

# IMPLEMENTAÇÃO DE NMPC VIA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA PARA O CONTROLE DE NÍVEL EM TANQUES ESFÉRICOS

ELIAS RAMOS, MAURÍCIO VICENTE

**Resumo** – O proposto artigo apresenta a aplicação do Controle Preditivo Não Linear (NMPC) na regulação da altura de um tanque em um sistema de dois tanques esféricos interligados. A abordagem utilizada reformula o problema de otimização do NMPC como um problema de Programação Quadrática (QP), permitindo uma solução eficiente por meio do solver OSQP com o algoritmo IPOPT da biblioteca CVXOPT. A modelagem do sistema baseia-se em equações diferenciais que descrevem a dinâmica do escoamento entre os tanques, considerando restrições e parâmetros previamente definidos. Os resultados obtidos demonstram a eficácia da abordagem, destacando a importância da manipulação algébrica na otimização do desempenho computacional.

**Palavras-chave** - Otimização, Programação Quadrática, Manipulação Algébrica, NMPC, Controle de Processos, IPOPT.

## 1. Introdução

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model Predictive Control* – MPC) tem se destacado como uma abordagem eficiente para o controle de processos dinâmicos devido à sua capacidade de lidar com restrições e otimizar a operação em horizontes futuros, permitindo antecipar as variações na dinâmica do sistema.

Nesse contexto, esse controlador pode ser essencialmente formulado como um problema de otimização, cujo objetivo é minimizar as ações de controle enquanto conduz a variável do processo ao setpoint (valor de referência). Neste artigo, utilizamos uma variação desse controlador, chamada NMPC (Nonlinear Model Predictive Control), que representa uma extensão do MPC para sistemas dinâmicos não lineares (BRAVO; NORMEY-RICO, 2009).

Portanto, este trabalho tem como foco a aplicação dessa abordagem de otimização ao controle preditivo de um sistema de dois tanques acoplados. A modelagem, juntamente com os parâmetros utilizados, foi baseada no estudo de Wildson (2024). A função do NMPC, nesse contexto, será manter a altura do segundo tanque nos valores de set point previamente estabelecidos.

## 2. O Sistema

O Sistema escolhido para a análise, como dito anteriormente é composto por dois tanques acoplados. No entanto, diferentemente de configurações tradicionais, neste caso, os tanques possuem um formato esférico, o que pode influenciar a dinâmica do escoamento e o comportamento do sistema de controle.

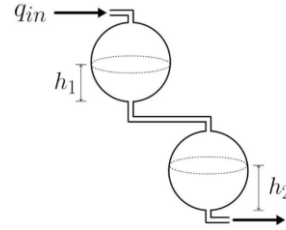
O funcionamento do sistema segue uma sequência específica de eventos, descrita da seguinte forma:

1. Entrada de líquido no tanque 1 – O fluido é introduzido no sistema por meio da vazão de entrada, representada por  $q_{in}$ ;
2. Armazenamento e transferência entre os tanques – O líquido se acumula no primeiro tanque até atingir um determinado nível, momento em que começa a escoar para o segundo tanque por meio de um orifício ou tubulação de interligação;

3. Armazenamento no tanque 2 e escoamento final no segundo tanque, o líquido continua a se acumular temporariamente antes de ser liberado para um reservatório ou outro destino previamente estabelecido.

Na Figura 1 é possível ver uma representação gráfica de como acontece.

Figura 1: Sistema dos Tanques Esféricos. Fonte: Silas (2024)



As equações diferenciais ordinárias que regem esse sistema são:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_{in} - \alpha_1 s_1 \sqrt{2gh_1}}{\pi(2Rh_1 - h_1^2)} \quad (1)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{\alpha_1 s_1 \sqrt{2gh_1} - \alpha_2 s_2 \sqrt{2gh_2}}{\pi(2Rh_2 - h_2^2)} \quad (2)$$

No contexto do sistema em análise, a variável  $q_{in}$  representa a vazão de entrada do líquido no primeiro tanque. Os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  correspondem aos coeficientes de vazão dos tanques 1 e 2, podendo ser interpretados como o  $Cv$  das válvulas localizadas entre os tanques, responsáveis por regular o fluxo de líquido entre os compartimentos.

As variáveis  $s_1$  e  $s_2$  representam as áreas de saída dos tanques 1 e 2, respectivamente, influenciando diretamente a taxa de escoamento do fluido para o próximo estágio do sistema. A constante  $g$  denota a aceleração gravitacional, que atua sobre o líquido e afeta a dinâmica do escoamento.

Além disso,  $R$  representa o raio dos tanques esféricos, uma característica estrutural que impacta o volume armazenado em função da altura do líquido. Por fim, as variáveis  $h_1$  e  $h_2$  correspondem às alturas do líquido nos tanques 1 e 2, sendo grandezas fun-

damentais para o monitoramento e controle do sistema, especialmente na implementação de estratégias como o Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC).

