Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Analyse primärer Finanztitel und Bewertung von Derivaten

1.1 Grundlagen der Zinstheorie

1.1.1 Arten der Versinsung

- Konversionsperiode: Zeitintervall an dessen Ende die Zinsen gutgeschrieben werden (meist 1 Jahr)
- p: Zinsfuß für eine Zeiteinheit
- $r = \frac{p}{100}$ Zinssatz
- diskontierliche Zinsgutschrift: Gutschrift am Ende einer Periode
  - einfache Verzinsung: $K_t = K_0(1+[t]r)$
  - Zusammengesetzte Verzinsung: $K_t = K_0(1+r)^{[t]}$
- kontinuierliche Zinsgutschrift
  - einfache Verzinsung: $K_t = K_0(1+tr)$
  - Zusammengesetzte Verzinsung: $K_t = K_0(1+r)^t$
- Gemischte Verzinsung: $K_t = K_0(1+r)^{[t]}(1+(t-[t])r)$ für ganze Jahre $[t]$ und unterjährigen Teil $t-[t]$

1.1.2 Barwerte und Endwerte

- Vollkommener Kapitalmarkt in diskreter Zeit:
  - zu einem deterministischen Periodenzinssatz $r > 0$ können beliebig hohe Geltbeträge angelegt und beliebig hohe Kredite aufgenommen werden

- Beliebige Zahlungen zu einem beliebigen Zeitpunkt können auf einen beliebigen anderen Zeitpunkt zu Kapitalmarktbedingungen transferiert werden.

- Kapitalmarktbewertung (Barwert der Zahlungsreihe):
  $BW_0(r) = \sum_{t=0}^{T} Z_t q^{-t} = \sum_{t=0}^{T} Z_t v^t$

- Endwert (resultierende Größe als Endwert der Zahlungsreihe):
  $EW_T(t) = BW_0(r) \cdot q^T = \sum_{t=0}^{T} Z_t q^{T-t}$

1.1.3 Allgemeine Zinsstrukturkurven

- Nullkuponanleihe
  - liefert normierte Auszahlung 1 zur Maturität T
  - $P(t,T)$ sei der Wert dieser Auszahlung in $t \leq T$, $P(T,T) = 1$
  - $P(t,T)$ vor t nicht mit Sicherheit bekannt, $t \rightarrow P(t,T)$ ist stochastisch
  - $P(t,T)$ dient als Diskontierungsfaktor, $T \rightarrow P(t,T)$ ist die Diskontkurve in t
  - Nichtnegative Zinsen: Bondpreise $t \rightarrow P(t,T) \leq 1$ mit der Zeit fallend

- Spot Rate zum Zeitpunkt t: Zins in t, der für eine Anlage von t bis T gezahlt wird

- Forward Rate zum Zeitpunkt t: Zins, der in t für eine Anlage von T bis S ($t \leq T \leq S$) vereinbart wird

- Arbitragefreiheit: Ein Kapitalbetrag, der in t bis T zur Spot Rate angelegt wird, muss zur Zeit T einen identischen Endwert aufweisen wie der Kapitalbetrag, der revolvierend jeweils über 1 Jahr zu den in t gültigen Forward Rates angelegt wird.

- Short Rate zum Zeitpunkt t: Zins für kurzfristige Anlage $r = f_t(t) = lim_{T \downarrow t} r_t^s(T)$

1.2 Zinsprodukte

1.2.1 Einfache Zinsprodukte

- Festverzinsliche Anleihe ist ein Finanztitel mit
  - zukünftigen äquidistanten Zahlungszeitpunkten $T_1 < T_2 < ... < T_n$
  - T_n Maturität
  - deterministischen bei Vertragsabschluss festgelegten Kuponzahlungen $c_1, ..., c_n$
  - einem Nennwert N

- Variable verzinsliche Anleihen (Floating Rate Notes, Floater)

