Angewandte Mathematik (AM)

Schule: HTBLuVA St. Pölten
Abteilung / Zweig: Elektronik / Technische Informatik
Lehrperson: Prof. Mag. Franz Reichel
Jahrgang: 2006 / 07
Klasse: 5AHELI

1 Anmerkung

Da im Unterricht nur die notwendigsten Dinge besprochen werden konnten und deshalb teilweise unverständlich waren, wurde dieses Skriptum um einige Erklärungen erweitert.

Beispiele sind mit einem Strich auf der Seite gekennzeichnet.

Vor allem die hinteren Kapitel wurden fast vollständig aus dem Buch gelernt.

Als Lehrbuch wurde verwendet: Timischl, Kaiser, Ingenieur-Mathematik 4, 2001, E. Dorner GmbH, Wien, ISBN: 3-7055-0158-5

2 Inhaltsverzeichnis

3 Statistik

3.1 Kombinatorik

Es geht um die Bestimmung von möglichen Anordnungen (z.B. wie viele verschiedene Sudokus gibt es) von unterschiedlichen oder gleichen Elementen mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge.

3.1.1 Permutationen ohne Wiederholung

Unter einer Permutation (von lat. *permutare* „(ver)tauschen“) versteht man die Veränderung der Anordnung einer Menge durch Vertauschen ihrer Elemente.

a → a	1
ab ba	2
abc bac cab	6 = 1*2*3
acb bac cba	

abcd 6
b… 6
c… 6
d… 6

4 * 6 = 24 = 1*2*3*4 = 4!

Es gibt jeweils 6 Permutationen mit a an 1. Stelle, mit b an 1. Stelle …

n Elemente → n!

a_1, a_2 … a_n kann man auf n! Möglichkeiten anordnen

$P(n) = n!$ …Permutationen ohne Wiederholung

0!	=	1
1!	=	1
2!	=	2
3!	=	6
4!	=	24
5!	=	120
6!	=	720
7!	=	5040
8!	=	40320
9!	=	362880
10!	=	3628800

Der Taschenrechner schafft es üblicherweise bis 69! ($70! > 10^{100}$)

3.1.2 Permutationen mit Wiederholung

a_1 a_2 a_3 b c d_1 d_2

Vorerst a_1 a_2 a_3 – dann $a_1 = a_2 = a_3 = a$
analog d_1 d_2 → d d

$$P(7;3;2) = \frac{7!}{3!2!} = \frac{4*5*6*7}{2} = 420$$

Die Summe der gesamten Möglichkeiten (wenn keine Elemente gleich wären) durch die Möglichkeiten, die wegen Gleichheit entfallen).

$P(n;n_1;n_2;\ldots n_k)$ wobei $n \geq \sum_{i=1}^{k} n_i$ ... Allgemeiner Fall

Allgemeine Formel:

$$P(n;n_1;\ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$$ …Permutationen mit Wiederholung

3.1.3 Lexikographische Anordnung von Permutationen

A	B	C	D	… natürliche Anordnung
1	2	3	4	→ den Zeichen werden Nummern zugewiesen

A	B	C	D
1	2	4	3
A	C	B	D
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3

Anordnung wie im Wörterbuch

1234
1243
1324
1342
1423
1432
…

Regel:

1) Suche in der vorangehenden Permutation (von rechts nach links gehen) das erste Element, das niedriger ist als ein rechts stehendes.
2) Ersetze dieses Element durch das nächst höhere aller hinter ihm stehenden Elemente. Die vorangehenden Elemente bleiben unverändert. die noch fehlenden folgen in natürlicher Anordnung.

Ges.: 43. Permutation in lexikographischer Anordnung der Elemente a, b, c, d, e

5! = 120

a b c d e

24 Anordnungen mit a an 1. Stelle (5! / n-Elemente)
→ vorne ein (mit c an erster Stelle wäre es schon mindestens die 48. Permutation)

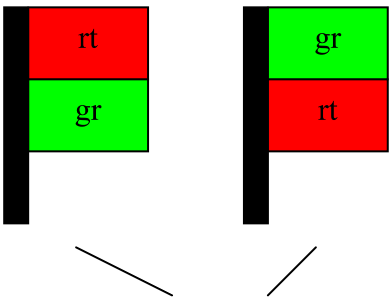
b
- a — 6 Möglichkeiten (insgesamt 30 = 24 + 6)
- c — 6 (ins. 36) → b darf nicht zweimal vorkommen!
- d — 6 (ins. 42) → die 2. Stelle muss e sein

Das letzte bd… Element ist die 42. Permutation → Das erste be… Element ist die 43. Permutation.

Lösung: <u>beacd</u> (1. Element → verbleibende Elemente nach aufsteigender Nummer anhängen)

3.1.4 Variationen ohne Wiederholung

Bsp.:
rt, bl, gr und weiße Stoffe → zweifärbige Fahnen gemacht.



rt-gr und gr-rt ist nicht dasselbe!

rt → bl, gr, w — 3

bl → gr, w — 2

gr → w — 1

weil z.B. rt-gr auch als gr-rt geht

6 x 2 = 12

Gegeben sind a1, a2…an n-Elemente. Jede Zusammenstellung von k solchen Elementen unter Berücksichtigung der Reihenfolgen heißt Variation von n-Elementen zur k-ten Klasse.

Variation ohne Wiederholung → nur verschiedene Elemente
Variation mit Wiederholung → auch untereinander gleiche Elemente

a b c n = 3

Ges.: Variation zu 1., 2. und 3. Klasse

<u>1. Klasse</u>

V(3;1) = 3 abc

<u>2. Klasse</u> (zu je zwei Elementen)

ab bc ca ba cb ac

V(3;2) = 6 = 3*2

<u>3. Klasse</u>

abc acb … cba

P(3) = V(3;3) = 6 = 3*2*1

V(n,1) = n $a_1, a_2 \ldots a_n$

V(n,2) = n(n-1)

V(n,3) = n(n-1)(n-2)

$$V(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1*2...(n-k)(n-k+1)...n}{1*2...(n-k)}$$

$$\Big\downarrow \text{kürzen}$$

V(n,k) = (n-k+1)(n-k+2)…n

3.1.5 Variationen mit Wiederholung

2 Elemente a, b zur 2. Klasse:

aa, ab, ba, bb

$V_W(2;2) = 2^2 = 4$

zur 3. Klasse

aaa	aab	aba	baa
bbb	bba	bab	abb

$VW(n;k) = n^k$

$V_W(2;3) = 2^3 = 8$

Ges.: Wie viele 4-stellige Zahlen lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3,4 und 5 bilden, wenn jede Grundziffer mehrmals auftreten darf.

$V_W(5;1) = 5$ 1, 2, 3, 4, 5 (1. Klasse)

$V_W(5;2) = 5^2 = 25$ (2. Klasse)

11	21	…	51
12			52
13			53
14			54
15	25	…	55

$V_W(5;3) = 125$

111	…	511
112		512
113		513
114		514
115	…	515

} 25

121 → 25
131 → 25
141 → 25
151 → 25

3.1.6 Kombinationen ohne Wiederholung

C(n,k)
$a_1, a_2, \dots a_n$ gegebene Elemente

Jede Zusammenstellung von k solchen Elementen ohne Berücksichtigung ihrer Anordnung heißt Kombination von n-Elementen zur k-ten Klasse.

Fahnenbeispiel: rt, bl, gr, w

rt	bl	bl	gr	gr	w
	gr	w			
	w				

<table>
<tr><th>n\k</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>a</td><td rowspan="2" colspan="4">nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>a, b</td><td>ab</td><td rowspan="2" colspan="3">nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>a, b, c</td><td>ab, ac, bc</td><td>abc</td><td rowspan="2" colspan="2">nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>a, b, c, d</td><td>ab, ac, ad, bc, ad, cd</td><td>abc, abd, acd, bcd,</td><td>abcd</td><td rowspan="2">nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>a, b, c, d, e</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>abcde</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td><td>1</td></tr>
</table>

... für Kombinationen C(n,k)

Die Zahlen in der unteren Reihe geben die unterschiedlichen Möglichkeiten an.

V(n,k) > C(n,k)   für   n > 1, k > 1

n\k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1				
2	2	2			
3	3	6	6		
4	4	12	24	24	
5	5	20	60	120	120

… für Variationen $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Tabelle für V(n,k) : C(n,k):

n\k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1				
2	1	2			
3	1	2	6		
4	1	2	6	24	
5	1	2	6	24	120
		= 1*2	= 1*2*3	= 1*2*3	= 1*2*3*4

→ V(n,k) : C(n,k) = k!