Nesse estudo será utilizado os parâmetros propostos por Wildson que são:

Tabela 2: Parâmetros Utilizados. Fonte: Wildson (2024)

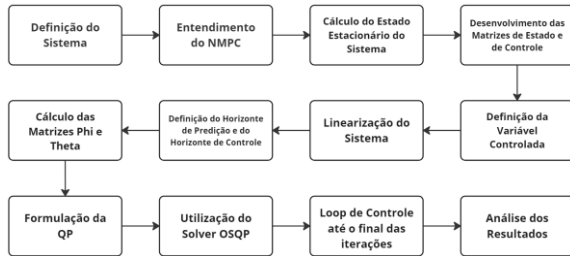
Parâmetro	Valor
$\alpha_1$	0.56
$\alpha_2$	0.30
$s_1$	0.50 cm <sup>2</sup>
$s_2$	0.5 cm <sup>2</sup>
$g$	980.665 cm/s <sup>2</sup>
$R$	14.85 cm

Sendo assim,  $h_1$ ,  $h_2$  e  $q_{in}$  serão nossas variáveis.

### 3. Método

A metodologia foi feita da seguinte forma:

Imagem 2: Metodologia Adotada. Fonte: Os Autores (2025)



Com o sistema já definido, é necessário entender o que é um NMPC. De acordo com Findeisen (2002), NMPC é uma técnica avançada de controle que utiliza um modelo matemático do sistema para prever seu comportamento futuro e otimizar a ação de controle em um horizonte de tempo. Sendo assim, ele considera um horizonte de tempo no futuro para prever o comportamento do sistema e determina as ações de controle para minimizar erros. Cao (2005) fez uma dedução matemática com derivação matemática automática, que será a base para a utilizada no estudo.

A função objetivo do NMPC proposto é dada da seguinte forma:

$$\min_{\Delta u} \sum (y_k - y_{sp})^T Q (y_k - y_{sp}) + \sum \Delta u^T R \Delta u \quad (3)$$

Com as seguintes restrições:

$$u_{min} \leq u_k \leq u_{max} \quad (4)$$

$$y_{min} \leq y_k \leq y_{max} \quad (5)$$

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u_k \leq \Delta u_{max} \quad (6)$$

Para calcular os estados estacionários do sistema, que serão o ponto de começo da atuação do NMPC, a vazão foi colocada em 10 cm<sup>3</sup>/s, obtendo assim o seguinte ponto estacionário para  $h_1$  e  $h_2$ :

Tabela 2: Pontos Estacionários. Fonte: Os Autores (2025)

$h_1$ / cm	$h_2$ / cm
0.650813	2.265876

Para a linearização de um sistema não linear, é possível adotar a seguinte formulação:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (7)$$

$$y_k = Cx_{k-1} + Du_{k-1} \quad (8)$$

Sendo A é a matriz de estado, B a matriz de controle, C a matriz de Saída e D a matriz de acoplamento direto. No nosso problema iremos assumir que D é uma matriz nula e que:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_{in}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_{in}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Tendo que  $f_1$  é a equação (1) e  $f_2$  é a equação (2).

Ao definir a matriz C, por consequência a variável controlada (Ou seja, a variável de saída) é definida, nesse caso será  $h_2$ .

Com tudo isso obtido, é possível calcular as matrizes  $\varphi$  e  $\theta$  ao definir o Horizonte de Predição ( $H_p$ ) e o Horizonte de Controle ( $H_c$ ), sendo  $\varphi$  a matriz de transição de estados e  $\theta$  a matriz de controle dessa transição de estados. Elas representam, respectivamente, a influência dos estados iniciais na evolução futura do sistema, e a influência das entradas de controle na evolução do sistema. Sendo assim, a primeira linha se dá para cada instante no horizonte de predição ou horizonte de controle. Onde  $\varphi$  e  $\theta$  são dadas por:

$$\varphi = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 & \dots \\ CAB & CB & 0 & 0 & \dots \\ CA^2B & CAB & CB & 0 & \dots \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (13)$$

Onde  $\varphi$  tem dimensões  $Hp \times 2$ , já que a multiplicação entre  $CA$  vai gerar uma matriz  $2 \times 1$ , e  $\theta$  tem dimensões  $Hp \times Hc$ . Para o nosso estudo, utilizamos  $Hp = 20$  e  $Hc = 3$ .

A função objetiva do NMPC irrestrito (Sem restrições) é dada pela equação (3), onde:

$$y_{k+1} = \varphi x_k + \theta \Delta u_k \quad (14)$$

Substituindo (11) na equação (12) e destrinchando o cálculo serão obtidas:

$$J = \Delta u_k^T (\theta^T Q \theta + R) \Delta u_k + 2(\varphi^T x_k^T Q \theta - y_{sp}^T Q \theta) \Delta u_k + C \quad (15)$$

$$C = \varphi^T x_k^T Q \varphi + y_{sp}^T Q y_{sp} - 2y_{sp}^T Q \varphi x_k \quad (16)$$

Ao fazer isso, podemos dividir a equação 12 em duas partes, fazendo com que:

$$H = \theta^T Q \theta + R \quad (17)$$

$$Cf = 2(\varphi^T x_k^T Q \theta - y_{sp}^T Q \theta) \quad (18)$$

Remanejando a equação 11, com esses resultados obtidos, pode-se dizer que o problema reformulado é dado por:

$$\min_{\Delta u} \frac{1}{2} \Delta u_k^T H \Delta u_k + Cf^T \Delta u_k \quad (19)$$

A parte da equação C foi retirada pois ela não impacta na resolução da otimização, já que não possui nenhuma variável de decisão em sua composição, fazendo com que ela seja somente transladada para cima ou para baixo. Com isso pronto é possível utilizar os métodos de QP para solucionar o problema de otimização.