- mehrere Zinsperioden, nach jeder Periode werden die Zinsen bezahlt
- Zinssatz orientiert sich an einem Referenzzinssatz
- Zins kann um einen festen Spread über oder unter diesen Sätzen liegen
- Floor Floater: variable verzinsliche Anleihe, die Mindestmarke für Verzinsung garantiert
- Cap Floater: variable verzinsliche Anleihe mit Höchstmarke für Verzinsung
- Collared Floater: begrenzen Verzinsung durch Mindest- und Höchstssaätze
- Reverse Floater: Zinszahlung als Differenz zwischen festem Zinssatz und Referenzzinssatz
- Floater sind mit anderen Anleihetypen kombinierbar

Zinsstrukturkurve (Zero Coupon Curve, Spot Rate Curve):

- funktionale Abhängigkeit der Renditen (Spot Rates) von Nullkuponanleihen (gleicher Bonitätsstufe) von ihrer Restlaufzeit

Empirische Bestimmung der Zinsstrukturkurve:

- Aus Preisen von gehandelten Nullkuponanleihen:
  - Beispiel: $r_t^z(T) = P(t,T)^{-1/(T-t)} - 1$
  - Verfügbarkeitsproblem: Liquidität bei langen Laufzeiten
- Aus Preisen von gehandelten Kuponbonds:
  - Aus aktuellen Anleihe-Emissionen; methodisch: Bootstrapping; Verfügbarkeitsproblem
  - Aus sämtlichen gehandelten Kuponbonds; methodisch: Bootstrapping sowie statistische Glättungsverfahren wegen Verzerrung
- Alternativ: aus Swapsätzen (typische Quotierung am Markt, vgl. Folie 101 ff.)

1.2.2 Analyse des Zinsänderungsrisikos: Duration und Konvexität

Annahmen

- Zinsstruktur in $t = 0$ flach: $r_0^z(s) = r$ für alle $s \geq 0$
- Zinsänderung durch einmaligen Übergang in flache Zinsstruktur der Höhe $r + \Delta r$
- Auswirkungen der Zinsänderung:
  - $\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r)$
  - $\Delta K_T = K_T(r + \Delta r) - K_T(r)$
  - Steigender Marktzins: Barwert fällt, Endwert steigt
  - Fallender Marktzins: Barwert steigt, Endwert fällt

Duration

- Absolute Duration: $DUR^A(r) := -P'(r) = \frac{1}{1+r}\sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t}$
- Erste Ableitung der Barwertfunktion mit negativem Vorzeichen
- Zinsänderungsrisiko ist größer, wenn Duration größer
- Modifizierte Duration: $DUR^M(r) := \frac{DUR^A}{P(r)} = \frac{P'(r)}{P(r)} = (\frac{1}{1+r}\sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t})/P(r)$
- Duration von 3 Faktoren beeinflusst:
  - Laufzeit der Bonds
  - Höhe des Kupons
  - Marktzins
- d.h.:
  - Duration sinkt, wenn Kupon steigt
  - Duration sinkt, wenn Marktzins steigt
  - Je länger die Laufzeit, desto größer die Duration

1.2.3 Komplexere Zinsprodukte

Überblick Zinsswap

- Finanzderivat, bei dem zwei Parteien vereinbaren, zu vorher festgesetzten zukünftigen Zeitpunkten Zinszahlungen auf Nennwerte zu tauschen
- Vereinfachung: Differenz zwischen Zinszahlungen wird getauscht
- Nennwerte stimmen i.d.R. überein
- Zins-Währungs-Swap: Zinsswap auf verschiedenen Währungen
- Typisch: Austausch fester gegen variable Zinsen
- Zweck: Absicherung gegen Zinsänderungen oder Spekulation auf diese
- Payer-Swap: Swap aus Sich der Vertragspartei, die den festen Zins zu zahlen hat und dafür den variablen Zinssatz erhält
- Receiver-Swap: Swap aus Sich der Vertragspartei, die den variablen Zins zu zahlen hat und dafür den festen Zinssatz erhält
- Wert Payer-Swap: $\Pi^p(t) = N(P(t,T_0) - P(t,T_n) - r\delta\sum_{k=1}^{n} P(t,T_k))$