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

$\binom{n}{k}$ …Binomialkoeffizient

3.1.7 Kombinationen mit Wiederholung

Bsp.: Wie viele verschiedene Würfe können beim Werfen mit 3 gleichen Würfeln gleichzeitig geworfen werden?

n = 6   k = 3

$$\binom{n}{k} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4*5*6}{1*2*3} = 20$$

<u>Allgemeine Überlegung:</u>

$a_1, a_2 \dots a_n$

k = 1 $a_1, a_2 \dots a_n$

$C_W(n,1) = n$

Beachte:
$C_W(n,1) = C(n,1) = V(n,1) = V_W(n,1) = n$

k = 2

$$CW(n,2) = n + (n-1) + (n-2) \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} * \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \binom{n+1}{2}$$

k = 3

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n+2-1}{2}$$

$$C_W(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Beachte: k > n möglich!

3.1.8 Ergänzungen zu den Kombinationen

Wie viele Kombinationen von n-Elementen zur k-ten Klasse enthalten m vorgeschriebene Elemente, wenn $1 \leq m \leq k$ gilt.

Die vorgeschriebenen m Elemente werden mit (k-m) Elementen der verbleibenden (n-m) Elemente ergänzt.

C(n,k / m vorgeschriebene Elemente nicht enthalten) = $\binom{n-m}{k-m}$

Bsp.:
1, 2, 3, 4, 5

1 und 5 soll nicht enthalten sein (m = 2 [weil 1 und 5 zwei Elemente sind])

n = 5 k = 3

$$\binom{5-2}{3-2} = \binom{3}{1} = 3$$

3.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsexpertiment – ein beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ausgang sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt.

Ergebnisse von Zufallsexperimenten heißen „zufällige Ereignisse“

Ergebnis…Aussageform, die bei Einsetzen des beobachteten Merkmalswerts zu einer wahren bzw. falschen Aussage wird (Ereignis tritt ein oder nicht)

Beispiele für Zufallsexperimente:

- Münzwurf
- Ziehen von Karten
- Ziehen aus Urnen
- Entnehmen von Stichproben bei Produktionen

Bedeutende Personen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung:
Lacplace und Bernulli

Die Wahrscheinlichkeit P(E), dass ein Ereignis E bei einem Zufallsexperiment eintritt, ist:

$$P(E) = \frac{g}{m}$$

P…Probability
E…Ergebnis
g…günstige Fälle
m…mögliche Fälle

P(E) = 1…sicheres Ereignis
P(E) = 0…unmögliches Ereignis

E’ bzw. $\overline{E}$ tritt genau dann ein, wenn E <u>nicht</u> eintritt.
E’…Komplementärereignis zu E (entgegen gesetztes Ereignis)

$$P(E') = \frac{m-g}{m} = 1 - \frac{g}{m} = 1 - P(E)$$

Beispiele:

Ges.: W mit idealem Würfel bei einem Wurf 5 zu erlangen
E…5 werfen

1, 2, 3, 4, 5, 6 m = 6 $P(E=5) = \frac{1}{6}$

günstiger Fall 5 g = 1

Urne (7 rot, 5 blau, 8 weiß)
Ges.: W bei einmaligem Ziehen

a) 1 rote zu ziehen $P(E = rot) = \frac{7}{20}$

b) 1 blaue zu ziehen $P(E = blau) = \frac{5}{20}$

c) 1 weiße zu ziehen $P(E = weiß) = \frac{8}{20}$

Dadurch, dass man immer eine Kugel zieht, muss die summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 sein.

$$\frac{7+5+8}{20} = 1$$

Ges.: W, mit 2 Würfeln die Augensumme 8 zu werfen.

Zum Ermitteln der günstigen Fälle g wird eine Tabelle erstellt:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

g = 5
m = 6^2 = 36

$$P(E = 8) = \frac{5}{36}$$

3.2.1 Summe und Produkt von Ereignissen

E_1, E_2 Ereignisse eines Zufallsexperiments
$E_1 \wedge E_2$ tritt ein, wenn sowohl E_1 und E_2 eintritt
$E_1 \vee E_2$ tritt ein, wenn E_1 oder E_2 oder beide gleichzeitig eintreten

Würfeln:
E_1 Würfeln einer geraden Zahl
E_2 Würfeln einer durch 3 teilbaren Zahl

$E_1 \wedge E_2 \ldots$gerade und durch 3 teilbar $\{2,4,6\} \cap \{3,6\} = \{6\}$
$E_1 \vee E_2 \ldots \{2,4,6\} \cup \{3,6\} = \{2,3,4,6\}$
$\cap \ldots$Durchschnitt zweier Mengen
$\cup \ldots$Vereinigung zweier Mengen

3.2.1.1 Additionssatz für einander ausschließende Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von 2 einander ausschließenden Ereignissen eintritt, beträgt $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Wahrscheinlichkeit 3 oder 5 Augen zu werfen:

$$P(3 \vee 5) = P(E_1 = 3) + P(E_2 = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3.2.1.2 Allgemeiner Additionssatz

E_1 und E_2 schließen einander nicht aus.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von zwei einander nicht ausschließenden Ereignissen eintritt, beträgt $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \wedge E_2)$

Beachte: Bei $P(E_1) + P(E_2)$ werden die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen für E_1 ^ E_2 doppelt gezählt.
→ Der Additionssatz für einander ausschließende Ereignisse ist Spezialfall des allgemeinen Additionssatzes.

Bsp.:
Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine gerade Zahl oder 2 zu werfen?

E_1 (Werfen einer geraden Zahl)
E_2 (Werfen der Zahl 2)
→ Schließen sich gegenseitig nicht aus – sind miteinander vereinbar

$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \wedge E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Bsp.: Kartenspiel mit 20 Karten
Ges.: Wahrscheinlichkeit eine Herzkarte oder ein Ass zu ziehen?

E1 (Herzkarte)
E2 (Ass)
→ miteinander verträglich

$$P(E_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{5}$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{1}{20}$$

$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \wedge E_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{5+4-1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

3.2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Experiment mit n gleich möglichen Fällen:

das Ereignis E_1 trete n_1 mal auf
das Ereignis E_2 trete n_2 mal auf
das Ereignis $E_3 = E_1$ ^ E_2 trete n_3 mal auf

$$P(E_1) = \frac{n_1}{n}$$

$$P(E_2) = \frac{n_2}{n}$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{n_3}{n}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 eintritt, wenn E_2 bereits eingetreten ist, beträgt:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2)}$$ |…unter der Bedingung

E_1 und E_2 seien beliebige Ereignisse mit $P(E_2) \neq 0$.
Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von E_1 unter der Voraussetzung (Bedingung), dass E_2 schon eingetreten ist, heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit von E_1 unter der Bedingung E_2 und wird mit $P(E_1|E_2)$ bezeichnet.

Analog gilt:

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_1)}$$

Schließen sich E_1 und E_2 gegenseitig aus:

$$P(E_1 \wedge E_2) = 0$$

$$\to P(E_1 | E_2) = 0$$

$$P(E_2 | E_1) = 0$$

Bsp.: Würfel mit 2 Spielwürfeln
Ereignis A: Augensumme mind. 9
B: Augensumme ungerade

Unter der Bedingung B kann A in folgenden Zusammenstellungen auftreten:

3+6	4+5	5+6
6+3	5+4	6+5

$$P(A \wedge B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{8}$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{18}{5 * 6} = \frac{3}{5}$$

3.2.3 Multiplikationssätze

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2)} \rightarrow P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1 \mid E_2) * P(E_2)$$

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_1)} \rightarrow P(E_1 \wedge E_2) = P(E_2 \mid E_1) * P(E_1)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von E_1 und E_2 beträgt:

$$P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1 \mid E_2) * P(E_2) = P(E_2 \mid E_1) * P(E_1)$$

Bsp.: 50er Packung Schrauben, 5 davon haben einen Gewindefehler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 2er Stichprobe keine fehlerhaften enthält.

E_1…kein Fehler bei 1. Einheit der Stichprobe
E_2…kein Fehler bei 2. Einheit der Stichprobe

$$P(E_1) = \frac{45}{50}$$

Nach Entnahme der 1. Stichprobe ändert sich der Umfang der Grundgesamtheit.

