法知

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

【例 5】 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

求 A^n .

【解】 将 A 写成

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + B$$

由于

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} A^n &= (\lambda E + B)^n \\ &= (\lambda E)^n + n(\lambda E)^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2!}(\lambda E)^{n-2} B^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\lambda E)^{n-3} B^3 + \cdots + (\lambda E) B^n \\ &= \lambda^n E + n\lambda^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^{n-2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\lambda^{n-2}\begin{bmatrix} \lambda^2 & n\lambda & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \lambda^2 & n\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}
$$

注:本题也可像上例一样,先计算 A^2, A^3 **推测出** A^n **的表达式,再用数学归纳法证明.**

【例 6】 设 $A=\frac{1}{2}(B+E)$**,证明:** $A^2=A$ **成立的充要条件是** $B^2=E$.

【证明】 必要性:设 $A^2=A$**,因为**

$$
A^2=\left[\frac{1}{2}(B+E)\right]^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=A=\frac{1}{2}(B+E)
$$

即 $$B^2+2B+E=2(B+E)=2B+2E$$

因此 $$B^2=E$$

充分性:设 $B^2=E$**,则有**

$$
A^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{4}(E+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)=A
$$

【例 7】 证明:任一个 n **阶方阵都可表为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.**

【证明】 任一个 n **阶方阵** A **都可表为**

$$
A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})
$$

由于

$$
\left[\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})\right]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}}+A)=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}}),
$$

所以$\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$为对称矩阵,又由于

$$\left[\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})\right]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}}-A)=-\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}}),$$

所以$\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$为反对称矩阵,命题得证.

【例 8】 证明:若实对称矩阵 A 满足 $A^2=0$,则 $A=0$.

【证明】 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因为 A 是实对称矩阵,因此 $A^{\mathrm{T}}=A$,于是有

$$A^2=AA=AA^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2+\cdots+a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{21}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & a_{n1}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

又因为 $A^2=0$,所以

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

由于 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n,;j=1,2,\cdots,n)$均为实数,故有

$$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

即 $A=0$.

注意到对于一个可逆的 n 阶方阵 A,由于

$$A^{-1}A=E$$

两边取行列式,有

$$|A^{-1}||A|=1$$

从而有

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$$

【例 9】 设 A 为n阶可逆矩阵,试证 A 的伴随矩阵 A^* 也可逆,并求$(A^*)^{-1}$.

【证明】 由于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,因此

$$A^*=|A|A^{-1}$$

两边取行列式得

$$|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^n\cdot\frac{1}{|A|}=|A|^{n-1}\neq 0$$

所以 A^* 可逆.将式 $A^*=|A|A^{-1}$两边取逆,得

$$(A^*)^{-1}=\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A.$$

【例 10】 设 A 为 3 阶方阵,$|A|=\frac{1}{8}$,求$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$.

【解】 由于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,因此

$$A^*=|A|\cdot A^{-1}=\frac{1}{8}A^{-1}$$

所以

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|=\left|3A^{-1}-8\left(\frac{1}{8}\right)A^{-1}\right|$$

$$=|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|=8\cdot\frac{1}{|A|}=64.$$

设 A 为 n 阶方阵,A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵,由矩阵的乘法和行列式的展开定理及推论有

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

上式应作为公式加以牢记,上式不论$|A|$是否为零均成立,因而比起公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*\left(|A|\neq 0\right)$应用更广泛.

【例 11】 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*,证明:

(1) 若$|A|=0$,则$|A^*|=0$;

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

【证明】 由于

$$AA^* = |A|E$$

两边取行列式得

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

(1) 若$|A| = 0$,下面分两种情形讨论.

1°若$A = 0$,则$A^* = 0$,从而$|A^*| = 0$.

2°若$A \neq 0$,则同样有$|A^*| = 0$,否则若$|A^*| \neq 0$,则A^*可逆,由于$|A| = 0$,则有

$$AA^* = 0.$$

上式两式右乘$(A^*)^{-1}$,则有

$$AA^*(A^*)^{-1} = 0,$$

即

$$A = 0,$$

与$A \neq 0$矛盾,故$|A^*| = 0$.

(2) 若$|A| \neq 0$,由式$|A||A^*| = |A|^n$即得$|A^*| = |A|^{n-1}$;若$|A| = 0$,由(1)知同样有$|A^*| = |A|^{n-1}$.

应将

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

作为公式记住,并注意到上式无论$|A|$是否为零都成立.

【例 12】 设$A = (a_{ij})_{3\times 3}$,A_{ij}为行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式,且$A_{ij} = a_{ij}$,又$a_{11} \neq 0$,求$|A|$.

【解】 因为$A_{ij} = a_{ij}$,所以

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = A^{\mathrm{T}}.$$

从而有

$$|A^*| = |A^{\mathrm{T}}| = |A|.$$

又由于$|A^*| = |A|^{3-1} = |A|^2$,故有$|A|^2 = |A|$,即$|A|(|A| - 1) = 0$,从而$|A| = 0$或$|A| = 1$.

将 $|A|$ 按第 1 行展开,并注意到 $A_{ij} = a_{ij}$,有

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$$

故 $|A| = 1$.

【例 13】 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

且

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E,$$

其中 E 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 B .

【解】 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$,得

$$|A|^3 = 8, |A| = 2 .$$

将 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{2}A^*$,代入

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E,$$

则有

$$\frac{1}{2}ABA^* = \frac{1}{2}BA^* + 3E,$$

$$ABA^* = BA^* + 6E,$$

$$ABA^* - BA^* = 6E,$$

$$(A - E)BA^* = 6E,$$

$$B = 6(A - E)^{-1}(A^*)^{-1} = 6[A^*(A - E)]^{-1}$$

$$= 6(A^*A - A^*)^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1} .$$

由于

$$2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

求逆得

$$(2E-A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}.$$

因此

$$B=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}.$$

下面给出证明矩阵可逆的例题.

【例 14】 设 A 为 n 阶方阵,且$(A+E)^m=0$, m 为正整数,试证 A 可逆,并求 A^{-1}.

【证明】 因为

$$\begin{aligned}(A+E)^m&=A^m+C_m^1A^{m-1}E+C_m^2A^{m-2}E^2+\cdots+C_m^{m-1}AE^{m-1}+E^m\\&=A^m+C_m^1A^{m-1}+C_m^2A^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}A+E=0,\end{aligned}$$

移项得

$$-A^m-C_m^1A^{m-1}-C_m^2A^{m-2}-\cdots-C_m^{m-1}A=E,$$

即

$$A(-A^{m-1}-C_m^1A^{m-2}-\cdots-C_m^{m-1}E)=E,$$

所以矩阵 A 可逆,且

$$A^{-1}=-A^{m-1}-C_m^1A^{m-2}-\cdots-C_m^{m-1}E.$$

【例 15】 设 A, B 和 $A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵.

(1) 试证 $A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵,并求其逆阵;

(2) 进一步证明$(A+B)^{-1}=A^{-1}[E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]$.

【证明】 (1) 因为 A, B 和 $A+B$ 都可逆,则有

$$A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}(AA^{-1})+(B^{-1}B)A^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1},$$

上式两边取行列式得

$$|A^{-1}+B^{-1}|=|B^{-1}||A+B||A^{-1}|\neq 0.$$

因此 $A^{-1}+B^{-1}$为可逆矩阵,且其逆阵为

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[B^{-1}(A+B)A^{-1}]^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$$

(2) 由于

$$A^{-1}[E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1},$$

将$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$代入上式右端得

$$\begin{aligned}A^{-1}[E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]&=A^{-1}-A^{-1}[A(A+B)^{-1}B]A^{-1}\\&=A^{-1}-(A+B)^{-1}BA^{-1}\\&=(A+B)^{-1}[(A+B)A^{-1}-BA^{-1}]\\&=(A+B)^{-1}(AA^{-1}+BA^{-1}-BA^{-1})\\&=(A+B)^{-1}.\end{aligned}$$

对于转置运算有$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$,但对于求逆运算$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\neq(A^{-1})+(B^{-1})^{-1}=A+B$.

【例 16】 设 $A=E-XX^{\mathrm{T}}$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为非零列矩阵,证明:

(1) $A^2=A$ 的充分必要条件是 $X^{\mathrm{T}}X=1$;

(2) 若 $X^{\mathrm{T}}X=1$,则 A 不可逆.

【证明】 (1) 由于 X 是 $n\times 1$ 的列矩阵,所以 XX^{T} 是一个 n 阶方阵,而 $X^{\mathrm{T}}X$ 是一个数.

必要性:由于

$$\begin{aligned}A^2&=(E-XX^{\mathrm{T}})(E-XX^{\mathrm{T}})\\&=E-2XX^{\mathrm{T}}+XX^{\mathrm{T}}XX^{\mathrm{T}}\\&=E-2XX^{\mathrm{T}}+X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}\\&=E-2XX^{\mathrm{T}}+(X^{\mathrm{T}}X)XX^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

从而 $A^2=A$ 可写成

$$E-2XX^{\mathrm{T}}+(X^{\mathrm{T}}X)XX^{\mathrm{T}}=E-XX^{\mathrm{T}},$$

整理得

$$(X^{T}X-1)XX^{T}=0.$$

因为 X 是 $n\times1$ 的非零列向量,所以 $XX^{T}\neq0$,因此 $X^{T}X-1=0$,即 $X^{T}X=1$.

充分性: 若 $X^{T}X=1$,则

$$\begin{aligned}A^{2}&=E-2XX^{T}+XX^{T}XX^{T}\\&=E-2XX^{T}+X(X^{T}X)X^{T}\\&=E-XX^{T}=A.\end{aligned}$$

(2) 用反证法证明 A 不可逆,当 $X^{T}X=1$ 时,$A^{2}=A$,若 A 可逆,则

$$A^{-1}A^{2}=A^{-1}A,$$

即
$$A=E.$$

这与 $A=E-XX^{T}\neq E$ 矛盾,故 A 不可逆.

三、练习题

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,又矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\beta}$,求 A^{n}.

2. 设有 3 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{pmatrix},$$

且已知 $|A|=2$,$|B|=\frac{1}{2}$,求 $|A+B|$.

3. 设矩阵 A 满足 $A^{2}+A-4E=0$,试证矩阵 $A-E$ 可逆,并求 $(A-E)^{-1}$.

4. 设 A,B 均为 n 阶方阵,已知 $|B|\neq0$,$A-E$ 可逆,且

$$(A-E)^{-1}=(B-E)^{T},$$

求证 A 可逆.

5. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix},$$

已知矩阵 B 满足关系式 $AB=A+2B$，求矩阵 B.

6. 设 3 阶矩阵 A, B 满足关系式：$A^{-1}BA=2A+BA$，已知

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&-5\\3&-1&-8\end{pmatrix},$$

求矩阵 B.

7. 已知 $AP=PB$，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix},$$

求 A 及 A^5.

8. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=-\dfrac{1}{3}$，求 $|(4A)^{-1}+3A^*|$.

9. 设 A 为 n 阶 $(n>2)$ 非零实矩阵，且 $A_{ij}=a_{ij}$，A_{ij} 是矩阵 A 的元素 a_{ij} 对应的代数余子式. 证明：

(1) A 可逆；(2) $|A|=1$.

10. 设 A, B 均为 n 阶方阵，且满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$, $B^{\mathrm{T}}B=E$，若 $|A|+|B|=0$，试证：$A+B$ 为奇异矩阵.

四、练习题解答

1. 由于 $\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$,

$$A=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix},$$

$$A^2=AA=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3A,$$

$$A^3=A^2A=(3A)A=3A^2=3^2A,$$

假设 $A^k=3^{k-1}A$,**则**

$$A^{k+1}=A^kA=(3^{k-1}A)A=3^{k-1}A^2=3^kA,$$

从而有

$$A^n=3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

2 .**因为**

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1+b_1&2c_1&2d_1\\a_2+b_2&2c_2&2d_2\\a_3+b_3&2c_3&2d_3\end{pmatrix}$$

所以

$$|A+B|=\begin{vmatrix}a_1+b_1&2c_1&2d_1\\a_2+b_2&2c_2&2d_2\\a_3+b_3&2c_3&2d_3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}a_1+b_1&c_1&d_1\\a_2+b_2&c_2&d_2\\a_3+b_3&c_3&d_3\end{vmatrix}$$

$$=4\left(\begin{vmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{vmatrix}\right)$$

$$=4\left(2+\frac{1}{2}\right)=10$$

3．由 $A^2+A-4E=0$，得

$$A^2+A-2E=2E,$$

$$A^2-A+2A-2E=2E,$$

$$A(A-E)+2(A-E)=2E,$$

$$(A+2E)(A-E)=2E,$$

$$\left[\frac{1}{2}(A+2E)\right](A-E)=E,$$

所以 $A-E$ 可逆，且

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E).$$

4．因为 $A-E$ 可逆，所以有

$$\begin{aligned}(A-E)(A-E)^{-1}&=(A-E)(B-E)^{\mathrm{T}}\\&=(A-E)(B^{\mathrm{T}}-E)\\&=AB^{\mathrm{T}}-A-B^{\mathrm{T}}+E=E,\end{aligned}$$

从而有 $$A=AB^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}},$$

即

$$A=(A-E)B^{\mathrm{T}}.$$

上式两边取行列式得

$$|A|=|(A-E)B^{\mathrm{T}}|=|A-E||B^{\mathrm{T}}|=|A-E||B|.$$

因为 $A-E$ 可逆，所以 $|A-E|\neq 0$，又 $|B|\neq 0$，从而 $|A|\neq 0$，故 A 可逆．

5．由于 $AB=A+2B$，得

$$AB-2B=A$$

即

$$(A-2E)B=A$$

两边左乘 $(A-2E)^{-1}$ 即得

$$B=(A-2E)^{-1}A.$$

由于

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix},$$

所以

$$B=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}.$$

6. **由** $A^{-1}BA=2A+BA$ **得** $A^{-1}BA-BA=2A$, **即**

$$(A^{-1}-E)BA=2A,$$

易知 A **可逆, 故有** $(A^{-1}-E)B=2E$, **从而得**

$$B=2(A^{-1}-E)^{-1}=2(A^{-1}-A^{-1}A)^{-1}$$
$$=2[A^{-1}(E-A)]^{-1}=2(E-A)^{-1}A.$$

而

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&1&5\\-3&1&9\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-7&3\\-3&-3&1\\-1&-2&1\end{pmatrix},$$

所以

$$B=2\begin{pmatrix}-4&-7&3\\-3&-3&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&-5\\3&-1&-8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-10&-14&6\\-6&-8&2\\-2&-4&0\end{pmatrix}.$$

7. **因为** $|P|=-1\neq 0$, **所以矩阵** P **可逆, 于是由** $AP=PB$ **得** $A=PBP^{-1}$, **又**

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix},$$

故

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

又

$$A^5=(PBP^{-1})^5=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})=PB^5P^{-1},$$

由于 B 是对角矩阵,所以

$$B^5=\begin{pmatrix}1^5&0&0\\0&0^5&0\\0&0&(-1)^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B,$$

因此 $A^5=PBP^{-1}=A$.

8.因为$(4A)^{-1}=\dfrac{1}{4}A^{-1}$, $A^*=|A|A^{-1}=-\dfrac{1}{3}A^{-1}$,所以

$$\left|(4A)^{-1}+3A^*\right|=\left|\frac{1}{4}A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|-\frac{3}{4}A^{-1}\right|$$
$$=\left(-\frac{3}{4}\right)^3|A^{-1}|=\left(-\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{|A|}$$
$$=\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot(-3)=\frac{81}{64}.$$

9.(1)由于

$$AA^*=|A|E,$$

而 $A^*=(A_{ji})=(a_{ji})=A^{\mathrm{T}}$,所以有 $AA^{\mathrm{T}}=|A|E$.

下面用反证法证明$|A|\neq 0$.

若$|A|=0$,则有 $AA^{\mathrm{T}}=0$.设矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$=0$

得 $$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

因为 a_{ij}为实数,所以有 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,即 $A=0$,这与 A 为非零方阵矛盾,故$|A|\neq 0$,即 A 可逆.

(2) 由

$$|A^*|=|A|^{n-1}=|A^{\mathrm{T}}|=|A|$$

得 $$|A|\left(|A|^{n-2}-1\right)=0.$$

又由于 $n>2$,所以$|A|=0$,或$|A|=1$.

因为 $A\neq 0$,所以至少存在一个元素 $a_{kl}\neq 0(1\leq k\leq n,1\leq l\leq n)$,将$|A|$按第 k 行展开,则有

$$\begin{aligned}|A| &= a_{k1}A_{k1}+\cdots+a_{kl}A_{kl}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \\ &= a_{k1}^2+\cdots+a_{kl}^2+\cdots+a_{kn}^2>0,\end{aligned}$$

因此$|A|=1$.

10．因为 $AA^{\mathrm{T}}=E$，$B^{\mathrm{T}}B=E$，所以

$$A+B=(AA^{\mathrm{T}})B+A(B^{\mathrm{T}}B)=A(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})B,$$

上式两边取行列式得

$$\begin{aligned}|A+B|&=|A(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})B|=|A||A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}||B|\\&=|A||(A+B)^{\mathrm{T}}||B|=|A||A+B||B|.\end{aligned}$$

由 $|A|+|B|=0$ 得 $|B|=-|A|$，又由 $AA^{\mathrm{T}}=E$ 得 $|A|^2=1$，从而上式变为

$$|A+B|=-|A|^2\cdot|A+B|=-|A+B|,$$

移项得 $2|A+B|=0$，即 $|A+B|=0$，故 $A+B$ 为奇异矩阵．

第二节　矩阵的秩与初等变换

一、内容提要

1．矩阵秩的定义

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式，且所有的 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于零，则称矩阵 A 的秩为 r．

也就是说矩阵 A 的秩是 A 中一切非零子式的最高阶数，矩阵 A 的秩记为 $\mathrm{r}(A)=r$，或秩$(A)=r$．零矩阵的秩规定为 0．

设 A 为 n 阶方阵，若 $\mathrm{r}(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵；若 $\mathrm{r}(A)<n$，则称 A 为降秩矩阵．

2．矩阵秩的性质

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则有

(1) $0\leq \mathrm{r}(A)\leq\min\{m,n\}$，

$A=0\quad \mathrm{r}(A)=0$；

(2) $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$；

(3) 设矩阵 P 为 m 阶可逆矩阵, Q 为 n 阶可逆矩阵,则有

$$\mathrm{r}(PAQ)=\mathrm{r}(A);$$

(4) $\mathrm{r}(AB)\leq\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$;

(5) $\mathrm{r}(A+B)\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

(6) 设 A, B 均为 n 阶方阵,且 $AB=0$,则

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n.$$

证明见本章的附录.

3.矩阵的初等变换

矩阵的初等行(列)变换是指下列三种变换:

(1) 对换变换:对调两行(列);

(2) 数乘变换:以数 $k(k\neq0)$乘某一行(列)中的所有元素;

(3) 倍加变换:把某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行(列)对应的元素上去.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称初等变换.

三种初等变换都是可逆的,且其逆是同一类型的初等变换.

初等变换不改变矩阵的秩.

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B,则称矩阵 A 与 B 等价,记作 $A\backslash\ B$.

若矩阵 A 与 B 等价,则矩阵 A 与 B 等秩.反之不对,因为若 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$, A 与 B 的阶数可能不一致.但若 A 与 B 为同型矩阵,则 A 与 B 等价仅当 A 与 B 等秩.

单位矩阵 E 经一次初等变换得到的矩阵称为初等方阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

(1) 对调两行或对调两列

将单位矩阵 E 中的第 i 行与第 j 行互换,记为

$$E(i,j)=\begin{array}{c}\left[\begin{matrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&\cdots&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&\cdots&&\ddots&&\cdots&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&\cdots&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{matrix}\right]\end{array}\begin{matrix}\\ \\ \\ i\text{行}\\ \\ \\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

(2) **以数** $k(k\neq0)$**乘某行或某列**

将 E **的第** i **行乘非零数** k**,记为**

$$E(i(k))=\left[\begin{matrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{matrix}\right]\begin{matrix}\\ \\ \\ i\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

(3) **将数** k **乘某行(列)再加到另一行(列)上**

将 E **的第** j **行的** k **倍加到第** i **行上,记为**

$$E(i,j(k))=\left[\begin{matrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\cdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{matrix}\right]\begin{matrix}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{matrix},$$

对于列变换来说，$E(i,j(k))$是将单位矩阵 E 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上．

用初等矩阵左乘矩阵 A 相当于对 A 作初等行变换；用初等方阵右乘矩阵 A 相当于对 A 作初等列变换．

初等矩阵是可逆的，初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵，即

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j),$$

$$E\left(i(k)\right)^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

可逆矩阵可写成有限个初等矩阵的乘积．

由此可得，$m\times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充要条件为：存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ=B.$$

进一步有，$m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5．初等变换的应用

(1) 求矩阵的秩

由于初等变换不改变矩阵的秩，可将矩阵化成较简单的形式，再求秩，一般将

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B(\text{行阶梯形}),$$

则 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=B$ 中非零行的个数．

(2) 求逆矩阵

由于伴随矩阵求逆法的计算量较大，一般用初等变换法求矩阵的逆矩阵．

将 n 阶方阵 A 与 n 阶单位矩阵 E 组成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\mid E)$，作初等行变换，将 A 化为单位矩阵 E 的同时，E 就化为

A^{-1},即

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid B),$$

则 $B = A^{-1}$.

三、例题分析

对于具体给出的矩阵,由于用定义求秩非常繁琐,一般用初等变换法求矩阵的秩.

【例 1】 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & a \\ 2 & 3 & -1 & -52 & -6 \end{pmatrix}$$

求 $\mathrm{r}(A)$.

【解】

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 1 & a-3 \\ 0 & -1 & -7 & -50 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & a-3 \\ 0 & 0 & -6 & -54 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a-2 \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a = -1$ 时,$\mathrm{r}(A) = 3$;

(2) 当 $a \neq -1$ 时,$\mathrm{r}(A) = 4$.

【例 2】 求 $n(n \geq 2)$阶矩阵 A 的秩,其中

$$A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

【解】 利用初等变换将 A 化成阶梯形,首先将 A 的第 1 行乘 -1后加到其余各行,然后再将各列都加到第 1 列,即

$$A\to\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a=b=0$ 时,$\mathrm{r}(A)=0$;

(2) 当 $a=b\neq0$ 时,因为 $a+(n-1)b\neq0$,所以 $\mathrm{r}(A)=1$;

(3) 当 $a\neq b$,且 $a+(n-1)b=0$ 时,$\mathrm{r}(A)=n-1$;

(4) 当 $a\neq b$,且 $a+(n-1)b\neq0$ 时,$\mathrm{r}(A)=n$.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,当 $n\geq3$ 时,由于伴随矩阵求逆法的计算量较大,一般情况下,用初等行变换法求矩阵的逆.

【例 3】 求下列矩阵的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

【解】

$$(A\cdots E)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\1&1&0&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\1&1&1&\cdots&0&0&0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1&1&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&\cdots&0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0&-1&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1&0&0&\cdots&-1&1\end{array}\right)$$

因此

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\-1&1&0&\cdots&0&0\\0&-1&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}.$$

【例 4】 设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(1) 证明 B 可逆;

(2) 求 AB^{-1}.

【解】 (1) 设 $E(i,j)$为 n 阶单位矩阵 E 对调 i,j 两行得到的初等矩阵，因为用 $E(i,j)$左乘 A 相当于将 A 的 i,j 两行互换，因此有

$$E(i,j)A=B$$

因为$|B|=|E(i,j)A|=|E(i,j)||A|=-|A|\neq0$，所以矩阵 B 可逆.

(2) $AB^{-1} = A[E(i,j)A]^{-1} = AA^{-1}E(i,j)^{-1}$

$= E(i,j)^{-1} = E(i,j)$.

【例 5】 设 A 是 4×3 矩阵,且 A 的秩 $r(A)=2$,

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

求 $r(AB)$.

【解】 因为

$$|B| = 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 10\neq 0$$

所以 B 为可逆矩阵,由矩阵秩的性质知 $r(AB)=r(A)=2$.

事实上,可将可逆矩阵 B 看成有限个初等变换的乘积,将 AB 看成对矩阵 A 作初等列变换,因而秩不变 .

【例 6】 (选择题)已知

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

P 为 3 阶非零矩阵,且 $PQ=0$,则下列结论中正确的是 ( )

(A) $t=6$ 时,P 的秩必为 1;

(B) $t=6$ 时,P 的秩必为 2;

(C) $t\neq6$ 时,P 的秩必为 1;

(D) $t\neq6$ 时,P 的秩必为 2 .

答案:选(C)

【分析】 由于 P, Q 都是 3 阶方阵,且 $PQ=0$,由矩阵秩的性质6,则有 $r(P)+r(Q)\leq3$.

当 $t=6$ 时,易见 $r(Q)=1$,于是有

$$r(P)+r(Q)=r(P)+1\leq3,$$

从而 $r(P)\leq2$,也就是说 P 的秩可以是 1 或 2 .因此排除选项(A)

和(B).

当 $t\neq 6$ 时,易见 $r(Q)=2$,从而有 $r(P)\leq 1$,又由于 P 为非零矩阵,所以 $r(P)\neq 0$,因此 $r(P)=1$,所以应选(C).

【例 7】 设 A 为 n 阶方阵,A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵,证明

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当 } r(A)=n \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } r(A)=n-1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } r(A)<n-1 \text{ 时} \end{cases}.$$

【证明】 (1) 当 $r(A)=n$ 时,$|A|\neq 0$,由于

$$AA^*=|A|E$$

两边取行列式得

$$|AA^*|=|A||A^*|=||A|E|=|A|^n$$

因为 $|A|\neq 0$,所以 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$,从而

$$r(A^*)=n.$$

(2) 当 $r(A)=n-1$ 时,A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0,则 A^* 中至少有一个元素不为 0,所以 $r(A^*)\geq 1$.

又由于 $r(A)=n-1$,所以 $|A|=0$,从而

$$AA^*=|A|E=0$$

根据矩阵秩的性质 6,有

$$r(A)+r(A^*)\leq n$$

由于 $r(A)=n-1$,可得 $r(A^*)\leq 1$,因此

$$r(A^*)=1$$

(3) 当 $r(A)<n-1$ 时,A 的所有 $n-1$ 阶子式全为零,从而 $A^*=0$,所以

$$r(A^*)=0$$

由本题,我们可以得到结论:若 $r(A)\leq n-1$,则 $r(A^*)\leq 1$.

【例 8】 试证任一个秩为 r 的矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 总可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

【证明】 设 $r(A)=r$,则存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩

阵 Q,使

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

由于

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ r\text{ 列} \end{array}$$

$$= E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr},$$

即 E_{tt}是只有第 t 行第 t 列元素为 1,其余元素全为 0 的 $m \times n$ 矩阵, $t = 1, 2, \cdots, r$, 从而

$$\begin{aligned} A &= P(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr})Q \\ &= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots + PE_{rr}Q \\ &= B_1 + B_2 + \cdots + B_{rr}, \end{aligned}$$

其中 $B_t = PE_{tt}Q$, $t = 1, 2, \cdots, r$.

由于 P, Q 可逆,所以

$$\mathrm{r}(B_i) = \mathrm{r}(PE_{tt}Q) = \mathrm{r}(E_{tt}) = 1,$$

因此 A 可写成 r 个秩为 1 的矩阵之和 .

【例 9】 设 A 为 n 阶方阵,且 $A^2 = A$(即 A 为幂等矩阵),试证

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) = n$$

分析 注意到 $\mathrm{r}(A - E) = \mathrm{r}(E - A)$,要证

$$r(A)+r(A-E)=r(A)+r(E-A)=n$$

只要证明不等式

$$r(A)+r(E-A)\le n$$

$$r(A)+r(E-A)\ge n$$

同时成立即可,这是证明等式时常用的思路.

【证明】 **由** $A^2=A$,**得** $A^2-A=0$,**即** $A(A-E)=0$,**由矩阵秩的性质** 6,**得**

$$r(A)+r(A-E)\le n$$

另一方面,$E=A+(E-A)$,**由两个矩阵和的秩的性质**,**得**

$$n=r(E)=r[A+(E-A)]\le r(A)+r(E-A)$$

及 $r(E-A)=r(A-E)$,**因此**

$$r(A)+r(A-E)\ge n$$

所以 $$r(A)+r(A-E)=n.$$

【例 10】 **设** A **为** n **阶方阵**$(n\ge 3)$,**证明**:$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

【证明】 **由于** A **是任意的** n **阶方阵**,A **可能是满秩矩阵也可能是降秩矩阵,因此我们分两种情形讨论**.

(1) **若** A **为满秩矩阵**,**由** $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$ **得**

$$A^*=|A|A^{-1} \tag{2.1}$$

故

$$(A^*)^*=(|A|A^{-1})^*$$

将 $|A|A^{-1}$ **看作一个矩阵**,**利用**(2.1)**式得**

$$\begin{aligned}(|A|A^{-1})^*&=||A|A^{-1}|\cdot(|A|A^{-1})^{-1}\\&=|A|^n|A^{-1}|\cdot\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}\\&=|A|^n\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A\end{aligned}$$

即

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$$

(2) 若 A 为降秩矩阵,则 $r(A)\leq n-1$,从而 $r(A^*)\leq 1$,所以 A^* 的一切二阶及二阶以上的子式全为 0,从而 $(A^*)^*=0$,故 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ 成立.

【例 11】 (选择题)设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,则 ( )

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|AB|\neq 0$;

(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|AB|=0$;

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|AB|\neq 0$;

(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|AB|=0$.

答案:选(B)

分析 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,因此 AB 为 m 阶方阵,而方阵行列式为零当且仅当该方阵降秩.

由于

$$r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}\leq\min\{m,n\},$$

当 $m>n$ 时,则有

$$r(AB)\leq\min\{m,n\}=n<m$$

所以 AB 不满秩,$|AB|=0$,应选(B).

秩是用行列式定义的,而本题却反过来,根据秩确定行列式.

【例 12】 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$,$A=(a_{ij})_{m\times n}$,若 $f(0)=0$,则 $r[f(A)]\leq r(A)$.

分析 由于 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$,所以

$$r(AB)\leq r(A)$$

要证 $r[f(A)]\leq r(A)$,只需由题设推导出

$$f(A)=A\cdot(\qquad)$$

形式.

【证明】 由 $f(0)=0$,得 $a_0=0$,即

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$$

从而

$$f(A)=a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$
$$=A(a_1E+a_2A+\cdots+a_mA^{m-1})$$

由 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$,得

$$r[f(A)]\leq r(A).$$

三、练习题

1.求下列矩阵的秩

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1\\ 3 & 2 & a & 7 & -1\\ 1 & -1 & -6 & -1 & b\end{bmatrix}$$

2.设矩阵

$$C=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$$

其中 $a_i\neq0$, $b_i\neq0$, $i=1,2,\cdots,n$.求 $r(C)$.

3.构造一个秩为4的5阶方阵 A,已知 A 的前三行是

$$\alpha_1=(1,2,-1,-3,4)$$
$$\alpha_2=(2,-1,-1,2,-4)$$
$$\alpha_3=(5,0,-3,2,-4)$$

4.设 A 为 n 阶方阵($n\geq2$),若 $A^T=A$,且 $r(A)=1$,试证 A 的主对角线上任两个非零元素同号.

5.设 A 为 n 阶实对称矩阵,又 $r(A)=1$,试证 $A_{ii}\cdot A_{jj}\geq0$,其中 A_{ii}为 A 中元素 a_{ii}的代数余子式.

6.设 A 为 n 阶方阵,且 $A^2=E$,试证

$$r(A+E)+r(A-E)=n.$$

四、练习题解答

1 . **通过初等变换将** A **化为阶梯形矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$$

(1) **当** $a = -8$, $b = -2$ **时**, $r(A) = 2$;

(2) **当** $a = -8$, $b \neq -2$ **时**, $r(A) = 3$;

(3) **当** $a \neq -8$, $b = -2$ **时**, $r(A) = 3$;

(4) **当** $a \neq -8$, $b \neq -2$ **时**, $r(A) = 4$.

2 . **令**

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ B = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$ **且矩阵** A **与** B **的秩均为** 1

则 $C = AB$, **从而**

$$r(C) \leq \min\{r(A), r(B)\} = 1$$

又由于 $C \neq 0$, **则** $r(C) > 0$, **所以** $r(C) = 1$.

3 . **因行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

构造矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 A 中有 4 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

而 A 中所有 5 阶子式全为零,故 $r(A) = 4$.

4 . 设 $A = (a_{ij})$, 由 $A^T = A$, 得 $a_{ij} = a_{ji}$, 又由于 $r(A) = 1$, 则 A 的任意 2 阶子式全为 0, 从而有

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = 0$$

即

$$a_{ii} a_{jj} = a_{ij} a_{ji} = a_{ij}^2 \geq 0 .$$

所以 A 的主对角线上任两个非零元素同号 .

5 . 由于 $A^T = A$, 所以 $(A^*)^T = A^*$, 又由于当 $r(A) \leq n - 1$ 时, $r(A^*) \leq 1$.