Para a manipulação das restrições, nós iremos assumir que:

$$\Delta u = u_k - u_{k-1} \quad (20)$$

Utilizando as equações (14) e (20), e fazendo a substituição de variáveis nas equações (4), (5) e (6) para colocar todas as restrições em função de  $\Delta u$ , elas terão os seguintes formatos:

$$I \Delta u \leq u_{k-1} - u_{min} \quad (21)$$

$$-I \Delta u \leq -u_{k-1} + u_{max} \quad (22)$$

$$-I \Delta u \leq -u_{min} \quad (23)$$

$$I \Delta u \leq u_{max} \quad (24)$$

$$-\theta \Delta u \leq \varphi x_k + \theta u_k - y_{min} \quad (25)$$

$$\theta \Delta u \leq -\varphi x_k - \theta u_k + y_{max} \quad (26)$$

Com isso podemos colocar na seguinte formulação para utilizar nos *solvers*:

$$A \Delta u \leq B \quad (27)$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} I \\ -I \\ -I \\ I \\ -\theta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$B = \begin{bmatrix} u_{k-1} - u_{min} \\ -u_{k-1} + u_{max} \\ -u_{min} \\ u_{max} \\ \varphi x_k + \theta u_k - y_{min} \\ -\varphi x_k - \theta u_k + y_{max} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para realizar mudanças no *Set point* a abordagem utilizada foi a mudança de acordo com o número de iterações, seguindo as condições da Tabela 3.

Tabela 3: Variações do *Set Point*. Fonte: Os Autores (2025)

Condição	Valor /cm
$i \leq 20000$	3.5
$20000 < i \leq 40000$	6.5
$40000 < i \leq 60000$	8.2

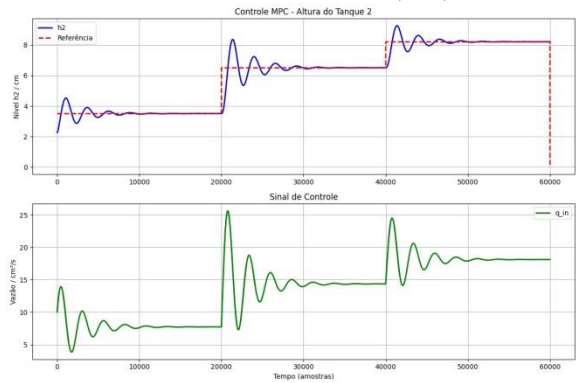
Com toda essa definição é possível utilizar os *solvers* de programação quadrática para minimizar as ações de controle. Como solver, foi utilizado o OSQP, com o algoritmo IPOPT da biblioteca CVXOPT.

#### 4. Resultados

Os resultados dessa abordagem são de certa forma inconstantes com o que era esperado, já que ele esses tanques pequenos demoram abruptamente para estabilizar, entretanto, isso se dá pela sua geometria.

O método para o critério de parada foi o número de iterações, onde se atingisse o limite de 60000, o código iria parar. Com isso, foi obtido o gráfico ilustrado na Imagem 3, onde mostra o controle da altura com a manipulação da vazão.

Imagem 3: Gráfico do controle da Altura com a variação da vazão de entrada. Fonte: Os Autores (2025)



É possível perceber que o NMPC não está totalmente sincronizado, gerando uma falta de sintonia, dado que os valores das matrizes de ponderação utilizados foram muito altos em relação ao que deveria ser utilizado.

Além disso, foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 4: Resultado Obtidos. Fonte: Os Autores (2025)

<i>Resultado</i>	<i>Valor</i>
Tempo Total	9.8 / min
Tempo médio de cada iteração	0.007307 / s

5. Conclusão

Em conclusão é possível compreender a necessidade de transformar o problema de um NMPC para a formulação de uma QP, já que cada iteração ocorre bem rápido, coisa que é extremamente necessária nos controles de processos industriais. Ou seja, mesmo que seja complexa a manipulação algébrica, ela compensa em desempenho.

Referências Bibliográficas

BRAVO, C. O. A.; NORMEY-RICO, J. E. Approach for non-linear predictive control based on the local model ideas. Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica, v. 20, n. 4, p. 465–481, dez. 2009.

CAO, Y. A formulation of nonlinear model predictive control using automatic differentiation. Journal of Process Control, v. 15, n. 8, p. 851–858, dez. 2005.

CVXOPT. Disponível em: <<https://cvxopt.org/index.html>>. Acesso em: 13 fev. 2025.

FINDEISEN, R.; F. ALLGOWER. An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control. 21st Benelux Meeting on Systems and Control, 1 jan. 2002.