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{44}{49}$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{45}{50} * \frac{44}{49} = \frac{9}{5} * \frac{22}{49} = \frac{198}{240} \approx 0{,}808$$

Definition:
Wenn $P(E_2 \mid E_1) = P(E_2)$ ist (damit auch $P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)$ ist), so bezeichnet man E_1 und E_2 als stochastisch unabhängig.

Für solche Ereignisse lautet der Multiplikationssatz:

$$P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1) * P(E_2)$$

Statt $P(E_1 \wedge E_2)$ schreibt man oft $P(E_1 * E_2)$.

Ges.: Wahrscheinlichkeit bei 4maligem Würfeln immer 5 zu werfen?
E_1…1. Wurf 5
E_2…2. Wurf 5
E_3…3. Wurf 5

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{6}$$

$$P(E) = P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = P(E_1) * P(E_2) * P(E_3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Anlage besteht aus 4 Einheiten (Baugruppen).
Die Wahrscheinlichkeiten für fehlerfreies arbeiten der Braugruppen sind $P_1 = 0{,}90$; $P_2 = 0{,}85$; $P_4 = 0{,}90$
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P(E), dass die Anlage fehlerfrei funktioniert?

$$P(E) = P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4) = P(E_1) * P(E_2) * P(E_3) * P(E_4) = 0{,}90 * 0{,}85 * 0{,}80 * 0{,}90 \approx 0{,}55$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

Falsch wäre der Ansatz $P(\overline{E}) = P(\overline{E}_1) * P(\overline{E}_2) * P(\overline{E}_3) * P(\overline{E}_4)$!
Für diese Wahrscheinlichkeit müssten alle Maschinen gleichzeitig ausfallen. Dies ist für die Funktionsunfähigkeit der Maschine allerdings nicht notwendig.

3.2.4 Totale Wahrscheinlichkeit

Sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ der zufälligen Ereignisse A_i (eines vollständigen Systems von Ereignissen) und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_i)$ eines Ereignisses B bezüglich der Ereignisse A_i ($i = 1,\ldots n$) bekannt, so kann man P(B) berechnen.

Bsp.: Lager mit 6000 Stk. Platten
Von B_1…2500 Stk. mit Ausschusswahrscheinlichkeit 3%
B_2…3500 Stk. mit Ausschusswahrscheinlichkeit 4,5%
B…Betrieb (Lieferant)
Ges.: Wahrscheinlichkeit, dass bei Entnahme einer Platte aus dem Lager ein Ausschussteil entnommen wird.

Ereignis E_1…Platte von B_1
E_2…Platte von B_2
E…Platte Ausschuss

Ereignis E tritt ein, wenn sowohl E und E_1 bzw. E und E_2 eintreten [$(E \wedge E_1)$ bzw. $(E \wedge E_2)$].

$E = (E \wedge E_1) \vee (E \wedge E_2)$ …zwei zufällige unvereinbare Ereignisse

$$P(E) = P(E \wedge E_1) + P(E \wedge E_2)$$

Anwendung der Multiplikationsregel:

$$P(E) = P(E \mid E_1) * P(E_1) + P(E \mid E_2) * P(E_2)$$

$$P(E \mid E_1) = 0{,}03$$

$$P(E \mid E_2) = 0{,}045$$

$$P(E_1) = \frac{2500}{6000} = \frac{5}{12} = 0{,}416$$

$$P(E_2) = \frac{3500}{6000} = \frac{7}{12} = 0{,}583$$

$$P(E) = 0{,}03 * 0{,}416 + 0{,}045 * 0{,}583 = 0{,}0387 \approx 4\%$$

Erweiterung auf n-Ereignisse – Satz für die totale Wahrscheinlichkeit:

Bilden die Ereignisse $A_1,\ldots A_n$ ein vollständiges System von Ereignissen und ist B ein zufälliges Ereignis, so gilt für die Wahrscheinlichkeit von B

$$P(B) = P(B \mid A_1) * P(A_1) + P(B \mid A_2) * P(A_2) + \ldots P(B \mid A_n) * P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) * P(A_i)$$

In einem Lager sind Bauelemente von vier Betrieben enthalten:

Betrieb	Stückzahl	Ausschussquote
1	2500	1,2%
2	3200	2,1%
3	1700	1,5%
4	4600	1,7%

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine dem Lager entnommene Baugruppe defekt ist?

Ereignis A: entnommene Baugruppe stammt von Betrieb i
Ereignis B: Baugruppe ist defekt

$$P(A_1) = \frac{2500}{12000} = \frac{25}{120} = 0{,}208$$
$$P(A_2) = \frac{3200}{12000} = \frac{8}{30} = 0{,}267$$
$$P(A_3) = \frac{1700}{12000} = \frac{17}{120} = 0{,}142$$
$$P(A_4) = \frac{4600}{12000} = \frac{23}{60} = 0{,}383$$

$$P(B \mid A_1) = 0{,}012$$
$$P(B \mid A_2) = 0{,}021$$
$$P(B \mid A_3) = 0{,}015$$
$$P(B \mid A_4) = 0{,}017$$

$$P(B) = P(B \mid A_1) * P(A_1) + \ldots P(B \mid A_n) * P(A_n)$$
$$P(B) = 0{,}012 * 0{,}208 + 0{,}021 * 0{,}267 + 0{,}015 * 0{,}142 + 0{,}017 * 0{,}383 = 0{,}0167 \approx 0{,}017$$

d.h. mit 1,7% Wahrscheinlichkeit ist die Baugruppe defekt.

Bsp.: 3 Betriebe stellen das gleiche Erzeugnis her. Ein Finalproduzent erhält von
Betrieb 1 50% mit 95% Erfüllung der Qualitätsnorm
Betrieb 2 30% mit 80% Erfüllung der Qualitätsnorm
Betreib 3 20% mit 90% Erfüllung der Qualitätsnorm

Ges.: Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig entnommenes Erzeugnis die Qualitätsnorm erfüllt.

Ereignis A: entnommene Baugruppe stammt vom Betrieb i
Ereignis B: entnommene Baugruppe entspricht der Qualitätsnorm

$$P(B \mid A_1) = 0{,}95$$
$$P(B \mid A_2) = 0{,}80$$
$$P(B \mid A_3) = 0{,}90$$

$$P(A_1) = 0{,}5$$
$$P(A_2) = 0{,}3$$
$$P(A_3) = 0{,}2$$

$$P(B) = P(B \mid A_1) * P(A_1) + \ldots P(B \mid A_n) * P(A_n)$$
$$P(B) = 0{,}95 * 0{,}5 + 0{,}80 * 0{,}3 + 0{,}90 * 0{,}2 = 0{,}895 = 89{,}5\%$$

3.2.5 Satz von Bayes

Sind zwei zufällige Ereignisse A, B mit P(A) > 0 und P(B) > 0 gegeben und ist die bedingte Wahrscheinlichkeit P(B|A) von B bezüglich A bekannt, so kann man daraus die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) und A bezüglich B berechnen.
Nach dem Multiplikationssatz gilt:

$$\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

Verallgemeinerung dieser Beziehung auf bedingte Wahrscheinlichkeit von k Ereignissen A_k bezüglich des Ereignisses B_i.

Seien $A_1 \ldots A_n$ paarweise unvereinbare Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A_1) \ldots P(A_n)$ ($P(A_i) > 0$, i = 1,…n), deren Summe das sichere Ereignis ist und B ein zufälliges Ereignis mit P(B) > 0, so gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_k|B)$ von A_k bezüglich B:

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_k) * P(A_k)}{P(B)} \qquad k = 1,\ldots n$$

Ersetzt man P(B) durch die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) * P(A_i)$, so erhält man die sog. Bayessche Formel:

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_K) * P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) * P(A_i)} \qquad \ldots\text{Bayessche Formel}$$

3 Betriebe produzieren Bauteile → liefern in ein Lager

Betrieb	Stück	Ausschuss
1	3500	2,0%
2	2000	2,5%
3	1500	1,5%

Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein entnommenes Bauteil aus Betrieb 3 und ist defekt?