(1) 若 $r(A^*) = 0$, 则 $A^* = 0$, 此时有

$$A_{ii} A_{jj} = 0 .$$

(2) 若 $r(A^*) = 1$, 由第 4 题的结论得

$$A_{ii}A_{jj} \geq 0 .$$

6．由 $A^2 = E$，得 $A^2 - E = 0$，即

$$(A+E)(A-E)=0$$

从而有
$$r(A+E)+r(A-E) \leq n .$$

又由于

$$(A+E)+(E-A)=2E$$

所以

$$r(A+E)+r(E-A) \geq r(2E)=n$$

由 $r(A-E)=r(E-A)$，则有

$$r(A+E)+r(A-E) \geq n$$

因此 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

第三节　矩阵的分块

一、内容提要

1．分块矩阵的概念

用一些贯穿于矩阵的纵线和横线分矩阵 A 为若干块，每小块叫做矩阵 A 的子块(子矩阵)，以子块为元素的形式上的矩阵叫做分块矩阵．

2．分块矩阵的运算

(1) 分块矩阵的加法

设 A，B 为 $m\times n$ 矩阵，用相同分法把 A 与 B 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij}与 $B_{ij}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$的行数,列数相同,那么

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{bmatrix}.$$

(2) **数乘分块矩阵**

$$kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs} \end{bmatrix}.$$

(3) **分块矩阵的转置**

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r2}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1s}^{\mathrm{T}} & A_{2s}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

(4) **分块矩阵的乘法**

设 A 为 $m\times k$ 矩阵, B 为 $k\times n$ 矩阵,对 A, B 作分块,使得 A 的列分法与 B 的行分法一致,即

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sp} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{is}(i=1,2,\cdots,r)$的列数分别与 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{sj}$ $(j=1,2,\cdots,l)$的行数相同,则

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rp} \end{bmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$, $i=1,2,\cdots,r$, $j=1,2,\cdots,p$.

3 .分块对角矩阵

设 A 为 n 阶方阵,若 A 的分块矩阵具有下面的形状:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},$$

其中主对角线上的每一个子块 A_i ($i=1,2,\cdots,s$)是方阵,对角线外的子块都是零矩阵,称 A 为分块对角矩阵 .

分块对角矩阵 A 的行列式

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s| .$$

由此可知,

分块对角矩阵 A 可逆的充分必要条件是每一个子矩阵 A_i ($i=1,2,\cdots,s$)可逆,逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix} .$$

4 .按行(列)分块

将矩阵按行或按列分块是矩阵分块的两种常见的形式 .

设 A 为 $m\times n$ 矩阵,把矩阵按列分块:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

其中 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}$ 是一列的矩阵

若把 A 按行分块,则

$$A=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

其中 $\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$是一行的矩阵 .

二、例题分析

矩阵分块法的基本思想是把矩阵分成若干小块,从而简化表示,便于计算 .

【例 1】 设分块矩阵

$$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

其中 A 为 r 阶可逆矩阵, B 为 s 阶可逆矩阵,求 X^{-1} .

【解】 设

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} X^{-1}X &= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_2B & X_1A \\ X_4B & X_3A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此得

$$X_2B = E_r,\ X_1A = 0,\ X_4B = 0,\ X_3A = E_s$$

所以

$$X_1 = 0,\ X_2 = B^{-1},\ X_3 = A^{-1},\ X_4 = 0$$

因此

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

上述结论可推广到一般情形,即分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}$$

若子块 $A_i\,(i = 1,2,\cdots,s)$都可逆,则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

【例 2】 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均不为 0,求 A^{-1}.

【解】 利用分块矩阵求逆.

$$
A^{-1}=\left(\begin{array}{c|ccccc}
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\
\hline
a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ a_n & 0 \end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}
$$

又由于

$$
A_1^{-1}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}
$$

所以

$$
A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1} \\
a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0
\end{pmatrix}.
$$

【例 3】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，试证若 $\mathrm{r}(A)=r$，则必存在秩为 r 的矩阵 $B_{m\times r}$ 和 $C_{r\times n}$，使得 $A=BC$.

【证明】 因为 $\mathrm{r}(A)=r$，所以存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$
A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q
$$

由分块矩阵乘法，可得

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} (E_r, 0)$$

其中$\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$是一个 $m\times r$ 阶矩阵,$(E_r,0)$是一个 $r\times n$ 阶矩阵,因此

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} (E_r, 0) Q = BC$$

其中 $B = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = (E_r, 0)Q$,则 B 是一个 $m\times r$ 阶矩阵, C 是一个 $r\times n$ 阶矩阵,且 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\right] = r$, $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}[(E_r, 0)] = r$.

【例 4】 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, α 为 $n\times 1$ 的列矩阵, b 为常数,记分块矩阵

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}} A^* & |A| \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, α^{T} 为列矩阵 α 的转置 .

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明:矩阵 Q 可逆的充要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}} A^{-1} \alpha \neq b$.

分析 利用公式

$$A^* A = AA^* = |A| E .$$

由于 A 是 n 阶非奇异矩阵,则进一步有

$$A^* = |A| A^{-1}$$

又由于$|PQ| = |P||Q|$, $|P| = |A| \neq 0$,所以$|Q| \neq 0$ 等价于 $|PQ| \neq 0$.

【解】 (1) 由 $AA^* = A^* A = |A| E$ 和 $A^* = |A| A^{-1}$ 得

$$PQ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}} A^* & |A| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{*}A+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{*}\boldsymbol{\alpha}+b|A| \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|A|E+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b|A|-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|A|A^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & |A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix}
$$

(2) 由(1)知

$$
|PQ|=|A|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})
$$

又由$|P|=|A|\neq 0$,所以$|PQ|=|P||Q|=|A||Q|$,从而有

$$
|Q|=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})
$$

由此得,Q 可逆的充要条件为$|Q|\neq 0$,而$|Q|\neq 0$ 当且仅当 $b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$,即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

三、练习题

1.求下列矩阵的逆矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

2.设三阶矩阵 A 满足

$$
A\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i\quad(i=1,2,3),
$$

其中列矩阵

$$
\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

试求矩阵 A.

3.设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,试证若 $\mathrm{r}(A)=r$,则必存在可逆矩阵 P,使得 PAP^{-1}的后 $n-r$ 行元素全为零.

4 . **试证** $r\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right] = r(A) + r(B)$

四、练习题解答

1 . **令**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

从而

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2 . **设**

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

则 $|P| = -27 \neq 0$, P **为可逆矩阵** .

由于

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

因 P 可逆,则

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

3 . **由于** $\mathrm{r}(A) = r$,**所以存在一个** n **阶可逆矩阵** P **使得**

$$PA = \begin{pmatrix} B_{r\times n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

令

$$Q = P^{-1} = (Q_{n\times r}, Q_{n\times(n-r)})$$

则有

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{r\times n} \\ 0 \end{pmatrix}(Q_{n\times r}, Q_{n\times(n-r)})$$

$$= \begin{pmatrix} B_{r\times n}Q_{n\times r} & B_{r\times n}Q_{n\times(n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 . **设** $\mathrm{r}(A) = r$,**则存在可逆矩阵** P **和** Q,**使得**

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathrm{r}(B) = s$,**则存在可逆矩阵** M **和** N,**使得**

$$MBN = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 P, Q, M, N 都是可逆矩阵，则显然有 $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，且

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & 0 \\ 0 & MBN \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

因此

$$\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right] = \mathrm{r}(D) = r + s = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) .$$

复 习 题 二

1 . 填空题

(1) 设 n 阶可逆矩阵 A 满足 $2|A| = |kA|$, $(k > 0)$, 则 $k =$ ________ .

(2) 设 A 为 3 阶方阵，将 A 按列分块则 $A = (A_1, A_2, A_3)$, 已知 $|A| = 3$, 则 $|2A_1 + A_3, A_3, A_2| =$ ________ .

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为正整数，则 $A^n - 2A^{n-1} =$ ________ .

(4) 已知 $AB - B = A$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$A =$ __________ .

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} =$ __________ .

(6) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则 $(E + B)^{-1} =$ __________ .

(7) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $t =$ __________ .

(8) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| =$ __________ .

2 . 选择题

(1) 设 A 为 n 阶方阵, 且 A 的行列式 $|A| = a \neq 0$, 则 $|A^*|$ 等于(　　) .

(A) a;　　(B) $\frac{1}{a}$;　　(C) a^{n-1};　　(D) a^n .

(2) 设有矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

则下列关系式成立的是(　　).

(A) $AP_1P_2=B$;　　(B) $AP_2P_1=B$;

(C) $P_1P_2A=B$;　　(D) $P_2P_1A=B$.

(3) **设** A **是任一** $n(n\geq 3)$ **阶方阵,** k **为常数,且** $k\neq 0,\pm 1$, **则必有** $(kA)^*$ **等于(　　).**

(A) kA^*;　　(B) $k^{n-1}A^*$;

(C) k^nA^*;　　(D) $k^{-1}A^*$

(4) **设** $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ **均为** n **阶可逆矩阵,则** $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$**等于(　　).**

(A) $A^{-1}+B^{-1}$;　　(B) $A+B$;

(C) $(A+B)^{-1}$;　　(D) $A(A+B)^{-1}B$.

(5) **设** A,B **为** n **阶方阵,满足等式** $AB=0$, **则必有(　　).**

(A) $A=0$**或** $B=0$;　　(B) $A+B=0$;

(C) $|A|=0$ **或** $|B|=0$;　(D) $|A|+|B|=0$.

(6) **设** A,B **为同阶可逆矩阵,则必有(　　).**

(A) $AB=BA$;

(B) **存在可逆矩阵** P, **使** $P^{-1}AP=B$;

(C) **存在可逆矩阵** C, **使** $C^{\mathrm{T}}AC=B$;

(D) **存在可逆矩阵** P **和** Q, **使** $PAQ=B$.

(7) **设** A,B **都是** n **阶非零矩阵,且** $AB=0$, **则** A **和** B **的秩是(　　).**

(A) **必有一个等于零**;　　(B) **都小于** n;

(C) **一个小于** n, **一个等于** n;　　(D) **都等于** n.

(8) **设** n **阶**$(n\geq 3)$**矩阵**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

若矩阵的秩为 $n-1$,则 a 必为(　　).

(A) 1;　　(B) $\dfrac{1}{1-n}$;　　(C) -1;　　(D) $\dfrac{1}{n-1}$.

3.(1) A 为 n 阶矩阵,命题“$A^2=0$,则 $A=0$”是否正确,若正确,证明之,若不正确,举例说明.

(2) A 是 2 阶矩阵,求满足 $A^2=0$ 的所有矩阵.

(3) A 是 n 阶矩阵,证明若 $A^2=0$,且 $A^{\mathrm{T}}=A$,则 $A=0$.

4.证明两个上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵.

5.称 n 阶方阵 A 对角线上元素之和为方阵 A 的迹,记为 $\operatorname{tr}A$,也就是说:如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 $\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

证明:对任何 n 阶方阵 A 与 B,有

(1) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$,

(2) $AB-BA=E$ 恒不成立.

6.设 4 阶方阵 A 的秩为 2,求它的伴随矩阵 A^* 的秩.

7.若 $A+B=AB$,证明 $AB=BA$.

8.设矩阵 A, B 满足 $A^*BA=2BA-8E$,其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A^* 是 A 的伴随矩阵,求矩阵 B.

9.设 A 为主对角线元素全为 0 的 4 阶实对称可逆矩阵,E 为 4 阶单位阵.

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&l\end{bmatrix},\ k>0,\ l>0$$

(1) 试计算 $E+AB$,并指出 A 中的元素满足什么条件时,$E+AB$可逆;

(2) 当 $E+AB$ 可逆时,证明$(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

10.设 n 阶方阵 A 满足 $A^m=E$,m 为正整数,又矩阵 $B=(A_{ij})_{n\times n}$,其中 A_{ij}为行列式$|A|$中元素 a_{ij}的代数余子式,证明:$B^m=E$.

11.设 A 为 n 阶方阵,且 $r(A)=1$,则必存在非零的 $n\times1$ 列矩阵 α 和 β,使 $A=\alpha\beta^{T}$.

12.设 A 为 n 阶方阵,将 A 按列分块,并记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,试证 $r(A)=n$ 的充要条件为

$$\begin{vmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\cdots&\cdots&&\cdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_2&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{vmatrix}\neq0.$$

复习题二答案或提示

1.(1) $\sqrt[n]{2}$; (2) -6;

(3) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$;

分析 $A^n-2A^{n-1}=A^{n-1}(A-2E)$

$$A(A-2E)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

从而 $$A^{n-2}A(A-2E)=0\qquad(n\geq 2),$$

即 $$A^{n}-2A^{n-1}=0$$

(4) $\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$;

分析 因 $|A|=10\neq 0$,**故**

$$A^{*}=|A|A^{-1}$$

于是由 $(A^{*})^{-1}=(10A^{-1})^{-1}=\frac{1}{10}A$ **得答案**.

(6) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$;

分析 **由** $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,**得**

$$(E+A)B=E-A$$

$$B+AB=E-A$$

$$E+B+AB+A=2E$$

$$(E+B)+A(E+B)=2E$$

$$(E+A)(E+B)=2E$$

因此 $(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)$，**计算得答案**.

(7) -3;

分析 若 A 可逆，则由 $AB=0$ 可得 $A^{-1}AB=0$，即 $B=0$，这与 B 是非零矩阵矛盾，因此 A 不可逆，由 $|A|=7t+21=0$，得 $t=-3$.

(8) $a^2(a-2^n)$.

分析 由于 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$,

则

$$
\begin{aligned}
A^n &= (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\\
&= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\
&= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\
&= 2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1\quad 0\quad -1)\\
&= 2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|aE-A^n| &= \begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}\\
&= a(a-2^{n-1})^2-a2^{2n-2}\\
&= a^2(a-2^n).
\end{aligned}
$$

2. (1) C; (2) C; (3) B; (4) D; (5) C;

分析 由 $AB=0$，得 $|AB|=0$，因此 $|A||B|=0$，此即

$|A|=0$ 或 $|B|=0$，选(C)．易举例说明(A)，(B)，(D)不正确．

(6) D;

分析 由于 A，B 为同型矩阵，且 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$，因而 A 与 B 等价，于是存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$，故选(D)．选项(B)表示 A 与 B 相似，选项(C)表示 A 与 B 合同，参见后面的内容．

(7) B;

分析 由于 $A\neq 0$，$B\neq 0$，所以 $\mathrm{r}(A)\geq 1$，$\mathrm{r}(B)\geq 1$，又由 $AB=0$，使得 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$，则有 $\mathrm{r}(A)<n$，且 $\mathrm{r}(B)<n$．选(B)

(8) B．

分析 本题实质上是求 a 为何值时，A 的秩为 $n-1$．将 A 的第1行乘 -1 后分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上去得

$$A\to\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\ a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{pmatrix}$$

再将矩阵的第 $2,3,\cdots,n$ 列全加到第1列上去得

$$\to\begin{pmatrix}1+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{pmatrix}$$

由此可见，$a=1$，A 的秩为1．当 $a=\dfrac{1}{1-n}$ 时，A 的秩为 $n-1$，所以(B)正确，其余都不正确．因此选择(B)．

3．(1) 不正确，例 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则由 $A^2=0$，得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = 0,$$

即 $a^2+bc=(a+d)b=c(a+d)=cb+d^2=0$

解得　若 $c=0$,则 $a=d=0$, b 任意

　　　若 $b=0$,则 $a=d=0$, c 任意

若 $b\neq 0$, $c\neq 0$,则 $a=-d$,且 $a^2=d^2=-bc$.

因此所求矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\text{其中 } a^2+bc=0 .$$

(3) 见第二章第一节矩阵的运算中例8.

4.设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$,因 A, B 均为上三角矩阵,则 $i>j$ 时 $a_{ij}=b_{ij}=0$.设

$$AB=C=(c_{ij})_{n\times n}$$

当 $i>j$ 时, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$,在 $\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}$ 中,因 $i>k$, $a_{ik}=0$,在 $\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 中,因 $k\geq i>j$, $b_{kj}=0$,因此当 $i>j$ 时,恒有 $c_{ij}=0$,故 AB 为上三角矩阵.

5.(1) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$,则

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=\mathrm{tr}(BA).$$

(2) 若 $AB-BA=E$ 成立,则 $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}\,E$,但是 $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$,而 $\mathrm{tr}\,E=n$.

6.$\mathrm{r}(A^*)=0$.

7.由 $A+B=AB$,得

$$E-A-B+AB=E$$

即 $(E-A)(E-B)=E$,从而 $(E-B)$ 是 $(E-A)$ 的逆矩阵,则有

$$(E-B)(E-A)=E$$

即 $E-A-B+BA=E$,得 $A+B=BA$,因此 $AB=BA$.

8.由于$\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}$,$|A|=-2$,代入 $A^*BA=2BA-8E$,得

$$A^{-1}BA=\frac{1}{-2}(2BA-8E)=4E-BA$$

从而有

$$A^{-1}BA+BA=(A^{-1}+E)BA=4E$$

由此解得

$$\begin{aligned}B&=4(A^{-1}+E)^{-1}A^{-1}=4[A(A^{-1}+E)]^{-1}\\&=4(E+A)^{-1}\\&=4\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

9.(1) 设对称矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&0\end{pmatrix}$$

则

$$E+AB=\begin{pmatrix}1&0&ka_{13}&la_{14}\\0&1&ka_{23}&la_{24}\\0&0&1&la_{34}\\0&0&ka_{34}&1\end{pmatrix}$$

从而

$$|E+AB|=1-kla_{34}^2$$

所以当 $1-kla_{34}^2\neq 0$ 时,即 $a_{34}\neq\pm 1/\sqrt{kl}$时,矩阵 $E+AB$ 可逆.

(2) 因为 A, B 都是对称矩阵,即 $A^{\mathrm{T}}=A$, $B^{\mathrm{T}}=B$,且 A 为可

逆矩阵,所以

$$\begin{aligned}[(E+AB)^{-1}A]^{\mathrm{T}} &= A^{\mathrm{T}}[(E+AB)^{-1}]^{\mathrm{T}} = A[(E+AB)^{\mathrm{T}}]^{-1} \\ &= A(E^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})^{-1} = A(E+BA)^{-1} \\ &= A[(A^{-1}+B)A]^{-1} = AA^{-1}(A^{-1}+B)^{-1} \\ &= (A^{-1}+B)^{-1} = [A^{-1}(E+AB)]^{-1} \\ &= (E+AB)^{-1}(A^{-1})^{-1} = (E+AB)^{-1}A\end{aligned}$$

故 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

10. 因为 $A^m = E$, 所以 $|A^m| = |A|^m = 1$, 从而 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆. 由

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

得

$$A^* = |A|A^{-1}$$

又

$$B = (A^*)^{\mathrm{T}} = (|A|A^{-1})^{\mathrm{T}} = |A|(A^{\mathrm{T}})^{-1}$$

故

$$\begin{aligned}B^m &= (|A|(A^{\mathrm{T}})^{-1})^m = |A|^m[(A^{\mathrm{T}})^{-1}]^m \\ &= |A|^m[(A^m)^{\mathrm{T}}]^{-1} = |A^m|[(A^m)^{\mathrm{T}}]^{-1} \\ &= 1\cdot[(E)^{\mathrm{T}}]^{-1} = E\end{aligned}$$

11. 因 $\mathrm{r}(A) = 1$, 由矩阵的等价标准形知, 存在 n 阶可逆矩阵 P 和 Q, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}(1, 0, \cdots, 0)$$

于是

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}(1, 0, \cdots, 0)Q^{-1} = \alpha\beta^{\mathrm{T}}.$$

其中, $\boldsymbol{\alpha} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = (1, 0, \cdots, 0) Q^{-1}$ 均为非零矩阵 .

注:结合第二章第二节练习题第 2 题知, n 阶方阵 A 其秩为 1 的充要条件是 A 可表示为

$$A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 均为 $n \times 1$ 非零列矩阵 .

12 . $\mathrm{r}(A) = n \quad |A| \neq 0$

$$|A|^2 = |A^2| = |A^{\mathrm{T}} A| = \left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \neq 0 .$$

* 矩阵秩的性质的证明

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则有

(1) $0\leq \mathrm{r}(A)\leq \min\{m, n\}$,

$A=0 \quad \mathrm{r}(A)=0$;

(2) $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$;

(3) 设矩阵 P 为 m 阶可逆矩阵, Q 为 n 阶可逆矩阵,则有

$$\mathrm{r}(PAQ)=\mathrm{r}(A);$$

(4) $\mathrm{r}(AB)\leq \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}$;

(5) $\mathrm{r}(A+B)\leq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

(6) 设 A, B 均为 n 阶方阵,且 $AB=0$,则

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n.$$

证明 (1),(2)的证明可由定义直接得到.

(3) 因为 P 可逆,因而可将 P 写成有限个初等方阵的乘积,同样因为 Q 可逆,可写成有限个初等方阵的乘积,这样矩阵 PAQ 可看成对矩阵 A 施行了若干初等行变换和若干初等列变换,因而秩不变.

(4) 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$,且 $\mathrm{r}(A)=r$,则存在可逆矩阵 P 和 Q,使

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

则
$$AB=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QB$$

令 $QB=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$,其中 B_1 为 $r\times s$ 矩阵, B_2 为$(n-r)\times s$ 矩阵,于是有

$$AB = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于 P 可逆,从而有

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}\left[P\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{r}(B_1) \leqslant \mathrm{r}(B_1\text{ 的行数})$$

即 $\quad \mathrm{r}(AB) \leqslant \mathrm{r}(A)$.

又由 $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}[(AB)^{\mathrm{T}}] = \mathrm{r}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(B^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(B)$,得 $\mathrm{r}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}$.

(5) 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵,利用分块矩阵乘法可得

$$A + B = (A \quad B)\begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix} = (E_m, E_m)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix},$$

由(4)知,矩阵乘积的秩小于等于每一矩阵因子的秩,所以

$$\mathrm{r}(A + B) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

设 $\mathrm{r}(A) = s$, $\mathrm{r}(B) = t$,则经初等变换后有

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_{s+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathrm{r}(A + B) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} E_{s+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = s + t = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) .$$

(6) 设 $\mathrm{r}(A) = r$,则存在两个 n 阶方阵 P 与 Q,使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

由 $AB = 0$,得

$$P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB = 0$$

因 P 可逆,上式两边左乘 P^{-1} 得

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB = 0$$

令 $QB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，其中 B_1 为一个 $r \times n$ 矩阵，B_2 为一个 $(n-r) \times n$ 矩阵，则有

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

从而有 $B_1 = 0$，这样 $QB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

由于 Q 可逆，从而有

$$\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(QB) = \mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{r}(B_2) \leq n - r.$$

因此若 $AB = 0$，则有 $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \leq n$.

如果使用后面的知识，可给出更为简洁的证明.

第三章　向量组的线性相关性

本章涉及 n 维向量组的线性相关性、向量组的秩及向量空间.要求理解 n 维向量的概念,向量的线性组合与线性表示;理解向量组线性相关、线性无关的定义,并会用有关向量组线性相关、线性无关的性质及判别法;理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念,会求向量组的极大线性无关组及秩;理解向量组等价的概念,了解向量组的秩与矩阵秩的关系;了解 n 维向量空间、子空间、基、维数、坐标等概念;掌握基变换和坐标变换公式,会求过渡矩阵.

第一节　向量组的线性相关性

一、内容提要

1.n 维向量

(1) n 维向量的概念

由 n 个数组成的一个有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为一个 n 维向量,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为向量 α 的分量(或坐标).

向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为行向量.但有时为应用方便,也写为一列:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}$$

称为列向量.它们的区别只是写法上的不同.利用转置的概念,列向量就是行向量的转置,即

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 表示.

(2) 向量的线性运算

设两个 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

则两个向量的加法为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

数乘向量为

$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$, k 为任意实数.

(3) 向量的运算规律

① $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

② $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

③ $\boldsymbol{\alpha}+0=0+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

④ $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0$;

⑤ $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

⑥ $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$, k,l 为任意实数;

⑦ $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

⑧ $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

2．**向量组线性相关的概念**

定义 1 设有 n 维向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合，或称 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示．

定义 2 设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关；否则称为线性无关．换言之，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则上式当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 才成立．

3．**向量组线性相关性的判定定理**

定理 1 向量组线性相关的充分必要条件是向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合．

定理 2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，且表示式是惟一的．

定理 3 一个向量组若有一个部分组线性相关，则该向量组线性相关；反之，若一个向量组线性无关，则它的任一部分组也线性无关．

定理 4 设有两个向量组

A: $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj})^{\mathrm{T}} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$;

B: $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}, a_{r+1,j}, \cdots, a_{n,j})^{\mathrm{T}} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$,

即 β_j 是由 α_j 加上 $n - r$ 个分量得到的．若向量组 A 线性无关，则向量组 B 也线性无关．

定理 5 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 的秩小于向量的个数 m；该向量组线性无关的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A) = m$．

推论 1　n 个 n 维向量线性无关的充分必要条件是它们所构成的方阵的行列式不等于零．

推论 2　当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性相关．

推论 3　如果在 $m\times n$ 阶矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D\neq 0$，则含有 D 的 r 个行向量及 r 个列向量都线性无关；如果 A 中所有 r 阶子式全为 0，则 A 的任意 r 个行向量及任意 r 个列向量都线性相关．

二、例题分析

向量组的线性相关性是线性代数中一个比较抽象的概念，是线性代数中的一个重点，也是一个难点．应注意以下几个问题：

1．所谓向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，是指存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立．在这里，存在的这组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是一组不全为 0 的数，而不是全不为 0 的数．

2．对不同的线性相关的向量组，存在的不全为 0 的数一般并不相同，见下面例 1 中的举例．

3．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

才成立．换言之，对于线性无关的向量组，若组合系数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为 0，则一定有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$$

【例 1】　举例说明下列各命题是错误的：

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示．

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

成立,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为 0 时,等式

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

才能成立,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关,则有不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0,\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

同时成立.

【解】 (1) 取向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,因它含有零向量.但 α_1 并不能由 α_2,α_3 线性表示,因为 α_2,α_3 的任何的线性组合所得向量的第一个分量是零.

注: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示,但不能随意指定一个向量由其余向量线性表示.

(2) 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;再取 $\lambda_1=\lambda_2=1$,则有

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$$

成立,但 α_1,α_2 线性无关;β_1,β_2 也线性无关.

(3) 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,此时若有

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_2\\\lambda_1\end{pmatrix}=0$$

成立,只有 $\lambda_1=\lambda_2=0$,但向量组 α_1,α_2 和向量组 β_1,β_2 都线性相关.

(4) 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,则向量组 α_1, α_2 和向量组 β_1, β_2 均线性相关.但对此两向量组不存在不全为零的数 λ_1, λ_2,使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=0;\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$$

同时成立,因由上面第一式可得

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix},$$

于是,$\lambda_2=0$,同理由第二式得 $\lambda_1=0$.

【例 2】 下列四个命题是否正确?

n 维向量组 A: α_1, α_2, $\cdots$, α_s $(3\leq s\leq n)$线性无关的充要条件是:

(1) 存在全为零的数 k_1, k_2, $\cdots$, k_s,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0;$$

(2) 向量组 A 中任意两个向量都线性无关;

(3) 向量组 A 中存在一个向量,它不能用向量组中的其余向量线性表示;

(4) 向量组 A 中任意一个向量都不能用向量组中其余向量线性表示.

【解】 (1)(2)(3)不正确,(1)(2)(3)都是向量组 A 线性无关的必要条件,但都不是充分条件,下面给出反例.

(1) 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

显然 $$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0,$$

但向量组 α_1, α_2, α_3 线性相关.

事实上,对于一个任意向量组 α_1, α_2, $\cdots$, α_m,只要取 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,总有

$$0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$$

由此不能断定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性相关还是线性无关.只有证明了除 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为零外,其他情况,也就是说 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中有不为 0 的数,则一定有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0.$$

才能说 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(2) 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$,

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意两个向量均线性无关,但向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,因为 $\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$.

(3) 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

因 $2\alpha_1-\alpha_2=0$,故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,但 α_3 不能由向量组 α_1,α_2 线性表示,因为 α_1,α_2 的任一线性组合所得向量的第 2 分量均是零.

(4) 正确.由于向量组 A 线性相关的充要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表示.于是,向量组 A 线性无关的充要条件是 A 中任一向量均不能由其余向量线性表示.

对于仅由一个向量 α 组成的向量组,当 α 为零向量时,α 线性相关;当 α 为非零向量时,α 线性无关.

对于只有两个向量 α,β 组成的向量组,设

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

α,β 线性相关当且仅当 α,β 中至少有一个可由另一个线性表示.即 $\alpha=k\beta$,或 $\beta=k\alpha$,从而有

α 与 β 的对应分量成比例时线性相关,否则线性无关.

一般地,判断一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的基本方法和步骤是:

(1) 假定存在一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0; \tag{3.1}$$

(2) 应用向量的线性运算和向量相等的定义,找出含未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的齐次线性方程组;

(3) 判断方程组有无非零解;

(4) 如有非零解,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关;如仅有零解,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充要条件为方程组(3.1)有非零解,线性无关的充要条件为方程组(3.1)只有零解.

我们也可以通过求矩阵 A 的秩的方法判断向量组的线性相关性,设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 作为列向量构成矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

将矩阵 A 通过初等变换化为阶梯形由此求 A 的秩 $r(A)$,则

(1) 当 $r(A) < m$ 时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关;

(2) 当 $r(A) = m$ 时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

也可以将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 作为行向量构成矩阵

$$A^{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{T} \\ \alpha_2^{T} \\ \cdots \\ \alpha_m^{T} \end{pmatrix}$$

由于 $r(A^T)=r(A)$,判断方法相同,即用 A 的秩 $r(A)$ 与向量组所含向量的个数 m 进行比较,若 $r(A)$ 小于向量组所含向量的个数,则该向量组线性相关,否则线性无关.

特别地,当 $m=n$ 时,可以通过计算行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|$ 是否为零判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性相关性.

【例 3】 (选择题)设 A 是 $n(n\geq 3)$ 阶矩阵,且 $|A|=0$,则矩阵 A 中 ( ).

(A) 必有一列元素全为 0;

(B) 必有两列元素对应成比例;

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合;

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

答案: 选(C).

【分析】 选项(A)、(B)都是行列式 $|A|=0$ 的充分条件,不是必要条件,所以(A)、(B)不可选.

因为 $|A|=0$,所以矩阵 A 的列向量组是线性相关的,由向量组线性相关的充要条件知,必有一列向量是其余列向量的线性组合,因此(C)正确.

【例 4】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,试讨论向量组 $\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性相关性.

【解】 设有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+$$
$$\cdots+x_{n-1}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+x_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$$

即

$$(x_1+x_n)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+$$
$$\cdots+(x_{n-2}+x_{n-1})\alpha_{n-1}+(x_{n-1}+x_n)\alpha_n=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ \quad\cdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

此方程组的系数行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将行列式 D_n 按第 1 行展开即得

$$D_n = 1 + (-1)^{n+1}$$

当 n 为奇数时，$D_n = 2 \neq 0$，该方程组只有零解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，所以向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关；当 n 为偶数时，$D_n = 0$，该方程组有非零解，所以向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关 .

【例 5】 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_2^{n-1} \end{pmatrix},\cdots,\ \alpha_m = \begin{pmatrix} 1 \\ a_m \\ \cdots \\ a_m^{n-1} \end{pmatrix},\ m \leq n$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个互不相等的实数，试证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 .

【证明】 由于 $m \leq n$，令向量组

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\a_1\\\cdots\\a_1^{m-1}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\a_2\\\cdots\\a_2^{m-1}\end{pmatrix},\cdots,\beta_m=\begin{pmatrix}1\\a_m\\\cdots\\a_m^{m-1}\end{pmatrix}$$

由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中每个向量去掉 $n-m$ 个分量而得到的,如果能证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 也线性无关 .

设有数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使得

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0$$

由此得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_m=0\\a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=0\\\quad\cdots\\a_1^{m-1}x_1+a_2^{m-1}x_2+\cdots+a_m^{m-1}x_m=0\end{cases}$$

它的系数行列式为

$$D_m=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_m\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_1^{m-1}&a_2^{m-1}&\cdots&a_m^{m-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le m}(a_i-a_j)$$

由于 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是互不相等的实数,所以 $D_m\neq0$,从而该齐次线性方程组只有零解 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$.故向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关 这样就证明了向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性无关的 .

【例 6】 设有向量组

$$\alpha_1=(1,0,2,3,-1)$$
$$\alpha_2=(2,-1,4,1,3)$$
$$\alpha_3=(-1,1,0,3,1)$$
$$\alpha_4=(7,-4,8,-2,k)$$

试问 k 为何值时,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

【解】 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为行向量构成矩阵 A,

对 A 作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\2&-1&4&1&3\\-1&1&0&3&1\\7&-4&8&-2&k\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-7r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&-1&0&-5&5\\0&1&2&6&0\\0&-4&-6&-23&k+7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&-1&0&-5&5\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&k-13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+3r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&-1&0&-5&5\\0&0&2&1&5\\0&0&0&0&k+2\end{pmatrix}$$

当 $k=-2$ 时,由于 $\mathrm{r}(A)=3$ 小于向量组所含向量的个数 $m=4$,所以此时向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

【例 7】 设 A 为 $n\times m$ 阶矩阵,B 为 $m\times n$ 阶矩阵,其中 $n<m$.若 $AB=E$,试证 B 的列向量组线性无关.

【证 1】 设有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=Bx=0$$

上式两边左乘 A 得 $ABx=A0=0$,由于 $AB=E$,得 $Ex=0$,即 $x=0$,故 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关.

【证 2】 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,要证 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关,只需证 $\mathrm{r}(B)=n$.