- Wert Receiver-Swap: $\Pi^r(t) = -\Pi^p(t)$ entgegengesetzt zum Payer-Swap
- Forward Swap Rate: $\Pi^p(t) = -\Pi^r(t) = 0$

1.3 Risikoneutrale Bewertung von Aktienderivaten in Binomialbäumen

1.3.1 Klassische Aktienderivate

- Aktienderivat: Finanzkontrakt, dessen Auszahlung (Zahlungsstrom) sich aus dem realisierten Kursverlauf einer Aktie ableitet
- Formal: $C_t = f(S_0, S_1, \ldots, S_t)$ für eine Funktion f, $(S_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ der Aktienpreisprozess, C_T die Auszahlung
- Beispiele:
  - Call-Option: $C_T^{call} = S_T - K)^+$ mit Ausübungspreis $K > 0$
  - Put-Option: $C_T^{put} = (K - S_T)^+$ mit Ausübungspreis $K > 0$

Ausblick: Pfadabhängige Optionen

3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 Anhang

- Barrier-Optionen:
  - Up-and-in Call-Option: Ein*e Halter*in der Option besitzt das Recht zur Maturität T eine Aktie zum Ausübungspreis K zu erwerben, sofern der Aktienpreis bis dahin eine Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ überschritten hat. Formal:

$$C_T^{\text{call,up\&in}} = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{falls } \max_{0 \le t \le T} S_t \ge B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Up-and-out Call-Option: Ein*e Halter*in der Option besitzt das Recht zur Maturität T eine Aktie zum Ausübungspreis K zu erwerben, sofern der Aktienpreis bis dahin eine Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ nicht überschritten hat.

$$C_T^{\text{call,up\&out}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max_{0 \le t \le T} S_t \ge B, \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst.} \end{cases}$$

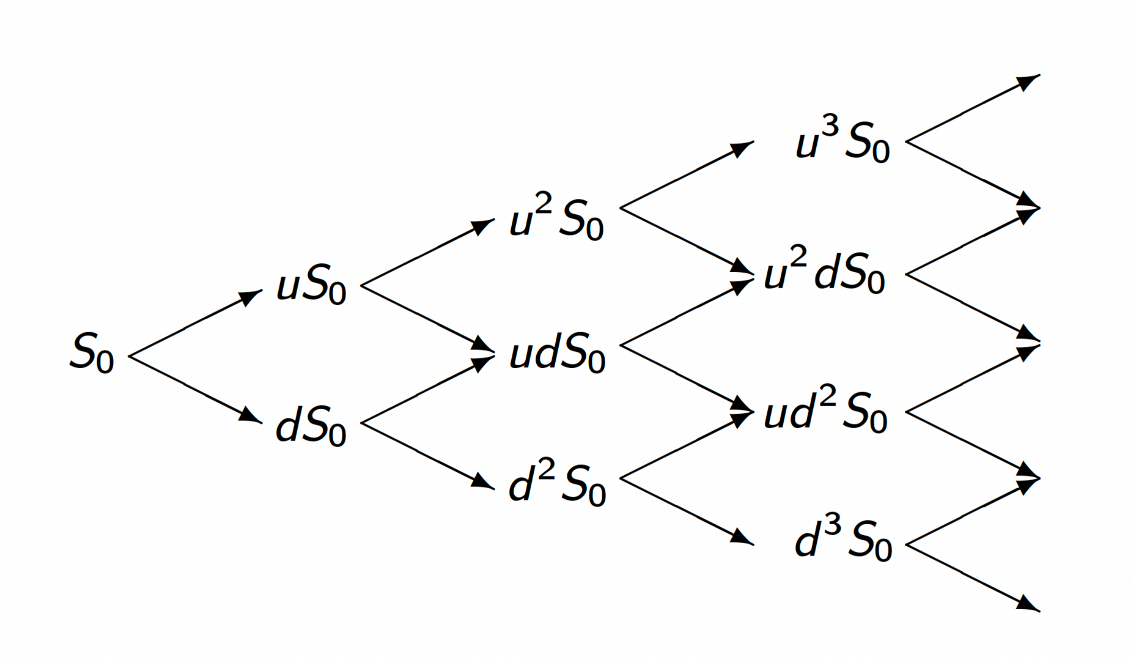
- (Floating Strike) Lookback Put-Option: $C_T^{\text{put,max}} := \max_{0 \le t \le T} S_t - S_T$
- Asiatische Optionen:
  - Die Auszahlung hängt vom Durchschnittspreis des Basistitels zu bestimmten Zeitpunkten $\mathbb{T} \subseteq \{0, 1, \ldots, T\}$ ab.
  - Eine Asiatische Call-Option mit Strike K entspricht dem Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{Asian call}} := \left(\frac{1}{|\mathbb{T}|} \sum_{t \in \mathbb{T}} S_t - K \right)^+.$$