$$P(B_1) = \frac{3500}{7000} = 0{,}5$$

P(A|B₁) = 0,02 → $P(A|B_1) = 0{,}02$
$P(A|B_2) = 0{,}025$
$P(A|B_3) = 0{,}015$

$$P(B_2) = \frac{2000}{7000} = 0{,}286$$

$$P(B_3) = \frac{1500}{7000} = 0{,}214$$

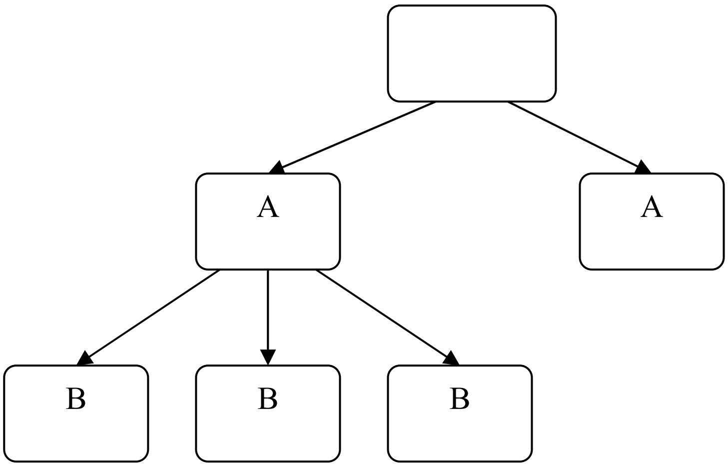
$$P(B_3 | A) = \frac{P(A|B_3) * P(B_3)}{P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2) + P(A|B_3) * P(B_3)}$$

$$= \frac{0{,}015 * 0{,}214}{0{,}02 * 0{,}5 + 0{,}025 * 0{,}286 + 0{,}015 * 0{,}214} = \frac{0{,}0315}{0{,}0204} = 0{,}154$$

D.h. mit 15,4% Wahrscheinlichkeit stammt ein defektes Bauteil aus Betrieb 3.

3.2.6 Veranschaulichung von Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Baumdiagramme

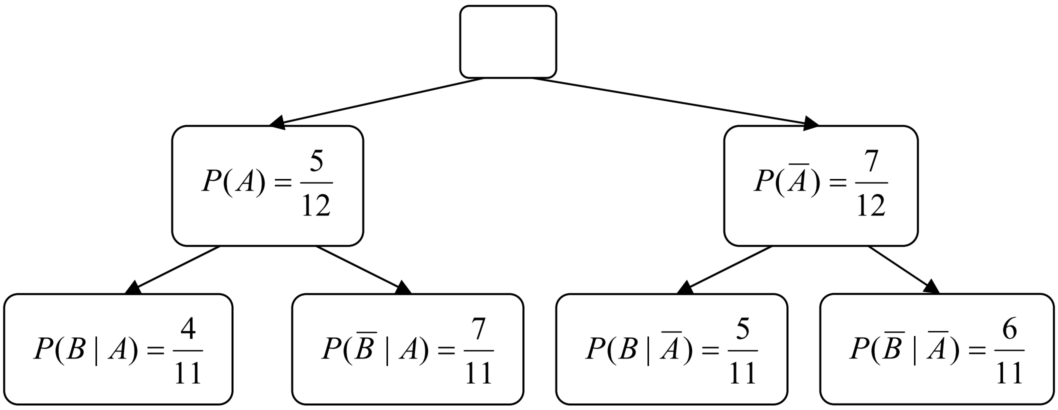
Ein Baum ist ein spezieller Graph, der aus Kanten (gerichteten Strecken) und Knoten (Kreisen) besteht.



Zufällige Ereignisse werden durch Knoten, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten durch Kanten dargestellt. Alle von einem Knoten ausgehenden Kanten bilden ein vollständiges System von Ereignissen.

z.B.: Urne mit 5 roten und 7 weißen Kugeln

Ereignis A rote Kugel bei 1. Entnahme
Ereignis B rote Kugel bei 2. Entnahme
…



Hinweise für das Aufstellen eines Baumdiagramms für einen zufälligen Versuch:

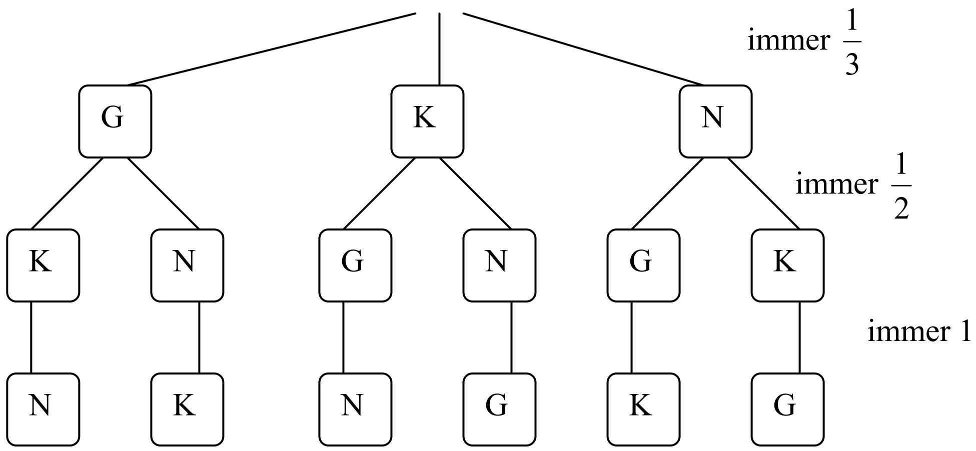
- Wie viele Stufen hat der Versuch?
- Die einem Knoten in der nächsten Stufe folgenden Ereignisse müssen ein vollständiges System bilden.
- Unverträgliche Ereignisse werden in nebeneinander liegenden Knoten dargestellt.
- Miteinander verträgliche Ereignisse werden nacheinander dargestellt. (also in verschiedenen Stufen liegenden Knoten.

Urne enthält 3 Lose:

G (ewinn)
K (leiner Gewinn)
N (iete)

Die Lose werden nacheinander gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lose in der Reihenfolge G, K, N gezogen werden.

Baumdiagramm:



$P(G, K, N) = \frac{1}{6}$

Das Beispiel zeigt die Permutationen von n-Elementen (m = 6, g = 1)

Beispiel:

5 Schüler einer Klasse kandidieren für die Wahl des Klassensprechers und seines Stellvertreters. Wie viele Teams Klassensprecher und Stellvertreter können gebildet werden?

Ist die Reihenfolge egal?

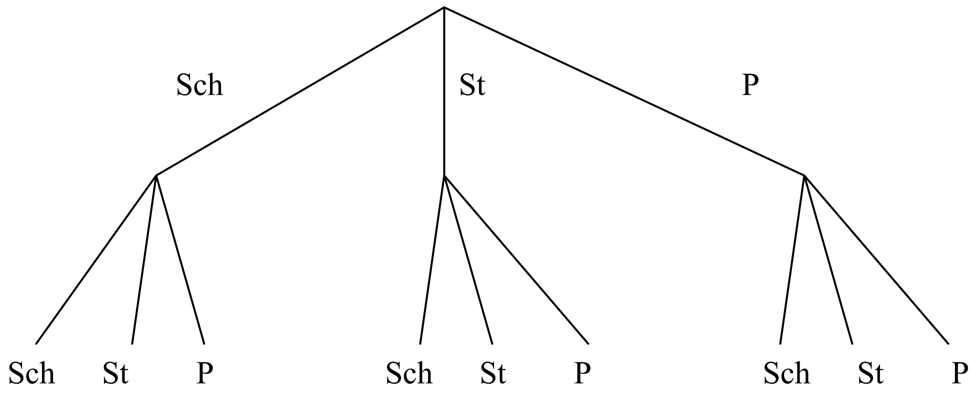
Kombination ohne Wiederholung $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5*4}{1*2} = 10$

Hier wurde die Reihenfolge nicht berücksichtigt.

Wird sie berücksichtigt sind es 20 Möglichkeiten.

„Schere-Papier-Stein“ – Knobeln

- Wie viele Spielausgänge gibt es?
- Handelt es sich um ein Zufallsexperiment
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Spieler zu gewinnen?

