



# TOÁN RỜI RẠC (DISCRETE MATHEMATICS)

Bùi Thị Thủy  
Đặng Xuân Thọ

# Support

2



- TS. Đặng Xuân Thọ
- Mobile: 091.2629.383
- Email: [thodx@hnue.edu.vn](mailto:thodx@hnue.edu.vn)
- Website: <http://fit.hnue.edu.vn/~thodx/>

# NỘI DUNG

3



- *Chương 1.* Logic mệnh đề
- *Chương 2.* Lý thuyết tập hợp
- *Chương 3.* Một số công thức tổ hợp
- *Chương 4.* Suy luận và kiểm chứng chương trình
- *Chương 5.* Đại số Boole và cấu trúc mạch logic
- *Chương 6.* Thuật toán
- *Chương 7.* Lý thuyết đồ thị

# Chương 1. Logic mệnh đề

4



- Thế nào là một mệnh đề?
- Các toán tử logic?
  - ▣ Và, hoặc, hội, tuyển, kéo theo...
- Phân tích mệnh đề logic phức hợp
  - ▣ “Bạn không được đi xe máy, nếu bạn dưới 16 tuổi trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt.”
- Các phép toán logic với các bit?
  - ▣ Bit? Phép toán bit OR, AND, XOR?

# Mệnh đề logic

5



□ **Định nghĩa.** Một mệnh đề (logic) ( $p, q, r, s, \dots$ ) là một khẳng định mà nội dung của nó là đúng hoặc là sai, chứ không thể vừa đúng vừa sai.

□ **Ví dụ:**

*Một với một là hai*

*Mệnh đề*

*Hai thêm hai là bốn*

*Mệnh đề*

*Bốn với một là năm*

*Mệnh đề*

*Năm ngón tay sạch đều*

*Không là mệnh đề*

# Mệnh đề logic

6



## □ Giá trị chân lý của một mệnh đề

- Một mệnh đề logic được gán giá trị T (true) nếu nó đúng hoặc F (false) nếu nó sai
- Các giá trị T, F được gọi là giá trị chân lý của mệnh đề đã cho
- Bảng giá trị chân lý:

*p: “Hà Nội là thủ đô của VN”*

*q: “Tổng các góc của một tam giác bằng  $100^\circ$ ”*

p	q
T	F

# Mệnh đề phức hợp

7



- ▣ Một mệnh đề **phức hợp** có thể xây dựng từ nhiều mệnh đề đơn giản bằng cách dùng các liên từ (toán tử logic).
- ▣ Một số toán tử logic thường gặp

toán tử liên kết

Định nghĩa	Nick	Tác dụng	Kí hiệu
Phủ định	NOT	1 mệnh đề	$\neg$ hoặc $\bar{\phantom{x}}$
Hội	AND	2 mệnh đề	$\wedge$
Tuyển	OR	2 mệnh đề	$\vee$
Tuyển loại	XOR	2 mệnh đề	$\oplus$
Kéo theo	IMPILES	2 mệnh đề	$\rightarrow$
Tương đương	IFF	2 mệnh đề	$\leftrightarrow$

# Mệnh đề phức hợp

8



## □ Ví dụ:

- Nếu  $x$  là số nguyên, thì  $x^2$  cũng là số nguyên.
- Trời vừa nắng, vừa mưa.
- Để được đi du học, hoặc là bạn phải giỏi hoặc là bạn phải có tiền tự túc.
- Bạn không được đi xe máy nếu bạn dưới 16 tuổi trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt.



# Phủ định mệnh đề

9



- **Định nghĩa.** Cho mệnh đề logic  $p$ . Câu “không phải là  $p$ ” cũng là một mệnh đề logic, được gọi là phủ định của  $p$ , kí hiệu là  $\bar{p}$  hoặc  $\neg p$
- Bảng giá trị chân lý:

$p$	$\neg p$
T	
F	

# Phủ định mệnh đề

10



## □ Ví dụ:

$p$	$\neg p$
$1 > 2$	
Hà Nội là thủ đô của Việt Nam	
$X^2$ là số chính phương	

11

# Các toán tử logic

# Phép hội

12



- **Định nghĩa.** Cho trước hai mệnh đề logic  $p$ ,  $q$ . Câu nói “ $p$  và  $q$ ” cũng là một mệnh đề logic, được gọi là hội của  $p$  và  $q$ , kí hiệu  $p \wedge q$ .  $p \wedge q$  chỉ đúng khi cả  $p$  và  $q$  đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

# Phép hội

13



## □ Ví dụ:

- $p$ : “Bác Hồ sinh ngày 19/5”;
- $q$ : “Bác Hồ quê ở Nghệ An”.
- $p \wedge q$ :
  - “Bác Hồ sinh ngày 19/5 và Bác Hồ quê ở Nghệ An”.
- $p \wedge \neg q$ :
  - “Bác Hồ sinh ngày 19/5 và Bác Hồ quê không ở Nghệ An”.
- $\neg p \wedge q$ :
  - “Bác Hồ không sinh ngày 19/5 và Bác Hồ quê ở Nghệ An”.

