Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlungsströme, Versicherungs-, Finanzmarktprodukte und Märkte

1.1 Zahlungsstrommodelle und Wertentwicklungen

- Zahlungsstrom auch, wenn nur Werte (Vermögen, Schulden) oder Preise(Kurse) ermittelt werden
- Nicht monetäre Aspekte: Veräußerungs- und Kündigungsrechte, Entscheidungs- und Informationsrechte
- Formal Zahlungsstrom (Cash Flow): Menge von finanziellen Größen Z_t, wobei Z_t Zahlung zum Zeitpunkt t darstellt
- Zeitmenge $\mathbb{T}$ ist zu spezifizieren (Bsp.: $\mathbb{T} = \{t_0, ..., t_n\}$
- Zu beachten, ob Zahlungen vorschüssig (Periodenbeginn) oder nachschüssig (Periodenende) bezahlt werden
- Im Weiteren: Zahlungsströme sind stochastisch

Definition Stochastischer Prozess

Es sei (E, ε) ein messbarer Raum. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ mit Zustandsraum (E, ε) ist eine zeitindexierte Familie E-wertiger Zufallsvariablen auf messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.1.1 Informationsfiltration und adaptierte stochastische Prozesse

- Die Bewertung eines Finanztitels zum Zeitpunkt t hängt ab von der in t zur Verfügung stehenden Information

- Die zum Zeitpunkt t zur Verfügung stehende Information wird formalisiert durch eine σ-Algebra $\mathcal{F}_t$.
- Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ umfasst alle Ereginisse (TM von Ω), die zum Zeitpunkt t bekannt sind, ob sie eingetreten sind oder nicht
- Da die Information im Zeitverlauf - durch Beobachtung der Realisierungen von Zahlungen oder Preisen - zunimmt, ist die Folge $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ der Sigma-Algebren aufsteigend, d. h. es gilt: $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ für alle $s \leq t, t \in \mathbb{T}$

Definition Filtration

Eine aufsteigende Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ von Sigma-Algebren heißt Filtration. Das Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ heißt filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum für ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.

Definition Adaptierter stochastischer Prozess

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, wenn jede Zufallsvariable X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.

1.2 Charakterisierung von Finanztiteln

Realwert vs. Nominalwert

- Realwert im Sinne von Sachwert oder Substanzwert zu verstehen.
  - Bspw. Aktien, Immobilien, Edelmetalle (Physicher Wert)
  - Realwerte in diesem Sinne haben einen Wert an sich
- Nominalwert sind typischerweise Geld oder Zinstitel, die nicht immanent einen physischen Wert beinhalten
- Realwerte sind besser gegen Inflation geschützt

1.2.1 Zinstitel

- Zinstitel (Gläubigertitel) verbriefen eine schuldrechtliche Verpflichtung („Kreditaufnahme“) und beinhalten entsprechende Forderungsrechte (Tilgung der Schuld und terminlich fixierte Zinszahlungen) des Gläubigers
  - Emittenten von Zinstiteln sind bspw. Staaten, Banken oder Industrieunternehmen. (Government Bonds, Corporate Bonds)

- Die Zinszahlungen werden als Kupons bezeichnet, die Höhe der Schuld ist der Nennwert (Face Value).
- Die Bewertung der Zahlungsfähigkeit (Bonität) des Emittenten erfolgt in Form eines Ratings (bspw. durch Rating-Agenturen).