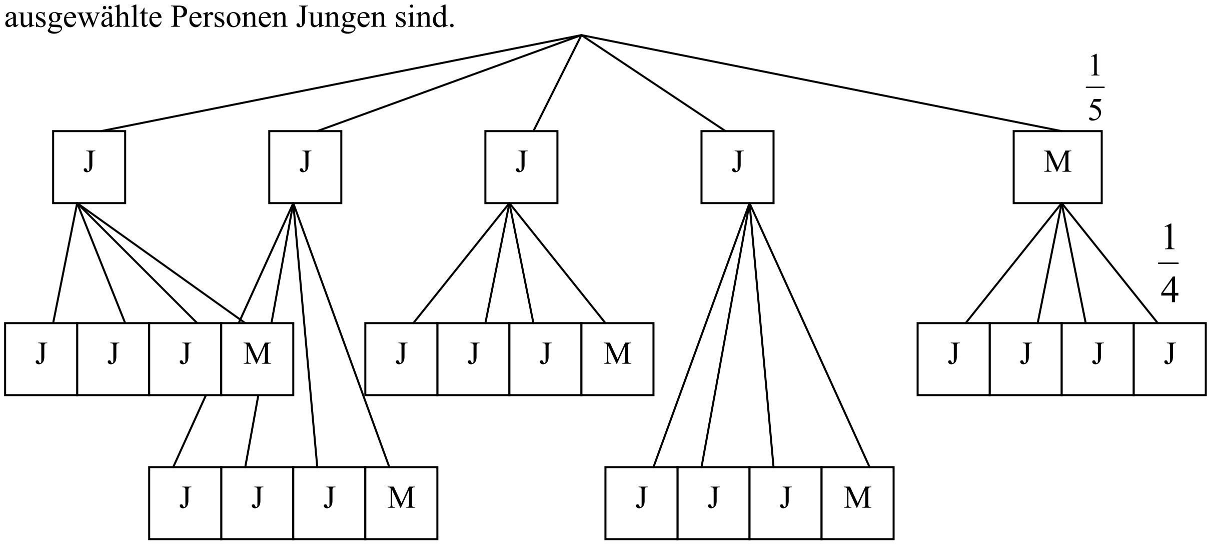


Es gibt 9 Spielausgänge

3, Unentschieden
3, dass Spieler 1 gewinnt
3, dass Spieler 2 gewinnt

Die Wahrscheinlichkeit für jeden Spieler zu gewinnen ist $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Gruppe 4 Jungen und 1 Mädchen, Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig ausgewählte Personen Jungen sind.

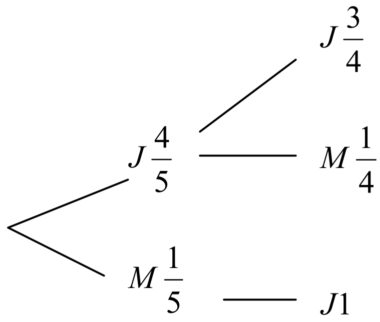


$$P(2J) = \frac{g}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Rechnerisch: $P(2J) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{4!3!}{2!5!} = \frac{3}{5}$

Zusatzfrage:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählten Personen 1 Junge und 1 Mädchen sind?

Verwendung eines etwas anderen Baumdiagramms:

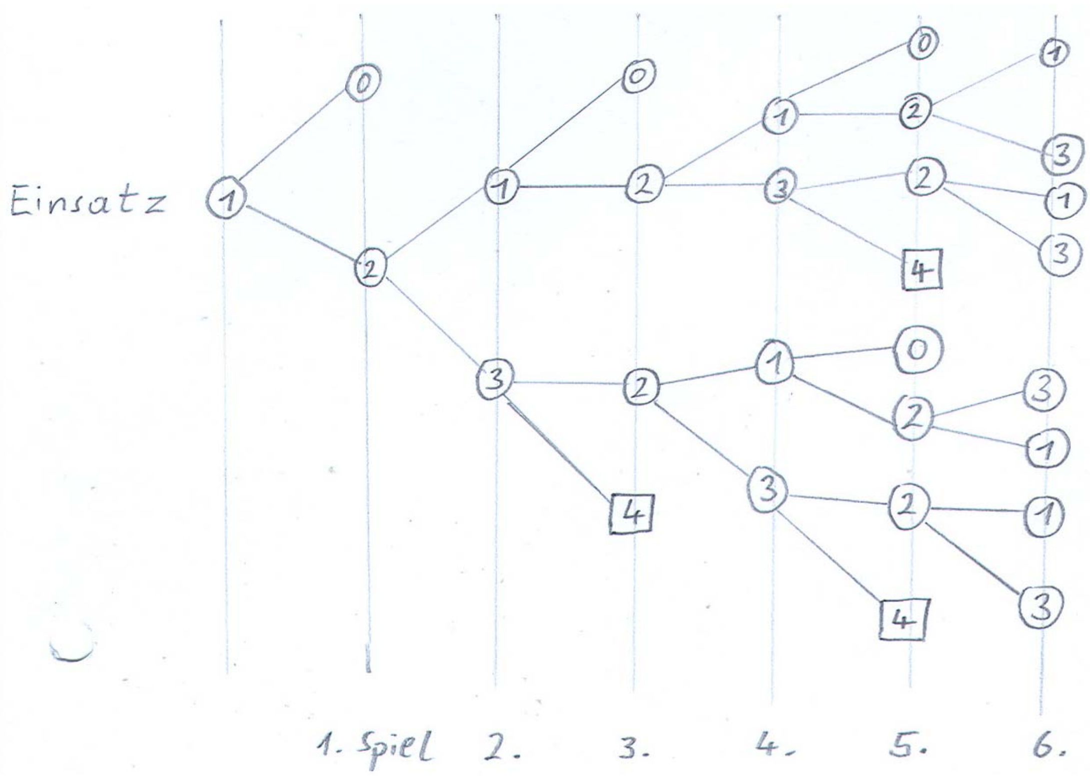


$$P(1J,1M) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} * \frac{1}{4}$$

Glücksrad
zur Hälfte rot und zur Hälfte weiß

Regeln:
Für 6 Spiele 6€ Einsatz
Schwarz → 1€ Gewinn
Rot → 1€ Verlust
Spielende, wenn man
- alles verloren hat
- 3€ dazugewonnen hat

Gewinnt man nicht 3€ dazu, müssen alle 6 Spiele gespielt werden!



Alle Wahrscheinlichkeiten sind jeweils ½.

$$P(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{16+4+1+1}{32}=\frac{22}{32}=\frac{44}{64}\approx\frac{2}{3}$$

$$P(1)=\frac{4}{64}$$

$$P(2)=0$$

$$P(3)=\frac{4}{64}$$

$$P(4)=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{4+1+1}{32}=\frac{6}{32}=\frac{12}{64}$$

Probe:

$$\frac{44+4+4+12}{64}=1$$

3.3 Geburtstagsprobleme

Ges.: Wahrscheinlichkeit, dass 7 aus einer Stadt zufällig ausgewählte Personen an 7 verschiedenen Wochentagen Geburtstag haben.

$$1*\frac{6}{7}*\frac{5}{7}*\frac{4}{7}*\frac{3}{7}*\frac{2}{7}*\frac{1}{7}=\frac{7!}{7^n}=0{,}61\%$$

Ges.: Wahrscheinlichkeit, dass 4 aus Großstadt zufällig ausgewählte Personen an verschiedenen Wochentagen Geburtstag haben.

$$1*\frac{6}{7}*\frac{5}{7}*\frac{4}{7}=\frac{n*(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}=35{,}0\%$$

Ges.: Wahrscheinlichkeit, welches der folgenden Ereignisse ist wahrscheinlicher?

a) 2 zufällig ausgewählte Personen haben am selben Tag Geburtstag
b) Eine zufällig ausgewählte Person hat am 3. 7. Geburtstag

Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich.

a) Egal an welchem Tag Person 1 Geburtstag hat, die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 2 auch an diesem Tag Geburtstag hat ist $\frac{1}{365}$
b) Die Chance beträgt bei 365 Tagen $\frac{1}{365}$

Ges.: Wahrscheinlichkeit, dass bei n zufällig ausgewählten Personen einer Großstadt mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben.

n > 365 → sicheres Ereignis…trivialer Fall

analog dazu:

a) Urne - darin enthalten sind 365 gleichartige Kugeln (1...365)
   Ziehen mit zurücklegen…jeweils Nummer aufschreiben
   n-mal wiederholen
b) Urne – 1 Urne mit Monaten
   1 Urne mit Tagen
   2 Kugeln mit zurücklegen gezogen, unberücksichtigt bleiben 30. 2., 31. 4. etc.