# Phép tuyển

14



- **Định nghĩa.** Cho trước hai mệnh đề logic  $p, q$ . Câu nói “ $p$  **hoặc**  $q$ ” cũng là một mệnh đề logic, được gọi là **tuyển** của  $p$  và  $q$ ,

- Kí hiệu:  $p \vee q$ .
- $p \vee q$  chỉ sai khi cả  $p$  và  $q$  đều sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

# Phép tuyển

15



## □ Ví dụ:

- p: “Hồ Xuân Hương sinh ngày 3/5”;
- q: “Hồ Xuân Hương sinh ngày 9/5”;
- thì p v q là: “Hồ Xuân Hương sinh ngày 3/5 hoặc vào ngày 9/5”;

# Phép tuyển có loại

16



- **Định nghĩa.** Cho trước hai mệnh đề logic  $p, q$ . Câu nói “**hoặc**  $p$  **hoặc**  $q$ ” cũng là một mệnh đề logic, được gọi là **tuyển có loại** của  $p$  và  $q$ ,

- Kí hiệu:  $p \oplus q$ .

- $p \oplus q$  đúng khi một trong hai  $p$  hoặc  $q$  đúng và sai trong trường hợp còn lại.

$p$	$q$	$p \oplus q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	



# Phép tuyển có loại

17



## □ Ví dụ:

- p: “Hồ Xuân Hương sinh ngày 3/5”;
- q: “Hồ Xuân Hương sinh ngày 9/5”;
- thì  $p \oplus q$  là: “Hồ Xuân Hương hoặc sinh ngày 3/5 hoặc vào ngày 9/5”;
- Có nghĩa rõ ràng là Hồ Xuân Hương chỉ có thể sinh vào một trong hai ngày 3/5 hoặc 9/5.

# Phép kéo theo

18



- **Định nghĩa.** Cho trước hai mệnh đề logic  $p$ ,  $q$ . Câu nói “**nếu có  $p$  thì có  $q$** ” cũng là một mệnh đề logic, được gọi là **phép kéo theo** của  $p$  và  $q$ , kí hiệu  $p \rightarrow q$ .  $p \rightarrow q$  chỉ sai nếu  $p$  đúng,  $q$  sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

# Phép kéo theo

19



## □ Ví dụ:

- p: “Tam giác ABC vuông tại đỉnh A”;
- q: “ $BC^2 = CA^2 + AB^2$ ”
- $p \rightarrow q$ : “Tam giác ABC vuông tại đỉnh A thì  $BC^2 = CA^2 + AB^2$ ”

# Phép tương đương

20



- **Định nghĩa.** Cho trước hai mệnh đề logic  $p, q$ . Câu nói “ $p$  **tương đương với**  $q$ ” cũng là một mệnh đề logic, kí hiệu  $p \leftrightarrow q$ . Mệnh đề  $p \leftrightarrow q$  chỉ đúng khi  $p$  và  $q$  cùng đúng hoặc cùng sai.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

# Phép tương đương

21



## □ Ví dụ:

- $p$ : “Tam giác ABC là tam giác đều”;
- $q$ : “Tam giác ABC có 3 cạnh bằng nhau”
- $p \leftrightarrow q$ : “Tam giác ABC đều khi và chỉ khi tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau”.

# Thứ tự ưu tiên

22



- **Quy tắc:** Trong một mệnh đề phức hợp gồm nhiều toán tử logic, để chỉ định thứ tự thực hiện các toán tử logic ta dùng các dấu ngoặc. Khi không có dấu ngoặc thì thứ tự ưu tiên được thể hiện như sau:



# Dịch câu

23



- Xác định các toán tử logic (các liên từ)
- Xác định các mệnh đề thành phần
  - ▣ Ví dụ: “*Bạn không được đi xe máy nếu bạn dưới 16 tuổi trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt*”
  - ▣ Các mệnh đề:  
*Bạn được đi xe máy* ( $p$ )      *Xe máy có phân khối nhỏ* ( $r$ )  
*Bạn dưới 16 tuổi* ( $q$ )      *Bạn có giấy phép đặc biệt* ( $s$ )

$$(q \wedge (\overline{r \vee s})) \rightarrow \overline{p}$$

# Biểu thức logic & sự bằng nhau



# Biểu thức logic

25



- **Định nghĩa.** Một biểu thức logic là một biểu thức được tạo thành từ các biến logic cho trước bằng cách áp dụng các toán tử logic và dấu ngoặc “(”, “)” một cách hình thức.
- **Ví dụ:**
  - ▣  $(\neg(p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$
  - ▣  $(q \wedge (r \vee s)) \rightarrow p$