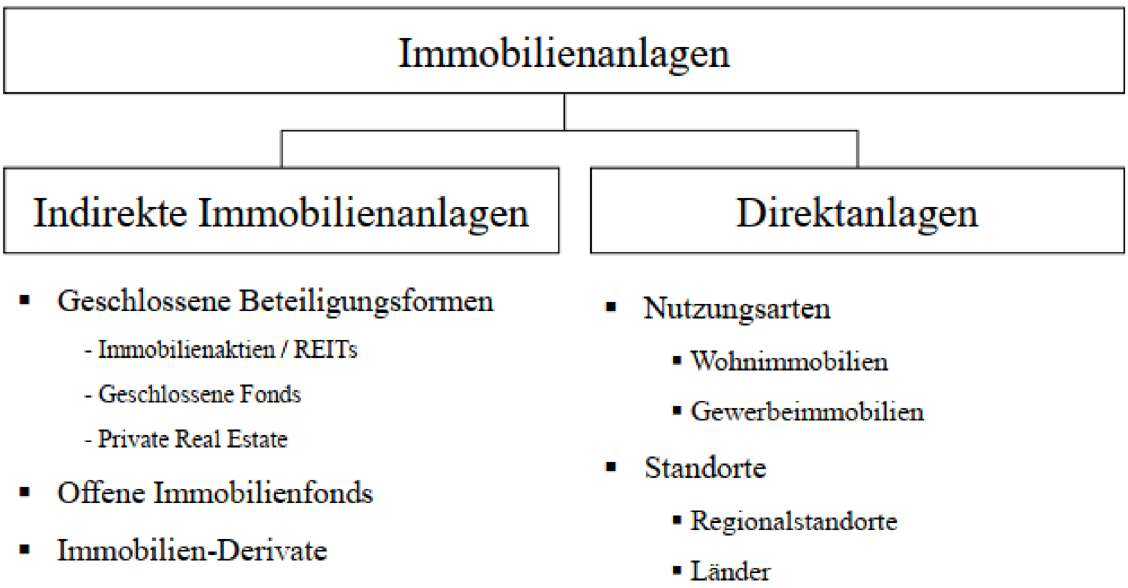
- Zinstitel haben feste Laufzeit
- Vertragsparameter:
  - Der Bond hat einen Fälligkeitszeitpunkt T und Zahlungszeitpunkte t_i $(i = 1,...,n; t_0 < t_1 < ... < t_n = T)$.
  - In t_0 erwirbt der Käufer den Bond vom Emittenten zum Preis (Kaufkurs) P_{t_0}.
  - Kuponzahlungen erfolgen zu den Zeitpunkten t_i, die Rückzahlung der Schuld (Nennwert) zur Fälligkeit T.
- Festzinstitel: Die Zinszahlungen während der Laufzeit erfolgen stets in gleicher unveränderter Höhe
- Standardbond (Straight Bond)
  - Endfällige Tilgung der Schuld (Nennwert) N; konstante jährliche Zinszahlungen (Kupons) Z der Höhe $Z = N_i$, wobei i den Nominalzins bezeichne
  - Zeitpunkte der Zins- und Tilgungszahlungen sind äquidistant
  - Zahlungsstrom aus Käufer-Sicht: $\{-P(t_0); Z; ...; Z; Z+N\}$.
- Zerobond (Nullkuponanleihe) bzw. Diskontpapiere (Discount Papers)
  - Eine Nullkuponanleihe bzw. Zerobond ist ein Zinstitel, bei dem keine Zinszahlungen erfolgen, sondern nur eine endfällige Tilgung.
  - Die wegfallenden Zinszahlungen werden kompensiert durch die Vornahme eines Abschlags (Diskont) auf den vom Käufer bei Erwerb zu entrichtenden Preis.
- Variabel verzinsliche Titel: Die Zinszahlungen während der Laufzeit erfolgen in veränderlicher Höhe, typischerweise angepasst an die Entwicklung eines Referenzzinses.

1.3 Aktien

- Aktien sind Wertpapiere, die bestimmte Teilhaberechte an einer Aktiengesellschaft (AG) verbriefen (Bspw.: Stimmrecht in der Hauptversammlung, Recht auf Dividende, Recht auf Bezug junger Aktien, Auskunfts- und Anfechtungsrechte)

- Bei „Nennwertaktien“ wird das Grundkapital der AG in eine bestimmte Anzahl auf einen festen Nennwert laufende Aktien zerlegt, mit deren Übernahme ein*e Aktionär*in einen Anteil an der AG erwirbt.
- Als „Miteigentümer*innen“ der Gesellschaft partizipiert ein*e Aktionär*in sowohl an einer positiven Entwicklung (Anteil am Gewinn) als auch an einer negativen Entwicklung (Gewinnausfall, Liquidation). Die Haftung ist jedoch auf den Verlust des Nennwerts der erworbenen Aktien beschränkt.
- Nennwert vs. Kurswert:
  - Bei börsengehandelten AGs tritt neben den Nennwert einer Aktie ihr Kurswert.
  - Ein*e Investor*in kann Aktien zu ihrem jeweiligen Kurswert erwerben/veräußern.
- Zahlungsstrom:
  - Erwerb der Aktie in t_0 zu einem (bekannten) Preis (Kaufkurs) $P_{t_0} = s_0$
  - Dividendenzahlungen D_{t_i} zu den Zeitpunkten t_i, $(i = 1,...,n; t_0 < t_1 < ... < t_n < T)$
  - Verkauf der Aktie in T zum Preis (Verkaufskurs) S_T

1.4 Immobilien



- Eigenschaften:
  - Immobilien wird eine hohe reale Wertbeständigkeit (Inflationsschutz!) zugeschrieben.
  - Feringe Korrelation der Wertentwicklung von Immobilien mit andern Anlageklassen (Diversifikationspotential!).
  - laufendes Einkommen (Mieten)
- Nachteile: hohe Eintrittkosten, Illiquidität

