

TOÁN RỜI RẠC (DISCRETE MATHEMATICS)

Bùi Thị Thủy Đặng Xuân Thọ

Support



- TS. Đặng Xuân Thọ
- Mobile: 091.2629.383
- Email: thodx@hnue.edu.vn
- Website: http://fit.hnue.edu.vn/~thodx/

NỘI DUNG



- Chương 1. Logic mệnh đề
- Chương 2. Lý thuyết tập hợp
- Chương 3. Một số công thức tổ hợp
- Chương 4. Suy luận và kiếm chứng chương trình
- Chương 5. Đại số Boole và cấu trúc mạch logic
- Chương 6. Thuật toán
- Chương 7. Lý thuyết đồ thị

Chương 1. Logic mệnh đề



- Thế nào là một mệnh đề?
- Các toán tử logic?
 - Và, hoặc, hội, tuyển, kéo theo...
- Phân tích mệnh đề logic phức hợp
 - "Bạn không được đi xe máy, nếu bạn dưới 16 tuổi trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt."
- Các phép toán logic với các bit?
 - Bit? Phép toán bit OR, AND, XOR?

Mệnh đề logic



Định nghĩa. Một mệnh đề (logic) (p, q, r, s,...) là một khẳng định mà nội dung của nó là đúng hoặc là sai, chứ không thể vừa đúng vừa sai.

□ Ví dụ:

Một với một là hai Mệnh đề

Hai thêm hai là bốn Mệnh đề

Bốn với một là năm Mệnh đề

Năm ngón tay sạch đều Không là mệnh đề

Mệnh đề logic



Giá trị chân lý của một mệnh đề

- Một mệnh đề logic được gán giá trị T (true) nếu nó đúng hoặc F (false) nếu nó sai
- Các giá trị T, F được gọi là giá trị chân lý của mệnh đề đã cho
- Bảng giá trị chân lý:

p: "Hà Nội là thủ đô của VN"

q: "Tổng các góc của một tam giác bằng 100°"

р	q
Т	F

Mệnh đề phức hợp



- Một mệnh đề phức hợp có thể xây dựng từ nhiều mệnh đề đơn giản bằng cách dùng các liên từ (toán tử lôgic).
- Một số toán tử logic thường gặp

toán tử liên kết

Định nghĩa	Nick	Tác dụng	Kí hiệu
Phủ định	NOT	1 mệnh đề	¬ hoặc ¯
Hội	AND	2 mệnh đề	^
Tuyển	OR	2 mệnh đề	>
Tuyển loại	XOR	2 mệnh đề	⊕
Kéo theo	IMPILES	2 mệnh đề	\rightarrow
Tương đương	IFF	2 mệnh đề	\leftrightarrow

Mệnh đề phức hợp



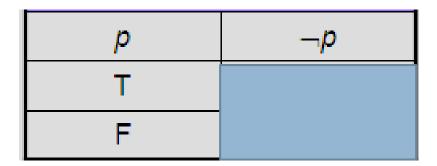
□ Ví dụ:

- □ Nếu x là số nguyên, thì x² cũng là số nguyên.
- Trời vừa nắng, vừa mưa.
- Để được đi du học, hoặc là bạn phải giỏi hoặc là bạn phải có tiền tự túc.
- Bạn không được đi xe máy nếu bạn dưới 16 tuối trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt.

Phủ định mệnh đề



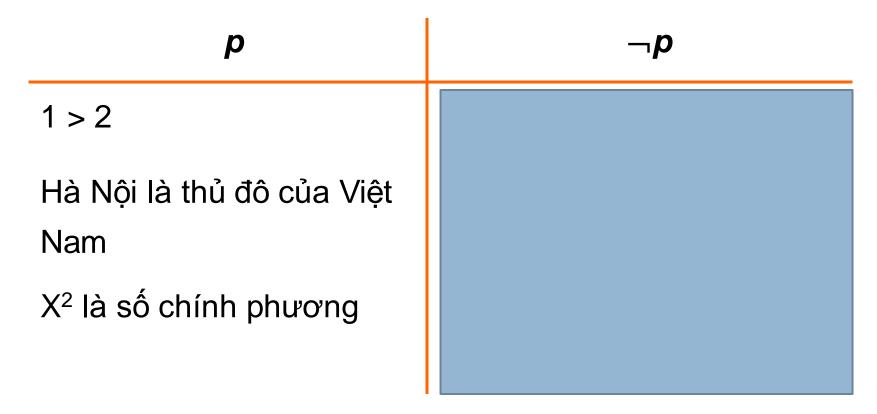
- Định nghĩa. Cho mệnh đề logic p. Câu "không phải là p" cũng là một mệnh đề logic, được gọi là phủ định của p, kí hiệu là p̄ hoặc ¬p
- Bảng giá trị chân lý:



Phủ định mệnh đề



□ Ví dụ:

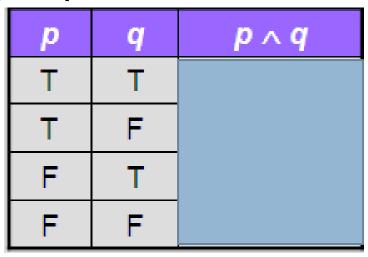


Các toán tử logic

Phép hội



Dịnh nghĩa. Cho trước hai mệnh để logic p, q. Câu nói "p và q" cũng là một mệnh đề logic, được gọi là hội của p và q, kí hiệu p ∧ q. p ∧ q chỉ đúng khi cả p và q đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.