# Tương đương logic

26



- **Định nghĩa.** Một biểu thức logic luôn có giá trị chân lý T (F) với bất cứ giá trị chân lý nào của các mệnh đề thành phần được gọi là *hằng đúng* **T** (*hằng sai* **F**). Biểu thức logic không phải hằng đúng hoặc hằng sai gọi là *tiếp liên*.

<b>p</b>	<b><math>\neg p</math></b>	<b><math>p \vee \neg p</math></b>	<b><math>p \wedge \neg p</math></b>
<b>T</b>			
<b>T</b>			
<b>F</b>			
<b>F</b>			

# Tương đương logic

27



- **Định nghĩa.** Các mệnh đề logic  $p$  và  $q$  được gọi là *tương đương logic* nếu biểu thức logic  $p \leftrightarrow q$  là mệnh đề logic hằng đúng.

Khi đó  $p, q$  gọi là 2 mệnh đề *logic tương đương* (bằng nhau), kí hiệu  $p \Leftrightarrow q$ .

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

# Tương đương logic

28



## □ Tính chất:

- Phản xạ: với  $\forall p$ , ta luôn có  $p \Leftrightarrow p$
- Đối xứng: Nếu  $p \Leftrightarrow q$  thì  $q \Leftrightarrow p$
- bắc cầu: Nếu  $p \Leftrightarrow q$ ,  $q \Leftrightarrow r$  thì  $p \Leftrightarrow r$
- Khử kéo theo:  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$  (chứng minh)

## □ Ví dụ:

- CMR  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$  là hằng đúng?

# Các đẳng thức cơ bản

29



- Cho  $p, q, r$  là các mệnh đề

T. đ.	Tên	Tương đương	Tên
$p \wedge \mathbf{T} = p$ $p \vee \mathbf{F} = p$	Đồng nhất	$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	Giao hoán
$p \vee \mathbf{T} = \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$	Trội	$(p \wedge q) \wedge r = q \wedge (p \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r = q \vee (p \vee r)$	Kết hợp
$p \wedge p = p$ $p \vee p = p$	Lũy đẳng	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Phân phối
$\neg(\neg p) = p$	Bù kép	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	De Morgan
$p \wedge \neg p = \mathbf{F}$ $p \vee \neg p = \mathbf{T}$	Phủ định	$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$	Thu hút

# Tương đương logic

30



□ **Ví dụ:** Cho mệnh đề  $p, q$ .

▣ Chứng minh:  $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

▣ Sử dụng các tương đương logic cơ bản, ta có:

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] \quad (\text{De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge [p \vee \neg q] \quad (\text{phủ định kép})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \quad (\text{phân phối})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \quad (\text{phủ định})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} \quad (\text{giao hoán})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad (\text{đồng nhất})$$

# Các phép toán logic với các bit

# Phép toán bit OR, AND, XOR, NOT

32



- Một bit có hai trạng thái thường kí hiệu là 0, 1
- Bit dùng để biểu diễn các giá trị chân lý:
  - ▣ 0 tương ứng F
  - ▣ 1 tương ứng T
- Biến Boole: có giá trị là 1 (T) hoặc 0 (F)
- Các toán tử  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\oplus$ ,  $\neg$  tương ứng với các phép toán OR, AND, XOR, NOT



# Phép toán bit OR, AND, XOR, NOT

33



## □ Bảng tính

	OR	
$\vee$	0	1
0		
1		

	AND	
$\wedge$	0	1
0		
1		

	XOR	
$\oplus$	0	1
0		
1		

# Phép toán bit OR, AND, XOR, NOT

34



- **Định nghĩa.** Một chuỗi bit là một dãy gồm không hoặc nhiều bit. Độ dài chuỗi bit là số các bit trong chuỗi đó.
- Các phép toán **OR – bit**, **AND – bit**, **XOR – bit** thực hiện trên 2 chuỗi bit có cùng độ dài: thực hiện các phép toán *OR*, *AND*, *XOR* tại các bit tương ứng trong 2 chuỗi.

# Phép toán bit OR, AND, XOR, NOT

35



## □ Ví dụ:

□  $1001 \vee 0111 =$

□  $1001 \wedge 0111 =$

□  $1001 \oplus 0111 =$



THANK YOU!