1.5 Derivate

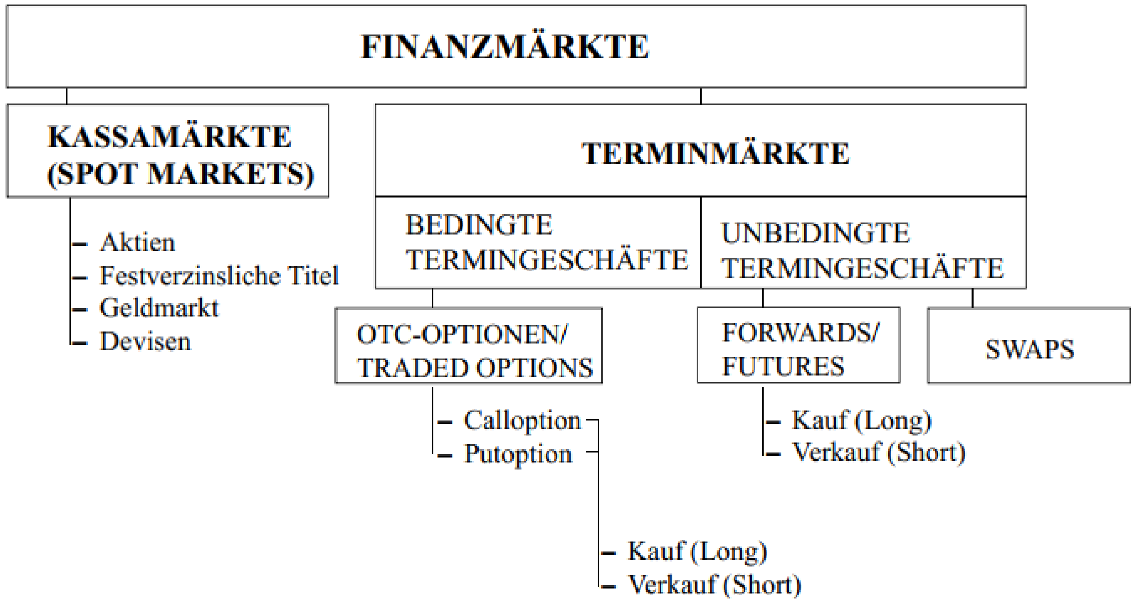
- Kassamärkte:
  - Bei einem Kassageschäft wird in einem Zeitpunkt $t = s$ sowohl der Vertrag abgeschlossen als auch (modulo technischer Frist) der Vertrag erfüllt.
  - Ausgerichtet auf effektive Erfüllung, d. h. der Käufer erhält den zugrunde liegenden Basistitel und bezahlt den Preis an den Verkäufer.
- Terminmärkte:
  - Bei einem Termingeschäft wird in $t = s$ der Vertrag abgeschlossen, aber (intendiert) erst in $t = T > s$ („auf Termin“) erfüllt.
  - Ausgerichtet auf effektive Erfüllung oder auf Ausgleich (Zahlung eines Differenzbetrags) (Cash Settlement).
  - Termingeschäfte müssen stets einen direkten oder indirekten Bezug zu Kassageschäften (Basistitel, Basisobjekt, Underlying Security) besitzen (derivative Titel).

Formale Charakterisierung:

Derivative Finanztitel (auch: derivative Finanzinstrumente, Derivate) sind Finanztitel, deren Zahlungsströme aufgrund vertraglicher Regelungen von den Zahlungsströmen eines oder mehrerer anderer Finanztitel abhängen. (begriffliches Gegenstück: primäre (auch: originäre) Finanztitel)
Motive für Einsatz: Wertsicherung, Spekulation, Arbitrage, Ertragsmehrung

Forward-Kontrakt

- Ein Forward-Kontrakt beinhaltet für den Käufer (Long Position) bzw. den Verkäufer (Short Position) die feste Verpflichtung:



- zu einem bestimmten zukünftigem Zeitpunkt (Liefertermin)
- unter Zugrundelegung eines vorab vereinbarten Referenzwerts („Preis“) für die Abrechnung zum Liefertermin
- einen spezifischen (realen oder synthetischen) Finanztitel (Basistitel, Underlying) zu kaufen bzw. zu verkaufen bzw. den entsprechenden Differenzbetrag zu begleichen (Cash Settlement).

• Zahlungsstrom:

  - Erwerb bzw. Verkauf eines Forwards in $t = s$ mit Erfüllungszeitpunkt $t = T (> s)$:
  - Ein Zahlungsfluss findet nur in $t = T$ statt („Null-Investment“).
  - Höhe: $K_T - F_s$ aus Sicht des Käufers bzw. $F_s - K_T$ aus Sicht des Verkäufers, wobei K_T der Wert des Basistitels des Forwards zum Zeitpunkt $t = T$ und F_s der vereinbarte Referenzwert für die Schlussabrechnung
  - Zahlungsbetrag je nach Kursentwicklung positiv oder negativ.
  - Käufer profitiert von steigenden, Verkäufer von fallenden Kursen des Basistitels.

1.5.1 Optionskontrakte

• Eine Option ist ein Vertrag, der dem Käufer (Inhaber der Option) gegen Zahlung des Optionspreises das Recht - nicht aber die Verpflichtung - einräumt

  - eine bestimmte Menge (Kontraktvolumen) eines spezifizierten Finanztitels
  - zu einem vorab festgelegten Referenzpreis

  - am Ende (Europäische Option) oder aber auch während (Amerikanische Option) einer bestimmten Frist
  - zu kaufen (Kaufoption, Call) bzw. zu verkaufen (Verkaufsoption, Put)