因为 $\mathrm{r}(B)\leq\min\{m,n\}=n$,另一方面由 $AB=E$ 得 $\mathrm{r}(B)\geq$

$r(AB)=r(E)=n$,所以 $r(B)=n$.故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关.

【例 8】 已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x,使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关,且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x.$$

(1) 记 $P=(x,Ax,A^2x)$,求 3 阶矩阵 B,使 $A=PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|A+E|$.

【解】 (1) 设 $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$,则由 $AP=PB$ 得

$$(Ax,A^2x,A^3x)=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$$

上式可写为

$$Ax=a_1x+b_1Ax+c_1A^2x, \qquad ①$$

$$A^2x=a_2x+b_2Ax+c_2A^2x, \qquad ②$$

$$A^3x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x. \qquad ③$$

将 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 代入③式得

$$3Ax-2A^2x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x. \qquad ④$$

由于 x, Ax, A^2x 线性无关,故

由①式可得 $a_1=c_1=0$, $b_1=1$;

由②式可得 $a_2=b_2=0$, $c_2=1$;

由④式可得 $a_3=0$, $b_3=3$, $c_3=-2$,

从而
$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $P^{-1}AP=B$,则有

$$P^{-1}(A+E)P=B+E$$

两边取行列式,得

$$|P^{-1}||A+E||P| = |B+E|$$

于是 $|A+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$.

三、练习题

1 . 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,又设

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m \\ \cdots \\ \beta_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mm}\alpha_m \end{cases}$$

证明:向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

2 . 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4 - \alpha_1$, 试证 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关 .

3 . 设有向量组

$$\alpha_1 = (1,1,2,3,1)$$
$$\alpha_2 = (1,3,6,1,3)$$
$$\alpha_3 = (3,-1,-2,15,3)$$
$$\alpha_4 = (1,-5,-10,13,k)$$

试问 k 为何值时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 .

4 . 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关,向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关 .问

(1) α_1 能否由 α_2,α_3 线性表示？证明你的结论；

(2) α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？证明你的结论．

5．设向量 β 可由向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，证明表示法惟一的充要条件是向量组 A 线性无关．

6．设在向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中，$\alpha_1\neq 0$，并且每一个 α_i 都不能由前面的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表示，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关．

四、练习题解答

1．设有 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0$$

将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的表达式代入上式得

$$\begin{gathered}x_1(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1m}\alpha_m)+\\ x_2(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2m}\alpha_m)+\\ \cdots+x_m(a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mm}\alpha_m)=0\end{gathered}$$

即

$$\begin{gathered}(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m)\alpha_1\\ +(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m)\alpha_2+\cdots\\ +(a_{1m}x_1+a_{2m}x_2+\cdots+a_{mm}x_m)\alpha_m=0\end{gathered}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0\\ \cdots\\ a_{1m}x_1+a_{2m}x_2+\cdots+a_{mm}x_m=0\end{cases}$$

由于上述的齐次线性方程组只有零解的充要条件是它的系数行列式

$$D_m=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ a_{1m}&a_{2m}&\cdots&a_{mm}\end{vmatrix}\neq 0.$$

而 $D_m^{\mathrm{T}} = D_m$,所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

2 . 利用第 1 题的结果,可直接计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 .$$

由于 $D \neq 0$,所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关 .

3 . 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 作为行向量构成矩阵 A,并对 A 作初等变换 .

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 13 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix} .$$

当 $k = 3$ 时,因为 $\mathrm{r}(A) = 3 < m$,所以此时向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 .

4 . (1) 因向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关,由定义知,存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3,使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 .$$

可以断言 $k_1 \neq 0$,因若不然,便有 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0$ 成立,且

k_2, k_3 不全为零,于是,由定义知,向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关,与题设该向量组线性无关矛盾 这样则有

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 .$$

因此,向量 α_1 可由 α_2, α_3 线性表示 .

(2) 向量 α_4 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,因若不然,由式(1)知,向量 α_1 可由 α_2, α_3 线性表示,于是,向量 α_4 最终可由向量组 α_2, α_3 线性表示,从而向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关,此与题设它是线性无关矛盾 .

5 . 必要性:即证若 β 已被向量组 A 线性表示为

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

且表示法惟一,则向量组 A 线性无关 .反证法:

若向量组 A 线性相关,由定义,存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$(不妨设 $\lambda_i \neq 0$)使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0$$

两式等号两边分别相加,得

$$\beta = (k_1 + \lambda_1)\alpha_1 + (k_2 + \lambda_2)\alpha_2 + \cdots + (k_s + \lambda_s)\alpha_s$$

因 $\lambda_i \neq 0 \quad k_i + \lambda_i \neq k_i$,于是得到 β 由向量组 A 的两种不同表示法,此为矛盾 .

充分性: 设 β 有两种表示式

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s$$

及

$$\beta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_s\alpha_s$$

两式相减,得

$$(\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda_s - \mu_s)\alpha_s = 0$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,所以

$$\lambda_i - \mu_i = 0 (i = 1,2,\cdots, s)$$

即

$$\lambda_i = \mu_i (i = 1,2,\cdots, s),$$

从而表示式是惟一的.

6. 用反证法.如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关,则存在一组不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r\alpha_r = 0$$

现在证明 $k_r = 0$,否则若 $k_r \neq 0$,有

$$\alpha_r = -\frac{k_1}{k_r}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_r}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\alpha_{r-1}$$

上式表明 α_r 可由它前面的 $r-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表示,与题设矛盾,故 $k_r = 0$,从而 $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = 0$ 就可写成

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-2}\alpha_{r-2} + k_{r-1}\alpha_{r-1} = 0$$

又可证明 $k_{r-1} = 0$,否则若 $k_{r-1} \neq 0$,可推得

$$\alpha_{r-1} = -\frac{k_1}{k_{r-1}}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_{r-1}}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{r-2}}{k_{r-1}}\alpha_{r-2}$$

上式又说明 α_{r-1} 可由它前面的 $r-2$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-2}$ 线性表示,与题设矛盾,故 $k_{r-1} = 0$.

同理可证 $k_{r-2} = 0, k_{r-3} = 0, \cdots, k_2 = 0$,最后得 $k_1\alpha_1 = 0$;因题设 $\alpha_1 \neq 0$,所以 $k_1 = 0$,因此证得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$,这与 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不全为0矛盾.故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

第二节　向量组的秩

一、内容提要

1. 向量组等价的概念

设两个向量组为

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r,$$
$$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s,$$

若向量组 A 中的每一个向量可由向量组 B 线性表示,则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示.又若向量组 B 也可由向量组 A 线性表示,则称两个向量组等价.

2.极大线性无关组与向量组的秩

设向量组 A 的一个部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组 A 中每一个向量均可由此部分组线性表示,则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组(简称极大无关组);极大线性无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩.

只含零向量的向量组没有极大线性无关组,规定它的秩为 0.

极大线性无关组的另一个等价定义为向量组 A 中有 r 个向量线性无关,而 A 中任意 $r+1$ 个向量均线性相关,则这 r 个线性无关的向量为向量组 A 的一个极大无关组.

向量组与它的极大线性无关组等价.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩记为秩$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关的充要条件为秩$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = m$.

3.向量组秩的性质

(1) 设向量组 A 的秩为 r,向量组 B 的秩为 s,若向量组 A 能由向量组 B 线性表示,则 $r \leq s$.

(2) 等价的向量组有相同的秩.

(3) 等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.

4.矩阵的秩与向量组的秩的关系

定理 1　矩阵 A 的秩等于 A 的行向量组的秩,也等于 A 的列向量组的秩.

定理 2　矩阵 A 经过初等行变换化为矩阵 B,则 A 的列向量组与 B 对应的列向量组有相同的线性组合关系.

根据上述结论,可以通过将所给向量组构成矩阵的方法求向

量组的秩、极大无关组,并将其他向量用极大无关组线性表示.

对于所给向量组

$$\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})^{\mathrm{T}}, \ i = 1,2,\cdots,m .$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 作为列向量构成矩阵 A,即

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

然后通过初等行变换将 A 化成阶梯形矩阵 B,则

(1) 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ = 阶梯形矩阵 B 的非零行的行数.

(2) 由于 B 的列向量组与 A 的列向量组有相同的线性组合,因而若 B 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 列为 B 的列向量组的极大无关组,那么 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 即为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的极大无关组.

(3) 若要求将不是极大无关组的向量用极大无关组线性表示,应将阶梯形矩阵 B 进一步化成行最简形矩阵,利用其各列的线性组合关系写出原向量之间的线性关系,将不是极大无关组中的向量用极大无关组线性表示.

注:若所给向量为行向量,为使初等行变换不改变其线性组合关系,也应将其按列构成矩阵,再作初等行交换.

二、例题分析

【例 1】 设有向量组

$$\alpha_1 = (1, -2, 2, 3)$$
$$\alpha_2 = (-2, 4, -1, 3)$$
$$\alpha_3 = (-1, 2, 0, 3)$$
$$\alpha_4 = (0, 6, 2, 3)$$
$$\alpha_5 = (2, -6, 3, 4)$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩及它的一个极大无关组,并把不属于极大无关组的向量用该极大无关组线性表示.

【解】 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 按列构成矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\backslash\ r_4]{r_2\backslash\ r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\\0&0&0&6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{3}r_3)]{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_2 - \frac{2}{3}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

因此秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$.设 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$,则易见 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 是 B 的列向量组的一个极大无关组,且

$$\beta_3 = \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_2, \beta_5 = \frac{16}{9}\beta_1 - \frac{1}{9}\beta_2 - \frac{1}{3}\beta_4$$

由于 A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性组合关系,所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组,且

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2, \alpha_5 = \frac{16}{9}\alpha_1 - \frac{1}{9}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_4 .$$

若不要求将不属于极大无关组的向量用该极大无关组线性表示,则不必将 A 化成行最简形,只要将 A 化成阶梯形矩阵就可以求出 A 的列向量组的秩及它的一个极大无关组,若只求向量组的秩,也可将所给向量组按行构成矩阵,再化成阶梯形即可.

【例 2】 设向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r_1,向量组 B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的秩为 r_2,向量组 C: $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 的秩为 r_3,证明:

$$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$$

【证明】 因为向量组 C 是由向量组 A 和 B 构成的,因此显然有$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3$.下面证 $r_3 \leq r_1 + r_2$.

不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2}$; $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_3}$ 分别是向量组 A, B 和 C 的极大无关组,则

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由它的极大无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$ 线性表示;

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由它的极大无关组 $\beta_1,\cdots,\beta_{r_2}$ 线性表示，从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1},\beta_1,\cdots,\beta_{r_2}$ 线性表示．又 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{r_3}$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示，从而 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{r_3}$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1},\beta_1,\cdots,\beta_{r_2}$ 线性表示．所以

秩$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{r_3})\leq$秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1},\beta_1,\cdots,\beta_{r_2})\leq r_1+r_2$．又由于 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{r_3}$ 线性无关，则秩$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{r_3})=r_3$，从而 $r_3\leq r_1+r_2$．

【例 3】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示．

【证明】 充分性：由于任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，从而 n 维单位坐标向量

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\cdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\1\end{pmatrix}$$

可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，因此

$$n=\text{秩}(e_1,e_2,\cdots,e_n)\leq\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leq n.$$

所以秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

必要性：设 α 为任一 n 维向量，则 $n+1$ 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 必线性相关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因而 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示．

对于向量组来说，若向量组 A 与向量组 B 等价，则一定等秩，但反之不然，例如，取

$$A:\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T$$

$$B:\beta_1=(0,0,1,0)^T,\beta_2=(0,0,0,1)^T$$

向量组 A 与向量组 B 的秩都是 2，但向量组 A 与向量组 B 并不等价．

对于矩阵来说,若矩阵 A 与矩阵 B 为同型矩阵,则 A 与 B 等价当且仅当矩阵 A 与 B 的秩相等.

请读者注意上述差别.

【例 4】 (选择题)设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为( ).

(A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表示;

(B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示;

(C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 等价;

(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 等价.

答案: 选(D).

【分析】 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关

秩$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = m$

秩$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) =$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)(= m)$

矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 的秩相等.

矩阵 A 与矩阵 B 等价(A 与 B 为同型矩阵).

因此选项(D)正确

举例说明(A),(B),(C)不正确,

$$\alpha_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

则 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 线性无关.容易看到, α_1, α_2 不可由 β_1, β_2 线性表示,选项(A)不正确, β_1, β_2 不可由 α_1, α_2 线性表示,选项(B)不正确.α_1, α_2 与 β_1, β_2 不能相互线性表示,因此选项(C)也

不正确.

【例 5】 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r,在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$.证明:向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的秩 $\geq r+m-s$.

【证明】 设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中除去 $\alpha_{i_l},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 后剩下的向量为 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{s-m}}$.

设向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的秩为 r_1;向量组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{s-m}}$ 的秩为 r_2,由于这个向量组所含向量的个数为 $s-m$,所以 $r_2\leq s-m$.

又因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是由向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 与向量组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{s-m}}$ 构成的,所以由例 2 知 $r\leq r_1+r_2$,而 $r_2\leq s-m$,故 $r\leq r_1+s-m$,即 $r_1\geq r+m-s$.

【例 6】 设向量组 B: $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 能由向量组 A: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K,$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵,且向量组 A 线性无关.证明向量组 B 线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $\mathrm{r}(K)=r$.

【证明】 充分性.

设 $\mathrm{r}(K)=r$,要证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.用反证法,若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关,则存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,使

$$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_r\beta_r=0$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}=0$$

亦即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) K \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,则有

$$K \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$$

设 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为矩阵 K 的列向量组,则上式可写成

$$(k_1, k_2, \cdots, k_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$$

即
$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_r k_r = 0 .$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 不全为 0,所以 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 线性相关,从而 $\mathrm{r}(K) < r$,与假设矛盾,因此 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关 .

必要性:设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关,要证 $\mathrm{r}(K) = r$.同样用反证法,若 $\mathrm{r}(K) < r$,则矩阵 K 中的 r 个行向量 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 线性相关,于是存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$,使

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_r k_r = 0$$

即

$$K \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$$

设由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 作为列向量构成矩阵 A,上式两边左乘 A 得

$$AK\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\cdots\\\lambda_r\end{pmatrix} = 0$$

即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)K\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\cdots\\\lambda_r\end{pmatrix} = 0$$

由假设条件得

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\cdots\\\lambda_r\end{pmatrix} = 0$$

即

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_r\beta_r = 0$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 不全为 0,所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性相关,与假设矛盾,因此 $\mathrm{r}(K) = r$.

三、练习题

1 . 设有向量组

$$\alpha_1 = (1,1,2,2,1)$$
$$\alpha_2 = (0,2,1,5, -1)$$
$$\alpha_3 = (2,0,3, -1,3)$$
$$\alpha_4 = (1,1,0,4, -1)$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩及它的一个极大线性无关组,并把不属于极大无关组的向量用该极大无关组线性表示 .

2 . 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为一向量组,且

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$$
$$\cdots$$
$$\beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1}$$

证明:向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 有相同的秩 .

3 . 已知向量组

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

与向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

具有相同的秩,且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,求 a, b 的值 .

4 . 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,又向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合,即

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} \alpha_j (i = 1, 2, \cdots, s) .$$

证明: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关的充要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sr} \end{bmatrix}$$

的秩小于 s .

四、练习题解答

1 . 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 按列作成矩阵

$$A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

因此秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$.**设** $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$,**因为** $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ **是** B **的列向量组的一个极大无关组且** $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2$,**所以** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ **是** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **的一个极大无关组**,**且**

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4.$$

2.**由题设** $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ **可由** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性表示**.

将题设的 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ **的表示式的左右两边相加得**

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m = (m-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)$$

从而

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \frac{1}{(m-1)}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m)$$

又

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \\ = & \alpha_i + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m) \\ = & \alpha_i + \beta_i \end{aligned}$$

所以

$$\alpha_i = \frac{1}{m-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m) - \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

上式证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **又可由** $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ **线性表示**.**故**

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价 .从而向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 有相同的秩 .

3 . 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列向量组成矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix},$$

对 A 作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2, α_1,α_2 是它的一个极大线性无关组 .由题设,以 β_1,β_2,β_3 为列向量组成矩阵的秩也为 2,故由

$$\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&b-\dfrac{a}{3}\end{pmatrix},$$

得到当 $b-\dfrac{a}{3}=0$,即 $a=3b$ 时,β_1,β_2,β_3 的秩为 2 .

又因 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,而 α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组 .故 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示,则 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 的秩为 2 .因此由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&b\\0&6&2b-1\\0&0&5-b\end{pmatrix},$$

得当 $b=5$ 时,$\alpha_2,\alpha_3,\beta_3$ 的秩为 2,这时 $a=15$.因此当 $a=15$,$b=5$ 时为所求 .

4 . 由题设有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{s1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{s2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{sr} \end{bmatrix}$$

记矩阵 $P=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{s1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{s2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{sr} \end{bmatrix}=(p_1,p_2,\cdots,p_s)$

充分性:由于 $\mathrm{r}(P)<s$,**所以** P **的列向量组线性相关,即存在不全为** 0 **的数** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,**使得**

$$\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+\cdots+\lambda_s p_s=0,$$

即

$$(p_1,p_2,\cdots,p_s)\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_s\end{bmatrix}=0,$$

亦即

$$P\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_s\end{bmatrix}=0$$

由于

$$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_s\beta_s$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_s\end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$$

所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关．

　　必要性:若 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关,则存在不全为 0 的数 λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_s$,使得

$$\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \cdots + \lambda_s \beta_s = 0$$

即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$$

由题设有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,因此

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$$

即 $$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_s p_s = 0$$

　　由 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 线性相关得 $r(P) < s$．

第三节　向量空间

一、内容提要

1．向量空间的概念

定义　设 V 是 n 维向量构成的非空集合,且满足

(1) 若 $\alpha,\beta\in V$,则 $\alpha+\beta\in V$;

(2) 若 $\alpha\in V$, $k\in \mathrm{R}$,则 $k\alpha\in V$,

则称集合 V 是向量空间．

上述定义中(1)和(2)两个条件称为集合 V 对加法和数乘两种运算封闭．由定义知,一个 n 维向量的集合 V 要构成一个向量空间,必须满足对加法和数乘运算的封闭性．

$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m\mid\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in R\}$称为由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间．

2．基、维数和坐标

V 是向量空间,若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$,满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中的任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基, r 称为 V 的维数,记为 $\dim V=r$,并称 V 是 r 维向量空间．

规定只含一个零向量的向量空间的维数为 0．

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基,向量空间 V 中任一向量 α 可惟一表示为

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

那么有序数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为向量 α 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的坐标,记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

3.基变换与坐标变换

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 n 维向量空间 V 中的两个基,则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示,设表示式为

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{n2}\alpha_n, \\ \cdots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \cdots + c_{nn}\alpha_n. \end{cases}$$

则称上式记为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的基变换公式.

记
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

利用矩阵的分块运算,可将基变换公式写成矩阵形式如下:

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) C$$

矩阵 C 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

设 α 是 n 维向量空间 V 的任一向量,α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标为 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$,即

$$\alpha = (\alpha_2, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \alpha = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_1\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

由于 α **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **下的坐标是惟一的,则有下面的坐标变换公式**.

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

二、例题分析

【例 1】 **设矩阵** $A=(a_{ij})_{m\times n}$, b **是** $n\times1$ **的非零矩阵,令**

$V_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathrm{R}$,**满足** $Ax=0\}$,

$V_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathrm{R}$ **满足** $Ax=b\}$,

问 V_1,V_2 **是否为向量空间,为什么**?

【解】 **任取** V_1 **中两个向量**

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

则 $A\alpha=0$, $A\beta=0$,**从而有**

$$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0+0=0$$

$$A(k\alpha)=kA\alpha=k\cdot0=0$$

所以 $\alpha+\beta\in V_1$, $k\alpha\in V_1$,**故** V_1 **是向量空间**.

任取 V_2 **中向量** $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,**则** $A\alpha=b$ **但是** $A(2x)=2Ax=2b\neq b$,**从而** V_2 **不是向量空间**.

由例 1 **知道齐次线性方程组的所有解构成向量空间,但非齐次线性方程组的所有解不构成向量空间**.

【例 2】 已知三维向量空间的一个基为 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$，求向量 $\beta=(2,0,0)^T$ 在该基下的坐标．

【解】 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

由此解得 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=-1$，故向量 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,1,-1)^T$．

【例 3】 已知 R^3 中的两个基为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

和

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵．

分析 按过渡矩阵的定义就可求得．

【解】 设 R^3 中由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 C，则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$$

于是

$$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

得

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

注:可用初等行变换的求法直接求出过渡矩阵,

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \mid \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

得

$$C=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}.$$

【例 4】 已知 3 维向量 β在基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

下的坐标为$(1,-1,0)^{T}$,**求 β在基**

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

下的坐标 .

【解】 设 β在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^{T}$,**则**

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

三、练习题

1．设 $V_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 且 $x_1+\cdots+x_n=0\}$，
$V_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 且 $x_1+\cdots+x_n=1\}$，
问 V_1,V_2 是不是向量空间，为什么？

2．设 $V(\quad=\mathbf{R}^n)$为 $r(\leq n)$维向量空间，试证 V中任意 r个线性无关的向量都是 V的基．

3．由 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^{\mathrm T}$所生成的向量空间记作 V_1，由 $\beta_1=(3,0,7,14)^{\mathrm T}$，$\beta_2=(2,1,5,10)^{\mathrm T}$所生成的向量空间记作 V_2，试证 $V_1=V_2$．

4．设 $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个基，求通过过渡矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所得的新基 β_1,β_2,β_3，并求向量 $\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$ 在新基下的表达式．

四、练习题解答

1．任取 V_1 中两个向量

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T},$$
$$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T},$$

则

$$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm T}$$
$$k\alpha=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)^{\mathrm T}$$

由于

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)$$
$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$
$$=0+0=0$$
$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$=k\cdot 0=0$$

所以 $\alpha+\beta\in V_1$, $k\alpha\in V_1$,故 V_1 是向量空间.

任取 V_2 中向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,由于

$$2\alpha=(2x_1,2x_2,\cdots,2x_n)^{\mathrm{T}}$$

而 $2x_1+2x_2+\cdots+2x_n=2(x_1+x_2+\cdots+x_n)=2$,所以 $2\alpha\notin V_2$,因此 V_2 不是向量空间.

2.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的一个基,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 V 中任意 r 个线性无关的向量,则对任取 $\beta\in V$,向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,从而

$$\text{秩}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta)\leq\text{秩}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r,$$

因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta$ 线性相关,又由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关,所以 β 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示,由基的定义知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 V 的一个基.

3.把向量组 α_1,α_2 和 β_1,β_2 作为列向量组构成矩阵,并求它的行最简形:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&3&0&1\\2&1&7&5\\4&2&14&10\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&3&3&3\\0&1&1&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-r_2\\r_4-r_2}]{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于初等行变换不改变列向量组的线性关系，因此有

$$\begin{cases} \beta_1 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

即

$$(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2)K$$

其中矩阵 $K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，显然 K 可逆，且 $K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，于是

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_2 = -2\beta_1 + 3\beta_2 \end{cases}$$

从而有 α_1, α_2 与 β_1, β_2 等价，因此 V_1 中向量可由 β_1, β_2 线性表示，$V_1 \quad V_2$，V_2 中向量可由 α_1, α_2 线性表示，$V_2 \quad V_1$，从而有 $V_1 = V_2$.

4. 由

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

又由于

$$\alpha = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

得

$$\alpha = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3 .$$

复习题三

1 . **填空题**

(1) **已知向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **的秩为** 3, **则向量组** $\alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2$ **的秩为**_________ .

(2) **已知秩为** 3 **的向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **可由向量组** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **线性表示,则向量组** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **的秩为**_________ .

(3) **已知向量组**

$$\alpha_1 = (1,2,3,4)^T, \alpha_2 = (2,3,4,5)^T,$$
$$\alpha_3 = (3,4,5,6)^T, \alpha_4 = (4,5,6,7)^T,$$

则该向量组的秩为_________ .

(4) **设向量组**

$$\alpha_1 = (a, 0, c), \alpha_2 = (b, c, 0), \alpha_3 = (0, a, b)$$

线性无关,则 a, b, c **必满足关系式**_________ .

(5) **设三阶矩阵** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, **三维列向量** $\alpha = (a, 1, 1)^T$, **已知** $A\alpha$ **与** α **线性相关,则** $a =$ _________ .

(6) 已知 3 维线性空间的一组基为

$$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

则向量 $\beta=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在上述基下的坐标是________.

(7) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&s\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, 若 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 则 s 应满足________.

(8) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 向量组

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=q\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

线性相关, 则 $q=$________.

2. 选择题

(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量, 那么下列结论正确的是(　).

(A) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关;

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关;

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$;

(D) 若 $0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_m=0$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(2) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是(　).

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$;

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$;

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

(3) 设 A 是 n 阶方阵, 且 $|A|=0$, 则(　).

(A) A 中必有两行(列)的元素对应成比例;

(B) A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合;

(C) A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合;

(D) A 中至少有一行(列)向量的元素全为 0 .

(4) 假设 A 是 n 阶方阵,其秩 $r< n$,那么在 A 的 n 个行向量中( ) .

(A) 必有 r 个行向量线性无关;

(B) 任意 r 个行向量线性无关;

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组;

(D) 任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表出 .

(5) 若向量组 α, β, γ 线性无关; α, β, δ 线性相关,则( ) .

(A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示;

(B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示;

(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示;

(D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示 .

(6) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示,但不能由向量组(I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表示,记向量组(II) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}, \beta$,则( ) .

(A) α_m 不能由向量组(I)线性表示,也不能由向量组(II)线性表示;

(B) α_m 不能由向量组(I)线性表示,但可由向量组(II)线性表示;

(C) α_m 可由向量组(I)线性表示,也可由向量组(II)线性表示;

(D) α_m 可由向量组(I)线性表示,但不能由向量组(II)线性表示 .

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 .则对于任意常数 k,必有(　) .

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关 .

(8) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的,则直线 $\dfrac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \dfrac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \dfrac{z - c_3}{c_1 - c_2}$ 与直线 $\dfrac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \dfrac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \dfrac{z - c_1}{c_2 - c_3}$ 是(　)

(A) 相交于一点;　　　(B) 重合;

(C) 平行但不重合;　　(D) 异面 .

3 .设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$$

问: (1) 当 t 为何值时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 ?

(2) 当 t 为何值时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 ?

(3) 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时,将 α_3 表为 α_1, α_2 的线性组合 .

4 .已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)$$
$$\alpha_2 = (2, 0, t, 0)$$
$$\alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$$

的秩为 2,问 t 的值为多少 .

5 .设向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,但 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2,$

$\cdots, \alpha_{r-1}$线性表示.

(1) α_r 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$线性表示?为什么?

(2) α_r 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$,线性表示?为什么?

6.设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,而向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta, \gamma$ 线性相关.证明:若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma$ 不等价,则向量 β 与 γ 中有且仅有一个可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示.

7.设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$, $\beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \cdots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$,其中 t_1, t_2 为实常数,试问 t_1, t_2 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_3$ 也线性无关?

8.设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,且 $\alpha_1 \neq 0$,证明必存在足标 $i, 2 \leq i \leq m$,使 α_i 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表示.

9.设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 维列向量,若存在正整数 k,使 $A^k\alpha = 0$,但 $A^{k-1}\alpha \neq 0$,试证向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

10.设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 R^3 的一个基,且

$$\begin{cases} \alpha_1 = \varepsilon_1 \\ \alpha_2 = 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_3, \\ \alpha_3 = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \end{cases} \begin{cases} \beta_1 = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ \beta_2 = -2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 \\ \beta_3 = \varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 \end{cases}$$

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 R^3 中的基;

(2) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标变换公式.

复习题三答案或提示

1.(1)2; (2)3; (3)2;

(4) $abc \neq 0$;

分析 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的三个行向量构成矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&c\\b&c&0\\0&a&b\end{pmatrix},$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a&0&c\\b&c&0\\0&a&b\end{vmatrix}=2abc$$

当 $abc\neq 0$ **时**, $|A|\neq 0$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关**.

(5) -1;

分析 $\alpha=(a,1,1)^T\neq 0$, $A\alpha$ **与** α **线性相关**,**故** $A\alpha=\lambda\alpha$.**于是**

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}a=\lambda a\\2a+3=\lambda\\3a+4=\lambda\end{cases}$$

解得 $a=-1$.

(6) $(1,1,-1)^T$;

分析 β **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **的坐标** $(x_1,x_2,x_3)^T$ **满足**

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ **的分量代入上式得线性非齐次方程组**

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

解得 $x_1=x_2=1$, $x_3=-1$.

(7) $s\neq 0$;

分析

$$A\alpha=\begin{pmatrix}s\\1\\1\end{pmatrix},\ A^2\alpha=\begin{pmatrix}2s\\1\\2s+1\end{pmatrix},$$因此

$$(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=\begin{pmatrix}0&s&2s\\1&1&1\\1&1&2s+1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&s&2s\\0&0&2s\end{pmatrix},$$

$\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关,则矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&s&2s\\0&0&2s\end{pmatrix}$的秩为 3,故 $s\neq 0$.

(8) 2 .

分析 由于

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&q\\0&2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},$$

β_1,β_2,β_3 线性相关,则矩阵$\begin{pmatrix}1&1&q\\0&2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$不可逆,于是由

$$\begin{vmatrix}1&1&q\\0&2&1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&q\\0&2&1\\-1&0&q-2\end{vmatrix}=2(q-2)=0$$

得 $q=2$.

2 . **选择题**

(1) B;

分析 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则存在一组不全为 0 的数组 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

其逆否命题为:对于任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0 .$$

因此选项(B)正确 .

现举例说明(A),(C),(D)不正确,当

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

并不能得到 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的结论,因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关时,只要取 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 也满足此式,所以(A)不正确 .

若取

$$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (2,0,0),$$

则 α_1, α_2 线性相关,但 $2\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 \neq 0$,所以(C)不正确 .

无论 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关还是线性无关,都满足 $0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \cdots + 0\cdot\alpha_m = 0$,所以(D)不正确 .

(2) (C);

分析　由第三章第一节的练习题第 1 题可知,只要计算下列行列式

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

(D) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 22 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0$.

因此选(C) .

(3) (C);

分析　当$|A|=0$时,秩$(A)<n$.因此A的n个行(列)向量线性相关,于是A的n个行(列)向量中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.所以(C)正确.

(A),(B),(D)都是$|A|=0$的充分条件,不是必要条件.例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\ |A|=0.$$

但不满足(A),(B),(D).

(4) (A);

分析　A的秩等于A的行向量组的秩,因此A的行向量组的秩为r.于是至少有r个行向量线性无关,所以(A)正确.但并不是所有r个行向量组线性无关.例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},$$

A的秩为3.第1,2,3行向量线性无关,但是第1,2,4行向量线性相关,故(B),(C)不正确.第3行向量不能由第1,2,4行向量线性表示,故(D)不正确.

(5) (C);

分析　由题设α,β,γ线性无关,故α,β线性无关.又由于α,β,δ线性相关,所以δ可由α,β线性表示.因此δ必可由α,β,γ线性表示.这说明(C)正确,(D)不正确.

现举例说明(A),(B)不正确.取

$$\alpha=(1,0,0,0),\beta=(0,1,0,0),$$
$$\gamma=(0,0,1,0),\delta=(0,2,0,0),$$

显然α,β,γ线性无关,α,β,δ线性相关,符合题设条件,显然α

不可由β, γ, δ线性表示,(A)不正确.β可由δ线性表示,因此β可由α, γ, δ线性表示,(B)不正确.

(6) (B);

分析 首先证明α_m不能由向量组(I)线性表示.用反证法,若α_m能由向量组(I)线性表示,即α_m可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示,由于$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示,因此$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示,这与题设矛盾.所以$\alpha_m$不能由向量组(I)线性表示,(C),(D)不正确.

下证α_m可由向量组(Ⅱ)线性表示.由于β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示,设

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则$k_m \neq 0$,否则$k_m = 0$,则β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示,与题设矛盾.因此

$$\alpha_m = \frac{1}{k_m}\beta - \frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_m}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1},$$

即α_m可由向量组(Ⅱ)线性表示,因此(A)不正确.(B)正确.

(7) (A);

分析 按题意,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$线性无关(否则的话,$\beta_2$能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示,与题设矛盾!).由于$\beta_1$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示,设

$$\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3,$$

则
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ka \\ 0 & 1 & 0 & kb \\ 0 & 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ka \\ 0 & 1 & 0 & kb \\ 0 & 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆,则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$与向

量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 等价,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关.因此(A)正确,(B)不正确.

对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$,当 $k=0$ 时,线性相关,$k\neq 0$ 时线性无关,因此(C),(D)不正确.

(8) (A);

分析

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = B$$

由于该矩阵的秩为 3,所以矩阵 B 的前两行不成比例,因此(B),(C)不正确,又由于点

$$(a_1-a_2+a_3,\ b_1-b_2+b_3,\ c_1-c_2+c_3)$$

为两直线的交点,所以(A)正确,(D)不正确.

3.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t-5$$

于是(1)当 $t\neq 5$ 时,$D\neq 0$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2)当 $t=5$ 时,$D=0$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(3)当 $t=5$ 时,以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列作成矩阵,施行初等行变换

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

4. $t=3$.

5. (1) α_r 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 线性表示;

(2) α_r 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示.