3.4 *Wahrscheinlichkeitsverteilungen*

3.4.1 Diskrete Verteilungen

3.4.1.1 Hypergeometrische Verteilung

Im Buch ab Seite 236

$$g(x;N,d,n)=\frac{\binom{d}{x}*\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{SCHLECHT}{schlecht}*\binom{GUT}{gut}}{\binom{Grundgesamtheit}{Stichproben}}$$

x…Anzahl der fehlerhaften in den Stichproben (x = 0, 1, 2, …n)
N…Umfang der GG (Grundgesamtheit)
d…Anzahl der fehlerhaften in GG
n…Stichprobenumfang

g(x)…Wahrscheinlichkeitsfunktion
G(x)…Verteilungsfunktion

$$G(x)=\sum_{k=0}^{x}g(k)=\sum_{k=0}^{x}\frac{\binom{d}{k}*\binom{N-d}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{x}\binom{d}{k}*\binom{N-d}{n-k}$$

Rekursionsformel für g(x):

$$g(x+1)=\frac{(d-x)*(k-x)}{(x+19)[(N-d)-(n-x)+1)]}$$

Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion für:

Geg.: Aus einer 100er Packung, die 5 defekte Stücke enthält, wird eine Stichprobe des Umfangs 20 gezogen.

N = 100
d = 5
N-d = 95
x = 0,1,…5
n = 20

$$g(0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{95}{20}}{\binom{100}{20}}=\frac{1*\frac{95*94...76}{20!}}{\frac{100*99...81}{20!}}=\frac{95*94...76}{100...81}=\frac{80*79*78*77*76}{100*99...96}=0{,}319$$

$$g(x+1=1)=\frac{5*20}{1*76}g(0)=\frac{100}{76}*0{,}319=0{,}420$$

$$g(2)=\frac{4*19}{2*77}g(1)=0{,}207$$

$$g(3)=\frac{3*18}{3*78}g(2)=0{,}048$$

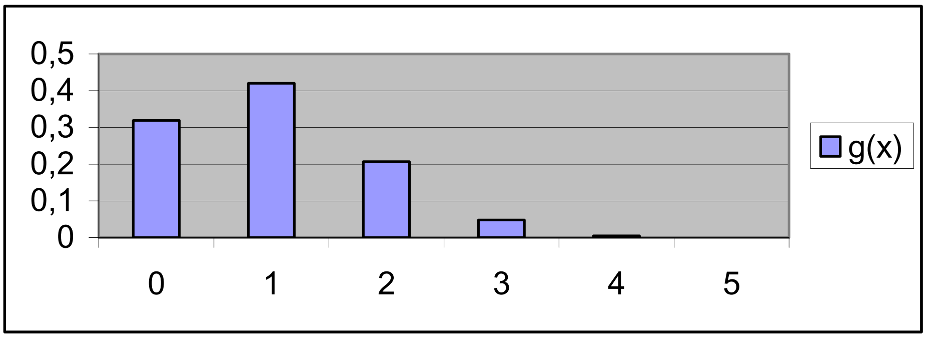
$$g(4)=\frac{2*17}{4*79}g(3)=0{,}005$$

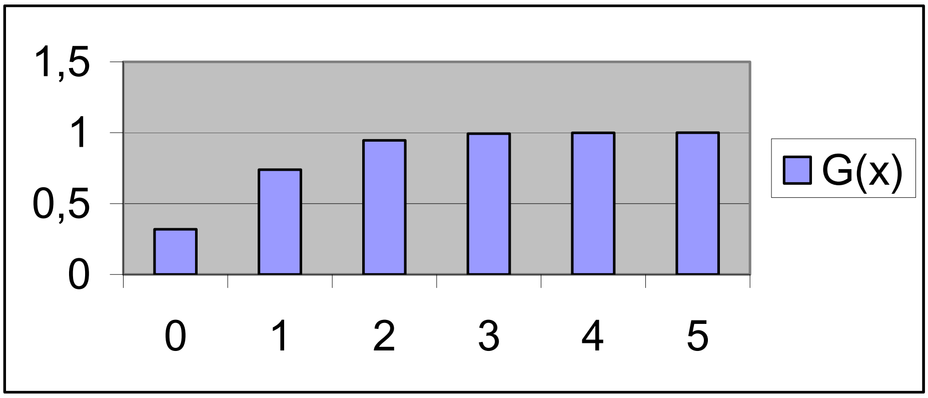
$$g(5)=\frac{1*16}{5*80}g(4)=0{,}000...$$

g(0) ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein defektes dabei ist.
g(1) wurde mit der Rekursionsformel gerechnet. (x + 1 = 1 → für x 0 einsetzen)

grafische Verteilung:

x	g(x)	G(x)
0	0,319	0,319
1	0,42	0,739
2	0,207	0,946
3	0,048	0,994
4	0,005	0,999
5	0	1





3.4.1.2 Binominalverteilung

$$g(x) = \binom{n}{x} * p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} * p^x * q^{n-x}$$

p = 0,2 20% fehlerhafte
n = 8

Ges.: Wahrscheinlichkeit in einer Stichprobe:

- höchstens 2
- genau 2
- mindestens 1
- 2 oder 3 fehlerhafte zu finden

$$g(0) = \binom{8}{0} * 0{,}2^0 * 0{,}8^8 = 1*1*0{,}8^8 = 0{,}168$$

$$g(1) = \binom{8}{1} * 0{,}2 * 0{,}8^7 = 0{,}16 * 0{,}8^7 = 0{,}336$$

$$g(2) = \binom{8}{2} * 0{,}2^2 * 0{,}8^6 = 28 * 0{,}04 * 0{,}8^6 = 0{,}294$$

$$g(3) = \binom{8}{3} * 0{,}2^3 * 0{,}8^5 = 56 * 0{,}2^3 * 0{,}8^5 = 0{,}146$$

$P(x \le 2) = g(0) + g(1) + g(2) = 79{,}8\%$
$P(x = 2) = g(2) = 29{,}4\%$
$P(x \ge 1) = 1 - g(0) = 83{,}2\%$ Ansonsten müsste man alle anderen W. aufsummieren
$P(2 \le x \le 3) = g(2) + g(3) = 44\%$

3.4.1.3 Poisson-Verteilung

$$g(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Rekursionsformel:

$$g(x) = \frac{\mu}{x} g(x-1)$$

Wird benutzt um beispielsweise die Wahrscheinlichkeit von Lackfehlern auf Oberflächen, oder die Wahrscheinlichkeit von Isolationsfehlern auf Trafos zu berechnen.
Auch Fadenrisse bei einem Webprozess sind Poisson verteilt.

$p = 0{,}03$	3%	Anteil der fehlerhaften Stücke
$\mu = n * p = 80 * 0{,}03$		mittlere erwartete Fehleranzahl

Ges.: Wahrscheinlichkeit

- 4 oder weniger Ausschussstücke
- genau 3
- mindestens 2

$$g(0) = e^{-\mu} = e^{-2,4} = 0{,}091$$

$$g(1) = \mu * g(0) = 2{,}4 * 0{,}091 = 0{,}218$$

$$g(2) = \frac{\mu}{2} g(1) = 1{,}2 * 0{,}218 = 0{,}261$$

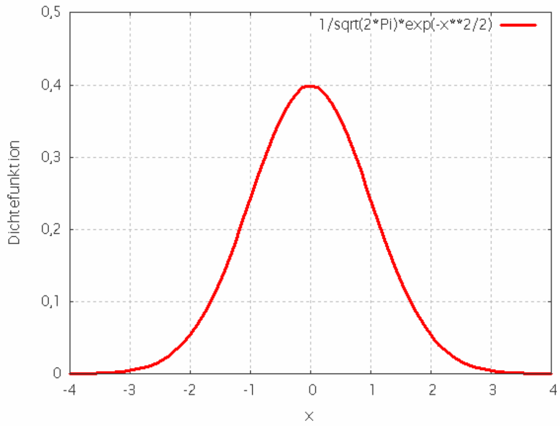
$$g(3) = \frac{\mu}{3} g(2) = 0{,}209$$

$$g(4) = \frac{\mu}{4} g(3) = 0{,}125$$

$P(x \leq 4) = g(0) + \dots g(4) = 0{,}904$
$P(x = 3) = g(3) = 0{,}209$
$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - g(0) - g(1) = 1 - 0{,}309 = 0{,}691$

3.4.1.4 Gausssche Normalverteilung

$$g(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\mu}}*e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Quelle: Wikipedia 18.12.2006

μ…Mittelwert, Erwartungswert
σ…Standardabweichung
σ²…Varianz

Beispiel: Widerstand R = 100Ω

R = 100,00000000….000000….000…

$$g'(x)=k*\left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)*e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=-\bar{k}(x-\mu)*e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$g'(x)=g(\mu)=0$$

$$g''(x)=-\bar{k}\left[e^{\sim}-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}*e^{\sim}\right]=-\bar{k}*e^{\sim}\left[1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$g''(x)=0$$

$$1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}=0$$

$$\sigma^2=(x-\mu)^2$$

$$\sigma=\pm(x-\mu)$$

$$x=\sigma\pm\mu \ \textit{Wendepunkte}$$

Spezialfall μ = 0 σ = 1

$$g(x,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}*e^{-\frac{x^2}{2}}=NVT(0,1)$$ Standardnormalverteilung

$$G(x,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$ …nicht lösbar, d.h. das Integral definiert die Funktion