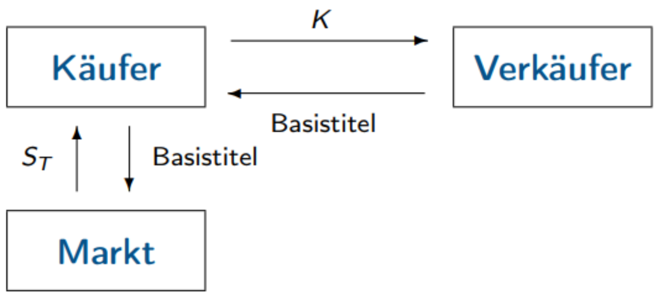
- Bei Optionen besitzt nur der Optionskäufer das Ausübungsrecht, der Verkäufer (Stillhalter) muss auf die Lieferung bzw. Abnahme vorbereitet sein. Konsequenz: Asymmetrisches Zahlungsprofil

K	Ausübungspreis, Strike
T	Verfalltermin, Maturität
C_T	Auszahlungsprofil der Call-Option in T
P_T	Auszahlungsprofil der Put-Option in T
C_t	Preis der Call-Option in t
P_t	Preis der Put-Option in t
S_t	Preis des Basisobjekts in t
r	risikofreier Zins

Kauf einer Kaufoption

- Käufer: Recht auf Erwerb des Basistitels zum Ausübungspreis K

Situation bei Ausübung in T:



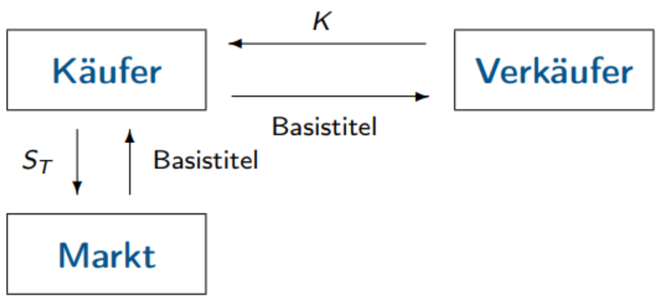
- Positiver Wert, wenn $S_T > K$; Höhe: $S_T - K \Rightarrow$ Ausübung!
- $S_T \leq K \Rightarrow$ Nichtausübung, Wert: 0

- Auszahlungsprofil der Call-Option: $C_T = max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$
- Gewinn/Verlust-Position G_T:
  $C_T = (S_T - K)^+ \Rightarrow G_T = C_T - C_0$ bzw. $G_T = C_T - C_0(1+r)^T$
- Möglicher Gewinn: unbegrenz, möglicher Verlust: limitiert auf Call-Prämie

Kauf einer Verkaufsoption

- Käufer: Recht auf Lieferung des Basistitels zum Ausübungspreis K

Situation bei Ausübung in T:



- Positiver Wert, wenn $K > S_T$; Höhe: $K - S_T \Rightarrow$ Ausübung!
- $K \leq S_T \Rightarrow$ Nichtausübung, Wert: 0

- Auszahlungsprofil der Put-Option: $P_T = max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$
- Gewinn/Verlust-Position G_T:
  $P_T = (K - S_T)^+ \Rightarrow G_T = P_T - P_0$ bzw. $G_T = P_T - P_0(1+r)^T$
- Möglicher Gewinn: limitiert auf Ausübungspreis minus Put-Prämie Möglicher Verlust: limitiert auf Put-Prämie

	Call	**Put**
Ausübungspreis $<$ Kurs	in-the-money	out-of-the-money
Ausübungspreis $=$ Kurs	at-the-money	at-the-money
Ausübungspreis $>$ Kurs	out-of-the-money	in-the-money

Kapitel 2

Grundkonzepte zur Bewertung

2.1 Bewertung von Zahlungsströmen

2.1.1 Bewertung finanzieller Zahlungsströme - Grundkonzepte im Überblick

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{X}$ von Zufallsvariablen/ Finanzpositionen auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Definition Präferenzordnung

Eine (vollständige, schwache) Präferenzordnung (Präferenzrelation) auf $\mathcal{X}$ ist eine binäre Relation $\succeq$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Vollständigkeit: Für alle $X, Y \in \mathcal{X}$ gilt entweder $X \succeq Y$ oder $Y \succeq X$ oder beides.
- Transitivität: Aus $X \succeq Y$ und $Y \succeq Z$ folgt stets $X \succeq Z$.

Definition Präferenzfunktional

Ein Präferenzfunktional $\mathcal{U}$ zu Präferenzordnung $\succ$ ist eine Abbildung $\mathcal{U} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $X, Y \in \mathcal{X}$ gilt: $X \succ Y \Leftrightarrow \mathcal{U}(X) > \mathcal{U}(Y)$

Beispiel (μ, σ)-Prinzip:

- Das Präferenzfunktional besitzt die Form

$$\mathcal{U}(X) = H(E[X], \sigma(X)) \tag{2.1}$$

  wobei H typischerweise eine Funktion ist, die in der ersten Komponente monoton steigend und in der zweiten monoton fallend ist.

- Wird die Funktion H konkret festgelegt, bspw.

$$H(x,y) = x - ay^2 \text{ mit } a > 0 \tag{2.2}$$

  so wird teilweise auch von der (μ, σ)-Regel gesprochen.