6．因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关，所以存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\mu_2$ 使

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\mu_1\beta+\mu_2\gamma=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，因此不可能 $\mu_1=\mu_2=0$，又由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 不等价，因此不可能同时有 $\mu_1\neq0,\mu_2\neq0$．当 $\mu_1\neq0,\mu_2=0$ 时，则有

$$\beta=-\frac{\lambda_1}{\mu_1}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_m}{\mu_1}\alpha_m$$

即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示．

同理，当 $\mu_1=0,\mu_2\neq0$ 时，r 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示．

如果 β 与 γ 都可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则显然向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 等价，与题设矛盾．

7．设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$$

则

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，因此有

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \quad\cdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

因其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

所以当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$,即当 s 为偶数时,$t_1\neq\pm t_2$,当 s 为奇数时,$t_1\neq -t_2$,方程组只有零解

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$$

从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

8.因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,由定义知,存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$$

在上式中,自右至左考察这些系数.设其第一个不为零的数为 λ_i,也即 $\lambda_i\neq 0$,但 $\lambda_{i+1}=\lambda_{i+2}=\cdots=\lambda_m=0$,此足标 i 必大于等于 2,如若不然,上式成为 $\lambda_1\alpha_1=0$,由 $\alpha_1\neq 0$ 知 $\lambda_1=0$,此与这些系数不全为零矛盾.因此有

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_i\alpha_i=0,\text{且 }\lambda_i\neq 0,\ i\geq 2.$$

$$\alpha_i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1-\cdots-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1},$$

于是,上述足标 i 即满足要求.

9.设有常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$,使得

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$$

在上式两边左乘 A^{k-1},则有

$$A^{k-1}(\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha)=0$$

即

$$\lambda_1A^{k-1}\alpha+\lambda_2A^k\alpha+\cdots+\lambda_kA^{2k-2}\alpha=0$$

从而有

$$\lambda_1A^{k-1}\alpha=0$$

由于 $A^{k-1}\alpha\neq 0$,所以 $\lambda_1=0$.

同理可证 $\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$,因此 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

10.(1) 由于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&5&2\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}4&-2&0\\2&3&1\\-1&0&4\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B$$

而$|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$, **从而矩阵** A **与** B **可逆,所以向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **与** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ **等价**, β_1,β_2,β_3 **与** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ **等价,因此秩**$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$**秩**$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$, **所以** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **和** β_1,β_2,β_3 **也是** R^3 **中的基**.

(2) **由于**

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}$$

从而有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}\mathbf{B}$$

于是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **到基** β_1,β_2,β_3 **的过渡矩阵为**

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&5&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-2&0\\2&3&1\\-1&0&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&0\\2&3&1\\-1&0&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-2&0\\5&6&-2\\-13&-15&7\end{pmatrix}.$$

(3) **设** ξ **是** R^3 **中任一向量,它在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **和基** β_1,β_2,β_3

下的坐标分别为$(x_1, x_2, x_3)^T$ **和** $(y_1, y_2, y_3)^T$**,则其坐标变换公式为**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ -13 & -15 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

第四章 线性方程组

线性方程组的解法和解的理论是线性代数的一个重要内容. 要求理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件;理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念;理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念;掌握用初等行变换求线性方程组通解的方法.

第一节 齐次线性方程组

一、内容提要

1.齐次线性方程组的概念

设有 m 个方程的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则方程组(4.1)可写成矩阵乘积的形式

$$Ax = 0 . \tag{4.2}$$

注意:齐次线性方程组总是有解,零解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一个解.

若把 A 看作由列向量组构成的矩阵,设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则方程组 $Ax = 0$ 可表示为向量组合的形式

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = 0 . \tag{4.3}$$

上面给出了齐次线性方程组三种不同的形式,它们表示同一个线性方程组.

2.解的性质

性质 1　若 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解,则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是 $Ax = 0$ 的解.

性质 2　若 ξ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, k 为任意实数,则 $k\xi$ 也是 $Ax = 0$ 的解.

由齐次线性方程组解的两个性质知,由方程组 $Ax = 0$ 的全体解向量所组成的集合

$$S = \{ x \mid Ax = 0\}$$

构成向量空间,它称为解空间.

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间 S 的基称为该方程组的基础解系 即若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$ 为齐次线性方程组的一个基础解系,则满足下列两个条件:

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$ 是线性无关的解向量;

(2) 该方程组的任一解 ξ 可表为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$ 的线性组合,即

$$\xi = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_l \xi_l .$$

3.齐次线性方程组解的主要结论

设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵的秩 $\mathrm{r}(A) = r$,则

(1) 方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充要条件是 $r = n$;

(2) 方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $r < n$;

(3) 当 $\mathrm{r}(A) = r < n$ 时,方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含有 $n - r$ 个向量.设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系,则该方程组的任一解可表示为

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意实数.上式称为方程组 $Ax = 0$ 的通解.

二、例题分析

对于具体给出的齐次线性方程组,应将其系数矩阵化成行最简形,再根据行最简形写出同解方程组,并使自由未知量都在等号右边.为便于写出通解,应将这个同解方程组进行改写,即让自由未知量自己等于自己,使同解方程组中所含方程的个数等于未知量的个数,并且等号右边的自由未知量对齐,由此可直接写出基础解系或通解.

【例 1】 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

【解】 将系数矩阵 A 通过初等行变换化为行最简形

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-21r_2\\ r_1+r_2}]{\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $r(A)=2<4$,**所以方程组有无穷多解,其同解方程组为**

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = \quad -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}$$

将同解方程组改写为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \quad -\frac{5}{7}x_4 \\ x_4 = \quad x_4 \end{cases}$$

则基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为

$$x = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2, k_1, k_2 \text{ 为任意常数}.$$

【例 2】 设 4 元线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T$$

(1) **求线性方程组(I)的基础解系;**

(2) **问线性方程组(I)和(II)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解;若没有,则说明理由.**

【解】 (1) **线性方程组(I)的系数矩阵为**

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

因为 $r(A)=2$,**而变量个数** $n=4$,**所以它的基础解系含有两个线性无关的解向量,该方程组的同解方程组为**

$$\begin{cases}x_1=&-x_4\\x_2=&x_4\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=&-x_4\\x_2=&x_4\\x_3=x_3\\x_4=&x_4\end{cases}$$

从而方程组(I)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(2) **若方程组(I)和(II)有非零公共解,那么方程组(II)的通解亦应满足方程组(I),为此将方程组(II)的通解代入方程组(I),得**

$$\begin{cases}-k_2+\quad k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-\quad k_2=0\end{cases}$$

解得 $k_1=-k_2$,**令** $k=k_1=-k_2$,**代入方程组(II)的通解,则有**

$$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$$
$$=k[(0,1,1,0)^T-(-1,2,2,1)^T]$$

$= k(1, -1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$,

则 $k(1, -1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(I)的解,也是方程组(II)的解,因而是方程组(I)和(II)的公共解,当 $k \neq 0$ 时,$k(1, -1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ 就是方程组(I)和(II)的全部公共解.

【例 3】 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系,向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解,即 $A\beta \neq 0$.证明:向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

【证明】 设有数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_t$,使得

$$kB + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \cdots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0$$

即

$$\left(k + \sum_{i=1}^{t} k_i\right)\beta + \sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i = 0 \tag{4.4}$$

上式两边同时左乘 A,得

$$\left(k + \sum_{i=1}^{t} k_i\right)A\beta + \sum_{i=1}^{t} k_i A\alpha_i = 0$$

因为 $A\beta \neq 0$,而 $A\alpha_i = 0(i = 1, 2, \cdots, t)$,所以有

$$k + \sum_{i=1}^{t} k_i = 0 \tag{4.5}$$

从而(4.4)式变为

$$\sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是基础解系,因而是线性无关的,所以有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$,代入(4.5)式得 $k = 0$,因此向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

【例 4】 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0,且 A 的秩为 $n - 1$,试求齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

【解】 由于 $\mathrm{r}(A) = n - 1$,所以齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只含有 $n - r = n - (n - 1) = 1$ 个解向量.

又由于 A 的各行元素之和为 0,即

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

将上式改写为

$$a_{i1}\cdot 1+a_{i2}\cdot 1+\cdots+a_{in}\cdot 1=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

即
$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

又可写为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}$$

从而 $\xi=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=0$ 的一个非零解,故方程组 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意实数.

【例 5】 (选择题)设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩 $\mathrm{r}(A)=m<n$,E_m 为单位矩阵,下述结论正确的是 ( )

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关;

(B) A 的任意 m 阶子式不等于零;

(C) 若矩阵 B 满足 $BA=0$,则 $B=0$;

(D) A 通过初等行变换,必可化为$(E_m,0)$的形式.

答案: 选(C)

【分析】 由 $BA=0$,得 $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$,又由于

$$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)=m=A^{\mathrm{T}}\text{ 的列数},$$

因此 m 元齐次线性方程组 $A^{\mathrm{T}}x=0$ 只有零解,由 $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$ 知 B^{T} 的每一列均为 $A^{\mathrm{T}}x=0$ 的解,从而 B^{T} 的每一列均为零向量,即 $B^{\mathrm{T}}=0$,所以 $B=0$,因此(C)正确.

下面举反例说明(A),(B),(D)不正确,取

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

则 A 的秩 $r(A)=2<4$,则 A 中只有 1,3 两列线性无关,因而(A)不正确,同样 A 中只有一个 2 阶子式不为零,其余的 2 阶子式全为 0,因此(B)不正确,A 为行最简形,若不使用初等列变换不能化成$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$的形式,因此(D)不正确.

【例 6】 设有两个齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

和

$$(\mathrm{II})\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0\\b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0\\\qquad\cdots\\b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{sn}x_n=0\end{cases}$$

如果这两个方程组的系数矩阵 A 与 B 的秩都小于 $n/2$,试证明这两个方程组必有公共的非零解.

分析 方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)是否有公共的非零解,归结为将方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)合并后得到的齐次线性方程组是否有非零解.

【证明】 将方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)放在一起组成新的方程组

$$
(\mathrm{III})\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \\
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\
b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\
\cdots \\
b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = 0
\end{cases}
$$

将其系数矩阵记为 C,**则** $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$,**由于** $\mathrm{r}(A)<\dfrac{n}{2}$,$\mathrm{r}(B)<\dfrac{n}{2}$,**从而有**

$$
\mathrm{r}(C)\leq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n.
$$

因此方程组(Ⅲ)**有非零解,即方程组**(Ⅰ)**与**(Ⅱ)**有公共的非零解**.

【例 7】 假设齐次线性方程组

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
$$

的解都是方程组

$$
b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0
$$

的解.试证向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$**可由向量组**

$$
\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})
$$

$$
\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})
$$

$$
\cdots
$$

$$
\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})
$$

线性表示.

【证明】 因为方程组(I)的解都是方程组 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解,所以方程组(I)与下面的方程组:

$$(\mathrm{II})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\\b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0\end{cases}$$

同解.设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\cdots\\\alpha_m\\\beta\end{pmatrix}.$$

由于方程组(I)和(II)同解,所以它们的解空间的维数相同,即 $n-\mathrm{r}(A)=n-\mathrm{r}(B)$,从而有

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B).$$

设 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=r$,且 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 A 的行向量组的一个极大无关组,则由 $\mathrm{r}(B)=r$,所以向量组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta$ 线性相关,而 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关,这样 β 可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示,因而 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

用齐次线性方程组解的理论可以解决一些有关矩阵的秩的问题.

【例 8】 设 A 为 n 阶方阵,证明 $\mathrm{r}(A^n)=\mathrm{r}(A^{n+1})$

【证明】 先证方程组 $A^nx=0$ 与 $A^{n+1}x=0$ 同解.

设 x 为 n 维列向量,若 $A^nx=0$,则有 $A^{n+1}x=0$,即 $A^nx=0$ 的解必为 $A^{n+1}x=0$ 的解.

显然 $A^{n+1}x=0$ 和 $A^nx=0$ 都有零解,设 x 是 $A^{n+1}x=0$ 的非零解,若 $A^nx\neq0$,对于向量组

$$x, Ax, \cdots, A^n x$$

设有数 $k_0, k_1, \cdots, k_n$,使

$$k_0 x + k_1 Ax + \cdots + k_n A^n x = 0$$

用 A^n 左乘上式两端,则有

$$k_0 A^n x + k_1 A^{n+1} x + \cdots + k_n A^{2n} x = 0$$

即 $k_0 A^n x = 0$,由于 $A^n x \neq 0$,因此 $k_0 = 0$.

类似可证 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$,所以这 $n+1$ 个 n 维向量线性无关,这不可能,从而有 $A^n x = 0$.

综上可知方程组 $A^n x = 0$ 与 $A^{n+1} x = 0$ 同解,从而有 $\mathrm{r}(A^n) = \mathrm{r}(A^{n+1})$.

【例 9】 设

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, 2, \cdots, r; r < n)$$

是 n 维实向量,且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,已知 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rn} x_n = 0, \end{cases}$$

的非零解向量,试判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性 .

分析 由于 β 是非零向量,从而有 $\beta^{\mathrm{T}} \beta = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \neq 0$,又由于 β 是已给方程组的解向量,所以 β 满足方程组中的每一个方程,因此 $\alpha_i^{\mathrm{T}} \beta = 0$,即 $\beta^{\mathrm{T}} \alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$.判断 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性,应从 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r + k\beta = 0$ 出发,讨论 $k_1, k_2, \cdots, k_r, k$ 是不全为零还是只能全为零 .

【解】 设

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r + k\beta = 0 \tag{4.6}$$

以 β^{T} 左乘上式两端得

$$k_1 \beta^T \alpha_1 + k_2 \beta^T \alpha_2 + \cdots + k_r \beta^T \alpha_r + k \beta^T \beta = 0 \qquad (4.7)$$

由于 β 是已给方程组的非零解,故 $\beta^T \beta \neq 0$,且 $\alpha_i^T \beta = 0$ 即 $\beta^T \alpha_i = 0$. 因此(4.7)式变成 $k\beta^T \beta = 0$,故 $k = 0$.代入(4.6)式得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r = 0 .$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0 .$$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 线性无关 .

【例 10】 已知线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1\,2n} x_{2n} = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2\,2n} x_{2n} = 0, \\ \cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{n\,2n} x_{2n} = 0, \end{cases}$$

的一个基础解系为

$$(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1\,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2\,2n})^T, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n\,2n})^T .$$

试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \cdots + b_{1\,2n} y_{2n} = 0, \\ b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + \cdots + b_{2\,2n} y_{2n} = 0, \\ \cdots \\ b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \cdots + b_{n\,2n} y_{2n} = 0, \end{cases}$$

的通解,并说明理由 .

分析 易见 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1\,2n})^T, (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2\,2n})^T, \cdots, (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n\,2n})^T$ 都是方程组(Ⅱ)的解,要说明它们是方程组(Ⅱ)的基础解系,须证明它们本身线性无关并且方程组(Ⅱ)的解空间的维数是 n .

【解】 线性方程组(Ⅱ)的通解为

$$y = k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdots \\ a_{1,2n} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{2,2n} \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \cdots \\ a_{n,2n} \end{pmatrix},$$

$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为任意常数.

理由如下:

记 $$A = (a_{ij})_{n\times 2n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij})_{n\times 2n} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 分别为矩阵 A, B 的行向量.

由于 $BA^T = (AB^T)^T = 0^T = 0$, 所以 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T$ 是方程组(Ⅱ)的解.

由于 $\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_n^T$ 是方程组(Ⅰ)的基础解系, 所以 $r(B) = n$, 且 $r(A) = 2n - n = n$, 即 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T$ 线性无关.

由于 $r(B) = n$, 得方程组(Ⅱ)的基础解系中含有 $2n - n = n$ 个向量, 而 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T$ 是方程组(Ⅱ)的 n 个线性无关的解, 从而为方程组(Ⅱ)的基础解系. 因而得到方程组(Ⅱ)的上述通解.

三、练习题

1. 设 4 元齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

且已知另一 4 元线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系.

(2) 当 a 为何值时, 方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)有非零公共解?

在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

2.求一个齐次线性方程组,使它的基础解系为

$$\xi_1=(0,1,2,3)^T,\ \xi_2=(3,2,1,0)^T$$

3.设 A 为 n 阶矩阵,α 为 n 维列向量,记矩阵 $B=\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}$,且 $r(B)=r(A)$,证明:齐次线性方程组 $Bx=0$ 必有非零解.

4.设 A 为 n 阶可逆矩阵,且 A 的每行元素之和均等于常数 a,试证:

(1) $a\neq 0$; (2) A^{-1}的每行元素之和都等于$\frac{1}{a}$.

5.设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ \qquad\cdots\\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq 0, b\neq 0, n\geq 2$.试讨论 a, b 为何值时,方程组仅有零解,有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解,并用基础解系表示全部解.

6.已知 A 是 $m\times n$ 矩阵,其 m 个行向量是齐次线性方程组 $Cx=0$ 的基础解系,B 是 m 阶可逆矩阵,证明 BA 的行向量也是 $Cx=0$ 的基础解系.

四、练习题解答

1.(1) 方程组(I)的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

方程组可写成

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1 = (5, -3, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$.

(2) 将

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = (2k_1 - k_2, -k_1 + 2k_2, k_1(a+2) + 4k_2, k_1 + k_2(a+8))$,代入方程组(I)的两个方程得

$$\begin{cases} k_1(a+1) = 0 \\ k_1(a+1) - k_2(a+1) = 0 \end{cases}$$

要使方程组(I)与(II)有非零解,只要使关于 k_1, k_2 的方程组有非零解,充要条件为

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)^2 = 0$$

所以当 $a = -1$ 时,方程组(I)与(II)有非零公共解,将 $a = -1$ 代入 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 得非零公共解为

$k_1(2, -1, 1, 1)^T + k_2(-1, 2, 4, 7)^T$, k_1, k_2 不同时为零 .

2 . 设所求的齐次线性方程组为

$$Ax = 0$$

由于 ξ_1 是 4 维的,故方程组有 4 个未知量,即矩阵 A 的列数为 4,由于 $r(A) = 4 - 2 = 2$,因而 A 的行数至少为 2,只须构造满足题设且行数最少的矩阵,即 A 为 2×4 矩阵 .

由于 $A(\xi_1, \xi_2) = 0$, 令 $B = (\xi_1, \xi_2)$, 则 $AB = 0$, 从而 $B^T A^T = 0$,即 A^T 的两个列向量是方程组 $B^T x = 0$ 的解向量,且线性无关 .由

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\eta_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \eta_2=(-2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故 A 可取为

$$A=\begin{pmatrix}\eta_1^{\mathrm{T}}\\ \eta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ 2x_1+3x_2-x_4=0\end{cases}$$

3．由于 $Bx=0$ 是 $n+1$ 元的齐次线性方程组，其系数矩阵 B 的秩

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A)\leq n<n+1$$

故必有非零解．

4．(1) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由于 A 的每行元素之和均等于常数 a，则有

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\ \cdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\ \cdots\\a\end{pmatrix}$$

若 $a=0$，则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，从而 $\mathrm{r}(A)<n$，这与 A 是可逆矩阵矛盾，因此 $a\neq0$．

(2) 由于 $a\neq0$，且

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\ \cdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\ \cdots\\1\end{pmatrix}$$

在上式两边左乘 A^{-1} 后，两端再乘以数 a^{-1}，则有

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$$

即 A^{-1}的每行元素之和都是$\frac{1}{a}$.

5 . 方程组系数矩阵 A 的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

因此,当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时,$|A|\neq0$,方程组只有零解 .当 $a=b$或 $a=(1-n)b$ 时,方程组有无穷多组解 .

当 $a=b$ 时,系数矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}a&a&a&\cdots&a\\a&a&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\a&a&a&\cdots&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

方程组解为 $x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n$.

基础解系为

$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$为任意常数 .

当 $a=(1-n)b$ 时,系数矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix}(1-n)b&b&b&\cdots&b\\b&(1-n)b&b&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\b&b&b&\cdots&(1-n)b\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix},$$

将第 $1,2,3,\cdots,n-1$ **行全加到第** n **行上去得**

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

将第 1 **行乘**(-1)**依次加到第** $2,3,\cdots,n-1$ **行上去得**

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & -n & 0 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

将第 $2,3,\cdots,n-1$ **行全加到第** 1 **行上去得**

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程组解为 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = x_n$.

基础解系为$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,通解为 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数 .

6 .因为 A 的行向量是 $Cx=0$ 的解,即 $CA^{\mathrm{T}}=0$,那么

$$C(BA)^{\mathrm{T}}=CA^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0B^{\mathrm{T}}=0,$$

所以 BA 的行向量也是 $Cx=0$ 的解 .

由于 A 的行向量是 $Cx=0$ 的基础解系,因此必线性无关,从而

$$m=\mathrm{r}(A)=n-\mathrm{r}(C)$$

又由于 B 可逆,所以 $\mathrm{r}(BA)=\mathrm{r}(A)=n-\mathrm{r}(C)=m$,即 BA 的行向量线性无关,其个数为 $n-\mathrm{r}(C)$,故为 $Cx=0$ 的基础解系 .

第二节　非齐次线性方程组

一、内容提要

1 .非齐次线性方程组的概念

设有 m 个方程的 n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4.8}$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组(4 .8)也可写作矩阵乘积的形式

$$Ax=b, \tag{4.9}$$

把 A 看作由列向量组构成的矩阵,设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

则方程组(4.8)可写成向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b, \tag{4.10}$$

A 称为方程组的系数矩阵, $B=[A\mid b]$ 称为方程组的增广矩阵.

在方程组(4.9)中令 $b=0$ 得到的齐次线性方程组 $Ax=0$ 称为与方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组,或者称为方程组 $Ax=b$ 的导出组.

2.非齐次线性方程组解的性质

(1) 若 η_1,η_2 是方程组 $Ax=b$ 的解,则 $\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的解;

(2) 若 η 是方程组 $Ax=b$ 的解, ξ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$的解,则 $\eta+\xi$ 仍是方程组 $Ax=b$ 的解.

3.非齐次方程组的解

【定理】 方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 解的情形归纳如下:

(1) 若 $\mathrm{r}(A)\neq\mathrm{r}(B)$,则方程组 $Ax=b$ 无解;

(2) 若 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=r$,则方程组 $Ax=b$ 无解;

① 当 $r=n$ 时,方程组 $Ax=b$ 有惟一解;

② 当 $r<n$ 时,方程组 $Ax=b$ 有无穷多解,其通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*.$$

其中 η^* 是 $Ax=b$ 的一个特解, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意实数.

二、例题分析

1.判别下列命题的正误,试说明理由.

(1) 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 有无穷多解,则非齐次线性方

程 $Ax = b$ 有解;

(2) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集构成一个解空间;

(3) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $r(A) = m$, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$有解;

(4) 若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解,则 $Ax = 0$ 有无穷多解 .

【解】 (1) 不正确 .非齐次方程组 $Ax = b$ 可能无解,例如取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,则方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解,但非齐次方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

无解,这是因为其增广矩阵 $B = [A \mid b]$ 的秩 $r(B) = 2$,而 $r(A) = 1$, $r(B) \neq r(A)$.

(2) 不正确 .设 η 是 $Ax = b$ 的一个解,则 $A\eta = b$,但 $A(2\eta) = 2A\eta = 2b \neq b$, 2η 不是 $Ax = b$ 的解,因而非齐次方程组 $Ax = b$ 在有解的集况下,其解集不构成一个向量空间 .

(3) 正确 .由于 $Ax = b$ 的增广矩阵 B 为 $m\times(n+1)$矩阵,从而有 $r(B)\leq m$,又由于

$$r(B)\geq r(A) = m$$

所以 $r(B) = m = r(A)$,因而非齐次方程组 $Ax = b$ 有解 .

(4) 正确 .设 η_1 和 η_2 是 $Ax = b$ 的两个不同解,则 $\eta_1 - \eta_2$ 是它的导出组 $Ax = 0$ 的解,又由于 $\eta_1 - \eta_2 \neq 0$,所以对任意的实数 k, $k(\eta_1 - \eta_2)$都是 $Ax = 0$ 的解,即 $Ax = 0$ 有无穷多解 .

对于具体给出的非齐次方程组 $Ax = b$,在求解时,应使用初等行变换,将增广矩阵化成行最简形,根据同解方程组写出通解,但如果所给方程组含有参数,应将增广矩阵化为尽可能简单的形式(一般为阶梯形),然后就参数的各种取值情况,由 $r(A)$, $r(B)$去讨论方程组的各种解的情形 .如果方程的个数与未知量的个数相

等,可先用 Cramer 法则确定方程组有惟一解的情形,其余情形(无解和无穷多解)再按前面讲的方法讨论.

【例 2】 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

讨论参数 a、b 取何值时,方程组有解、无解;当有解时,求出通解.

【解】 对增广矩阵 B 作初等行变换

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$$

(1) 当 $b \neq -2$ 时,因为 $r(A) \neq r(B)$,所以方程组无解;

(2) 当 $b = -2$ 时,因为 $r(A) = r(B)$,所以方程组有解,下面再分情况讨论.

① 当 $a = -8$ 时,它的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

将它改写为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 4x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

通解为

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数}.$$

② **当** $a \neq -8$ **时,它的同解方程组为**

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

改写为

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

通解为

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数}.$$

【例 3】 当 λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = \lambda \\ 3(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 3 \end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解 .当方程组有无穷多解时求出它的解 .

分析　若用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形,则比较困难 .由于方程的个数和未知量的个数相等 .可先计算方程组的系数行列式,然后再讨论 .

【解】　方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

(1) 当 $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ 时,由 Cramer 法则知方程组有惟一解;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时,方程组的增广矩阵为

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

因为 $\mathrm{r}(A) = 2, \mathrm{r}(B) = 3$,所以方程组无解;

(3) 当 $\lambda = 1$ 时,方程组的增广矩阵为

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

因为 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2 < n = 3$,所以方程组有无穷多解,其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = -3 + 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

故此时方程组的无穷多解(令 $x_3 = k$)为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ k \text{ 为任意常数}$$

【例 4】 设 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$, $\alpha_2=(1,1,3,5)^T$, $\alpha_3=(1,-1,a+2,1)^T$, $\alpha_4=(1,2,4,a+8)^T$, $\beta=(1,1,b+3,5)^T$.

(1) a,b 为何值时, β 不能表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合;

(2) a,b 为何值时, β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示,且表示惟一.写出表示式.

分析 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示,实际上就是方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$ 是否有解.

【解】 设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta,$$

方程组的增广矩阵为

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \mid \beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right)$$

(1) 当 $a=-1, b\neq 0$ 时,因为 $r(A)=2, r(B)=3$,所以方程组无解,即 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

(2) 当 $a\neq -1$, b 为任何值时,因为 $r(A)=r(B)=4$,所以方程组有惟一解,即 β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的惟一线性表示式.此时同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+2x_4=1\\(a+1)x_3=b\\(a+1)x_4=0\end{cases}$$

解得

$$x_1=-\frac{2b}{a+1},\ x_2=1+\frac{b}{a+1},\ x_3=\frac{b}{a+1},\ x_4=0$$

所以 β的惟一线性表示式为

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\cdot\alpha_4$$

【例 5】 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量,且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$

求该方程组的通解 .

【解】 记该非齐次方程组为 $Ax=b$,**它的导出组为** $Ax=0$. **由于** $r(A)=3$,**方程组** $Ax=0$ **的解空间的维数为** $4-3=1$,**即** $Ax=0$ **的任一非零解都是它的一个基础解系 . 记向量** $\xi=2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)$,**则**

$$\begin{aligned}A\xi&=A(2\eta_1-\eta_2-\eta_3)\\&=2A\eta_1-A\eta_2-A\eta_3=2b-b-b=0\end{aligned}$$

计算得 $\xi=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}\neq0$,**原方程组的通解为**

$$x=k\xi+\eta_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ k\text{ 为任意常数 .}$$

【例 6】 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **均为 4 维列向量,其中** $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **线性无关,** $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$,**如果** $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,**求线性方程组** $Ax=\beta$ **的通解 .**

分析 利用非齐次方程组 $Ax=\beta$ **的向量形式** $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$**求解 .**

【解】 由于 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关及 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$，因此 $r(A) = 3$，原方程组的导出组 $Ax = 0$ 的基础解系只含一个向量．由 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 得

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0,$$

所以 $(1, -2, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个解，因而 $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, -2, 1, 0)^T$，k 为任意常数，又由于

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

所以 $(1, 1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，于是 $Ax = \beta$ 的通解为

$$x = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ k \text{ 为任意常数}.$$

【例 7】 设

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$A = \alpha\beta^T, \ B = \beta^T\alpha,$$

求解方程 $$2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma.$$

分析 注意到 A 是 3 阶方阵，B 是数，经整理后所解方程实际上是一个非齐次线性方程组．

【解】 由于

$$A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left[1,\frac{1}{2},0\right]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2,$$

于是有

$$A^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2A$$

$$A^4=(2A)^2=4A^2=8A$$

$$B^4=16$$

代入原方程得

$$16Ax=8Ax+16x+\boldsymbol{\gamma}$$

整理得

$$8(A-2E)x=\boldsymbol{\gamma}$$

由于

$$8(A-2E)=\begin{bmatrix}-8&4&0\\16&-8&0\\8&4&-16\end{bmatrix}$$

增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-8&4&0&0\\16&-8&0&0\\8&4&-16&8\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=\quad x_3+\dfrac{1}{2}\\x_2=2x_3+1\\x_3=\quad x_3\end{cases}$$

所以原方程组的通解为

$$x=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\ k\text{ 为任意常数}$$

【例 8】 (选择题)设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

则三条直线

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1,2,3$ 相交于一点的充要条件为

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(C) 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ 秩(α_1, α_2);

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关 .

答案: 选(D)

【分析】 三条直线所组成的方程组可写成向量形式:

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 = - \alpha_3,$$

三条直线交于一点 .

非齐次方程组 $x\alpha_1 + y\alpha_2 = - \alpha_3$ 有惟一解 .

秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2) = 2$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关 .

因此应选(D) .

选项(A)是方程组有解的必要条件,但不是充分条件,若选项(B)成立,则方程组的增广矩阵的秩为 3,但系数矩阵的秩小于 3,因此方程组无解,选项(C)是方程组有解的充要条件,包括有惟一解和有无穷多解的情形 .

【例 9】 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系 .证明:

(1) $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关;

(2) $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \cdots, \eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

【证明】 (1) 设有数 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-r}$,使

$$k_0\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0. \qquad (4.11)$$

用矩阵 A 左乘上式两边,得

$$k_0 A\eta^* + k_1 A\xi_1 + \cdots + k_{n-r} A\xi_{n-r} = 0$$

由 $A\xi_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n-r, A\eta^* = b$,得 $k_0 b = 0$,又由 $b \neq 0$,有 $k_0 = 0$,代入(4.11)得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$

因 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是 $Ax = 0$的基础解系,从而线性无关,于是有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$$

所以 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关.

(2) 设有关系式

$$\lambda_0\eta^* + \lambda_1(\eta^* + \xi_1) + \cdots + \lambda_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$$

即

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r})\eta^* + \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$

由(1)知向量组 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关,因此 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$,并且 $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r} = 0$,于是 $\lambda_0 = 0$,故所给向量组线性无关.

由于 $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \cdots, \eta^*+\xi_{n-r}$是 $Ax = b$ 的解并且线性无关,因而对于非齐次线性方程组,若其系数矩阵的秩为 r,则它一定有 $n-r+1$ 个线性无关的解(在方程组有解的前提下).

【例 10】 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 r, $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r+1}$是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解(由例 9 知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解).试证它的任一解可表示为

$$x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1} (其中\ k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 1).$$

【证明】 对于 $x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$,其中 $k_1 + \cdots +$

$k_{n-r+1}=1$,由于

$$\begin{aligned} Ax &= A(k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}) \\ &= k_1 A\eta_1+\cdots+k_{n-r+1}A\eta_{n-r+1} \\ &= (k_1+\cdots+k_{n-r+1})b = b \end{aligned}$$

即向量 x 是 $Ax=b$ 的一个解 .

记向量 $\xi_i=\eta_i-\eta_{n-r+1}$, $i=1,2,\cdots,n-r$,则 ξ_i 是导出组 $Ax=0$的解,下证 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关 .

若有数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r}$,使得

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$$

则有

$$\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r}-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\eta_{n-r+1}=0,$$

由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$线性无关,从而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$,即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关 .

由于 $\mathrm{r}(A)=r$,因此 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是 $Ax=0$ 的基础解系,所以 $Ax=b$ 的通解为

$$\begin{aligned} x &= k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta_{n-r+1} \\ &= k_1(\eta_1-\eta_{n-r+1})+\cdots+k_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1})+\eta_{n-r+1} \\ &= k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+(1-k_1-\cdots-k_{n-r})\eta_{n-r+1} \end{aligned}$$

令 $k_{n-r+1}=1-k_1-\cdots-k_{n-r}$,则 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

例 10 说明,若 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=r$,则在有解的前提下,$Ax=b$ 恰好有 $n-r+1$ 个线性无关的解 .例 10 实际上给出了非齐次线性方程组的通解的另一种表达式 .

三、练习题

1 . 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

试问:当 a, b, c 满足什么条件时:

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,且表示惟一?

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,但表示不惟一?并求出一般表示式.

2.设4元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为2,并且 η_1, η_2, η_3 是它的三个解,且

$$\eta_1 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

求该方程组的解.

3.证明线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$.

4.如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & k \end{pmatrix}$$

的秩(k为任意常数),则这个方程组有解.