Toán rời rạc - ĐHSPHN

Phép hội



□ Ví dụ:

- p: "Bác Hồ sinh ngày 19/5";
- q: "Bác Hồ quê ở Nghệ An".
- □ p ∧ q:
 - "Bác Hồ sinh ngày 19/5 và Bác Hồ quê ở Nghệ An".
- □ p ∧ ¬q:
 - "Bác Hồ sinh ngày 19/5 và Bác Hồ quê không ở Nghệ An".
- □ ¬ p ∧ q:
 - "Bác Hồ không sinh ngày 19/5 và Bác Hồ quê ở Nghệ An".

Phép tuyển



- Định nghĩa. Cho trước hai mệnh để logic p, q. Câu nói "p hoặc q" cũng là một mệnh để logic, được gọi là tuyển của p và q,
 - Kí hiệu: p ∨ q.
 - p v q chỉ sai khi cả p và q đều sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

P	q	p∨q
T	T	
Т	F	
F	Т	
F	F	

Phép tuyển



■ Ví dụ:

- p: "Hồ Xuân Hương sinh ngày 3/5";
- q: "Hồ Xuân Hương sinh ngày 9/5";
- thì p v q là: "Hồ Xuân Hương sinh ngày 3/5 hoặc vào ngày 9/5";

Phép tuyển có loại



- Định nghĩa. Cho trước hai mệnh đề logic p, q. Câu nói "hoặc p hoặc q" cũng là một mệnh đề logic, được gọi là tuyển có loại của p và q,
 - Kí hiệu: p ⊕ q.
 - □ p ⊕ q đúng khi một trong hai p hoặc q đúng và sai trong trường hợp còn lại.

P	q	p⊕q
T	T	
T	F	
F	Т	
F	F	

Phép tuyển có loại



■ Ví dụ:

- p: "Hồ Xuân Hương sinh ngày 3/5";
- q: "Hồ Xuân Hương sinh ngày 9/5";
- thì p ⊕ q là: "Hồ Xuân Hương hoặc sinh ngày 3/5 hoặc vào ngày 9/5";
- Có nghĩa rõ ràng là Hồ Xuân Hương chỉ có thể sinh vào một trong hai ngày 3/5 hoặc 9/5.

Phép kéo theo



Dịnh nghĩa. Cho trước hai mệnh đề logic p, q. Câu nói "nếu có p thì có q" cũng là một mệnh đề logic, được gọi là phép kéo theo của p và q, kí hiệu p → q. p → q chỉ sai nếu p đúng, q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

P	q	$p \rightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

Toán rời rạc - ĐHSPHN

Phép kéo theo



■ Ví dụ:

- p: "Tam giác ABC vuông tại đỉnh A";
- \Box q: "BC² = CA² + AB²"
- □ p → q: "Tam giác ABC vuông tại đỉnh A thì BC² = CA² + AB²"

Phép tương đương



□ Định nghĩa. Cho trước hai mệnh đề logic p, q. Câu nói "p tương đương với q" cũng là một mệnh đề logic, kí hiệu p ↔ q. Mệnh đề p ↔ q chỉ đúng khi p và q cùng đúng hoặc cùng sai.

P	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	
T	F	
F	Т	
F	F	

Toán rời rạc - ĐHSPHN

Phép tương đương



■ Ví dụ:

- p: "Tam giác ABC là tam giác đều";
- q: "Tam giác ABC có 3 cạnh bằng nhau"
- □ p ↔ q: "Tam giác ABC đều khi và chỉ khi tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau".

Thứ tự ưu tiên



Quy tắc: Trong một mệnh đề phức hợp gồm nhiều toán tử lôgic, để chỉ định thứ tự thực hiện các toán tử lôgic ta dùng các dấu ngoặc. Khi không có dấu ngoặc thì thứ tự ưu tiên được thể hiện như sau:



Dịch câu



- Xác định các toán tử logic (các liên từ)
- Xác định các mệnh đề thành phần
 - Ví dụ: Bạn không được đi xe máy nếu ban dưới 16 tuổi trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt
 - Các mệnh đề:

Bạn được đi xe máy (p) Xe máy có phân khối nhỏ (r) Bạn dưới 16 tuổi (q) Bạn có giấy phép đặc biệt (s)

$$(q \wedge (\overline{r \vee s})) \rightarrow \overline{p}$$

Biểu thức logic & sự bằng nhau

Biểu thức logic

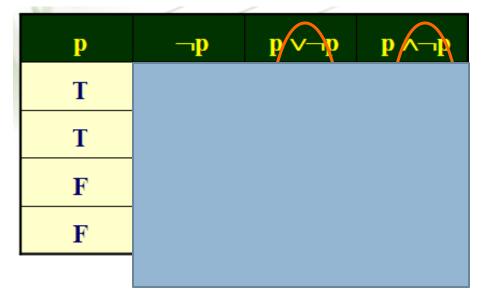


- Định nghĩa. Một biểu thức logic là một biểu thức được tạo thành từ các biến logic cho trước bằng cách áp dụng các toán tử logic và dấu ngoặc "(", ")" một cách hình thức.
- Ví dụ:

 - \square (q \wedge (r \vee s)) \rightarrow p



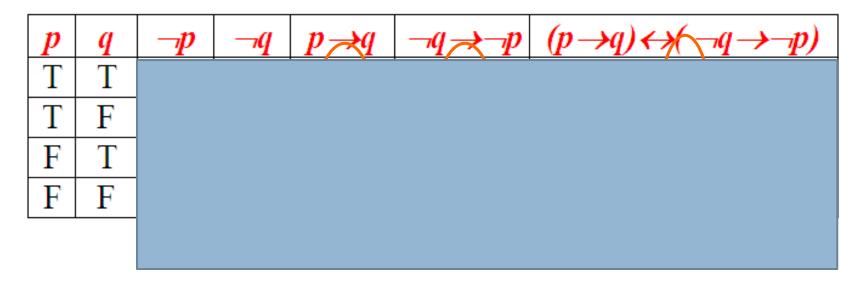
Định nghĩa. Một biểu thức logic luôn có giá trị chân lý T (F) với bất cứ giá trị chân lý nào của các mệnh đề thành phần được gọi là hằng đúng T (hằng sai F). Biểu thức logic không phải hằng đúng hoặc hằng sai gọi là tiếp liên.





■ Định nghĩa. Các mệnh đề logic p và q được gọi là *tương đương logic* nếu biểu thức logic p↔q là mệnh đề logic hằng đúng.

Khi đó p, q gọi là 2 mệnh đề *logic tương đương* (bằng nhau), kí hiệu p ⇔ q.





Tính chất:

- □ Phản xạ: với ∀p, ta luôn có p⇔p
- Đối xứng: Nếu p⇔q thì q⇔p
- Bắc cầu: Nếu p⇔q, q⇔r thì p⇔r
- Khử kéo theo: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$ (chứng minh)

■ Ví dụ:

□ CMR $(p \land q) \rightarrow (p \lor q)$ là hằng đúng?

Các đẳng thức cơ bản



□ Cho p, q, r là các mệnh đề

T. đ.	Tên	Tương đương	Tên
$p \wedge \mathbf{T} = p$	Đồng	$p \wedge q = q \wedge p$	Giao
$p \vee \mathbf{F} = p$	nhất	$p \lor q = q \lor p$	hoán
$p \vee T = T$	Trội	$(p \wedge q) \wedge r = q \wedge (p \wedge r)$	Kết hợp
$p \wedge F = F$		$(p \lor q) \lor r = q \lor (p \lor r)$	
$p \wedge p = p$	Lũy	$p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$	Phận
$p \lor p = p$	đẳng	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	phối
$\neg(\neg p) = p$	Bù kép	$\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$	De
		$\neg(p\lor q)=\neg p\land \neg q$	Morgan
$p \wedge \neg p = \mathbf{F}$	Phủ	$p \wedge (p \vee q) = p$	Thu hút
$p \lor \neg p = T$	định	$p \lor (p \land q) = p$	



- Ví dụ: Cho mệnh đề p,q.
 - □ Chứng minh: $\neg(p \lor (\neg p \land q)) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$
 - Sử dụng các tương đương logic cơ bản, ta có:

$$\neg (p \lor (\neg p \land q)) \Leftrightarrow \neg p \land \neg (\neg p \land q) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \land [\neg (\neg p) \lor \neg q] \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \land [p \lor \neg q] \qquad \text{(phủ định kép)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \land p) \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(phân phối)}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{F} \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(phủ định)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor \mathbf{F} \qquad \text{(giao hoán)}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \land \neg q \qquad \text{(đồng nhất)}$$

Các phép toán logic với các bit



- Một bit có hai trạng thái thường kí hiệu là 0, 1
- Bit dùng để biểu diễn các giá trị chân lý:
 - 0 tương ứng F
 - 1 tương ứng T
- □ Biến Boole: có giá trị là 1 (T) hoặc 0 (F)
- Các toán tử ∨, ∧, ⊕, ¬ tương ứng với các phép toán OR, AND, XOR, NOT



Bảng tính

	OR	
V	0	1
0		
1		

	AND		
^	0	1	
0			
1			

	XOR	
\oplus	0	1
0		
1		



- Định nghĩa. Một xâu bit là một dãy gồm không hoặc nhiều bit. Độ dài xâu bit là số các bit trong xâu đó.
- Các phép toán OR bit, AND bit, XOR bit thực hiện trên 2 xâu bit có cùng độ dài: thực hiện các phép toán OR, AND, XOR tại các bit tương ứng trong 2 xâu.



□ Ví dụ:

- □ 1001 ∨ 0111 =
- 1001 ∧ 0111 =
- 1001 ⊕ 0111 =



THANK YOU!