Standardrepräsentation von Präferenzfunktionalen

I.A. untersucht man Bedingungen (Axiome rationalen Verhaltens), unter denen das Präferenzfunktional U folgende Repräsentation besitzt: $\mathcal{U}(X) = E[u(X)]$

- Dies wird als von Neumann-Morgenstern-Repräsentation bezeichnet.
- Die Funktion u heißt (Risiko-)Nutzenfunktion.
- Die damit verbundene Entscheidungstheorie wird als Erwartungsnutzentheorie oder als Bernoulli-Prinzip bezeichnet.

Eigenschaften der Risikonutzenfunktion

- Monotonie
  - Die Präferenzordnung wird als monoton bezeichnet, wenn ein*e Investor*in für sichere Auszahlungen x und y mit $x > y$ stets x bevorzugt.
  - Im Fall des Bernoulli-Prinzips ist dies offenbar äquivalent dazu, dass für $x > y$ stets $u(x) > u(y)$ gilt, d. h. die Nutzenfunktion streng monoton steigend ist.
- Risikoeinstellungen
  - Risikoaversion: Die Präferenzordnung wird als (strikt) risikoavers (risikoscheu) bezeichnet, wenn ein*e Investor*in für jede nicht-degenerierte Finanzposition $X \in \mathcal{X}$ die sichere Zahlung in Höhe von $E[X]$ der Zufallszahlung X vorzieht, formal: $E[u(X)] < u(E[X])$
  - Risikoneutralität: $E[u(X)] = u(E[X])$
  - Risikosympathie: $E[u(X)] > u(E[X])$

Definition Sicherheitsäquivalent

Das Sicherheitsäquivalent einer Zufallsvariable X ist derjenige deterministische Wert $s(X)$, der zu X nutzenäquivalent ist. Formal: $u(s(X)) = E[u(X)]$

Arrow-Pratt-Maß: $r(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}$

Risiko/Wert-Modelle

Risiko/Wert-Modelle stellen konzeptionell eine Verallgemeinerung des $\mu,\sigma)$-Prinzips dar. Sie zerlegen den Bewertungsprozess in zwei Stufen:

- Ein*e Entscheidungsträger*in quantifiziert (isoliert) Risiko $\rho(X)$ und Wert $V(X)$ von X
- Die Risiko- und Werteinschätzung wird zu einer Gesamtpräferenz zusammengeführt. Formal: $\mathcal{U}(X) = H(V(X), \rho(X))$

Marktbewertung:

- Mark-to-Market: Wird ein Finanztitel an einem Kapitalmarkt gehandelt, so spiegelt der Marktpreis des Titels seine Bewertung durch die Akteure an diesem Markt wider.
- Mark-to-Model: Ein aktiver Markt existiert nicht oder der Zeitwert kann nicht zuverlässig ermittelt werden.
- Ziel einer Marktbewertung auf der Modellebene ist die Ermittlung von Gleichgewichtspreisen unter Risiko.

2.1.2 Bewertung von Zahlungsströmen: Finanz- vs. Versicherungsmathematik

- Finanzrisiken:
  - Werden typischerweise an Märkten gehandelt und es werden Marktpreise festgestellt.
  - Die Preise/Renditen sind typischerweise „korreliert“ (weisen eine stochastische Abhängigkeit auf).
  - Primäre Finanztitel können ggf. durch Einsatz derivativer Finanztitel gehedgt werden.
- Versicherungsrisiken:
  - Werden typischerweise nicht an Märkten gehandelt und sind stochasisch unabhängig
  - „Hedging“ erfolgt über Rückversicherung
- Klassische Versicherungsrisiken: Grundprinzip - Ausgleich im Kollektiv, Prämienberechnung - Äquivalenzprinzip

Bewertung in der Schadenversicherung

Standardansatz zur Kalkulation der Bruttorisikoprämie sind hier sogenannte Prämienprinzipien.
Beispiel: Explizite Prämienprinzipien
Diese haben typischerweise die Form: $\pi(X) = E[X] + a\rho(X)$
wobei $a > 0$ ein strikt positiver Entscheidungsparameter ist und $\rho(X)$ i. d. R. einem Risikomaß entspricht.

2.2 Effiziente Märkte

Nach Fama heißt ein Markt effizient, wenn Preise die „verfügbare Information“ stets vollständig widerspiegeln.
In Abhängigkeit von der zur Verfügung stehenden Information unterscheidet man:

- Schwache Informationseffizienz: Die verfügbare Information besteht nur aus den Kurshistorien.
- Semi-starke Informationseffizienz: Die verfügbare Information besteht aus allen öffentlich verfügbaren Informationen.
- Starke Informationseffizienz: Die verfügbare Information besteht aus allen verfügbaren Informationen der Marktteilnehmer*innen (inklusive Insider-Informationen)

Kritik:

- In effizienten Märkten können keine Handelsstrategien mit positiver Gewinnerwartung oberhalb der risikolosen Rendite existieren.
- Dies zeigt, dass die Effizienzmarkthypothese sehr restriktiv ist.