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$ …Die Funktion nähert sich 0 an.

$$G(x,0,1)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}*\left(x-\frac{x^3}{3*2*1!}+\frac{x^5}{5*4*2!}-\frac{x^7}{7*2^3*3!}+\frac{x^9}{9*2^4*4!}-...\right)_0^{\infty}$$

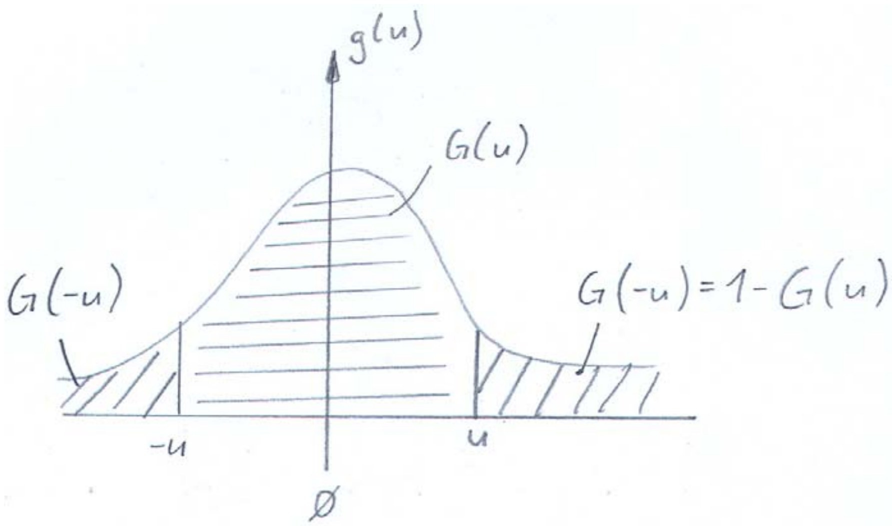
$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{2*3*1!}...(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)*2^k*k!}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$G(x,0,1)=1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}*\lim_{x\to\infty}(\sim)$$

Es muss gezeigt werden, dass der lim (x→∞) die Wurzel aus π/2 ergibt. Da dies nicht so leicht ist, könnte man die ersten 10 Glieder des Grenzwertes berechnen und dann numerisch eine Vermutung äußern.

Für einen Ausschnitt der Verteilung von a bis b:

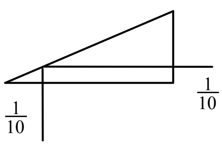
$$\int_{-\infty}^{b} g(x)dx - \int_{-\infty}^{a} g(x)dx = G(b,\mu,\sigma) - G(a,\mu,\sigma)$$



Im Buch findet sich auf der Seite 355 eine Tabelle für die Verteilung von g(u).
Auf Grund der Symmetrie können alle Werte auf der anderen Seite errechnet werden.

3.4.2 Interpolieren

Beim Interpolieren, nähert man die Funktion zwischen zwei bekannten Punkten durch eine Gerade an. Daraus entsteht ein Dreieck, welches man weiter zerlegen kann. Auf Grund des Strahlensatzes bewirkt ein Wandern der x-Koordinate um z.B. 1/10 analog einen um 1/10 veränderten y-Wert.



Beispiel:

$U = 0{,}468$
$U_1 = 0{,}46 \qquad G(U_1) = 0{,}6772$
$U_2 = 0{,}47 \qquad G(U_2) = 0{,}6808$

$\Delta G = 0{,}0036 \qquad \Delta G/10 = 0{,}00036$

$U = U1 + {}^{8}/_{10}\Delta G$

$G(U) = G(U_1) + 0{,}00036 * 8 = 0{,}6772 + 0{,}00288 = 0{,}68008$

Beispiel 6.13

σ = 0,20kg	49,20kg UGW	50,80kg OGW

Wie viel Prozent liegen nicht im Toleranzbereich, wenn μ = 49,50kg?

G(50,80kg ; 49,50 ; σ) //Es folgt Transformation auf u-Wert

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{50{,}80-49{,}50}{0{,}20} = 6{,}5$$ //G(6,5)

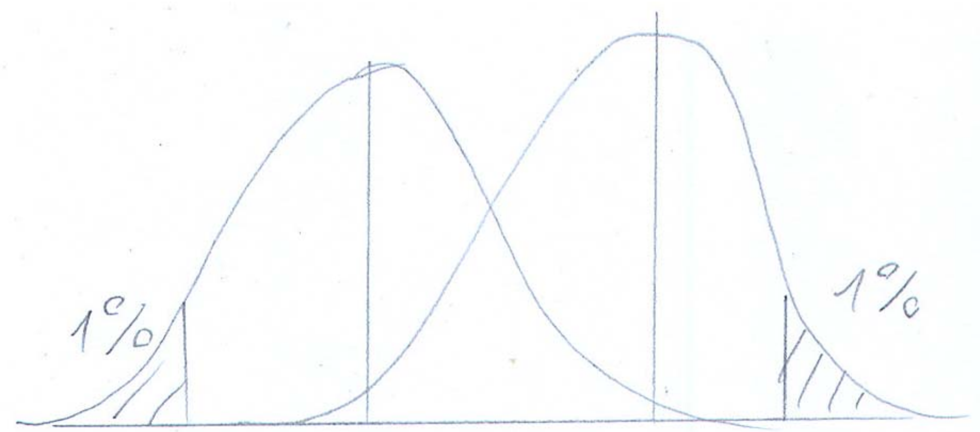
G(49,20kg ; μ ; σ)

$$\frac{49{,}20-49{,}50}{0{,}20} = \frac{-3{,}0}{2{,}0} = -1{,}5$$ //G(-1,5)

1-G(1,5) = 1 – 0,9332 = 0,0668 = 6,68 %

G(6,5) = 1 Tabelle ≈ 3,5 – 4
1 – G(6,5) = 1 – 1 = 0

In welchem Toleranzbereich muss μ liegen, wenn nur 1% außerhalb des Toleranzbereiches liegen darf?



μ_2 = ? G(50,8 ; μ_2 ; 0,2) = 0,99
μ_1 = ? G(49,2 ; μ_1 ; 0,2) = 0,01

$$\frac{50{,}80-\mu_2}{0{,}20} = 2{,}327$$

$$\mu_2 = 50{,}80 - 2{,}327 * 0{,}2 = 50{,}80 - 0{,}4653 = 50{,}3346 = 50{,}33kg$$

$$\mu_1 = 49{,}20 + 0{,}4654 = 49{,}67$$

49,67kg ≤ μ ≤ 50,33kg

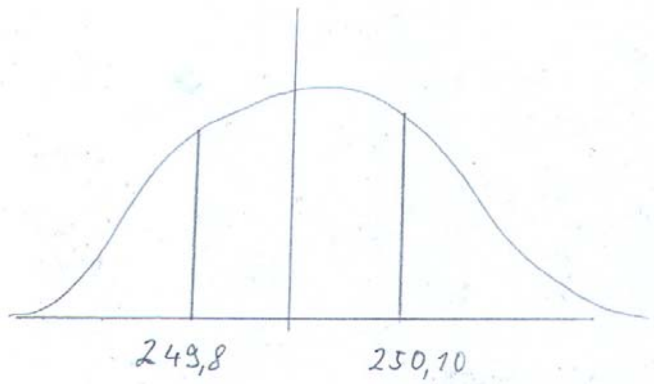
2,32	0,9898	0,0003:10
2,33	0,9901	0,0003*7
2,327	0,9900	0,00021
		0,9898
		0,99001

Beispiel 6.42

Welcher Anteil der Fertigung liegt unterhalb von 249,70mm?

49,67 ≤ μ ≤ 50,33kg G(-2) = 1 – G(2) = 1-0,9772 = 0,0228 = 2,28%

Welcher Anteil der Fertigung liegt zwischen 249,80mm und 250,10mm?