5.**证明:如果方程组**

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m \end{cases}$$

有解,则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$$

的任意一组解($x_1,x_2,\cdots,x_m$)必满足下述方程组:

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0$$

6.**已知下列非齐次线性方程组:**

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$$

(1) **求解方程组(I),用其导出组的基础解系表示通解;**

(2) **当方程组(II)中的参数m,n,t为何值时,方程组(I)与(II)同解.**

四、练习题解答

1 . 方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$$

的系数行列式为

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -a-4$$

(1) 当 $a \neq -4$ 时,方程组有惟一解,β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,且表示惟一 .

(2) 当 $a = -4$ 时,方程组的增广矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & c+1-3b \end{array}\right)$$

因此,当 $a = -4$ 且 $c + 1 - 3b \neq 0$ 时,系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩,方程组无解,β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 .

(3) 当 $a = -4$ 且 $c + 1 - 3b = 0$ 时,系数矩阵的秩和增广矩阵的秩都是 2,方程组有无穷解,β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,这时增广矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \beta) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

即
$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 - b - 1 \\ x_3 = 1 + 2b \end{cases},$$

令 $x_1 = k$,则

$$\beta = k\alpha_1 - (2k + b + 1)\alpha_2 + (1 + 2b)\alpha_3,\ k \text{为任意常数}.$$

2 . 设方程组为 $Ax = b$,由于 $r(A) = 2$,因此它的导出组 $Ax = 0$ 的基础解系含有两个向量,又由于

$$\eta_1 - \eta_2 = (\eta_1 + \eta_3) - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 - \eta_3 = (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$\eta_1 - \eta_2$, $\eta_2 - \eta_3$ 是 $Ax = 0$ 的解,且线性无关,因而为 $Ax = 0$ 的基础解系 .由于

$$\eta_2 = \frac{1}{2}[(\eta_2 + \eta_3) + (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 + \eta_3)] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

原方程组的通解为

$$x = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

3 .

$$B=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum\limits_{i=1}^{5}a_i\end{array}\right]$$

方程组有解 $\quad r(B)=r(A)=4 \quad \sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$

4 . **原方程组的增广矩阵为**

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&b_n\end{array}\right]$$

由于 $r(A)\leq r(B)\leq r(C)$, **又由题设** $r(A)=r(C)$, **所以**

$$r(A)=r(B),$$

故方程组有解 .

5 . **记**

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_m\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{bmatrix},$$

则有 $Ax=b$,且 $A^{T}x=0$.

由$(Ax)^{T}=b^{T}$,得 $x^{T}A^{T}=b^{T}$,从而有

$$b^{T}x=(x^{T}A^{T})x=x^{T}(A^{T}x)=x^{T}\cdot 0=0,$$

即如果 $Ax=b$ 有解,则 $Ax=0$ 的任一解必满足

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0.$$

6.(1) 设方程组(Ⅰ)的系数矩阵为 A_1,增广矩阵为 B_1,则

$$B_1=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right)$$

由于 $r(A_1)=r(B_1)=3<4$,所以方程组有无穷多解,其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2+x_4\\x_2=-4+x_4\\x_3=-5+2x_4\\x_4=x_4\end{cases}$$

通解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ k\text{ 为任意常数}$$

(2) 将通解 x 代入方程组(Ⅱ)的第一个方程,得

$$(-2+k)+m(-4+k)-(-5+2k)-k=-5$$

解得 $m=2$.

又将通解 x 代入方程组(Ⅱ)的第二个方程,得

$$n(-4+k)-(-5+2k)-2k=-11$$

解得 $n=4$.

最后将通解 x 代入方程组(Ⅱ)的第三个方程,得

$$(-5+2k)-2k=-t+1$$

解得 $t=6$.

因此,当方程组(Ⅱ)的参数取 $m=2$, $n=4$, $t=6$ 时,方程组(Ⅰ)的全部解都是方程组(Ⅱ)的解,这时,方程组(Ⅱ)化为

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=-5 \\ 4x_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-5 \end{cases}$$

设方程组(Ⅱ)的系数矩阵为 A_2,增广矩阵为 B_2,则

$$B_2=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

由此得到方程组(Ⅱ)的通解

$$x=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数}$$

显然,方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)的解完全相同,即方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)同解.

复习题四

1. 填空题

(1) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解,则 λ 应满足的条件是________ .

(2) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_1 + x_4 = a_4 \end{cases}$$

有解,则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足的条件是________ .

(3) 已知方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

无解,则 $a =$ ________ .

(4) 设方程

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

有无穷多个解,则 $a =$ ________ .

(5) 若方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$

有惟一解,则 a, b 所满足的条件为________ .

(6) 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5&7\\2&a&2&6\\3&4&3&9\\4&6&8&16\end{pmatrix}$$

欲使齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系有两个向量,则 $a=$ ________.

(7) 已知3阶矩阵 $B\neq0$, B 的每一列向量都是齐次方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+\lambda x_3=0\\4x_1+7x_2-3x_3=0\\3x_1+4x_2-x_3=0\end{cases},$$

的解,则 $\lambda=$ ________.

(8) 已知方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3=1\\qx_1+3x_2+3x_3=p\\(q+1)x_1+3x_2+7x_3=4\end{cases}$$

有解,且其导出解的基础解系只有一个向量,则 p, q 所满足的条件是________.

2.选择题

(1) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分条件是( ).

(A) A 的列向量线性无关;

(B) A 的列向量线性相关;

(C) A 的行向量线性无关;

(D) A 的行向量线性相关.

(2) 设 A 为 n 阶方阵,且 $r(A)=n-1$, α_1, α_2 是方程组 $Ax=0$ 的两个不同解,则 $Ax=0$ 的通解为( ).

(A) $k\alpha_1$; (B) $k\alpha_2$; (C) $k(\alpha_1-\alpha_2)$; (D) $k(\alpha_1+\alpha_2)$.

(3) **设** A **是** $m\times n$ **矩阵**, $Ax=0$ **是非齐次线性方程组** $Ax=b$ **所对应的齐次线性方程组,则下列结论正确的是**( ).

(A) **若** $Ax=0$ **仅有零解,则** $Ax=b$ **有惟一解**;

(B) **若** $Ax=0$ **有非零解,则** $Ax=b$ **有无穷多解**;

(C) **若** $Ax=b$ **有无穷多个解,则** $Ax=0$ **仅有零解**;

(D) **若** $Ax=b$ **有无穷多个解,则** $Ax=0$ **有非零解**.

(4) **已知** β_1,β_2 **是非齐次线性方程组** $Ax=b$ **的两个不同的解**, α_1,α_2 **是对应齐次线性方程组** $Ax=0$ **的基础解系**, k_1,k_2 **为任意常数,则方程组** $Ax=b$ **的通解必是**( ).

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$;

(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$;

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$;

(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

(5) **要使** $\xi_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ **都是线性方程组** $Ax=0$ **的解,只要系数矩阵** A **为**( ).

(A) $(-2,1,1)$; (B) $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(6) **非齐次线性方程组** $Ax=b$ **中未知量个数为** n**,方程个数为** m**,系数矩阵** A **的秩为** r**,则下列结论正确的是**( ).

(A) $r=n$ **时,方程组** $Ax=b$ **有惟一解**;

(B) $m=n$ **时,方程组** $Ax=b$ **有惟一解**;

(C) $r < n$ 时,方程组 $Ax = b$ 有无穷多解;

(D) $r = m$ 时,方程组 $Ax = b$ 有解 .

(7) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系,也是方程组 $Bx = 0$ 的基础解系,且 A, B 都是 n 阶方阵,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 必是下列哪个方程组的基础解系( ) .

(A) $(A + B)x = 0$; (B) $ABx = 0$;

(C) $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$; (D) $(A - B) = 0$.

(8) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵,则线性方程组 $(AB)x = 0$( ) .

(A) 当 $n > m$ 时仅有零解; (B) 当 $n > m$ 时必有非零解;

(C) 当 $m > n$ 时仅有零解; (D) 当 $m > n$ 时必有非零解 .

3 . λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

有惟一解,无解,无穷多解?并在有无穷多解时写出方程组的通解 .

4 . λ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有惟一解,无解,有无穷多解?在有解情况下,求出其全部解 .

5 . 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases},$$

求 a, b 为何值时,方程组有解?并在有解时,求出通解.

6.已知向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a-3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix},$$

求 a, b 为何值时,

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示,且表示式惟一;

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示,但表示式不惟一;

(3) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

7.设 A 为 n 阶方阵,若对任意的 n 维向量 x 都有 $Ax = 0$,证明 $A = 0$.

8.证明:线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1} \end{cases}$$

有解的必要条件是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}=0$$

这个条件并不是充分的,试举一反例.

9.已知 $A=(a_{ij})_{s\times n}$和 $B=(b_{ij})_{t\times n}$以及齐次线性方程组

$$Ax=0 \qquad (\text{Ⅰ})$$

和

$$Bx=0 \qquad (\text{Ⅱ})$$

证明:(1) 方程组(Ⅰ)的解都是方程组(Ⅱ)的解的充要条件是 B 的行向量组

$$\beta_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}),\ i=1,2,\cdots,t$$

可以由 A 的行向量组

$$\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in}),\ i=1,2,\cdots,s$$

线性表示.

(2) 方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解的充要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.

10.设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$$

(1) 证明:若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等,则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1=a_3=k,\ a_2=a_4=-k\ (k\neq0)$,且已知 β_1,β_2 是该线性方程组的两个解,其中

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

写出此线性方程组的通解.

11. **设** $r(r\geq 2)$**个向量** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ **线性相关,试证:一定存在** r **个不全为** 0 **的数** $k_1, k_2, \cdots, k_r$,**使得对任何向量** β,**向量组**

$$\alpha_1 + k_1\beta, \alpha_2 + k_2\beta, \cdots, \alpha_r + k_r\beta$$

恒线性相关.

12. **试证:平面上三条互异直线** $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ **交于一点的充要条件是** $a+b+c=0$.

复习题四答案或提示

1. (1) $\lambda\neq 1$;　　(2) $a_1+a_2+a_3+a_4=0$;

(3) -1;

分析

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{array}\right)$$

当 $a=-1$ **时**, $\mathrm{r}(A)=2$, $\mathrm{r}(B)=3$,**方程组无解.**

(4) -2;

分析

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 2(a+2) \end{pmatrix}$$

当 $a=-2$ 时,$r(A)=r(B)=2$,方程组有无穷多个解 .

(5) $a\neq 2$, b 任意;

分析 方程组中方程的个数与未知量的个数相等,因而方程组有惟一解的充要条件为系数行列式不等于零,由

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix} = -a+2 \neq 0,$$

得 $a\neq 2$.

(6) $\frac{8}{3}$;

分析 由于 4 元齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系有两个向量,从而 $r(A)=2$,由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & a & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & a-\frac{8}{3} & a-\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $a=\frac{8}{3}$ 时,$r(A)=2$.

(7) 1;

分析 由于 $B\neq 0$,因而所给齐次方程组有非零解,其系数矩阵 A 的秩 $r(A)<3$.由

$$A=\begin{bmatrix}2&1&\lambda\\4&7&-3\\3&4&-1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&-1-\lambda\\0&5&-3-2\lambda\\0&0&-1+\lambda\end{bmatrix}$$

得 $\lambda=1$.

(8) $p=3,q=6$.

分析 方程组的增广矩阵为

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&1\\q&3&3&p\\q+1&3&7&4\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4-p\\0&-1&-17+4q&2p+4q-pq-11\\0&0&-48+8q&7q+8q-33-2pq\end{array}\right]$$

由题设知 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A)=2$,则有

$$-48+8q=0,7p+8q-33-2pq=0,$$

解得 $p=3,q=6$.

2 . (1) A; (2) C; (3) D; (4) B;

分析 因为 $\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$ 不是方程组 $Ax=b$ 的解,所以(A),(C)两个选项可以排除 .而在选项(B),(D)中,由于 $A\left[\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\right]=\frac{1}{2}(A\beta_1+A\beta_2)=\frac{1}{2}(b+b)=b$,所以 $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$ 是 $Ax=b$ 的一个特解,故只需看 $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$ 与 $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$ 是否为 $Ax=0$ 的通解 .选项(D)中,虽然 $\beta_1-\beta_2$ 也是齐次方程组 $Ax=0$ 的解 .但是 $\beta_1-\beta_2$ 不一定与 α_1 线性无关,易知 α_1 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的线性无关的解,所以应选(B) .

(5) A;

分析 由于 ξ_1 和 ξ_2 线性无关,因而 3 元齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系至少有两个向量,所以 $\mathrm{r}(A)\leq 3-2=1$.选项(A)中的

矩阵的秩为 1,且 ξ_1 和 ξ_2 符合选项(A)的矩阵,应选(A).

选项(B),(C),(D)中的矩阵的秩都是 2,故选项(A),(B),(D)不正确.

(6) D;

分析　方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$,只有在有解的前提下,才分惟一解与无穷多解.当 $r = m$ 时,则 $\mathrm{r}(A) = m$,而 $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(B) \leq m$,所以有 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) = m$,因此,$Ax = b$有解,选项(D)正确

由选项(A),(B)或(C)中的条件不能得出 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$,例如,方程组$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,虽然 $r = n = 2$,但 $\mathrm{r}(B) = 3$,方程组无解,选项(A)不正确.再如,方程组$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,$r = 1 < n = 2$,且 $m = n = 2$,但 $\mathrm{r}(B) = 2$,方程组无解,因此选项(B)和(C)不正确.

(7) C;

分析　易举例说明矩阵 $A + B$, $A - B$, AB 的秩不一定等于 A 的秩,故选项(A),(B),(D)均不正确.

由于 $\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \geq \mathrm{r}(A) = n - r$,又由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 也是$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$的线性无关的解,从而方程组$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的基础解系中至少有 r 个向量,因此

$$n - \mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \geq r$$

即 $\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \leq n - r$,从而 $\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] = n - r$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是方程组

$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x=0$ 的基础解系,选项(C)正确.

(8) D.

分析　线性方程组$(AB)x=0$的系数矩阵AB是m阶方阵.

$$r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}.$$

当$m>n$时,$r(A)\le n$,$r(B)\le n$.因此$r(AB)\le n<m$,于是$(AB)x=0$必有非零解,选项(D)正确,(C)不正确.

当$n>m$时,$r(A)\le m$,$r(B)\le m$.因此$r(AB)\le m$,无法判断$(AB)x=0$仅有零解还是必有非零解,故选项(A),(B)均不正确.

3.(1)当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -\frac{4}{5}$时,方程组有惟一解;

(2)当$\lambda=-\frac{4}{5}$时,方程组无解;

(3)当$\lambda=1$时,方程组有无穷多解,其通解为

$$x=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ k\text{ 为任意常数}.$$

4.(1)当$\lambda\neq -1$且$\lambda\neq 4$时,方程组有惟一解,其解为

$$x_1=\frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda+1},\ x_2=\frac{\lambda^2+2\lambda+4}{\lambda+1},\ x_3=\frac{-2\lambda}{\lambda+1}.$$

(2)当$\lambda=-1$时,方程组无解;

(3)当$\lambda=4$时,方程组有无穷多解,其通解为

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ k\text{ 为任意常数}.$$

5 . 当 $a=1, b=3$ 时,方程组有解,通解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意实数 .

6 . (1) 当 $a\neq 1$, b 任意时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示,且表示式惟一;

(2) 当 $a=1, b=-1$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示,但表示式不惟一;

(3) 当 $a=1, b\neq -1$ 时, β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 .

7 . 因任意的 n 维向量都是 $Ax=0$ 的解,所以解空间的维数为 n,从而 $\mathrm{r}(A)=0$,即 $A=0$.

8 . 因为方程组有解,所以 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.由于系数矩阵 A 只有 n 列,所以

$$\mathrm{r}(A)\leq n$$

从而 $\mathrm{r}(B)\leq n$,又因为 B 为 $n+1$ 阶方阵,所以

$$|B|=D=0 .$$

这个条件不是充分的,因为由 $|B|=0$,不能断定方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩是否相等 .例如方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+2x_2=2\\3x_1+3x_2=5\end{cases}$$

显然有

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&5\end{vmatrix}=0$$

但由于 $r(A)=1, r(B)=2$,所以方程组无解.

9.(1)必要性:若方程组(Ⅰ)是(Ⅱ)的解,则方程组(I)与

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (\text{Ⅲ})$$

同解,则 $r(A) = r\left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$,所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示.

充分性:设 $\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示则存在矩阵 $K=(k_{ij})_{t\times s}$,使得

$$B = KA,$$

从而 $Bx = KAx$,于是由 $Ax=0$ 得 $Bx=0$,即方程组(I)的解必是(Ⅱ)的解.

(2)使用(1)可得.

10.(1)由于增广矩阵 B 的行列式 $|B| = |B^{\mathrm{T}}|$,而 $|B^{\mathrm{T}}|$ 为范德蒙行列式,且 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等,因此

$$|B| = |B^{\mathrm{T}}| = \prod_{1\leq j<i\leq 4}(a_i - a_j) \neq 0$$

从而 $r(B)=4$,由于系数矩阵 A 为 4×3 矩阵,所以 $r(A)\leq 3$,因为 $r(A)\neq r(B)$,故方程组无解.

(2)当 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k$ 时,方程组简化为

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3 \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3 \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -2k \neq 0$$

所以 $r(A) = r(B) = 2$,从而方程组有解且对应的齐次方程组的基础解系含有 $3-2=1$ 个解向量.

由于 β_1, β_2 是原非齐次方程组的两个解,所以

$$\xi = \beta_2 - \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

是其导出组的解,且 $\xi \neq 0$,故 ξ 是导出组的一个基础解系,于是原非齐次方程组的通解为

$$x = c\xi + \beta_1 = c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \text{ 为任意常数}.$$

11.因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关,所以存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$,使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r = 0 \tag{4.12}$$

以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为系数构成一个齐次线性方程组

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r = 0$$

由于系数矩阵的秩为 1,而方程组中未知量的个数 $r \geq 2$,故该方程组有非零解,设其解为 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,于是

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_r k_r = 0 \tag{4.13}$$

将(4.12)式改写为

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r + 0 \cdot \beta = 0$$

再将(4.13)式代入上式得

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_r k_r)\beta \\ = & \lambda_1 (a_1 + k_1 \beta) + \lambda_2 (a_2 + k_2 \beta) + \cdots + \lambda_r (a_r + k_r \beta) \\ = & 0 \end{aligned}$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 不全为 0,所以向量组

$$\alpha_1 + k_1\beta, \alpha_2 + k_2\beta, \cdots, \alpha_r + k_r\beta$$

线性相关 .

12 . **必要性**:设这三条互异直线交于点(x_0, y_0),则有

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ bx_0 + cy_0 + a = 0 \\ cx_0 + ay_0 + b = 0 \end{cases}$$

上式可看成是齐次方程组

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

有非零解$(x_0, y_0, 1)$,而齐次方程组(4 .14)有非零解的充要条件是它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$$

由于

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(b-c) - (a-b)(a-c)$$

$$= -(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$= -\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \leq 0$$

上式当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立,但这与三条直线互异的假设

矛盾,故 $D_1 \neq 0$, 于是有 $a+b+c=0$.

充分性:设 $a+b+c=0$, 要证这三条互异的直线交于一点, 即方程组

$$\begin{cases} ax+by=-c \\ bx+cy=-a \\ cx+ay=-b \end{cases} \tag{4.15}$$

有惟一解 .

$$B=\begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ a+b+c & a+b+c & -a-b-c \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a+b+c=0)$$

由于

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2$$

而 $c=-a-b$, 因此

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=a(-a-b)-b^2$$

$$=-\frac{1}{2}[a^2+(a+b)^2+a^2]\leq 0$$

上式当且仅当 $a=b=0$ 时等号才成立 .但这与 $ax+by+c=0$ 为直线方程矛盾,故 $D_2 \neq 0$.从而 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=2$(未知量个数),方程组(4.15)有惟一解 .

第五章　相似矩阵及二次型

本章主要涉及矩阵的特征值与特征向量以及如何将一个矩阵化为对角矩阵等内容.要求了解内积的概念,掌握线性无关向量组规范正交化的施密特(Schmidt)方法;理解矩阵的特征值和特征向量的概念和性质,会求矩阵的特征值和特征向量;了解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件;了解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质,熟练掌握用相似变换化矩阵为对角矩阵的方法;掌握二次型及其矩阵表示,了解二次型秩的概念,了解二次型的标准形、规范形的概念,了解惯性定理;熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法,了解用配方法化二次型为标准形的方法,了解二次型和对应矩阵的正定性及其判别法.

第一节　向量的内积

一、内容提要

1. **向量的内积**

设有 n 维向量

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}$$

令 $$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

$[x, y]$称为向量 x 与 y 的内积.
用矩阵记号表示,则有

$$[x, y] = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积满足下列运算律(其中 x, y, z 为 n 维向量,λ 为实数):

(1) $[x, y] = [y, x]$;

(2) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$;

(3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$.

2. 向量的长度

向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的长度(或范数)定义为

$$\| x \| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

当 $\| x \| = 1$ 时,称 x 为单位向量.

向量的长度具有下列性质:

(1) 非负性　当 $x \neq 0$ 时,$\| x \| > 0$;当 $x = 0$ 时,$\| x \| = 0$;

(2) 齐次性　$\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$;

(3) 三角不等式　$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时,称

$$\theta = \arccos \frac{[x, y]}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

为 n 维向量 x 与 y 的夹角.两向量的夹角总介于 0 与 π 之间.
当 $[x, y] = 0$ 时,称向量 x 与 y 正交.显然,若 $x = 0$,则 x 与任何向量都正交.

3. 规范正交基

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中任意两个向量都正交,而且每个 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, m)$.都不是零向量,则称这个向量组为正交向量组.

定理　正交向量组一定是线性无关的.

如果向量空间的基是正交向量组,则称这个基为正交基.

如果向量空间的基是正交基,并且基中每个向量都是单位向

量,则称这一个基为规范正交基或标准正交基.

4. 施密特(Schmidt)规范正交化方法

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是一组线性无关的向量,令

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1, \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1, \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \dfrac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 \\ \qquad\cdots \\ \beta_m = \alpha_m - \dfrac{[\alpha_m, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \cdots - \dfrac{[\alpha_m, \beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1}, \beta_{m-1}]}\beta_{m-1} \end{cases}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价的正交向量组,再单位化得

$$e_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ e_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2, \cdots,\ e_m = \frac{1}{\|\beta_m\|}\beta_m$$

则 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 就是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价的正交单位向量组.

5. 正交矩阵

如果 n 阶方阵 A 满足

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = E,$$

那么称 A 为正交矩阵.

正交矩阵有以下性质:

(1) 正交矩阵的行列式等于 1 或 -1.

(2) 如果 A 是正交矩阵,则 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

(3) 如果 A 是正交矩阵,则 A^{-1} 也是正交矩阵.

(4) 如果 A, B 是同阶正交矩阵,则它们的乘积 AB 也是正交矩阵.

定理　n 阶方阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是它的 n 个列(或行)向量是两两正交的单位向量组,因而可以构成向量空间 R^n 的一个规范正交基.

二、例题分析

【例 1】 已知 R^3 中的两个向量 $\alpha=(1,2,-1)^T$, $\beta=(3,4,1)^T$, 求与 α,β 都正交的单位向量 .

【解】 设与 α,β 都正交的向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$,则

$$\begin{cases}(x,\alpha)=x_1+2x_2-x_3=0\\(x,\beta)=3x_1+4x_2+x_3=0\end{cases}$$

求解这个齐次线性方程组,得通解为

$$x=k(-3,2,1)^T,\ k\text{ 为任意常数}$$

令 $k=1$,则 $x=(-3,2,1)^T$,单位化,得与 α,β 都正交的单位向量

$$\frac{1}{\|x\|}x=\frac{1}{14}(-3,2,1)^T .$$

【例 2】 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_3+x_4=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$$

解空间的规范正交基 .

【解】 将方程组改写成

$$\begin{cases}x_1=x_3-x_4\\x_2=\qquad x_4\\x_3=x_3\\x_4=\qquad x_4\end{cases}$$

基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化,令

$$\beta_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{[\xi_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

再单位化得

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

e_1, e_2 就是所给方程组解空间的规范正交基.

【例 3】 已知向量组

$\alpha_1 = (1,1,-1,1)^T, \alpha_2 = (1,-1,-1,1)^T, \alpha_3 = (2,1,1,3)^T$

线性无关,试用施密特正交化方法把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 化成正交向量组,再扩充为 R^4 的一个规范正交基.

【解】 令

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **是与** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **等价的正交向量组**.

设 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ **与** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **都正交,则有**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

解得

$$x = k(4, 0, 1, -3)^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数}$$

令 $\beta_4 = (4, 0, 1, -3)^{\mathrm{T}}$,**再将** $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ **单位化得**

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{\beta_4}{\|\beta_4\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

则 e_1, e_2, e_3, e_4 **为** R^4 **的规范正交基**.

【例 4】 设 x **为** n **维列向量,且** $x^{\mathrm{T}}x = 1$,**令** $H = E - 2xx^{\mathrm{T}}$,**试证** H **为对称的正交矩阵**.

【证明】 因为

$$H^{\mathrm{T}} = (E - 2xx^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = E - 2xx^{\mathrm{T}} = H$$

所以 H **为对称矩阵,又由于**

$$H^{\mathrm{T}}H = (E - 2xx^{\mathrm{T}})(E - 2xx^{\mathrm{T}})$$

$$= E - 4xx^{\mathrm{T}} + 4(xx^{\mathrm{T}})(xx^{\mathrm{T}})$$
$$= E - 4xx^{\mathrm{T}} + 4x(x^{\mathrm{T}}x)x^{\mathrm{T}}$$
$$= E - 4xx^{\mathrm{T}} + 4xx^{\mathrm{T}} = E,$$

因此 H **为正交矩阵** .

【例 5】 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$**为正交矩阵**, A_{ij}**为行列式** $|A|$**中元素** a_{ij}**的代数余子式**, **试证** $A_{ij} = \pm a_{ij}$.

【证明】 因为 A **为正交矩阵**, **所以** $A^{\mathrm{T}}A = E$.**两边取行列式得**

$|A|^2 = 1$, **从而** $|A| = \pm 1$.

又因为 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, **且** $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^{*} = \pm A^{*}$, **因此有**

$$A^{\mathrm{T}} = \pm A^{*}$$

即 $(A^{*})^{\mathrm{T}} = \pm A$, **所以** $A_{ij} = \pm a_{ij}$.

【例 6】 设分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix}$**是正交矩阵**, **其中** P **为** m **阶方阵**, Q **为** n **阶方阵**, **试证** P, Q **都是正交矩阵**, **且** $R = 0$.

【证明】 因为 A **为正交矩阵**, **所以** $A^{\mathrm{T}}A = E$, **即**

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{\mathrm{T}} & 0 \\ R^{\mathrm{T}} & Q^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} P^{\mathrm{T}}P & P^{\mathrm{T}}R \\ R^{\mathrm{T}}P & R^{\mathrm{T}}R + Q^{\mathrm{T}}Q \end{bmatrix} = E$$

故有

$$\begin{cases} P^{\mathrm{T}}P = E_m & ① \\ P^{\mathrm{T}}R = 0 & ② \\ R^{\mathrm{T}}P = 0 & ③ \\ R^{\mathrm{T}}R + Q^{\mathrm{T}}Q = E_m & ④ \end{cases}$$

由①知 P **为正交矩阵**, **从而由②得** $R = 0$, **代入④得** $Q^{\mathrm{T}}Q = E_m$, **所以** Q **为正交矩阵** .

三、练习题

1. 在 R^4 中设 $\alpha=(1,0,3,0)^T,\beta=(0,3,-2,-1)^T,\gamma=(1,1,0,0)^T$，求向量 $\xi=\gamma+k_1\alpha+k_2\beta$，使 ξ 与 α,β 都正交.

2. 已知 R^3 的一个基为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\6\\-15\end{pmatrix}$$

试用施密特正交化方法把这个基规范正交化.

3. 设方阵 A 满足 $A^2-4A+3E=0$，且 $A^T=A$，试证 $A-2E$ 为正交矩阵.

4. 证明：上三角正交矩阵 A 必为对角矩阵，且对角线上元素为 $+1$ 或 -1. 如果 A 的元素都是正数，则 $A=E$.

四、练习题解答

1. 由于向量 ξ 与 α,β 都正交，则有

$$\begin{aligned}[\alpha,\xi]&=[\alpha,\gamma+k_1\alpha+k_2\beta]\\&=[\alpha,\gamma]+k_1[\alpha,\alpha]+k_2[\alpha,\beta]\\&=1+10k_1-6k_2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\beta,\xi]&=[\beta,\gamma+k_1\alpha+k_2\beta]\\&=[\beta,\gamma]+k_1[\beta,\alpha]+k_2[\beta,\beta]\\&=3-6k_1+14k_2=0\end{aligned}$$

求解线性方程组

$$\begin{cases}10k_1-6k_2=-1\\-6k_1+14k_2=-3\end{cases}$$

得 $k_1=-8/26$，$k_2=-9/26$，所以

$$\xi=\left(\frac{18}{26},-\frac{1}{26},-\frac{6}{26},-\frac{9}{26}\right)^T$$

2. 令

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} + \frac{18}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{18}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

再将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化,取

$$e_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

则 e_1, e_2, e_3 即为所求.

3. 由于

$$\begin{aligned}(A-2E)^{\mathrm{T}}(A-2E) &= (A^{\mathrm{T}}-2E^{\mathrm{T}})(A-2E) \\ &= (A-2E)(A-2E) \\ &= A^2-4A+4E \\ &= (A^2-4A+3E)+E\end{aligned}$$

$$= 0 + E = E$$

所以 $A - 2E$ 为正交矩阵 .

4. 设 A 是一个上三角矩阵，且为正交矩阵，则有

$$A^{T} = A^{-1} .$$

由于上三角矩阵 A 的转置矩阵 A^{T} 为下三角矩阵，而上三角矩阵 A 的逆矩阵仍为上三角矩阵，因此由 $A^{T} = A^{-1}$ 知 A 必为对角矩阵 .设

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

由 $AA^{T} = E$，得

$$d_i^2 = 1, \ i = 1, 2, \cdots, n .$$

从而 $d_i = \pm 1$，即 A 为对角线上的元素是 $+1$ 或 -1 的对角矩阵 .

如果 A 的对角线上元素都是正数，则 $d_i = 1, \ i = 1, 2, \cdots, n$，因此 $A = E$.

第二节　矩阵的特征值与特征向量

一、内容提要

1. 特征值和特征向量的概念

设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式

$$Ax = \lambda x$$

成立，则数 λ 称为方阵 A 的特征值，非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量 .

行列式 $|A - \lambda E|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为方阵 A

的特征多项式.

方程$|A-\lambda E|=0$称为n阶方阵A的特征方程,在复数范围内有n个根(重根按重数计算),因此n阶方阵有n个特征值.

2. 特征值和特征向量的求法

(1) 对给定的n阶方阵A,解特征方程$|A-\lambda E|=0$,得A的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

(2) 对每个特征值λ_i,解齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i E)x=0$$

求出它的非零解$x=p_i$,则p_i就是A的对应于特征值λ_i的特征向量.A的对应于λ_i的全部特征向量就是该方程组的全部非零解.

3. 特征值和特征向量的性质

(1) 设n阶方阵$A=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

①$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

②$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

(2) 设λ是矩阵A的特征值,x是A属于λ的特征向量,则

①$k\lambda$是kA的特征值(k为任意数),x是kA属于$k\lambda$的特征向量.

②λ^m是A^m的特征值(m是正整数),x是A^m属于λ^m的特征向量.

③若

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值,x是$f(A)$属于$f(\lambda)$的特征向量

④若A可逆,则$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值,x是A^{-1}的属于特征值$\frac{1}{\lambda}$的特征向量.

⑤矩阵A与A^{T}有相同的特征多项式和特征值

(3) 对应于 A 的不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是线性无关的,特别地,当 A 有 n 个互不相等的特征值时,它们所对应的 n 个特征向量必线性无关 .

二、例题分析

特征向量是非零列向量,若 x 是零向量,则对任意的数 λ,总有 $Ax = \lambda x$,没有什么实际意义,因此在定义中规定特征向量是非零列向量 . 特征值和特征向量是一对概念,设 λ 为 A 的特征值,则一定有与之对应的特征向量,但是与 λ 对应的特征向量不是惟一的 . 一个特征向量必定属于某一个特征值,并且只能从属于一个特征值,因为,设 x 是矩阵 A 的特征向量,若 x 属于两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$,则有 $Ax = \lambda_1 x$,且 $Ax = \lambda_2 x$,从而有 $\lambda_1 x = \lambda_2 x$,即 $(\lambda_1 - \lambda_2) x = 0$,由于 $x \neq 0$,则有 $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$,即 $\lambda_1 = \lambda_2$,这与 λ_1 和 λ_2 是两个不同的特征值矛盾 . 对于特征向量还有下列结论:两个属于不同特征值的特征向量,其和不是任何特征值的特征向量,证明见下面的例 1.

【例 1】 设 λ_1, λ_2 为 n 阶方阵 A 的特征值,且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,而 x_1, x_2 分别为对应的特征向量,试证明 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量 .