Realistischer: Annahme der Arbitragefreiheit des Marktes

2.3 Grundprinzipien der Finanzmathematik: Einperiodenmodelle

2.3.1 Finanzmarktmodelle und Abwesenheit von Arbitrage

Put-Call Parität: $C_0^{Call} - C_0^{Put} = S_0 - K$

Finanzmarktmodell mit einer Periode

- Primäre Finanztitel:
  - Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $d+1$ liquide gehandelten primären Finanztiteln, z. B. Aktien, Anleihen, Rohstoffe.
  - Preise zum Zeitpunkt 0: $S_0^0, S_1^0, \ldots, S_d^0$
  - Preise zum Zeitpunkt 1: $S_0^1, S_1^1, \ldots, S_d^1$
  - Preise zum Zeitpunkt 0 sind bekannt und damit deterministisch, während Preise zum Zeitpunkt 1 nicht im Vorfeld bekannt sind, sondern zufällig.
  - Finanztitel 0 sei ein Sparbuch mit risikofreiem Periodenzins $r > -1$:
    $S_0^0 = 1$ und $S_1^0 = 1 + r$

Definition Handelsstrategie und Wertprozess

- In einem Einperiodenmodell ist eine Handelsstrategie bzw. ein Portfolio ein Vektor $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \ldots, \vartheta^d)^\perp \in \mathbb{R}^{d+1}$

- Der Wert *i* entspricht der absoluten Anzahl der Einheiten des *i*-ten primären Finanztitels, die in der Periode zwischen 0 und 1 gehalten wird.

- Wertprozess
  - Anfangsinvestment: $V_0^\vartheta = \vartheta^0 S_0^0 + \vartheta^1 S_0^1 + \ldots + \vartheta^d S_0^d$
  - Endvermögen: $V_1^\vartheta = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1 + \ldots + \vartheta^d S_1^d$
  - $V^\vartheta = (V_0^\vartheta, V_1^\vartheta)$ heißt Wertpreozess der Handelsstrategie

Definition Arbitrage

- Eine Handelsstrategie $\vartheta \in \mathbb{R}^{+\nVdash}$ heißt Arbitragemöglichkeit, falls

$$V_0^\vartheta \leq 0, V_1^\vartheta \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s. und } \mathbb{P}[V_1^\vartheta > 0] > 0 \tag{2.3}$$

- Ein Marktmodell ohne Arbitragemöglichkeiten heißt arbitrage-frei.

Neben der Abwesenheit von Arbitrage gelten folgende Annahmen:

- Produkte sind in beliebiger - auch nicht-ganzzahliger und negativer - Stückzahl handelbar.

- Es gibt keine Bid-Ask-Spreads.

- Kapital kann unbegrenzt zum selben Zins angelegt wie geliehen werden.

- Keine Berücksichtigung von Dividendenzahlungen
- Keine Steuern
- Keine Transaktionskosten

Definition risikoneutrales Maß, Martingalmaß

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ heißt risikoneutrales Maß oder Martingalmaß, falls $\tilde{S}_0^i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1^i], i = 1, ...d$

Arbitrage-freie Marktmodelle können charakterisiert werden mithilfe der Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße:

$$\mathcal{Q} := \{\mathbb{Q}|\mathbb{Q} isteinrisikoneutralesMamit \mathcal{Q} \approx \mathcal{P}\} \tag{2.4}$$

Die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{P}$ heißen äquivalent auf $(\Omega, \mathcal{F})$, falls sie dieselben Nullmengen besitzen

Theorem: 1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung

Ein Marktmodell ist arbitrage-frei genau dann, wenn $\mathcal{Q} \neq \emptyset$.

Fallstudie 1: Marktmodell mit Arbitrage

.1 2.2 2.3 2.4 Anhang

- Finanzmarktmodell:
  - Szenarien: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$
  - Primäre Finanztitel:

    Sparbuch $S_0^0 = 1, \quad S_1^0 = 1{,}1$

    Aktie $S_0^1 = 30, \quad S_1^1(\omega) = \begin{cases} 66, & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 33, & \text{für } \omega = \omega_2 \end{cases}$
  - Relative Preise:

    Sparbuch $\tilde{S}_0^0 = 1, \quad \tilde{S}_1^0 = 1$

    Aktie $\tilde{S}_0^1 = 30, \quad \tilde{S}_1^1(\omega) = \begin{cases} 60, & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 30, & \text{für } \omega = \omega_2 \end{cases}$
- Berechnung eines risikoneutralen Maßes:
  - Für ein äquivalentes risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$ sind die Gewichte auf den Szenarien $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, bestimmt durch $q_1 + q_2 = 1$ und
    $$\tilde{S}_0^1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1^1] = \tilde{S}_1^1(\omega_1) \cdot q_1 + \tilde{S}_1^1(\omega_2) \cdot q_2.$$
  - Somit:
    $$30 = 60q_1 + 30q_2 \Leftrightarrow 30 = 60q_1 + 30(1 - q_1) = 30q_1 + 30 \Leftrightarrow q_1 = 0, q_2 = 1.$$
  - Das resultierende $\mathbb{Q}$ ist zwar ein Wahrscheinlichkeitsmaß, jedoch nicht äquivalent zu $\mathbb{P}$. $\rightsquigarrow$ Das Marktmodell ist nicht arbitrage-frei!
  - Im Fall $S_1^1(\omega_2) = 44$ beispielsweise wäre das Gewicht q_1 sogar negativ.