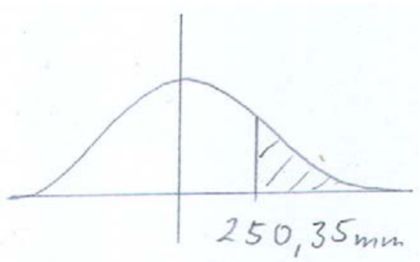


$\frac{249{,}80-250}{0{,}15}=\frac{-20}{0{,}15}=-1{,}\dot{3}$ $\frac{250{,}10-250}{0{,}15}=\frac{0{,}1}{0{,}15}=0{,}\dot{6}$ → 0,7476

U=1,333 0,9087

G(0,667) - G(-1,33) = G(0,667) – (1-G(1,3)) = G(0,667) + G(1,3) – 1
= 0,7476 + 0,9087 – 1,0000 = 0,6563 = 65,63%

Welcher Anteil der Fertigung ist größer als 250,35mm?



1 – G(u)

$\frac{250{,}35-250}{0{,}15}=\frac{0{,}35}{0{,}15}=2{,}333$

$G(2{,}333)=0{,}9902$

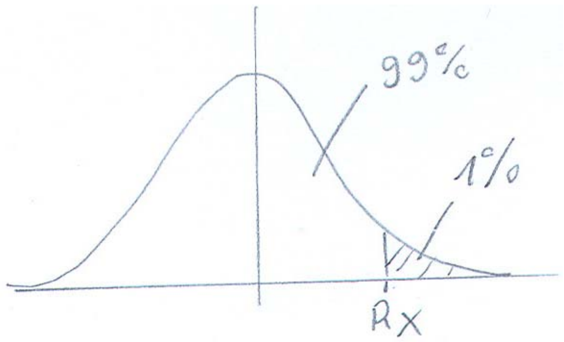
$0{,}0098\approx 1\%$

Welcher Anteil der Fertigung weichte mehr als 0,35mm vom Mittelwert ab?

2%
Der Wert von +0,35mm wurde bereits bei der vorigen Fragestellung geklärt. Hier wird auch die untere Grenze berücksichtigt → 2 * 1%

Beispiel 6.47

Welcher Widerstandswert wird nur noch von 1% der Bauteile übertroffen?



$$G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0,99$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = u$$

$$x = \mu + \sigma * u$$

3.4.3 Das Wahrscheinlichkeitsnetz

Buch Seite 263

4 Schließende Statistik

Buch Seite 270

4.1 Vertrauensbereiche für die Parameter einer Normalverteilung

Buch Seite 280

7.20)

102,5g 97,1g 99,2g 100,3g 98,5g 101,3g

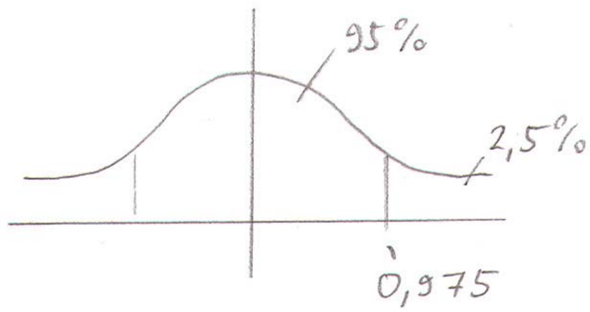
x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
102,5	+2,68	
97,1	-2,72	
99,2	-0,68	
100,3	0,48	
98,5	-1,32	
101,3	1,48	

$$\bar{x} = \sum x_i \frac{1}{n} = 99,81$$

$\sigma = 2{,}0g$

95% Vertrauensniveau:

$$99{,}82 - 1{,}960 * \frac{2{,}0}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 99{,}82 + 1{,}96 * \frac{2{,}0}{\sqrt{6}}$$
$$98{,}22g \leq \mu \leq 101{,}42g$$



99% Vertrauensniveau:

$$99{,}82 - 2{,}576 * \frac{2{,}0}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 99{,}82 + 2{,}76 * \frac{2{,}0}{\sqrt{6}}$$
$$97{,}72g \leq \mu \leq 191{,}92g$$

4.2 t-Verteilung

Buch Seite 282

f = n-1 = 6-1 = 5

95% $t_{5,0975} = 2{,}571$
99% $t_{5,0995} = 4{,}032$

Bei unbekanntem Sigma σ, muss eines geschätzt werden.

Für obiges Beispiel:

$$S = \sqrt{\frac{1}{5} * \sum (x_i - \bar{x})^2} = 1{,}96$$

Bei der gleichen Stichprobe und unbekanntem Sigma ergibt sich:

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} * t_{0,975} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} * t_{0,975}$$
$$\bar{x} - \frac{1{,}96}{\sqrt{6}} * 2{,}571 \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{1{,}96}{\sqrt{6}} * 2{,}571$$

95%: $97{,}76g \leq \mu \leq 101{,}88g$
99%: $96{,}59g \leq \mu \leq 103{,}05g$

Aus der Schätzung von Sigma ergibt sich ein breiteres Vertrauensniveau.

Beispiele 7.21 bis 7.25 anschauen

4.3 Test über den Mittelwert μ einer Normalverteilung

H_0: $\mu = \mu_0$
H_1: $\mu \neq \mu_0$

4.4 Zweistichprobentests bei normalverteilten Merkmalen

Zweiseitiger f-Test
Zweiseitiger t-Test

Differenzentest
Test für Gleichheit zweier unbekannter uwμ1, uμ2 zweier NTG.

Messmethoden für R (verschiedene Messgeräte)

n = 6

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathbf{x_i}$	100,5	102,0	104,3	101,5	98,4	102,9
$\mathbf{y_i}$	98,2	99,1	102,4	101,1	96,2	101,8
Differenz $\mathbf{z_i}$	2,3	2,9	1,9	0,4	2,2	1,1

Zu jedem Messwiderstand R_i gehört ein Paar Messwerte (x_i, y_i) → abhängige Stichproben.

Betrachten Messmethoden als gleichwertig →
H0: $\mu = 0$ H1: $\mu \neq 0$
$\alpha = 0{,}01$ (0,05)

σ ungekannt → t-Verteilung

Prüfwert $T = \dfrac{\overline{Z} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{4}}} = \dfrac{\overline{Z}}{S}\sqrt{4}$

n = 6, f = n – 1 = 5

Schätzung von S

i	z_i	$z_i - \overline{z}$	$(z_i - \overline{z})^2$
1	2,3	0,5	0,25
2	2,9	1,1	1,21
3	1,9	0,1	0,01
4	0,4	-1,4	1,96
5	2,2	0,4	0,16
6	1,1	-0,7	0,49
∑	10,8		4,08

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{6-1}\cdot 4{,}08\Omega^2 = 0{,}816\Omega^2$$

$$S = \sqrt{0{,}816}\Omega = 0{,}903\Omega$$

α = 1% → f = 5

$$P(-c \le T \le c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99(0{,}95)$$

$$P(-c \le T \le c) = F(c) - F(-c) = F(c) - [1 - F(c)] = 2F(c) - 1 = 0{,}99$$

$$F(c) = 0{,}995 \to 4{,}032[F(c) = 0{,}975 \to 2{,}571]$$

α = 1% $-4{,}032 \le t \le 4{,}032$
α = 5% $-2{,}571 \le t \le 2{,}571$

$$\hat{t}(Testwert) = \frac{10{,}8}{0{,}903}\sqrt{6} = 1{,}883$$

In beiden Fällen (1% und 5%) kann die Nullhypothese nicht aufrechterhalten werden. Die Nullhypothese muss zu Gunsten der Alternativhypothese verworfen werden. Die Messmethoden können nicht als gleichwertig angesehen werden.

x…Lebensdauer eines Produkts (Glühlampe) Maschine A
y… Maschine B

Maschine A $\mu_1 = 80$, $\bar{x} = 520h$, $s_1 = 50h$

Maschine B $\mu_1 = 50$, $\bar{x} = 500h$, $s_1 = 45h$

Wegen $\mu_1 = 80 > 30$
$\mu_2 = 50 > 30$ erlaubt σ_1^2 und σ_2^2 durch s_1^2 und s_2^2 zu ersetzen

H_0: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

0(c) = 0,995 → 2,576
0(c) = 0,975 → 1,960

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2} \approx \left(\frac{50^2}{80} + \frac{45^2}{50}\right)h^2 = 71{,}75h^2$$

$$\sigma = \sqrt{71{,}75} = 8{,}47h$$

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma} \to \hat{U} = \frac{520 - 500}{8{,}471} = 2{,}361$$

Testentscheidung:

5% → Hinauswerfen
1% → H_0 bleibt