【证明】 反证法 若向量 $x_1 + x_2$ 是矩阵 A 的对应于某特征值 μ 的特征向量,则有

$$A(x_1 + x_2) = \mu(x_1 + x_2)$$

由于 $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$,从而有

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \mu x_1 + \mu x_2$$

即

$$(\mu - \lambda_1) x_1 + (\mu - \lambda_2) x_2 = 0$$

因 x_1, x_2 是对应于不同特征值的特征向量,因而线性无关,所以

$$\mu - \lambda_1 = \mu - \lambda_2 = 0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2$，与题设 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，说明 x_1+x_2 不是 A 的任何特征值的特征向量.

【例 2】 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的特征值；

(2) 求矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值.

【解】 (1) 解 A 的特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0$$

得 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-5$.

(2) 由于 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-5\neq0$，因此 A 可逆，由 $Ax_i=\lambda_i x_i$ 得

$$A^{-1}x_i=\frac{1}{\lambda_i}x_i$$

又

$$Ex_i=x_i$$

上面两式相加得

$$(E+A^{-1})x_i=\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)x_i,\ i=1,2,3$$

故矩阵 $E+A^{-1}$**的特征值为** $1+\frac{1}{\lambda_i}(i=1,2,3)$,**即为** $2,2,\frac{4}{5}$.

【例 3】 (**填空题**)**设** A **为** n **阶矩阵**, $|A|\neq 0$, A^* **为** A **的伴随矩阵**, E **为** n **阶单位矩阵**,**若** A **有特征值** λ,**则** $(A^*)^2+E$ **必有特征值**________.

答案: $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

分析 **因** $|A|\neq 0$,**所以矩阵** A **可逆**,**由** $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,**得** $A^*=|A|A^{-1}$.

已知 A **的特征值为** λ,**则** A^{-1}**的特征值为** $\frac{1}{\lambda}$, A^* **的特征值为** $\frac{|A|}{\lambda}$, $(A^*)^2$ **的特征值为** $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2$,**从而** $(A^*)^2+E$ **有特征值** $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

【例 4】 **设** 3 **阶矩阵** A **的特征值为** $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,**对应的特征向量依次为**

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}.$$

又向量

$$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(1) **将** β **用** ξ_1,ξ_2,ξ_3 **线性表示**;

(2) **求** $A^n\beta$(n **为自然数**).

分析 **根据** $\beta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$ **可以求出** k_1,k_2,k_2. **且由** $A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i$ **可得**

$$A^n\beta = k_1\lambda_1^n\xi_1 + k_2\lambda_2^n\xi_2 + k_3\lambda_3^n\xi_3.$$

【解】 (1) 设

$$\beta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3.$$

则得到关于 k_1, k_2, k_3 的非齐次线性方程组,对方程组的增广矩阵作初等行变换,有

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

解得 $$k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 1.$$

所以 $$\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3.$$

(2) 由

$$A^n\xi_i = \lambda_i^n\xi_i\ (i = 1, 2, 3),$$

$$\begin{aligned} A^n\beta &= A^n(2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) = 2A^n\xi_1 - 2A^n\xi_2 + A^n\xi_3 \\ &= 2\xi_1 - 2\cdot 2^n\xi_2 + 3^n\xi_3 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2^{n+2} \\ 2^{n+3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^{n+1} \\ 3^{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^{n+1} + 3^n \\ 2 - 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

【例 5】 设向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

都是非零向量,且满足条件 $\alpha^T\beta = 0$,记 n 阶矩阵 $A = \alpha\beta^T$,求:

(1) A^2;

(2) 矩阵 A 的特征值和特征向量 .

【解】 (1) 由 $\alpha^T\beta = 0$ 得 $\beta^T\alpha = 0$,于是

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 0.$$

(2) 设 λ 是矩阵 A 的一个特征值, x 是对应于 λ 的特征向量,则有

$$Ax = \lambda x$$

于是有 $A^2x=A(Ax)=\lambda Ax=\lambda^2x$,由于 $A^2=0$, x 是非零列向量,从而有 $\lambda=0$,即 A 的 n 个特征值全为零 .

对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量应是齐次方程

$$Ax=(A-\lambda E)x=0$$

的非零解,因 α, β 均非零,不妨设 $a_1\neq0$, $b_1\neq0$.

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其秩 $\mathrm{r}(A)=1$,可取方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{b_2}{b_1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{b_3}{b_1} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{b_n}{b_1} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

对应于特征值 0 的全部特征向量为

$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}$, k_1, k_2, $\cdots$, k_{n-1} 是不全为零的常数 .

【例 6】 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix},$$

其行列式 $|A|=-1$,又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求 a, b, c 和 λ_0 的值 .

分析 应联想到公式, $AA^*=|A|E$,由于 $|A|=-1$,得 $AA^*=-E$,由 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$,得 $AA^*\alpha=\lambda_0A\alpha$,从而有 $-\alpha=\lambda_0A\alpha$. 再由 $\lambda_0A\alpha=-\alpha$ 及 $|A|=-1$ 确定 a, b, c 和 λ .

【解】 由于 $AA^* = |A|E$ 及 $|A| = -1$ 得 $AA^* = -E$. 又由于

$$A^* \boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha},$$

上式两边左乘 A 得

$$AA^* \boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 A\boldsymbol{\alpha}$$

从而有 $-\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 A\boldsymbol{\alpha}$, 即 $\lambda_0 A\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$, 由

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

得方程组

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c) = 1 & \text{①} \\ \lambda_0(-5-b+3) = 1 & \text{②} \\ \lambda_0(-1+c-a) = -1 & \text{③} \end{cases}$$

① - ③得 $2\lambda_0 = 2$, 即 $\lambda_0 = 1$, 将 $\lambda_0 = 1$ 代入②得 $b = -3$, 代入①得 $a = c$.

将 $b = -3$, $a = c$ 代入 $|A| = -1$, 有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a - 3 = -1$$

解得 $a = c = 2$, 因此

$$a = 2,\ b = -3,\ c = 2,\ \lambda_0 = 1.$$

【例 7】 设 A 为正交矩阵, 试证: 如果 A 有实特征值, 则它的实特征值只能是 1 或 -1.

【证明】 因为 A 是正交矩阵, 所以有

$$A^{\mathrm{T}} A = E.$$

设 λ 是 A 的实特征值, x 是对应于 λ 的特征向量, 则有 $Ax = \lambda x$, 考虑内积

$$
\begin{aligned}
[x, x] &= x^{T}x = x^{T}Ex = x^{T}(A^{T}A)x \\
&= (x^{T}A^{T})(Ax) = (Ax)^{T}(Ax) \\
&= (\lambda x)^{T}(\lambda x) = \lambda^{2}x^{T}x \\
&= \lambda^{2}[x, x]
\end{aligned}
$$

移项得

$$(\lambda^{2} - 1)[x, x] = 0$$

因为 $x \neq 0$,所以$[x, x] \neq 0$,从而 $\lambda^{2} - 1 = 0$,即 $\lambda = \pm 1$.

【例 8】 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$,

求可逆矩阵 P,命名 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵,并计算行列式 $|A - E|$的值 .

分析 本题实际上是求矩阵 A 的特征值和三个线性无关的特征向量 .

【解】 矩阵 A 的特征多项式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a+1-\lambda)^{2}(a-2-\lambda).$$

由此得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = a+1$, $\lambda_3 = a-2$.

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = a+1$,求解$(A-(a+1)E)x = 0$,由

$$A - (a+1)E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可求对应的两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = (1,1,0)^{T}, \alpha_2 = (1,0,1)^{T} .$$

对于特征值 $\lambda_3 = \alpha - 2$,求解$(A-(a-2)E)x = 0$,由

$$A-(a-2)E=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可得对应的特征向量 $\alpha_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令矩阵

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a-2\end{bmatrix},$$

则 $AP=P\Lambda$,**由于** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关,从而矩阵** P **可逆,所以**

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a-2\end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}|A-E|&=|P\Lambda P^{-1}-PP^{-1}|\\&=|P|\cdot|\Lambda-E|\cdot|P^{-1}|\\&=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a-3\end{vmatrix}\\&=a^3(a-3)\end{aligned}$$

三、练习题

1. **设** λ **与** x **是** n **阶方阵** A **的特征值和特征向量,** P **是** n **阶可逆方阵,证明:向量** $P^{-1}x$ **是矩阵** $P^{-1}AP$ **的与** λ **对应的特征向量.**

2. **设有4阶方阵** A **满足条件:** $|3E+A|=0$, $AA^{\mathrm{T}}=2E$, $|A|<0$,**其中** E **为4阶单位阵,求方阵** A **的伴随矩阵** A^* **的一个特征值.**

3. **已知矩阵** $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(a_1,a_2,a_3)$,**其中** $a_1\neq0$,**求矩阵** A **的**

特征值和特征向量.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆,向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量,λ 是 α 对应的特征值,其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵,试求 a,b 和 λ 的值.

5. 证明:反对称实矩阵的特征值是零或纯虚数.

6. 试证:若 A 是反对称矩阵,则 $E-A^2$ 可逆.

四、练习题解答

1. 因为特征向量 $x\neq 0$, P 是可逆方阵,所以向量 $P^{-1}x\neq 0$,否则若 $P^{-1}x=0$,由 $PP^{-1}x=P\cdot 0$ 可得 $x=0$,与 $x\neq 0$ 矛盾.又由于 $Ax=\lambda x$,将它改写为

$$A(PP^{-1})x=\lambda x$$

上式两边左乘 P^{-1} 得

$$P^{-1}A(PP^{-1})x=\lambda(P^{-1}x)$$

即

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}x)=\lambda(P^{-1}x)$$

所以向量 $P^{-1}x$ 是矩阵 $P^{-1}AP$ 的与 λ 对应的特征向量.

2. 由 $|3E+A|=|A-(-3)E|=0$,得 A 的一个特征值为 -3.

因为 $AA^{\mathrm{T}}=2E$,两边取行列式得

$$|AA^{\mathrm{T}}|=|A||A^{\mathrm{T}}|=|A|^2=|2E|=2^4|E|=16$$

所以得 $|A|=-4$.

因为 $|A|\neq 0$,所以 A 可逆.设 A 对应于特征值 $\lambda=-3$ 的特征向量为 α,则有 $A\alpha=-3\alpha$,由此得

$$A^{-1}\alpha=-\frac{1}{3}\alpha$$

由 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$ 得 $A^*=|A|A^{-1}$,从而有

$$A^*\alpha=|A|A^{-1}\alpha=(-4)\left(-\frac{1}{3}\alpha\right)=\frac{4}{3}\alpha$$

故 A^* 的一个特征值为$\frac{4}{3}$.

3. 由于

$$A^2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)$$

$$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)A.$$

设 $l=a_1^2+a_2^2+a_3^2$,由于 $a_1\neq 0$,所以 $l\neq 0$.

设 λ 是矩阵 A 的特征值,则

$$Ax=\lambda x$$

从而有 $A^2x=l\,Ax=l\,\lambda x=\lambda^2x$,得到

$$\left(\lambda^2-l\,\lambda\right)x=0$$

由于 $x\neq 0$,因此 $\lambda=0$ 或 l.

又由于 $\mathrm{tr}(A)=a_1^2+a_2^2+a_3^2=l+0+0$,所以 $\lambda=l$ 单根,$\lambda=0$ 是二重根.

对于特征值 $\lambda=0$,解方程组$\left(A-0E\right)x=0$,由于

$$A=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-a_2\\a_1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-a_3\\0\\a_1\end{pmatrix}$$

对应于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$,其中 k_1,k_2 不同时为 0.

对于特征值 $\lambda = l$,由于

$$A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},$$

因此对应于特征值 $\lambda = l$ 的全部特征向量为 $k_3(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$,其中 k_3 不等于 0.

4. 矩阵 A^* 的属于特征值 λ 的特征向量为 α,由于矩阵 A 可逆,故 A^* 可逆,于是 $\lambda \neq 0$,且

$$A^*\alpha = \lambda\alpha$$

上式两边同时左乘矩阵 A,得

$$AA^*\alpha = \lambda A\alpha$$

由 $AA^* = |A|E$ 及 $\lambda \neq 0$,得

$$A\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

即

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$$

由此,得方程组

$$\begin{cases}3+b=\dfrac{|A|}{\lambda} & ①\\[2ex] 2+2b=\dfrac{|A|}{\lambda}b & ②\\[2ex] a+b+1=\dfrac{|A|}{\lambda} & ③\end{cases}$$

由①和②解得 $b = 1$ 或 -2,由①和③解得 $a = 2$.

由于

$$|A| = \begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix} = 3a - 2 = 4$$

将$|A|=4$代入①得 $\lambda=\dfrac{4}{3+b}$,因此,当 $b=1$ 时,$\lambda=1$;当 $b=-2$ 时,$\lambda=4$. 从而有

$$a=2,\ b=1,\quad \lambda=1;$$

或

$$a=2,\ b=-2,\ \lambda=4.$$

5. 设 A 为反对称实矩阵,λ 是 A 的任一特征值, x 是对应于λ 的特征向量,则有

$$Ax=\lambda x,$$

由于 $A^{T}=-A$,即 $A=-A^{T}$,所以

$$\begin{aligned}\bar{x}^{T}Ax&=\bar{x}^{T}(-A^{T})x=-\bar{x}^{T}A^{T}x=-(A\bar{x})^{T}x\\&=-(\overline{Ax})^{T}x=-(\overline{\lambda x})^{T}x=-\bar{\lambda}\bar{x}^{T}x\end{aligned}$$

又由于

$$\bar{x}^{T}Ax=\bar{x}^{T}(Ax)=\bar{x}^{T}\lambda x=\lambda\bar{x}^{T}x,$$

所以有

$$\lambda\bar{x}^{T}x=-\bar{\lambda}\bar{x}^{T}x$$

即

$$(\lambda+\bar{\lambda})\bar{x}^{T}x=0,$$

因为 $\bar{x}^{T}x\neq 0$, 故得 $\lambda+\bar{\lambda}=0$, 设 $\lambda=a+bi$, 代入得 $(a+bi)+(a-bi)=2a=0$,所以 $a=0$,即 $\lambda=bi$,这就证明了反对称实矩阵 A 的特征值是零或纯虚数 .

6. 由于 $A^{T}=-A$,所以

$$\begin{aligned}|E-A^{2}|&=|(E-A)(E+A)|=|E-A||E+A|\\&=|E-A||(E+A)^{T}|=|E-A||E^{T}+A^{T}|\\&=|E-A||E-A|=|E-A|^{2}\end{aligned}$$

因此若 $E-A^{2}$ 不可逆, 则$|E-A^{2}|=0$, 由上面的推导得$|E-A|=0$,即$|A-E|=0$,说明反对称矩阵 A 有特征值 1,但这与反对称矩阵的特征值只能是零或纯虚数矛盾,所以 $E-A^{2}$ 不可逆 .

第三节　矩阵相似与矩阵对角化

一、内容提要

1. 相似矩阵的概念

设 A,B 都是 n 阶方阵,若有可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP=B,$$

则称矩阵 A 与 B 相似,记作 $A\sim B$. 对 A 进行运算 $P^{-1}AP$,称为对 A 进行相似变换,可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵 .

相似是矩阵之间的一种关系,具有下面 3 个性质:

(1) 自反性: $A\sim A$.

(2) 对称性:如果 $A\sim B$,那么 $B\sim A$.

(3) 传递性:如果 $A\sim B$, $B\sim C$,那么 $A\sim C$.

2. 相似矩阵的性质

相似矩阵具有下面的性质:

(1) 相似矩阵有相同的行列式 .

(2) 相似矩阵或者同时可逆,或者同时不可逆 . 而且如果 $B=P^{-1}AP$, 那么, 当它们可逆时, 它们的逆也相似, 即 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$.

(3) 如果 $B_1=P^{-1}A_1P$, $B_2=P^{-1}A_2P$,那么

$$B_1+B_2=P^{-1}(A_1+A_2)P;$$

$$B_1B_2=P^{-1}(A_1A_2)P;$$

$$kB_1=P^{-1}(kA_1)P.$$

如果 $B=P^{-1}AP$, $f(x)$是一个多项式,那么

$$f(B)=P^{-1}f(A)P.$$

(4) 若 n阶阵 A 与 B 相似,则 A 与 B 的特征多项式相同,从

而 A 与 B 的特征值亦相同.

(5) 若 n 阶方阵 A 与对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值.

3. 矩阵的对角化

若 n 阶方阵 A 可与对角矩阵相似,则称 A 是可相似对角化的,简称 A 可对角化.

定理1　n 阶方阵 A 与一个对角矩阵相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理2　如果 n 阶方阵 A 的 n 个特征值各不相等,则 A 与对角矩阵相似.

实对称矩阵可对角化.

关于实对称矩阵有下列结论:

定理3　实对称矩阵的特征值为实数.

定理4　设 A 是一个实对称矩阵,那么属于 A 的不同的特征值的特征向量是正交的.

定理5　设 A 为 n 阶对称矩阵,λ 是 A 的特征方程的 r 重根,则方阵 $A-\lambda E$ 的秩$(A-\lambda E)=n-r$,从而对应的特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

定理6　设 A 为 n 阶对称矩阵,则必有正交阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角阵.

对于给定的实对称矩阵 A,可按以下步骤求出使 A 对角化的正交矩阵 P:

(1) 求出特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$的全部根,即 A 的特征值,设 A 的全部不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$.

(2) 对每个 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,t)$解齐次线性方程组

$$(A-\lambda E)x=0,$$

求出一个基础解系 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{is_i}$.

(3) 将 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{is_i}$正交化、单位化,得到一组正交的单位向量 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{is_i}$,它们是 A 的属于λ_i 线性无关的特征向量.

(4) 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 各不相同,所以向量组

$$\eta_{11},\cdots,\eta_{1s_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2s_2},\cdots,\eta_{t1},\cdots,\eta_{ts_t}$$

仍是正交的单位向量组,它们总共有 n 个.以这一组向量为列向量做成矩阵 P,则 P 就是所要求的正交矩阵.

二、例题分析

对于给定的 n阶方阵 A,如何判别 A 能否与一个对角矩阵相似?由于矩阵 A可对角化的充要条件为 A有 n 个线性无关的特征向量,因而满足下列条件的矩阵可对角化.

(1) 如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相等的特征值,则 A 可对角化.

(2) 如果 A 的特征值有重根,那么对于 A 的每一个重特征值,恰好有与其重数一样多的线性无关的特征问题,则 A 可对角化.

(3) 如果 A是实对称矩阵,则 A 可对角化.

【例 1】 已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a,b及特征向量ξ所对应的特征值;

(2) 问 A能否相似于对角阵?说明理由.

【解】 (1) 设与特征向量 ξ对应的特征值为λ,则有

$(A-\lambda E)\xi=0$，即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此得

$$\begin{cases} -\lambda-1=0 \\ a-\lambda+2=0 \\ b+\lambda+1=0 \end{cases}$$

解此方程组得 $\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$.

(2) 由于

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

则有

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)^3=0$$

因此 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对于特征值 -1，求解方程组 $(A-(-1)E)x=0$，由于

$$A+E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组 $(A+E)x=0$ 的基础解系只有1个向量，因而对应于特征值 -1 只有 1 个线性无关的特征向量，由于 3 阶矩阵 A 只

有一个线性无关的特征向量,所以 A 不能对角化 .

【例 2】 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似 .

(1) 求 x 与 y 值;

(2) 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

【解】 (1) 解法一 因为 A 与 B 相似,所以 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$, 即

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&x-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&y-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

计算左右两边的行列式得

$$(2-\lambda)(\lambda^2-x\lambda-1)=(2-\lambda)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y]$$

比较上式两边 λ 的同次幂系数得 $x=0$, $y=1$.

解法二 因为 A 与对角阵 B 相似,所有 A 与 B 有相同的特征值, 故 2, y, -1 是矩阵 A 的特征值, 由特征值的性质, $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{t=1}^{3}\lambda_i$ 及 $|A|=\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i$ 得

$$\begin{cases}2+x=1+y\\-2=-2y\end{cases}$$

解得 $x=0$, $y=1$.

注 解法二在求解这类问题时,计算量较小,但不是普通适用的方法,解法一是基本的、一般的方法 .

(2) 由(1) 知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.
当 $\lambda_1=2$ 时,解齐次方程组 $(A-2E)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得 A 的与 $\lambda_1 = 2$ 对应的特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2 = 1$ 时,解齐次方程组$(A - E)x = 0$,即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得 A 的与 $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = -1$ 时,解齐次方程组$(A + E)x = 0$,即

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得 A 的与 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

因为矩阵 A 的特征值互不相等,所以特征向量 p_1, p_2, p_3 线性无关,从而矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$可逆. 于是满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P 为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

【例 3】 已知三阶方阵 B 的特征值为 1, 2, -1, 又方阵

$A=B^3-2B$,试求:

(1) 方阵 A 的特征值及其相似对角阵;

(2) 行列式 $|A|$ 和 $|B^2+2E|$.

分析 由于矩阵 B 的特征值都是单根,所以可对角化,由此得到 A 的特征值及其相似的对角阵,再计算 $|A|$ 和 $|B^2+2E|$.

【解】 (1) 因为三阶方阵 B 有三个互异的特征值,所以 B 可以相似对角化,即存在可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}=\Lambda$$

从而得

$$B=P\Lambda P^{-1}$$

又

$$B^3=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^3P^{-1}$$

故

$$\begin{aligned}A&=B^3-2B=P\Lambda^3P^{-1}-2P\Lambda P^{-1}\\&=P(\Lambda^3-2\Lambda)P^{-1}\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\Lambda^3-2\Lambda\\&=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}^3-2\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&&\\&8&\\&&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&&\\&4&\\&&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) $|A| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = (-1) \times 4 \times 1 = -4$.

由(1)知 $B = P\Lambda P^{-1}$,所以 $B^2 = P\Lambda^2 P^{-1}$,从而

$$B^2 + 2E = P\Lambda^2 P^{-1} + 2PP^{-1} = P(\Lambda^2 + 2E)P^{-1}$$

上式两边取行列式得

$$|B^2 + 2E| = |P||\Lambda^2 + 2E||P^{-1}| = |\Lambda^2 + 2E|$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & 3 \end{vmatrix} = 54$$

注　本题可利用相似矩阵的性质(3)直接写出矩阵 $B^3 - 2B$ 和 $B^2 + 2E$ 的相似对角阵.

【例 4】　设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,求 $\varphi(A) = A^{10} - 6A^9 + 5A^8$.

【解】　由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda - 5),$$

于是 A 的特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$. 由于 A 是实对称矩阵,所以存在正交矩阵 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,使

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(-1, 1, 5) = \Lambda$$

也即

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}},$$

并且,Q 的列向量 ξ_i 是对应特征值 λ_i 的单位化特征向量,$i = 1,2,3$,于是,由相似矩阵的性质(3)有

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= Q\varphi(\Lambda)Q^{\mathrm{T}} \\ &= Q\mathrm{diag}(-1, 1, 5)Q^{\mathrm{T}} \\ &= Q\mathrm{diag}(\varphi(-1), \varphi(1), \varphi(5))Q^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$= Q\begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}Q^{T} = 12Q\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}Q^{T} \qquad (5.4)$$

其中, $\phi(x) = x^{10} - 6x^{9} + 5x^{8}$.

对应于特征值 $\lambda_1 = -1$,解方程组$(\Lambda - \lambda_1 E)x = 0$,由

$$A - \lambda_1 E = A + E \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得单位化基础解系 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

类似地可求得 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

代入式(5.4),即求得

$$\phi(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

注 1. 在将实对称矩阵 A 对角化时,若不取正交矩阵 Q,只取可逆矩阵 P,则同样有 $P^{-1}AP = \Lambda$,由此得 $A = P\Lambda P^{-1}$, $\phi(A) = P\phi(\Lambda)P^{-1}$, P 也是由对应特征值的特征向量组成,在求特征向

量时,不必规范正交化,但要单独计算 P^{-1},而对正交矩阵 Q,由于 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$,可直接得到 Q^{-1}.

2. 由于在式(5.4)中

$$\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}12 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}=12\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

于是,上述的向量 ξ_2,ξ_3 无须具体计算出来的,这样可简化计算.

【例 5】 设3阶对称矩阵 A 的特征值为 6,3,3,与特征值 6 对应的特征向量为 $p_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,求 A.

分析 由于 A 是实对称矩阵,所以对应于特征值 3 恰好有两个线性无关的特征向量,这两个线性无关的特征向量可通过与 p_1 的正交性求得,再由此计算出矩阵 A.

【解】 设矩阵 A 的对应于特征值 3 的两个线性无关特征向量为 p_2,p_3,由实对称矩阵特征向量的性质,p_1 与 p_2 和 p_3 都正交,即有

$$\begin{cases}p_1^{\mathrm{T}}p_2=0\\ p_1^{\mathrm{T}}p_3=0\end{cases},$$

也即 p_2,p_3 是齐次方程组 $p_1^{\mathrm{T}}x=0$的两个线性无关解,求解 $x_1+x_2+x_3=0$,得到方程组的一个基础解系为

$$p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

将 p_2,p_3 用施密特正交化方法正交化,得

$$\beta_2=p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\ \beta_3=p_3-\frac{[P_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

分别把向量 p_1,β_2,β_3 单位化,得

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,则 Q 为正交矩阵,由于

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}.$$

于是 $A=Q\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

【例 6】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可以对角化,求 x,y 应满足的条件.

【解】 由于

$$|A-E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\x&1-\lambda&y\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

矩阵 A 可对角化的充要条件为矩阵 A 有三个线性无关的特征向量,由于 -1 是单根,必有一个线性无关的特征向量,为使对应于二重特征值 1 有两个线性无关的特征向量,方程组 $(A-E)x=0$ 应有两个线性无关的解,矩阵 $A-E$ 的秩必须等于 1,由于

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\x&0&y\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&x+y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以得 $x+y=0$.

【例 7】 设 A 为 n 阶方阵且 $A\neq0$,若对某一正整数 $m(m\geq2)$,

有 $A^m=0$,证明 A 不能与对角阵相似.

【证明】 用反证法.

设 λ_i 是$(i=1,2,\cdots,n)$是矩阵 A 的特征值,则 λ_i^m 是 A^m 的特征值,由于 A^m 是零矩阵,其特征值全为0,从而 $\lambda_i^m=0$,所以 $\lambda_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 即 A 的所有特征值全为0,若矩阵 A 可与对角阵相似,则存在可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=0$$

从而有 $A=0$,这与题设 $A\neq 0$矛盾,因而命题得证

【例 8】 设 n 阶矩阵 A 是幂等矩阵,即满足 $A^2=A$. 证明:A 相似于一个对角矩阵,并求与 A 相似的对角阵.

【证明】 首先证明 A 的特征值只可能是0或1. 设 λ 是 A 的一个特征值,由关系式 $A^2=A$ 可知,λ 也应有相应关系式 $\lambda^2=\lambda$,于是,λ 非0即1.

矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量,下证 A 有 n 个线性无关的特征向量.

由 $A^2=A$,得 $A(A-E)=0$,由矩阵秩的性质有

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)\leq n$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)&=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)\\&\geq \mathrm{r}[A+(E-A)]=\mathrm{r}(E)=n\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=n$,设 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}$,则 $\mathrm{r}(A-E)=n-r$.

对应于特征值0的特征向量是齐次线性方程组

$$(A-0E)x=0$$

的非零解,由 $\mathrm{r}(A)=r$,故方程组有 $n-r$ 个线性无关的解,于是对应于特征值0有 $n-r$ 个线性无关的特征向量,记为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$.

对应于特征值1的特征向量是齐次线性方程组

$$(A-E)x=0$$

的非零解,由 $\mathrm{r}(A-E)=n-r$,则对应于特征值1有 r 个线性无

关的特征向量,记为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$.

因对应于不同特征值的特征向量是线性无关的,所以 A 有 $(n-r)+r=n$ 个线性无关的特征向量.

令 $P=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r})$,则 P 为可逆矩阵,且 P 把 A 相似变换为对角阵:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{r\text{个}} & \\ & \overbrace{\begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}}^{n-r\text{个}} \end{pmatrix}$$

三、练习题

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 相似,求 x, y.

2. 设 3 阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=-1$;对应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求 A.

3. 已知实对称矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1$,且对应于 λ_2, λ_3 的特征向量为

$$p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的与 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量;

(2) 求矩阵 A.

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&x\\0&0&0\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量,求 x 的值.

5. 设 A 为实对称矩阵,试证:对任意正奇数 m,必有实对称矩阵 B,使 $B^m = A$.

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵,且有相同的 n 个互不相等的特征值,试证:存在 n 阶矩阵 R 和 S,其中 R 是可逆的,使得 $A = RS$, $B = SR$.

四、练习题解答

1. 显然,矩阵 Λ 的特征值是 5, y, -4,因 A 与 Λ 相似,故 Λ 的特征值也是 5, y, -4. 由特征值性质:

$$5+y+(-4) = A\text{ 的对角元素之和} = 2+x;$$
$$5\times y\times(-4) = |A| = -15x-40,$$

得到方程组

$$\begin{cases} y+1=2+x \\ -20y=-15x-40, \end{cases}$$

解得 $x=4$, $y=5$.

2. 因 A 有 3 个不同的特征值,根据矩阵对角化的充分条件,

A 必能相似于对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$,记

$$P=(p_1, p_2, p_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix},$$

则有 $P^{-1}AP=\Lambda$,或

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

本题的计算量集中在求 P **的逆矩阵** P^{-1} **上,但由于本题所给向量** p_1, p_2, p_3 **的特殊性可以避免计算** P^{-1}. **由于向量组** p_1, p_2, p_3 **是两两正交的,令**

$$\xi_1 = \frac{p_1}{\| p_1 \|} = \frac{1}{3} p_1, \ \xi_2 = \frac{p_2}{\| p_2 \|} = \frac{1}{3} p_2, \ \xi_3 = \frac{p_3}{\| p_3 \|} = \frac{1}{3} p_3,$$

记矩阵 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,**则由特征向量性质**, ξ_1, ξ_2, ξ_3 **仍分别对应特征值** 1, 0, -1 **的特征向量,且** Q **为正交矩阵.于是,由** $Q^{\mathrm{T}} AQ = Q^{-1} AQ = \Lambda$ **得**

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.(1) **设** A **对应于** $\lambda_1 = 2$ **的特征向量为**

$$p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交,所以有$[p_1, p_2] = 0, [p_1, p_3] = 0$,即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

解得 A 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 取相似变换矩阵为

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

则有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

从而得

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}
$$

注　由于 A **是实对称矩阵,本题可将** p_1 **规范化,将** p_2, p_3 **正交化,再规范化,从而取相似变换矩阵为正交矩阵,可避免计算** P^{-1}.

4. **由**

$$
|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & x \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)
$$

得 A **的特征值为** $\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=0$.

因为 A **有三个线性无关的特征向量,所以特征值** $\lambda_2=\lambda_3=0$ **必须对应两个线性无关的特征向量,方程组** $(A-0E)x=0$ **的基础解系必须含有两个向量,则** $r(A)=1$, **从而有** $x=0$.

5. **因为** A **为实对称矩阵,所以存在正交矩阵** P **使得**

$$
P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ **为** A **的特征值,且** $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ **为实数.**

从而

$$
A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}
$$

由于 m **为正奇数,令**

$$B = P\begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[m]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

易知 B 为实对称矩阵,且有

$$B^m = P\begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[m]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix}^m P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

6.因为 A, B 有相同的 n 个互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,所以 A, B 都相似于同一个对角阵,即分别存在可逆矩阵 P_1, P_2,使得

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

所以

$$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2,$$

从而

$$B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1},$$

令 $R = P_1P_2^{-1}$,则 R 是可逆的,且有

$$B = R^{-1}AR,$$

再令 $R^{-1}A = S$,则有 $A = RS$ 和 $B = SR$.

第四节　二次型

一、内容提要

1. 二次型的概念

含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 +$

$$2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

令 $a_{ji} = a_{ij}$,记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可记为

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax,$$

对称矩阵 A 叫做二次型 f 的矩阵, f 叫做对称矩阵 A 的二次型.对称矩阵 A 的秩就叫做二次型 f 的秩.

2. 矩阵的合同

设 A、B 为 n 阶方阵,若存在 n 阶可逆矩阵 P,使

$$C^{\mathrm{T}}AC = B,$$

则称 A 合同于 B,记得 $A\mathrm{D}\ B$.

合同是方阵之间的一种关系,具有下列性质:

(1) 自反性　$A\mathrm{D}\ A$;

(2) 对称性　若 $A\mathrm{D}\ B$,则 $B\mathrm{D}\ A$;

(3) **传递性** 若 $A \simeq B$, $B \simeq C$,则 $A \simeq C$.

合同变换不改变矩阵的秩,也不改变矩阵的对称性.

3. **标准形及惯性定理**

若二次型 $f = x^T Ax$ 通过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为只含平方项的二次型,即

$$f = x^T Ax = y^T(C^T AC)y$$
$$= d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

这种只含平方项的二次型称为 f 的标准形.标准形中所含平方项的项数等于二次型 f 的秩.

二次型 f 的标准形不是惟一的,但有下面的

惯性定理 设有实二次型 $f = x^T Ax$,它的秩为 r,有两个实的可逆变换

$$x = Cy \text{ 及 } x = Pz$$

使 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0,\ i = 1,2,\cdots,r)$,

及 $f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0,\ i = 1,2,\cdots,r)$,

则 $k_1,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等,因而 $k_1,\cdots,k_r$ 中负数的个数也与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中负数的个数相等.

设秩为 r 的实二次型 $f = x^T Ax$ 通过实可逆线性变换 $x = Cy$ 可化为如下标准形:

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

则称为二次型 f 的规范形.