Law of One Price

- Es sei $\mathcal{V} := \{V_1^{\vartheta} | \vartheta \in \mathbb{R}_{d+1}\}$ der lineare Raum aller terminalen Auszahlungen, die durch eine Handelsstrategie ϑ generiert werden können
- Ein Auszahlung $C_1 \in \mathcal{V}$ wird replizierbar oder auch duplizierbar genannt
- Eine Handelsstrategie ϑ mit $C_1 = V_1^{\vartheta}$ ist i.A. nicht eindeutig; Es gilt jedoch: Law of One Price

Definition Law of One Price

Falls $C_1 \in \mathcal{V}$ in einem arbitrage-freien Marktmodell die Form $C_1 = V_1^{\vartheta} = V_1^{\xi}$ $\mathbb{P}$-f.s. für zwei verschiedene Handelsstrategien $\vartheta, \xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ besitzt, so gilt $V_0^{\vartheta} = V_0^{\xi}$

- Mit Blick auf das Law of One Price ist es sinnvoll, den Preis von $C_1 \in \mathcal{V}$ zu definieren durch die Kosten der perfekten Replikation:
  $C_0 := V_0^{\vartheta}$, falls $C_1 = V_1^{\vartheta}$
  Anderenfalls kann Arbitrage generiert werden!
- Für jedes risikoneutrale Maß $\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}$ kann der Preis C_0 - und zwar losgelöst von der Berechnung einer replizierenden Strategie - berechnet werden durch

$$C_0 = S_0^0 E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{1+r}\right] \tag{2.5}$$

  Dies ist die risikoneutrale Bewertungsformel.

Die risikoneutrale Bewertungsformel hat zwei Vorteile:
- Für replizierbare Auszahlungen kann die Bewertung von der Berechnung der Replikationsstrategie entkoppelt werden. Es genügt, einen Erwartungswert unter $\mathcal{Q}$ zu berechnen!
- Die risikoneutrale Bewertungsformel ist auch zur Bewertung von nicht-replizierbaren Auszahlungen anwendbar.

2.3.2 Risikoneutrale Bewertung von Finanzderivaten

Contingent Claim

Charakterisierung:

- Contingent Claims sind Verträge zwischen Handelspartnern, die verbindlich Zahlungen festlegen, die zu zukünftigen Zeitpunkt geleistet werden.
- Die Höhe der Zahlungen erfolgt in Abhängigkeit von zukünftigen Ereignissen.

- Finanzderivate: Die Höhe der Zahlungen hängt z. B. von der Kursentwicklung von Referenzprodukten (Aktien, Anleihen, Währungen, Rohstoffe etc.) ab.
- Zahlungen aus Versicherungsrisiken: Zahlungen sind durch das Eintreten und den Umfang von Schäden bestimmt (z. B. CatBonds, Longevity Swaps).

Definition Europäischer Contigent Claim

- Ein Contingent Claim ist eine Zufallsvariable C_1 auf dem zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $0 \leq C_1 < \inf$ $\mathcal{P}$-f.s.
- Ein Contingent Claim heißt Derivat der primären Finanztitel, falls $C_1 = f(S_0^0, S_0^1, ..., S_0^d; S_1^0, S_1^1, ..., S_1^d)$

Definition arbitrage-freie Preise

Eine reelle Zahl $C_0 \geq 0$ heißt arbitrage-freier Preis eines Contingent Claims C_1, falls das ursprüngliche Marktmodell nach Erweiterung um den Finanztitel $S_0^{d+1} = C_0$ und $S_1^{d+1} = C_1$ arbitrage-frei bleibt.
Die Menge aller arbitrage-freien Preise von C_1 wird mit $\mathcal{C}_0$ bezeichnet

Theorem (arbitrage-freie Preise):

Es sei $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ für das ursprüngliche Marktmodell. Dann ist die Menge der arbitrage-freien Preise für den Contingent Claim C_1 gegeben durch

$$\mathcal{C}_0 := \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_1}{1+r} \right] \middle| \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \text{ mit } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_1] < \infty \right\} \neq \emptyset.$$

Replizierbarer Contingent Claim

Ein Contigent Claim C_1 ist replizierbar, falls $C_1 = V_1^{\vartheta}$ $\mathcal{P}$-f.s. für ein $\vartheta \in \mathbb{R}^{d+1}$

Dichotomie für arbitrage-freie Preise

Es sei C_1 ein Contingent Claim in einem arbitrage-freien Finanzmarktmodell.
1. C_1 ist replizierbar genau dann, wenn der arbitrage-freie Preis eindeutig ist. In diesem Fall entspricht der Preis den Kosten der perfekten Replikation.
2. Ist C_1 nicht replizierbar, so gilt $C_0^{inf} < C_0^{sup}$ und die Menge $\mathcal{C}_0$ der arbitrage-freien Preise ist das offene Intervall $\mathcal{C}_0 = (C_0^{inf}, C_0^{sup})$