Binomialmodell

Binomialmarktmodell nach Cox-Ross-Rubinstein

- diskretes Finanzmarktmodell mit T Handelsperioden
- Primäre Produkte:
  - Risikofreie Anlage (Sparbuch): deterministischer Periodenzins $r > -1$, $S_t^0 := (1+r)^t$, $t = 0, ..., T$
  - Risikobehaftete Anlage (Aktie): $S := S^1$
    - in jeder Handelsphase Up-Faktor u oder Down-Faktor d unterstellt
    - Aktienpreis springt entweder auf höheren Wert $S_t = S_{t-1} \cdot u$ oder niedrigeren Wert $S_t = S_{t-1} \cdot d$



- Szenarien: $\Omega := \{d, u\}^T = \{\omega = (y_1, \dots, y_T) | y_i \in \{d, u\}\}$
- Modellierung des Aktienpreisprozesses:
  - Startwert $S_0 > 0$ konstant
  - $Y_t(\omega) := y_t$ für $\omega = (y_1, \dots, y_T)$; Projektion auf die t-te Koordinate
  - $N_t(\omega) := \#\{1 \leq s \leq t | y_s = u\}$ Anzahl der Aufwärtsbewegungen bis t
  - Aktienpreisprozess in Szenario $\omega = (y_1, \dots, y_T)$:

$$S_t(\omega) := S_0 \prod_{k=1}^{t} Y_k(\omega) = S_0 \cdot d^{t-N_t(\omega)} \cdot u^{N_t(\omega)}$$

- Information:
  - Die Informationsstruktur ist gegeben über die Filtration

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_0, \dots, S_t), \quad t = 0, \dots, T.$$

  - Hierbei gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$ und $\mathcal{F} := \mathcal{F}_T$ stimmt mit der Potenzmenge von Ω überein.
- Im Folgenden wird ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mathbb{P}[\{\omega\}] > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ fixiert, das als Referenzmaß fungiert.

Satz (Arbitragefreiheit und Vollständigkeit):

Das CRR-Modell ist arbitrage-frei genau dann, wenn $d < 1 + r < u$. Unter dieser Bedingung ist das CRR-Modell vollständig, und es gibt ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Das Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist dadurch charakterisiert, dass die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_T$ stochastisch unabhängig unter $\mathbb{Q}$ sind mit Verteilung

$$\mathbb{Q}[Y_t = u] = q := \frac{1 + r - d}{u - d}, \quad \mathbb{Q}[Y_t = d] = 1 - q, \quad t = 1, \dots, T.$$

Anmerkungen:

- Aufgrund der Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1 - q)^{T - N_T(\omega)} \cdot q^{N_T(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

- In jedem Knoten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten unter $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}[Y_{t+1} = u | \mathcal{F}_t] = q \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{Q}[Y_{t+1} = d | \mathcal{F}_t] = 1 - q$$

- Unabhängigkeit der Zuwachsfaktoren $Y_1, \dots, Y_T$ unter $\mathbb{Q}$ ermöglicht einfache Simulation von risikoneutralen Pfaden für Bewertungszwecke.

1.4 Vom Binomialmodell zum Black-Scholes-Modell

1.4.1 Konvergenz gegen den Black-Scholes-Preis

?