在实二次型 f 的规范形中,正平方项的个数 p 称为 f 的正惯性指数;负平方项的个数 $r - p$ 称为 f 的负惯性指数;它们的差 $p - (r - p) = 2p - r$ 称为 f 的符号差.

4. **化实二次型为标准形的方法**

(1) **正交变换法**

设二次型 $f = x^T Ax$,则存在正交变换 $x = Py$,使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值.

用正交变换化二次型 f 为标准形,实际上就是求正交矩阵 P,将二次型 f 的矩阵 A 对角化,即求正交矩阵 P 使

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda$$

由于 P 是正交矩阵,$P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$,这时矩阵 A 与 Λ 即相似又合同.

(2) 配方法

如果二次型 f 中含有变量 x_i 的平方项,则先把含有 x_i 的各项集中,按 x_i 配成完全平方,然后按此法对其他变量配方,直至都配成平方项.

如果二次型 f 中不含平方项,但有某个 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$,则先作一个可逆线性变换:

$$\begin{cases} x_i=y_i+y_i \\ x_j=y_i-y_i \\ x_k=y_k,\text{对于所有 } k\neq i,j \end{cases}$$

使二次型 f 出现平方项,再按上面方法配方.

5. 正定二次型

设有实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,如果对任何 $x\neq 0$,都有 $f(x)>0$,则称 f 为正定二次型,并称对称矩阵 A 是正定的,记作 $A>0$;如果对任何 $x\neq 0$,都有 $f(x)<0$,则称 f 为负定二次型,并称对称矩阵 A 是负定的,记作 $A<0$.

下面给出二次型正定(负定)的判别法.

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定的充要条件是下列条件之一成立:

(1) f 的标准形中的 n 个系数全为正;

(2) 对称矩阵 A 的特征值全大于 0;

(3) 对称矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于 0,即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |A| > 0.$$

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$ 为负定的充要条件是下列条件之一成立:

(1) f 的标准形中的 n 个系数全为负;

(2) 对称矩阵 A 的特征值全小于 0;

(3) 对称矩阵 A 的各阶顺序主子式中,奇数阶的全小于 0,偶数阶的全大于 0 .

二、例题分析

由于二次型 $f = x^T Ax$ 与对称矩阵 A 是一一对应的,因此对二次型 f 的研究,可以转化为对对称矩阵 A 的研究,化二次型 f 为标准形实际上就是寻找可逆矩阵 C,使 $C^T AC$ 为对角阵,或者说使 A 合同于对角阵 . 矩阵的合同与相似是两个不同的概念,但由于 A 是对称矩阵,因而存在正交矩阵 P 使 A 相似于对角矩阵 Λ,由于 $P^{-1} = P^T$,这时对矩阵 A 来说,相似与合同是一回事,即 A 既相似于 Λ 又合同于 Λ. 但若可逆矩阵 C 不是正交矩阵,虽然 $C^T AC = D$ 为对角阵,但这时 A 与 D 只是合同,不相似,在用正交变换化二次型 $f = x^T Ax$ 为标准形时,只要求出矩阵 A 的特征值,就可以写出标准形 .

【例 1】 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$

的秩为 2 .

(1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面 .

分析 二次型的秩就是二次型的矩阵的秩,根据秩为 2,可以确定参数 c 的值,由于正交变换不改变向量的长度,因此应用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$为标准形,标准形中平方项系数恰是二

次型的矩阵的特征值,由标准形容易判断 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 属于何种曲面.

【解】 (1) 二次型 f 的对应矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$$

将 A 通过初等变换化为阶梯形

$$A \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix}$$

因为 $\mathrm{r}(A) = 2$,所以 $c = 3$.

解特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(4-\lambda)(\lambda-9) = 0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$.

(2) 由于二次型 f 通过正交变换 $x = Py$ 化为下面的标准形:

$$f = 0 \cdot y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

所以方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 通过正交变换 $x = Py$ 化为 $4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$,它表示椭圆柱面.

【例 2】 已知二次曲面方程

$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$$

可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$,求 a, b 的值和正交矩阵 P.

分析 二次型经过正交变换化为标准形 $f = \eta^2 + 4\zeta^2$.根据二次型矩阵与标准形矩阵的关系确定 a, b 的值.

【解】 二次型 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz$ 的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

二次型经正交变换 $x = Py$ 化为标准形 $\eta^2 + 4\zeta^2$,它的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

由于 $P^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}AP = B$,所以 A 与 B 有相同的特征值 $0,1,4$,由特征值的性质

$$1 + a + 1 = 0 + 1 + 4,\text{得 } a = 3$$

将 $a = 3$ 代入 A,由

$$|A| = -(b-1)^2 = 0 \times 1 \times 4 = 0,\text{得 } b = 1$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

也可用一般方法,通过比较矩阵 A 的特征多项式与 B 的特征多项式的同次幂系数求得 a, b.

A 的属于特征值 0 的特征向量 $\alpha_1 = (-1, 0, 1)^T$,单位化得

$$\gamma_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

A 的属于特征值 1 的特征向量 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$,单位化得

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

A 的属于特征值 4 的特征向量 $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$,单位化得

$$\gamma_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

正交矩阵为

$$P = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

【例 3】 设二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$$

经正交变换 $x = Py$ 化为

$$f = y_2^2 + 2y_3^2.$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 是 3 维列向量, P 是 3 阶正交矩阵,试求常数 α, β.

【解】 二次型

$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$ 的系数矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

正交变换后的标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$ 的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix},$$

由于 $B=P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP$,所以 A 与 B 有相同的特征多项式,即

$$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$$

故得

$$-\lambda^3+3\lambda^2-(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda-(\alpha-\beta)^2=-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda.$$

比较上式两端 λ 的同次幂的系数得 $\alpha=\beta=0$.

注　参数 α,β 也可以根据 A,B 特征值相同来确定,因为 B 的特征值是 0,1,2,故它们也是特征方程

$$|A-\lambda E|=-\lambda^3+3\lambda^2-(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda-(\alpha-\beta)^2=0$$

的根 以 $\lambda=0$ 代入得 $\alpha=\beta$;以 $\lambda=1$ 代入得 $\alpha=\beta=0$.

但是根据特征值的性质:① $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i$,② $|A|=\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i$,不能确定参数 α 和 β,也就是说这种方法不是普遍适用的.

【例 4】　设 A 为 n 阶对称阵,$\mathrm{r}(A)=n$,二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j,$$

其中,A_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(1) 记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,把 f 表示为矩阵形式,并证明 f 的矩阵为 A^{-1};

(2) 二次型 $g=x^{\mathrm{T}}Ax$ 与 f 的规范形是否相同?说明理由.

【解】　(1) 根据二次型的矩阵表示方法

$$f=x^{\mathrm{T}}\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}x=x\frac{A^*}{|A|}x=x^{\mathrm{T}}A^{-1}x.$$

于是, f 的矩阵是 A^{-1} .

(2) 由于 A 是对称矩阵, 于是

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}AA^{-1}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}AA^{-1}=A^{-1}AA^{-1}=A^{-1}.$$

所以 A 与 A^{-1} 合同, 因此 f 和 g 的规范形相同 .

【例 5】 设二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$, $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为矩阵 A 的最大和最小特征值, 试证若 $\|x\|=1$, 则

$$\lambda_{\min}\leq x^{\mathrm{T}}Ax\leq\lambda_{\max}$$

【证明】 存在正交变换 $x=Py$ 使二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为标准形

$$\begin{aligned}f&=x^{\mathrm{T}}Ax=(Py)^{\mathrm{T}}A(Py)=y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)y\\&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值 .

由于 $[x,x]=1$, $y=P^{-1}x=P^{\mathrm{T}}x$, 则有

$$[y,y]=[P^{\mathrm{T}}x,P^{\mathrm{T}}x]=(P^{\mathrm{T}}x)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}PP^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}x=[x,x]=1$$

从而有

$$\begin{aligned}\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2&\leq\lambda_{\max}(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\\&=\lambda_{\max}[y,y]=\lambda_{\max}\end{aligned}$$

同理 $$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\geq\lambda_{\min}.$$

因此对任意的 $\|x\|=1$, 有

$$\lambda_{\min}\leq x^{\mathrm{T}}Ax\leq\lambda_{\max}.$$

下面说明最大值和最小值可达到, 不妨假设 $\lambda_1=\lambda_{\min}$, $\lambda_n=\lambda_{\max}$, 取

$$e_1=(1,0,\cdots,0,0)^{\mathrm{T}}\quad e_n=(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$$

则当 $x=Pe_1$ 时,

$$x^{\mathrm{T}}Ax=\lambda_1\cdot1^2+\lambda_2\cdot0^2+\cdots+\lambda_n\cdot0^2=\lambda_1=\lambda_{\min}$$

同样当 $x=Pe_n$ 时

$$x^{\mathrm{T}}Ax=\lambda_1\cdot0^2+\cdots+\lambda_{n-1}\cdot0^2+\lambda_n\cdot1^2=\lambda_n=\lambda_{\max}.$$

【例 6】 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $|A|<0$, 证明: 必存在实

n 维向量 $x\neq 0$,使得 $x^{\mathrm{T}}Ax<0$.

【证明】 因为 A 是 n 阶实对称矩阵,且 $|A|<0$,所以二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩为 n,且不是正定的,因而矩阵 A 的特征值至少有一个小于 0,二次型 f 经正交变换 $x=Py$ 化为

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值 .

不妨假设 $\lambda_n<0$,取 $e_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$, $x_0=Pe_n$,则

$$f=x_0^{\mathrm{T}}Ax_0=\lambda_1\cdot 0^2+\cdots+\lambda_{n-1}\cdot 0^2+\lambda_n\cdot 1^2=\lambda_n<0 .$$

即有实 n 维向量 x_0,使 $x_0^{\mathrm{T}}Ax_0<0$.

【例 7】 设有二次型

$$f=x_1^2+3x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$$

将二次型 f 化为标准形,并写出所用的可逆线性变换 .

【解】 由于题目没有要求用正交变换化二次型为标准形,下面用配方法化二次型为标准形 .

由于 f 中含变量 x_1 的平方项,所以先把含 x_1 的各项集中,配方可得

$$\begin{aligned}
f&=(x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3)+3x_2^2+6x_3^2+10x_2x_3\\
&=[x_1^2-4(x_2+x_3)x_1+4(x_2+x_3)^2]-4(x_2+x_3)^2\\
&\quad+3x_2^2+6x_3^2+10x_2x_3\\
&=(x_1-2x_2-2x_3)^2-x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2
\end{aligned}$$

继续对 x_2 进行配方得

$$\begin{aligned}
f&=(x_1-2x_2-2x_3)^2-(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)+3x_3^2\\
&=(x_1-2x_2-2x_3)^2-(x_2-x_3)^2+3x_3^2
\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}
y_1=x_1-2x_2-2x_3\\
y_2=x_2-x_3\\
y_3=x_3
\end{cases}$$

则二次型 f 的标准形为

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2$$

由上述变换解出 x_1, x_2, x_3,即得所作的可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

注　如果在二次型

$$f = (x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2$$ 中令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = \sqrt{3}\,x_3 \end{cases}$$

则二次型 f 的标准形为

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

由此可见,二次型的标准形不是惟一的,而且与所作的可逆线性变换有关 .

【例 8】　用配方法化二次型

$$f = 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

化为标准形,并写出所用的可逆线性变换 .

【解】　由于二次型 f 中不含平方项,但含有 $2x_1x_2$,所以先作下面的可逆线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases},\ \text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

于是

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3$$
$$= 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

则二次型 f 的标准形为

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2$$

为了写出所用的可逆线性变换,由上述变换解得

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + \dfrac{1}{2}z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}, \text{即} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

从而得所用的可逆线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

下面讨论二次型的正定性 .

【例 9】 试证:如果 A, B 都是 n 阶正定矩阵,则 $A + B$ 也是

正定矩阵 .

【证明】 因为 A, B 都是 n 阶对称矩阵,所以

$$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=A+B.$$

即 $A+B$ 也是对称矩阵,令二次型 $f=x^{\mathrm{T}}(A+B)x$.

由于 A, B 都是 n 阶正定矩阵,所以对任意的 n 维列向量 $x\neq 0$,都有

$$x^{\mathrm{T}}Ax>0,\ x^{\mathrm{T}}Bx>0,$$

从而有

$$f=x^{\mathrm{T}}(A+B)x=x^{\mathrm{T}}Ax+x^{\mathrm{T}}Bx>0$$

即 f 为正定二次型,从而矩阵 $A+B$ 也是正定矩阵 .

【例 10】 设 A 为 n 阶实对称矩阵,则 A 为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵 U,使 $A=U^{\mathrm{T}}U$.

【证明】 充分性:若存在可逆矩阵 U,使 $A=U^{\mathrm{T}}U$,则对任意的 n 维列向量 $x\neq 0$】,有 $Ux\neq 0$】,并且

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}Ux=(Ux)^{\mathrm{T}}(Ux)>0,$$

即矩阵 A 的二次型是正定二次型,从而由定义知, A 是正定矩阵 .

必要性:因 A 是实对称矩阵,则存在正交矩阵 Q,使

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中, λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n 是 A 的 n 个特征值 .但 A 为正定矩阵,故 $\lambda_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$.

由于

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$

$$= Q\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^{\mathrm{T}}$$

令

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^{\mathrm{T}}$$

则 U 是可逆矩阵,且 $A = U^{\mathrm{T}} U$.

【例 11】 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^{T} 为 B 的转置矩阵,试证: $B^{\mathrm{T}} AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $\mathrm{r}(B) = n$.

分析 矩阵 $B^{\mathrm{T}} AB$ 正定当且仅当二次型 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}} AB) x$ 正定,即对任意的 $x \neq 0$, $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}} AB) x > 0$,并注意到 $\mathrm{r}(B) = n$ 当且仅当方程组 $Bx = 0$ 只有零解 .

【证明】 必要性:设 $B^{\mathrm{T}} AB$ 为正定矩阵,则对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$,有

$$x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}} AB) x > 0,$$

即

$$(Bx)^{\mathrm{T}} A(Bx) > 0,$$

从而 $Bx \neq 0$,由于对任意的 $x \neq 0$,都有 $Bx \neq 0$,因此方程组 $Bx = 0$ 只有零解,从而 $\mathrm{r}(B) = n$.

充分性:因 $(B^{\mathrm{T}} AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} B = B^{\mathrm{T}} AB$,故 $B^{\mathrm{T}} AB$ 为实对称矩阵 .

若 $\mathrm{r}(B) = n$,则线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解 .从而对任意实

n 维列向量 $x \neq 0$ 有 $Bx \neq 0$.

又 A 为正定矩阵,所以对于 $Bx \neq 0$ 有 $(Bx)^{\mathrm{T}} A(Bx) > 0$.

于是当 $x \neq 0$ 时,$x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}} AB)x > 0$,故 $B^{\mathrm{T}} AB$ 为正定矩阵 .

【例 12】 设有 n 元实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2,$$

其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为实数 .试问:当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足何种条件时,二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型?

分析 根据题意,给出的二次型对于任意 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 都有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$ 所以要使二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的,只要对于任意 $x \neq 0$,都有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$ 即只要求出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足何种条件时,方程组

$$x_1 + a_1 x_2 = 0, x_2 + a_2 x_3 = 0, \cdots, x_n + a_n x_1 = 0$$

只有零解 .

【解】 由于对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \neq 0$,二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0 .$$

所以,二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的充要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足何种条件时,线性齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0, \\ x_2 + a_2 x_3 = 0, \\ \quad \cdots \\ x_n + a_n x_1 = 0, \end{cases}$$

只有零解,方程组只有零解的充要条件是其系数矩阵行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0 .$$

所以,当 $1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时,二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的 .

【例 13】 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

矩阵 $B = (kE + A)^2$,其中 k 为实数, E 为单位矩阵,求对角矩阵 Λ,使 B 与 Λ 相似,并求 k 为何值时, B 为正定矩阵 .

分析 由矩阵 A 可求得它的三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,从而矩阵 B 的三个特征值为 $(k + \lambda_1)^2, (k + \lambda_2)^2, (k + \lambda_3)^2$. A 是实对称矩阵,从而 B 也是实对称矩阵 .因此

$$\Lambda = \mathrm{diag}((k + \lambda_1)^2, (k + \lambda_2)^2, (k + \lambda_3)^2) .$$

根据正定矩阵的充要条件,只要 B 的三个特征值均大于零,即 k 满足 $k + \lambda_1 \neq 0$, $k + \lambda_2 \neq 0$, $k + \lambda_3 \neq 0$.

【解】 A 的特征多项式 $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 2)^2$, A 的特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$,从而矩阵 $B = (kE + A)^2$ 的三个特征值为 k^2, $(k+2)^2$, $(k+2)^2$.于是

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k^2 & & \\ & (\lambda + 2)^2 & \\ & & (\lambda + 2)^2 \end{pmatrix}$$

因此,当 $k \neq 0$ 且 $k \neq -2$ 时, B 为正定矩阵 .

【例 14】 已知 A 是实对称矩阵,试证明存在实数 t,使 $A + tE$ 为正定矩阵

分析 由于实对称矩阵 A 的特征值均为实数,因而可取充分大的 t,使矩阵 $A + tE$ 的特征值均为正数 .

【证明】 因为 A 为实对称矩阵,所以对任意的实数 t,

$$(A+tE)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+tE^{\mathrm{T}}=A+tE$$

即 $A+tE$ 是实对称矩阵.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值,令

$$\mu=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\},$$

取 $t>\mu$,则

$$\lambda_i+t>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

即 $A+tE$ 的特征值全为正,从而矩阵 $A+tE$ 正定.

【例 15】 设 A、B 均为实对称矩阵, A 的特征值均大于 a, B 的特征值均大于 b,试证矩阵 $A+B$ 的特征值均大于 $a+b$.

【证明】 由于 A 是实对称矩阵,所以

$$(A-aE)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}-aE^{\mathrm{T}}=A-aE$$

即 $A-aE$ 也是实对称矩阵,且特征值均大于 0,因此 $A-aE$ 是正定矩阵.同理 $B-bE$ 也是正定矩阵,从而由例 9 知,矩阵

$$(A-aE)+(B-bE)=(A+B)-(a+b)E$$

也正定

设 $A+B$ 的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$,则矩阵$(A+B)-(a+b)E$ 的特征值为 $\mu_1-(a+b),\mu_2-(a+b),\cdots,\mu_n-(a+b)$,从而有

$$\mu_i-(a+b)>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

即 $\mu_i>a+b,\ i=1,2,\cdots,n$.

【例 16】 试证实可逆矩阵一定可表示为正交矩阵和正定矩阵的乘积.

【证明】 设 A 为 n 阶实对称矩阵,由例 10 的证明知道 $A^{\mathrm{T}}A$ 是正定矩阵,设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为正.存在正交矩阵 P,使

$$P^{T}(A^{T}A)P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

从而

$$A^{T}A=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{T}$$

$$=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{T}P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{T}$$

$$=S^2$$

其中 $S=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{T}$ 为正定矩阵.

令 $Q=AS^{-1}$,则有

$$Q^{T}Q=(AS^{-1})^{T}(AS^{-1})=(S^{-1})^{T}A^{T}(AS^{-1})$$

$$=(S^{T})^{-1}(A^{T}A)S^{-1}=S^{-1}S^{2}S^{-1}=E,$$

所以 Q 为正交矩阵,由 $Q=AS^{-1}$,得

$$A=QS.$$

三、练习题

1．二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经正交变换化成标准形 $f = 3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2$，求 a，b 及所用的正交矩阵，若 $x^{\mathrm{T}}x = 2$，求 f 的最大值．

2．设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $B = \lambda E + A^{\mathrm{T}}A$，试证 $\lambda > 0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵．

3．设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2 + 2A = 0$，已知 A 的秩 $\mathrm{r}(A) = 2$，

(1) 求 A 的全部特征值．

(2) 当 k 为何值时，$A + kE$ 为正定矩阵？

4．设有矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

(1) 已知 A 的一个特征值为 1，求 x；

(2) 求矩阵 P，使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角阵．

5．试指出二次曲面

$$x^2 + (2+\lambda)y^2 + \lambda z^2 + 2xy - 2xz - yz = 5$$

中参数 λ 取何值时，该曲面为椭球面．

6．设 A 为 n 阶实对称矩阵，试证明：矩阵 A 可逆的充要条件是存在 n 阶方阵 B，使 $AB + B^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵．

四、练习题解答

1．二次型 f 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

二次型经正交变换 $x=Py$ 化成标准形 $f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$，则矩阵 A 的特征值为 $3,3,b$，由特征值的性质

$$1+1+1=3+3+b$$

解得 $b=-3$，再由 3 是 A 的特征值，所以

$$|A-3E|=2(a+2)^2=0$$

解得 $a=-2$.

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-3$，对于 $\lambda_{1,2}=3$，求解方程组 $(A-3E)x=0$，由

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

将 α_1,α_2 正交化，取

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

再单位化

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda_3=-3$ 的单位特征向量为

$$\alpha_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

所求正交矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

2．由于 $B^{T}=(\lambda E+A^{T}A)^{T}=\lambda E+A^{T}A=B$，所以 B 为实对称矩阵．

设 x 为 n 维非零列向量，则

$$x^{T}Bx=x^{T}(\lambda E+A^{T}A)x=\lambda x^{T}x+x^{T}A^{T}Ax$$
$$=\lambda x^{T}x+(Ax)^{T}(Ax).$$

Ax 是实向量，于是 $Ax^{T}(Ax)\geq 0$，x 是非零实向量，故 $x^{T}x>0$，且 $\lambda>0$．因此对于任意非零列向量 x 都有

$$x^{T}Bx>0.$$

此即 B 是正定矩阵．

3．(1) 因为 $A^{2}+2A=0$，所以 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^{2}+2\lambda=0$，因此 A 的特征值只能为 -2 和 0，由于 A 可对角化以及 $r(A)=2$，故 A 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$．

(2) 由于 $A+kE$ 的特征值为 λ_1+k，λ_2+k，λ_3+k，即 $-2+k$，$-2+k$，k，为使 $A+kE$ 为正定矩阵，必须有 $-2+k>0$，$k>0$，即当 $k>2$ 时，$A+kE$ 是正定矩阵．

4．(1) 矩阵 A 的特征方程为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & x-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(2-\lambda)[(2-\lambda)(x-\lambda)-1]=0$$

因为 $\lambda=1$ 是 A 的一个特征值，所以将 $\lambda=1$ 代入上式即得 $x=2$．于是

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

(2) 因为 $A^{T}=A$,所以 A^{2} 为对称矩阵,又 $(AP)^{T}(AP)=P^{T}A^{2}P$,令二次型 $f=x^{T}A^{2}x$,则

只需将二次型 $f=x^{T}A^{2}x$ 化为标准形,由于

$$f=x^{T}A^{2}x=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}4&0&0\\0&5&4\\0&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=4x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3$$

$$=4x_1^2+5\left(x_2+\frac{4}{5}x_3\right)^2+\frac{9}{5}x_3^2$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_2+\dfrac{4}{5}x_3\\y_3=x_3\end{cases}$$

则二次型的标准形为

$$f=4y_1^2+5y_2^2+\frac{9}{5}y_3^2$$

由上述变换可得

$$\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2-\dfrac{4}{5}y_3\\x_3=y_3\end{cases},\ 即\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\dfrac{4}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

取 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\dfrac{4}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}$,则有

$$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=\begin{bmatrix}4 & & \\ & 5 & \\ & & \frac{9}{5}\end{bmatrix}$$

5. **要该曲面为椭球面,二次型**

$$f=x^2+(2+\lambda)y^2+\lambda z^2+2xy-2xz-yz$$

必须是正定二次型,即 f **的矩阵**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2+\lambda & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & \lambda\end{bmatrix}$$

为正定的,必须 A **的各阶顺序主子式都大于** 0,**即**

$$|1|=1>0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2+\lambda\end{vmatrix}=1+\lambda>0,\quad |A|=\lambda^2-\frac{5}{4}>0$$

由此解得 $\lambda>\sqrt{5}/2$,**故当** $\lambda>\sqrt{5}/2$ **时,二次曲面** $f=5$ **为椭球面**.

6. **必要性:若** A **可逆,则** A^{-1}**存在,取** $B=A^{-1}$,**因为** $B^{\mathrm{T}}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}$,**所以** $AB+B^{\mathrm{T}}A=AA^{-1}+A^{-1}A=2E$,**而** $2E$ **为正定矩阵,故** $AB+B^{\mathrm{T}}A$ **为正定矩阵**.

充分性:用反证法.

若 A **不可逆,则存在向量** $x\neq 0$,**使** $Ax=0$,**从而对任意** n **阶方阵** B,**有**

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}(AB+B^{\mathrm{T}}A)x&=x^{\mathrm{T}}ABx+x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Ax\\&=(Ax)^{\mathrm{T}}(Bx)+(Bx)^{\mathrm{T}}(Ax)\\&=0\end{aligned}$$

这与 $AB+B^{T}A$ **为正定矩阵矛盾,故** A **可逆**.

复习题五

1. **填空题**

(1) 若 n 阶矩阵 A 满足 $|2A+3E|=0$,则 A 必有一个特征值为________.

(2) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值为________.

(3) 已知 4 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 有一个特征值为 0,则 $x=$________.

(4) 已知3阶矩阵 A 的特征值是0,1,-2,矩阵 $B=2A^3+A^2-3E$,则与 B 相似的对角形矩阵 $\Lambda=$________.

(5) 若4阶矩阵 A 与 B 相似,矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,则行列式 $|B^{-1}-E|=$________.

(6) n 阶矩阵 A 的元素全为1,则 A 的 n 个特征值是________.

(7) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的,则 t 的取值范围是________.

(8) 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4_2x_4,$$

经正交变换 $x=py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=$________.

2. **选择题**

(1) 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征根,则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于(   ).

(A) 4/3; (B) 3/4; (C) 1/2; (D) 1/2.

(2) 设 A 为 n 阶可逆矩阵,λ 是 A 的一个特征根,是 A 的伴随矩阵 A^* 的特征根之一是( ).

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$; (B) $\lambda^{-1}|A|$; (C) $\lambda|A|$; (D) $\lambda|A|^n$.

(3) n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的( ).

(A) 充分必要条件; (B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件; (D) 既非充分也非必要条件.

(4) 设 A, B 为 n 阶矩阵,且 A 与 B 相似,E 为 n 阶单位矩阵,则( ).

(A) $\lambda E - A = \lambda E - B$;

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量;

(C) A 与 B 都相似于一个对角矩阵;

(D) 对任意常数 t, $tE - A$ 与 $tE - B$ 相似.

(5) 设 3 阶矩阵 A 的特征值全为零,则一定有( ).

(A) $\mathrm{r}(A) = 0$; (B) $\mathrm{r}(A) = 1$;

(C) $\mathrm{r}(A) = 2$; (D) $\mathrm{r}(A) < 3$.

(6) 设 A 是 n 阶实对称矩阵,P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是( ).

(A) $P^{-1}\alpha$; (B) $P^{\mathrm{T}}\alpha$;

(C) $P\alpha$; (D) $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$.

(7) 设 λ 与 x 是 n 阶矩阵 A 的特征值和特征向量,P 是 n 阶可逆矩阵,则( ).

(A) $P^{-1}AP$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$,其对应的特征向量为 Px;

(B) $P^{-1}AP$ 的特征值为 λ,其对应的特征向量为 Px;

(C) $P^{-1}AP$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$,其对应的特征向量为 $P^{-1}x$;

(D) $P^{-1}AP$ 的特征值为 λ,其对应的特征向量为 $P^{-1}x$.

(8) 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 A 与 B(　　).

(A) 合同且相似;　　(B) 合同但不相似;

(C) 不合同但相似;　　(D) 不合同且不相似.

3. 已知4维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,且与 β_1,β_2 都正交,试证 β_1,β_2 线性相关.

4. 设 A,B 为同阶方阵,

(1) 如果 A,B 相似,试证 A,B 的特征多项式相等.

(2) 举一个二阶方阵的例子,说明(1)的逆命题不成立.

(3) 当 A,B 均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立.

5. 设 A 为 n 阶正交矩阵,且 $|A|<0$,试证 $A+E$ 为不可逆矩阵.

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 a 和 b;

(2) 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$.

7. 某试验性生产线每年1月进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后,将1/6熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经培训及实践,至年终考核有2/5成为熟练工.设第 n 年1月统计的熟练工及非熟练工所占百分比分别是 x_n 与 y_n,记为 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向

量,并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时,求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

8. 设 A 为 n 阶正定矩阵,证明 $|A+E|>1$.

9. 设 A 是 n 阶正定矩阵,B 是 n 阶反对称矩阵,试证 $A-B^2$ 为正定矩阵.

10. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 是一实二次型,若有实 n 维向量 x_1,x_2,使

$$x_1^{\mathrm{T}}Ax_1>0,\quad x_2^{\mathrm{T}}Ax_2<0$$

证明:必存在实 n 维向量 $x_0\neq 0$,使 $x_0^{\mathrm{T}}Ax_0=0$.

复习题五答案或提示

1. (1) $-\frac{3}{2}$; (2)4; (3) -1; (4) $\begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & -15 \end{pmatrix}$;

(5)24;

分析 因为 A 与 B 相似,所以 A 与 B 的特征值相等,B 的特征值也是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$, B^{-1} 的特征值为 2,3,4,5, $B^{-1}-E$ 的特征值为 1,2,3,4,因此 $|B^{-1}-E|=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

(6) $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$;

分析 因为 n 阶矩阵 A 的元素全为 1,设 $x=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,则

$$Ax=nx.$$

所以 n 是实对称矩阵 A 的一个特征值.由于 $\mathrm{r}(A)=1$,因此 A 只有一个非零特征值,其余 $n-1$ 个特征值全为 0.

(7) $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$;

分析 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{t}{2}\\ 0 & \frac{t}{2} & 1\end{pmatrix}$$

矩阵 A **正定的充要条件为** A **的各阶顺序主子式全大于** 0,**由**

$$2>0,\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1>0,\ |A|=1-\frac{t^2}{2}>0$$

解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

(8) 2.

分析 **二次型** $f(x_1,x_2,x_3)$**的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

由于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$**经正交变换** $x=py$ **可化成标准形**$f=6y_1^2$,**则** A **的特征值为** 6,0,0. **由矩阵特征值的性质**$\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i$,**得**

$$a+a+2=6+0+0$$

解得 $a=2$.

本题也可根据二次型的标准形为 $f=6y_1^2$ **得** $\mathrm{r}(A)=1$,**由**

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & a-2 & 0\\ 0 & 0 & a-2\end{pmatrix}\qquad \text{得 } a=2.$$

2.(1) B;

分析 $\lambda=2$ **是** A **的一个特征值**,$2^2=4$ **是** A^2 **的一个特征值**,$\frac{4}{3}$**是**$\frac{1}{3}A^2$ **的一个特征值**. **因为** A **是非奇异矩阵**,**所以**$\frac{1}{3}A^2$ **也是非奇异矩阵**,**于是**$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}$**是**$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$**的一个特征值**. **所以**(B)**正确**,**其余选项都不正确**.

(2) B;

分析 因为 A 可逆,所以 $A^{*}=|A|A^{-1}$,由于 λ 是 A 的一个特征根,因此 λ^{-1} 是 A^{-1} 的一个特征根,从而 $\lambda^{-1}|A|$ 是 A^{*} 的一个特征根.所以(B)正确,其余选项都不正确.

(3) B;

分析 因为当 n 阶方阵 A 具有 n 个不同特征值时,A 一定有 n 个线性无关的特征向量,所以 A 与对角阵相似.然而,当 A 与对角阵相似时,A 不一定有 n 个不同特征值.例如单位阵 E,它与对角阵相似,它有 n 个相等特征值.因此 A 有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的充分条件而非必要条件.所以选择(B),其余选项都不正确.

(4) D;

分析 因为 A 与 B 相似,所以存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$.

故
$$P^{-1}(tE-A)P=tE-P^{-1}AP=tE-B.$$

此即 $tE-A$ 与 $tE-B$ 相似,因此选项(D)正确.

当 A 与 B 相似时,特征多项式相等 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.但当 $A\neq B$ 时,$\lambda E-A\neq\lambda E-B$,故(A)不正确.$A$ 与 B 有相同的特征值,但特征向量不一定不相同,故(B)不正确.当 A 相似 B 时,并不一定能与对角阵相似,故(C)不正确.

(5) D;

分析 由于 A 的特征值为 0,所以 $|A|=0$,从而 $\mathrm{r}(A)<3$,选项(D)正确.

取

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则它们的特征值全为 0,但 $\mathrm{r}(P)=0$,$\mathrm{r}(Q)=1$,$\mathrm{r}(R)=2$,所以选项(A),(B),(C)不正确.

(6) B;

分析 令
$$B=\left(P^{-1}AP\right)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1},$$
则
$$A=\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}BP^{\mathrm{T}}.$$
把它代入 $A\alpha=\lambda\alpha$,得 $\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}BP^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda\alpha$. 所以 $B\left(P^{\mathrm{T}}\alpha\right)=\lambda\left(P^{\mathrm{T}}\alpha\right)$,即 $\left(P^{-1}AP\right)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 $P^{\mathrm{T}}\alpha$. 因此选择(B).

(7) D;

分析 由 $Ax=\lambda x$ 得
$$A\left(PP^{-1}\right)x=\lambda x.$$
上式两边左乘 P^{-1} 得
$$\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}x\right)=\lambda\left(P^{-1}x\right).$$
故 λ 是 $P^{-1}AP$ 的特征值,其对应的特征向量为 $P^{-1}x$,因此(D)正确,其余选项不正确.

(8) A.

分析 因 A 是实对称矩阵且 $\mathrm{r}(A)=1$,因此 A 只有一个非零特征值,令 $x=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,则 $Ax=4x$,从而 4 是 A 的一个特征值. 因此 A 的特征值为 $\lambda_1=4$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$,从而 A 与 B 有相同的特征值. 由于存在正交矩阵 P,使 $P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=B$,所以 A 与 B 既合同又相似,选项(A)正确,其余选项不正确.

3. 设所给向量均为列向量,令
$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \alpha_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$
则方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有 $4-\mathrm{r}(A)=4-3=1$ 个向量,由于 β_1,β_2 均为 $Ax=0$ 的解,所以 β_1,β_2 线性相关.

4. (1) 设 $B=P^{-1}AP$,则
$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|\\&=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|.\end{aligned}$$

(2) 例如 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,则
$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda^2$$

若存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = B = 0$,则

$$A = P0P^{-1} = 0,$$

这与 $A \neq 0$ 矛盾,从而 A 与 B 不相似 .

(3) 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵,且 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$,所以 A 与 B 的特征值都是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 于是存在正交矩阵 P, Q 满足

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = Q^{-1}BQ$$

因此

$$QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B.$$

即 A 与 B 相似 .

5. 提示: $A^{\mathrm{T}}A = E \quad |A|^2 = 1 \quad |A| = -1$,从而有

$$|A + E| = |A||E + A^{\mathrm{T}}| = |A||E + A|$$

由 $(1 - |A|)|A + E| = 0 \quad |A + E| = 0 \quad A + E$ 不可逆 .

注 此结论也相当于 -1 为 A 的一个特征值 .

6. (1) $a = 0, b = -2$; (2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. (1) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5}{6}x_n + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}x_n + y_n\right), \\ y_{n+1} = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}x_n + y_n\right). \end{cases}$ 化简得

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{9}{10}x_n + \dfrac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{10}x_n + \dfrac{3}{5}y_n, \end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(2) 令 $P = (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,则由 $|P| = 5 \neq 0$ 知, η_1, η_2 线性无关 .

因 $A\eta_1 = \eta_1$,故 η_1 为 A 的特征向量,且相应的特征值 $\lambda_1 = 1$.

因 $A\eta_2=\dfrac{1}{2}\eta_2$，故 η_2 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，有 $A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

于是

$$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}.$$

$$A^n=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

8. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，因 A 为正定矩阵，所以 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 由于 $A+E$ 的全部特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$，从而

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

9. 提示：$B^{\mathrm{T}}=-B \quad A-B^2=A+B^{\mathrm{T}}B$ 为对称矩阵.

$\forall x\neq 0$，有

$$f=x^{\mathrm{T}}(A+B^{\mathrm{T}}B)x=x^{\mathrm{T}}Ax+x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Bx$$

$$= x^{T}Ax + (Bx)^{T}(Bx) > 0$$

即 $A - B^2 = A + B^{T}B$ 为正定矩阵 .

10. 由 $x_1^{T}Ax_1 > 0, x_1^{T}Ax_2 < 0$, 说明矩阵 A 的特征值有正有负 . 存在可逆变换 $x = Cy$ 将二次型化为规范形

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

且 $1 \leq p < r \leq n$.

取

$$y_0 = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ p\text{ 行} \\ p+1\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

则 $x_0 = Cy_0 \neq 0$, 从而有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_0^{T}Ax_0 = 1^2 - 1^2 = 0$$

附　　录

近年来硕士研究生入学考试数学试卷中线性代数试题(附:答案与提示)

为便于总复习及自我检查,我们选编了硕士研究生入学考试数学试卷中线性代数部分的试题.由于从 1997 年开始,数学试卷调整为四种,从数学一到数学四,以适应不同专业的需要,题型为填空、选择、计算及证明.下面给出从 1997 年到 2003 年数学试卷中出现的全部线性代数试题,按题型分类列出,并在每题后面注明出处.

一、填空题

1.设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

B 为三阶非零矩阵,且 $AB=0$,则 $t=$ ________.(1997 年数学一)

2.已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$,$\alpha_2=(2,0,t,0)$,$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$的秩为 2,则 $t=$ ________.(1997 年数学二)

3.若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$$

是正定的,则 t **的取值范围是**________. (1997 **年数学三**)

4. **设** n **阶矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $|A| =$ ________. (1997 **年数学四**)

5. **设** A **为** n **阶矩阵**, $|A| \neq 0$, A^* **为** A **的伴随矩阵**, E **为** n **阶单位矩阵**, **若** A **有特征值** λ, **则** $(A^*)^2 + E$ **必有特征值**________. (1998 **年数学一**)

6. **设矩阵** A, B **满足** $A^*BA = 2BA - 8E$, **其中**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

E **为单位矩阵**, A^* **为** A **的伴随矩阵**, **则** $B =$ ________.

(1998 **年数学三、四**)

7. **设** A, B **均为** n **阶矩阵**, $|A| = 2$, $|B| = -3$, **则** $|2A^*B^{-1}| =$ ________. (1998 **年数学四**)

8. **设** n **阶矩阵** A **的元素全为** 1, **则** A **的** n **个特征值是**________. (1999 **年数学一**)

9. **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **而** $n \geq 2$ **为正整数**, **则** $A^n - 2A^{n-1} =$ ________. (1999 **年数学三、四**)

10 . 已知 $AB - B = A$,其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,则 $A =$ __________ .　　(1999 年数学四)

11 . 已知方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

无解,则 $a =$ __________ .　　(2000 年数学一)

12 . 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix},$$

E 为四阶单位矩阵, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$,则 $(E + B)^{-1} =$ __________ .　　(2000 年数学二)

13 . 若四阶矩阵 A 与 B 相似,矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$,则行列式 $|B^{-1} - E| =$ __________ .　　(2000 年数学三)

14 . 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| =$ __________ .　　(2000 年数学四)

15 . 已知四阶矩阵 A 相似于 B, A 的特征值为 2,3,4,5, E 为四阶单位矩阵,则 $|B - E| =$ __________ .　　(2000 年数学四)

16 . 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = 0$,其中 E 为单位矩阵,则 $(A - E)^{-1} =$ __________ .　　(2001 年数学一)

17 . 设方程 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解,则

$a=$ ________ . (2001 年数学二)

18 . 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix},$$

且秩$(A)=3$,则 $k=$ ________ . (2001 年数学三、四)

19 . 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

则第四行各元素余子式之和的值为________ . (2001 年数学四)

20 . 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=$ ________ . (2002 年数学一)

21 . 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是________ .

(2002 年数学二)

22 . 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,三维列向量 $\alpha=(a,1,1)^{T}$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关,则 $a=$ ________ . (2002 年数学三)

23 . 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=A^2-3A+2E$,则 $B^{-1}=$ ________ . (2002 年数学四)

24 . 设向量组 $\alpha_1=(a,0,c)$, $\alpha_2=(b,c,0)$, $\alpha_3=(0,a,b)$线

性无关,则 a,b,c 必满足关系式__________ . (2002 年数学四)

25 . 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为__________ . (2003 年数学一)

26 . 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置,若

$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\alpha^T\alpha=$__________ . (2003 年数学二)

27 . 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$,其中 E 为三阶单位矩阵,若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,则 $|B|=$__________ .

(2003 年数学二)

28 . 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$, $a<0$; E 为 n 阶单位矩阵,矩阵

$$A=E-\alpha\alpha^T,\ B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中 A 的逆矩阵为 B,则 $a=$__________ . (2003 年数学三、四)

29 . 设 A,B 均为三阶矩阵, E 是三阶单位矩阵 .已知

$AB=2A+B$, $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$,则 $(A-E)^{-1}=$__________ .

(2003 年数学四)

二、选择题

1．设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

则三条直线

$$a_ix+b_iy+c_i=0\quad(i=1,2,3)$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq0,\ i=1,2,3$) 交于一点的充要条件是(　　)．

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(C) 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$秩$(\alpha_1,\alpha_2)$；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，α_1,α_2 线性无关．(1997 年数学一)

2．设 A,B 为同阶可逆矩阵，则(　　)．

(A) $AB=BA$；

(B) 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$；

(C) 存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=B$；

(D) 存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$．　(1997 年数学三)

3．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是(　　)．

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$；

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$；

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$；

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$．

(1997 年数学三、四)

4．非齐次线性方程组

$$Ax=b$$

中末知数的个数为 n,方程个数为 m,系数矩阵 A 的秩为 r,则(　　).

(A) $r=m$ 时,方程组 $Ax=b$ 有解;

(B) $r=n$ 时,方程组 $Ax=b$ 有惟一解;

(C) $m=n$ 时,方程组 $Ax=b$ 有惟一解;

(D) $r<n$ 时,方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.　(1997 年数学四)

5 . 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的,则直线

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$$

与直线

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$

是(　　).

(A) 相交于一点;　　(B) 重合;

(C) 平行但不重合;　　(D) 异面.　(1998 年数一)

6 . 设 A 是任一 $n(n\geq 3)$ 阶方阵,A^* 是其伴随矩阵 .又 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有$(kA)^*=$(　　).

(A) kA^*;　　(B) $k^{n-1}A^*$;

(C) k^nA^*;　　(D) $k^{-1}A^*$.　(1998 年数学二)

7 . 设 n 阶$(n\geq 3)$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

若矩阵的秩为 $n-1$,则 a 必为(　　).

(A) 1;　　(B) $\dfrac{1}{1-n}$;

(C) -1;　　(D) $\frac{1}{n-1}$.　　(1998年数学三)

8. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 A.若存在三阶矩阵 $B \neq 0$,使得 $AB = 0$,则(　　).

(A) $\lambda = -2$ 且 $|B| = 0$;　　(B) $\lambda = -2$ 且 $|B| \neq 0$;

(C) $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$;　　(D) $\lambda = 1$ 且 $|B| \neq 0$.

(1998年数学三)

9. 若向量组 α, β, γ 线性无关;α, β, δ 线性相关,则(　　).

(A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示;

(B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示;

(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示;

(D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示.　　(1998年数学四)

10. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是 $n \times m$ 矩阵,则(　　).

(A) 当 $m > n$ 时,必有行列式 $|AB| \neq 0$;

(B) 当 $m > n$ 时,必有行列式 $|AB| = 0$;

(C) 当 $n > m$ 时,必有行列式 $|AB| \neq 0$;

(D) 当 $n > m$ 时,必有行列式 $|AB| = 0$.　　(1999年数学一)

11. 记

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为(　　).

(A) 1;　　(B) 2;

(C) 3; (D) 4. (1999 年数学二)

12. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示,但不能由向量组(Ⅰ) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表示,记向量组(Ⅱ) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}, \beta$,则( ).

(A) α_m 不能由(Ⅰ)线性表示,也不能由(Ⅱ)线性表示;

(B) α_m 不能由(Ⅰ)线性表示,但可由(Ⅱ)线性表示;

(C) α_m 可由(Ⅰ)线性表示,也可由(Ⅱ)线性表示;

(D) α_m 可由(Ⅰ)线性表示,但不可由(Ⅱ)线性表示.

(1999 年数学三、四)

13. 设 A, B 为 n 阶矩阵,且 A 与 B 相似, E 为 n 阶单位矩阵,则( ).

(A) $\lambda E - A = \lambda E - B$;

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量;

(C) A 与 B 都相似于一个对角阵;

(D) 对任意常数 t, $tE - A$ 与 $tE - B$ 相似. (1999 年数学三)

14. 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为( ).

(A) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性表示;

(B) 向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示;

(C) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 等价;

(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 等价.

(2000 年数学一)

15. 设 A 为 n 阶实矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵,则对于线性方程组(Ⅰ) $AX = 0$ 和(Ⅱ) $A^T AX = 0$,必有( ).

(A) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解;

(B) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解;

(C) (Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解;

(D) (Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解,但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

(2000年数学二)

16.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量,且秩$(A)=3$,$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$,$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$,$c$ 表示任意常数,则线性方程组 $AX=b$ 的通解 $X=($ $)$.

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$.

(2000年数学三、四)

17.设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 A 与 $B($ $)$.

(A) 合同且相似; (B) 合同但不相似;

(C) 不合同但相似; (D) 不合同且不相似.

(2001年数学一)

18.设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

其中 A **可逆,则** B^{-1}**等于(　　).**

(A) $A^{-1}P_1P_2$;　　(B) $P_1A^{-1}P_2$;

(C) $P_1P_2A^{-1}$;　　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

(2001 **年数学三、四**)

19 . **设** A **是** n **阶矩阵,** α **是** n **维列向量,若秩** $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{T}&0\end{pmatrix}=$ **秩**(A)**,则线性方程组(　　).**

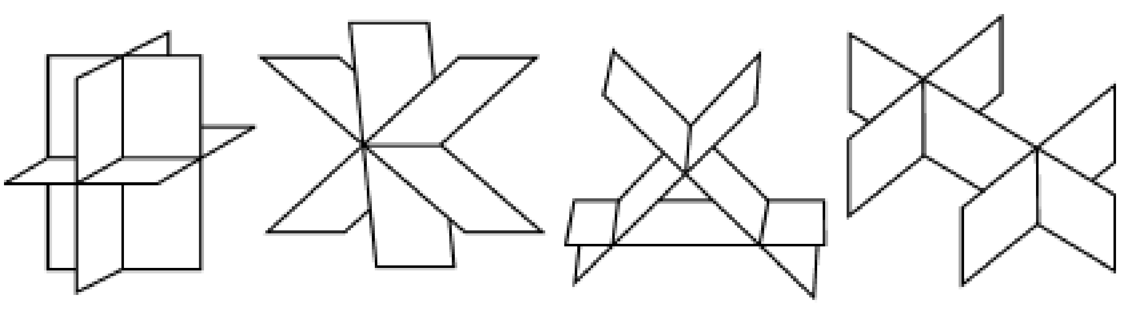
(A) $AX=\alpha$ **必有无穷多解;**

(B) $AX=\alpha$ **必有惟一解;**

(C) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{T}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$**仅有零解;**

(D) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{T}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$**必有非零解.**　　(2001 **年数学三**)

20 . **设有三张不同平面的方程** $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$, $i=1,2,3$, **它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为** 2**,则这三张平面可能的位置关系为(　　).**



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(2002 **年数学一**)

21．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k 必有(　　)．

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关．　　(2002 年数学二)

22．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$(　　)．

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解；

(B) 当 $n>m$ 时必有非零解；

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解；

(D) 当 $m>n$ 时必有非零解．　　(2002 年数学三)

23．设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵．已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是(　　)．

(A) $P^{-1}\alpha$；　(B) $P^{\mathrm{T}}\alpha$；　(C) $P\alpha$；　(D) $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$．

(2002 年数学三)

24．设 A,B 为 n 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 对应的伴随矩阵．分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=$(　　)．

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^*\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^*\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^*\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^*\end{pmatrix}$．

(2002 年数学四)

25．设向量组 Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　　)．

(A) 当 $r < s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关;

(B) 当 $r > s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关;

(C) 当 $r < s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关;

(D) 当 $r > s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关. (2003 年数学一、二)

26.设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$,其中 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵,现有 4 个命题:

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解,则秩$(A)\geq$秩(B);

② 若秩$(A)\geq$秩(B),则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解;

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解,则秩$(A)=$秩(B);

④ 若秩$(A)=$秩(B),则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是(   ).

(A) ①②; (B) ①③; (C) ②④; (D) ③④.

(2003 年数学一)

27.设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若 A 的伴随矩阵的秩等于 1,则必有(   ).

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$; (B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$;

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$; (D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

(2003 年数学三)

28.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是(   ).

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关;

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.　　(2003 年数学三)

29. 设矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

已知矩阵 A 相似于 B, 则秩 $(A-2E)$ 与秩 $(A-E)$ 之和等于 (　　).

(A) 2;　　(B) 3;　　(C) 4;　　(D) 5.

(2003 年数学四)

三、计算题与证明题

1. 设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(1) 证明 B 可逆;

(2) 求 AB^{-1}.　　(1997 年数学一)

2. 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵,

$$\alpha_1 = (1,1,2,3)^T, \quad \alpha_2 = (-1,1,4,-1)^T,$$
$$\alpha_3 = (5,-1,-8,9)^T$$

是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的解向量, 求 $Bx = 0$ 的解空间的一个标准正交基.　　(1997 年数学一)

3. 已知 $\xi = (1,1,-1)^T$ 是矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$$

的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(2) 问 A 能否相似于对角阵? 说明理由.　　(1997 年数学一)

4 . 已知

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

且 $A^2-AB=E$,其中 E 是三阶单位矩阵,求矩阵 B .

(1997 年数学二)

5 . λ为何值时,

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1,\\\lambda x_1-x_2+x_3=2,\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

无解,有惟一解或有无穷多解 ? 并在无穷多解时写出方程组的通解 .

(1997 年数学二)

6 . 设 A 是 n 阶非奇异矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数,记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E&0\\-\alpha^{\mathrm T}A^*&|A|\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm T}&b\end{bmatrix}.$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵 .

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha\neq b$.

(1997 年数学三、四)

7 . 设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1,2,3;矩阵 A 的属于特征值 1,2 的特征向量分别是

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm T},\quad \alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm T}.$$

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量;

(2) 求矩阵 A . (1997 年数学三)

8 . 设矩阵 A 与 B 相似,且

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}.$$

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$. (1997 年数学四)

9 . 设 A 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k,使线性方程组 $A^k x=0$ 有解向量 α 且 $A^{k-1}\alpha\neq 0$,证明:向量组 $\alpha, A\alpha,\cdots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的 . (1998 年数学一)

10 . 已知线性方程组

$$(\text{I})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1\,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2\,2n}x_{2n}=0,\\ \qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n\,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解系为

$(b_{11}, b_{12},\cdots, b_{1,2n})^{T}$, $(b_{21}, b_{22},\cdots, b_{2,2n})^{T}$, $\cdots$, $(b_{n1}, b_{n2},\cdots, b_{n,2n})^{T}$.

试写出线性方程组

$$(\text{II})\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1\,2n}y_{2n}=0,\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2\,2n}y_{2n}=0,\\ \qquad\cdots\\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n\,2n}y_{2n}=0\end{cases}$$

的通解,并说明理由 . (1998 年数学一)

11 . 已知二次曲面方程

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 a,b 的值和正交矩阵 P.

(1998 年数学一)

12.设 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$,其中 E 是四阶单位矩阵,A^{T} 是四阶矩阵 A 的转置矩阵,

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

求 A. (1998 年数学二)

13.已知

$$\alpha_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\qquad \beta=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问:(1) a,b 取何值时,β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

(2) a,b 取何值时,β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?并写出此表示式. (1998 年数学二)

14.设向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$$

都是非零向量,且满足条件 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$,记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$,求:

(1) A^2;

(2) 矩阵 A 的特征值和特征向量. (1998 年数学三、四)

15.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $B=(kE+A)^2$,其中 k 为实数,E 为单位矩阵,求对角阵 Λ,使 B 与 Λ 相似,并求 k 为何值

时，B 为正定矩阵．　　　　(1998 年数学三)

16．已知下列非齐次线性方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)．

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=3; \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ nx_2-x_3-2x_4=-11, \\ x_3-2x_4=-t+1. \end{cases}
$$

(1) 求解方程组(Ⅰ)，用其导出组的基础解系表示通解．

(2) 当方程组(Ⅱ)中的参数 m，n，t 为何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解？　　　　(1998 年数学四)

17．设矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix},
$$

其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0 的一个特征向量为

$$
\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},
$$

求 a，b，c 和 λ_0 的值．　　　　(1999 年数学一、三)

18．设 A 为 m 阶对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^{T} 为 B 的转置矩阵．试证：$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $\mathrm{r}(B)=n$．　　　　(1999 年数学一)

19．设矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},
$$

矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，

求矩阵 X. (1999 年数学二)

20. 设向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\quad \alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,$$
$$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\ \alpha_4=(-2,-6,10,p)^T.$$

(1) p 为何值时,该向量组线性无关?并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

(2) p 为何值时,该向量组线性相关?并在此时求它的秩和一个极大线性无关组. (1999 年数学二)

21. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵,E 为 n 阶单位矩阵,已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$,试证 $\lambda>0$ 时,矩阵 B 为正定矩阵.

(1999 年数学三)

22. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0. \end{cases}$$

(1) a,b,c 满足何种关系时,方程组仅有零解?

(2) a,b,c 满足何种关系时,方程组有无穷多组解?并用基础解系表示全部解. (1999 年数学四)

23. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

问当 k 为何值时,存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?并求出 P 和相应的对角矩阵. (1999 年数学四)

24. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,且

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E,$$

其中 E 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 B.　　　　(2000 年数学一)

25.某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n,记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时,求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.　　　　(2000 年数学一)

26.设 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A=\alpha\beta^{T}$, $B=\beta^{T}\alpha$,其中 β^{T} 是 β 的转置,求解方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$.

(2000 年数学二)

27.已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 α_1, α_2, α_3 线性表示, 求 a, b 的值 . (2000 年数学二)

28 . 设向量组 $\alpha_1=(a,2,10)^T$, $\alpha_2=(-2,1,5)^T$, $\alpha_3=(-1,1,4)^T$, $\beta=(1,b,c)^T$.试问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

(1) β 可由 α_1, α_2, α_3 线性表出, 且表示惟一 ?

(2) β 不能由 α_1, α_2, α_3 线性表出 ?

(3) β 可由 α_1, α_2, α_3 线性表出, 但表示不惟一 ? 并求出一般表达式 . (2000 年数学三、四)

29 . 设有 n 元实二次型

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$, 其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数 .试问: 当 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足何种条件时, 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型 . (2000 年数学三)

30 . 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$, 已知 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值 .试求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵 . (2000 年数学四)

31 . 设 α_1, α_2, $\cdots$, α_s 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$, $\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$, $\cdots$, $\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 其中 t_1, t_2 为实常数 .试问 t_1, t_2 满足什么关系时, β_1, β_2, $\cdots$, β_s 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系 . (2001 年数学一)

32 . 已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x, 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x .$$

(1) 记 $P=(x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B, 使 $A=PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式$|A+E|$.　　(2001年数学一)

33．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中 E 是 3 阶单位阵，求 X.

(2001年数学二)

34．已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性方程组 $AX=0$的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$，讨论实数 t 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也是 $AX=0$的一个基础解系.　　(2001年数学二)

35．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.已知线性方程组 $AX=\beta$有解但不惟一，试求(1) a的值；(2)正交矩阵 Q，使 $Q^{T}AQ$ 为对角矩阵.　　(2001年数学三、四)

36．设 A 为 n 阶实对称矩阵，秩$(A)=n$，A_{ij}是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$中元素 a_{ij}的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(1) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成矩阵形式，并证明二次型 $f(X)$的矩阵为 A^{-1};

(2) 二次型 $g(X)=X^{T}AX$ 与 $f(X)$的规范形是否相同？说明理由.　　(2001年数学三)

37．设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{T}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{T}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量.试判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性.

(2001 年数学四)

38.已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$.如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解. (2002 年数学一、二)

39.设 A, B 为同阶方阵,

(1) 如果 A, B 相似,试证 A, B 的特征多项式相等.

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3) 当 A, B 均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立.

(2002 年数学一)

40.已知 A, B 为 3 阶矩阵,且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$,其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,求矩阵 A. (2002 年数学二)

41.设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0. \end{cases}$$

其中 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \geq 2$.试讨论 a, b 为何值时,方程组仅有零解、有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解,并用基础解系表

示全部解．(2002 年数学三)

42．设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$，已知 A 的秩 $r(A)=2$．

(1) 求 A 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵．(2002 年数学三)

43．设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解．(2002 年数学四)

44．设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵，并计算行列式 $|A-E|$ 的值．

(2002 年数学四)

45．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵．(2003 年数学一)

46．已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:\ ax+2by+3c=0,$$

$$l_2:\ bx+2cy+3a=0,$$

$$l_3:\ cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

(2003 年数学一、二)

47. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ, 试确定常数 a 的值; 并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$. (2003 年数学一)

48. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\\cdots\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时,

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时, 求此方程组的一个基础解系. (2003 年数学三)

49. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm T}AX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b>0),$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵. (2003 年数学三)

50. 设有向量组(Ⅰ): $\alpha_1=(1,0,2)^{\mathrm T}$, $\alpha_2=(1,1,3)^{\mathrm T}$, $\alpha_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm T}$ 和向量组(Ⅱ): $\beta_1=(1,2,a+3)^{\mathrm T}$, $\beta_2=(2,1,a+6)^{\mathrm T}$, $\beta_3=(2,1,a+4)^{\mathrm T}$. 试问: 当 a 为何值时, 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价? 当 a 为何值时, 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价?

(2003 年数学四)

51．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量，λ 是 α 对应的特征值，其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，试求 a,b 和 λ 的值．（2003年数学四）

线性代数试题答案与提示

一、填空题

1．-3；　2．3；　3．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$；　4．$(-1)^{n-1}(n-1)$；

5．$\left(\dfrac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$；　6．$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　7．$-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$；

8．$\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$；　9．0；

10．$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　11．$-1$；　12．$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$；

13．24；　14．$a^2(a-2^n)$；　15．24；　16．$\dfrac{1}{2}(A+2E)$；

17．-2；　18．-3；　19．-28；　20．2；　21．4；　22．-1；

23．$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$；　24．$abc\neq 0$；　25．$\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$；

26．3；　27．$\dfrac{1}{2}$；　28．-1；　29．$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$．

二、选择题

1 . D	2 . D	3 . C	4 . A	5 . A
6 . B	7 . B	8 . C	9 . C	10 . B
11 . B	12 . B	13 . D	14 . D	15 . A
16 . C	17 . A	18 . C	19 . D	20 . B
21 . A	22 . D	23 . B	24 . D	25 . D
26 . B	27 . C	28 . B	29 . C	

三、计算题与证明题

1 . (1) $|B| = -|A| \neq 0$,故 B 可逆;

(2) $AB^{-1} = E_{ij}$,其中 E_{ij} 表示 n 阶单位矩阵对换 i, j 两行后得到的矩阵 .

2 . $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大无关组,将 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交规范化,得

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{7}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}} \right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}}, -\frac{3}{\sqrt{39}} \right)^{\mathrm{T}} .$$

3 . (1) $a = -3$, $b = 0$, $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值 $\lambda = -1$;

(2) A 不能相似于对角阵 .

4 . $B = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5 . (1) 当 $\lambda \neq -\dfrac{4}{5}$ 且 $\lambda \neq 1$ 时,方程组有惟一解;

(2) 当 $\lambda = -\dfrac{4}{5}$ 时,方程组无解;

(3) 当 $\lambda = 1$ 时,方程组有无穷多解,通解为

$x=k(0,1,1)^{T}+(1,-1,0)^{T}$, k 为任意常数.

6 . $PQ=\begin{pmatrix} E & \alpha \\ 0 & |A|(-\alpha^{T}A^{-1}\alpha+b) \end{pmatrix}$.

7 . (1) $\alpha_3=(1,0,1)^{T}$; (2) $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}$.

8 . (1) $a=5$, $b=6$; (2) $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9 . 由线性无关的定义可证.

10 . (Ⅱ) 的通解为 $y=k_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^{T}+k_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^{T}+\cdots+k_n(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^{T}$, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数.

11 . $a=3$, $b=1$, $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

12 . $A=[(2C-B)^{T}]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

13 . (1) $b\neq 2$, a 任意;

(2) $b=2$, $a\neq 1$ 时, $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$;

$b=2$, $a=1$ 时, $\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3$, k 为任意常数.

14 . (1) A^2 为 n 阶零矩阵;

(2) A 的特征值全为零, 假设 $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$, 对应于特征

值 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $\alpha_1 = (-b_2, b_1, 0, \cdots, 0)^T$，$\alpha_2 = (-b_3, 0, b_1, \cdots, 0)^T, \cdots, \alpha_{n-1} = (-b_n, 0, 0, \cdots, b_1)^T$.

15. $\Lambda = \begin{bmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{bmatrix}$，当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 0$ 时，B 为正定矩阵.

16. (1) 方程组(Ⅰ)的通解为

$x = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$，$k$ 为任意常数；

(2) $m = 2, n = 4, t = 6$.

17. $a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1$.

18. 写出矩阵 $B^T AB$ 所对应的二次型，利用二次型正定的定义证明，并注意到 $r(B) = n$ 当且仅当方程组 $Bx = 0$ 仅有零解.

19. $X = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. (1) 当 $p \neq 2$ 时，$\alpha = 2\alpha_1 + \dfrac{3p-4}{p-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \dfrac{1-p}{p-2}\alpha_4$.

(2) 当 $p = 2$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$（或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$）为其一个极大线性无关组.

21. 由于 B 是对称矩阵，写出其所对应的二次型，用二次型正定的定义可证.

22. (1) 当 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 时，方程组仅有零解.

(2) 1°当 $a = b \neq c$ 时，方程组有无穷多组解，全部解为 $x = k_1(1, -1, 0)^T$，k_1 为任意常数.

2°当 $a = c \neq b$ 时，方程组有无穷多组解，全部解为 $x = k_2(1, 0, -1)^T$，k_2 为任意常数.

3°当 $b = c \neq a$ 时，方程组有无穷多组解，全部解为 $x = k_3(0, 1, -1)^T$，k_3 为任意常数.

4°当 $a=b=c$ 时,方程组有无穷多组解,全部解为 $x=k_4(-1,1,0)^T+k_5(-1,0,1)^T$, k_4, k_5 为任意常数.

23. 当 $k=0$ 时,令 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$,则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

24. $B=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$.

25. (1) $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$;

(2) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$;

(3) $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$.

26. $x=k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

27. $a=15$, $b=5$.

28. (1) 当 $a\neq-4$, b, c 为任意常数时, β 可由 α_1, α_2, α_3 惟一线性表示.

(2) 当 $a=-4$, $3b-c\neq1$ 时, β 不能由 α_1, α_2, α_3 线性

表示.

(3) 当 $a=-4, 3b-c=1$ 时, $\beta = t\alpha_1 - (2t+b+1)\alpha_2 + (2b+1)\alpha_3$, t 为任意常数.

29. $a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$.

30. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

31. 当 $t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$ 时, 即当 s 为偶数时, $t_1 \neq \pm t_2$, 当 s 为奇数时, $t_1 \neq -t_2$.

32. (1) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; (2) $|A+E| = -4$.

33. $X = [(A-B)^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

34. $t \neq \pm 1$.

35. (1) $a=-2$;

(2) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $Q^T AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

36. (1) 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$.

(2) $g(X)$ 和 $f(X)$ 的规范形相同.

37. 线性无关.

38. 通解为 $x = (1,1,1,1)^T + k(1,-2,1,0)^T$, k 为任意常数.

39. (1) 由矩阵相似和特征多项式的定义可证;

(2) 可取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$;

(3) 由矩阵 A 和 B 有相同的特征值,因而相似于同一个对角阵可证.

40. $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

41. (1) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时,方程组仅有零解;

(2) 当 $a=b$ 时,方程组有无穷多解,全部解为

$x=c_1(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+c_2(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+c_{n-1}(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 为任意常数;

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时,方程组有无穷多解,全部解为

$x=c(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, c 为任意常数.

42. (1) $\lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=0$;

(2) 当 $k>2$ 时, $A+kE$ 为正定矩阵.

43. (1) 方程组(Ⅰ)的一个基础解系为

$$\xi_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \xi_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}};$$

(2) 当 $a=-1$ 时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解,全部非零公共解为

$x=k_1(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}$, k_1,k_2 为不全为零的任意常数.

44. $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a-2\end{pmatrix}$,

$|A-E|=a^2(a-3)$.

45. $B+2E=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}$,特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ 时,对应的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = 3$ 时,对应的一个特征向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

46 . 提示:必要性:三直线交于一点,则线性方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c \\ bx + 2cy = -3a \\ cx + 2ay = -3b \end{cases}$$

有惟一解,$\mathrm{r}(\overline{A}) = \mathrm{r}(A) = 2$, $|\overline{A}| = 0$.
由于

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}$$

$$= 6(a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc]$$

$$= 3(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$= 0$$

得 $a + b + c = 0$.

充分性 由 $a + b + c = 0$,则 $|\overline{A}| = 0$,故 $\mathrm{r}(\overline{A}) < 3$,由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac - b^2) = -2\left[\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\right] \neq 0 .$$

故 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\overline{A}) = 2$,方程组有惟一解 .

47 . $a = 0$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

48．(1) $|A| = b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$．当 $b\neq 0$ 且 $b+\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ 时，秩$(A) = n$，方程组仅有零解；

(2) 当 $b = 0$ 时，原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 .$$

由 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ 可知，$a_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零．设 $a_1 \neq 0$，得原方程组的一个基础解系为

$$\alpha_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}, \cdots$$

$$\alpha_{n-1} = \left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \cdots, 1\right)^{\mathrm{T}} .$$

当 $b = -\sum_{i=1}^{n} a_i$ 时，有 $b\neq 0$，原方程组的一个基础解系为

$$\alpha = (1, 1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} .$$

49．(1) $a = 1$，$b = 2$；

(2) 正交矩阵 $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，正交变换 $X = QY$，二次型的标准形为 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

50．(1) 当 $a\neq -1$ 时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价．

(2) 当 $a = -1$ 时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价．

51．$a = 2$，$b = 1$，$\lambda = 1$ 或 $a = 2$，$b = -2$，$\lambda = 4$.