Fallstudie 1: replizierbarer Contingent Claim

- Betrachten Sie das Finanzmarktmodell von Folie 59:
  - Szenarien: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$
  - Primäre Finanztitel:

    Sparbuch $S_0^0 = 1, \quad S_1^0 = 1{,}1$

    Aktie $S_0^1 = 30, \quad S_1^1(\omega) = \begin{cases} 66, & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 22, & \text{für } \omega \in \{\omega_2, \omega_3\} \end{cases}$
  - Risikoneutrale Maße:
    $$\mathbb{Q}_\alpha[\{\omega_1\}] = \tfrac{1}{4}, \mathbb{Q}_\alpha[\{\omega_2\}] = \tfrac{3}{4}\alpha, \mathbb{Q}_\alpha[\{\omega_3\}] = \tfrac{3}{4}(1-\alpha), \alpha \in (0,1)$$
- Bewertung des Contingent Claims $C_1(\omega_1) = 88$, $C_1(\omega_2) = C_1(\omega_3) = 44$:
  - Die Auszahlung ist replizierbar durch die Strategie $\vartheta^0 = 20$, $\vartheta^1 = 1$ mit Startkapital $C_0 = 50$. Nach dem Law of One Price ist dies der Preis von C_1.
  - Diskontierter Contingent Claim: $\tilde{C}_1(\omega_1) = 80$, $\tilde{C}_1(\omega_2) = \tilde{C}_1(\omega_3) = 40$
  - Risikoneutrale Bewertung bezüglich $\mathbb{Q}_\alpha$:
    $$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}[\tilde{C}_1] \\ &= \tilde{C}_1(\omega_1) \cdot \mathbb{Q}_\alpha[\{\omega_1\}] + \tilde{C}_1(\omega_2) \cdot \mathbb{Q}_\alpha[\{\omega_2\}] + \tilde{C}_1(\omega_3) \cdot \mathbb{Q}_\alpha[\{\omega_3\}] \\ &= 80 \cdot \tfrac{1}{4} + 40 \cdot \tfrac{3}{4}\alpha + 40 \cdot \tfrac{3}{4}(1-\alpha) = \underline{50} \end{aligned}$$
  - Der arbitrage-freie Preis des replizierbaren Contingent Claims hängt nicht ab von der speziellen Wahl des risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}_\alpha$ und stimmt überein mit den Kosten der Replikation.

2.3.3 Vollständige und unvollständige Finanzmarktmodelle

Replizierbare Contingent Claims

In einem Finanzmarktmodell sind die replizierbaren Contingent Claims die linearen Portfolios der zugrunde liegenden primären Finanztitel, d. h. es gibt eine Handelsstrategie $\vartheta \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit

$$C_1 = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1 + \ldots + \vartheta^d S_1^d \tag{2.6}$$

Replizierbare Contingent Claims besitzen einen eindeutigen arbitrage-freien Preis, gegeben durch die Kosten der perfekten Replikation

Definition Vollständige und unvollständige Finanzmarktmodelle

Ein arbitrage-freies Marktmodell heißt vollständig, falls jeder Contingent Claim replizierbar ist. Anderenfalls heißt das arbitrage-freie Marktmodell unvollständig.

Theorem 2. Funamentalsatz der Wertpapierbewertung

Ein arbitrage-freies Finanzmarktmodell ist vollständig genau dann, wenn es genau ein äquivalentes risikoneutrales Maß gibt, d. h. $|\mathcal{Q}| = 1$

2.4 Risikoneutrale Bewertung in Mehrperiodenmodellen

2.4.1 Grundbegriffe und -prinzipien in Mehrperiodenmodellen

Zeitdiskrete vs. zeitstetige Modellierung (Mehrperiodenmodelle

- Finanzmarktmodell in diskreter Zeit: nur abzählbar viele Handelszeitpunkte
- Die Modellierung kann aber auch in stetiger Zeit erfolgen: Die Modellierung von Preisprozessen primärer Finanzprodukte erfolgt durch Stochastische Differentialgleichungen. Finanzmathematik in stetiger Zeit basiert auf den Methoden der Stochastischen Analysis

Zeitdiskrete Mehrperiodenmodelle - Handelsstrategie

- Die Anzahl von Finanzprodukt i, die in der Periode $(t-1;t]$ im Portfolio gehalten wird, wird mit ϑ_t^i bezeichnet.
  - Die Stückzahl ϑ_t^i wird zu Beginn der Handelsperiode auf Basis der verfügbaren Information $\mathcal{F}_{t-1}$ durch eine*n Investor*in festgelegt.
  - Damit ist diese Stückzahl bis $t-1$ nicht bekannt, also eine Zufallsvariable, und $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar.
- Eine Handelsstrategie ist ein vorhersehbarer stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^{d+1}$: $\vartheta = (\vartheta_t)_{t=1,\ldots,T} = ((\vartheta_t^0,\ldots,\vartheta_t^d)^\perp)_{t=1,\ldots,T}$

Wertprozess:

- Der Wertprozess des Portfolios ϑ ist gegeben durch

$$V_0^\vartheta = \sum_{i=0}^d \vartheta_1^i S_0^i, \quad V_t^\vartheta = \sum_{i=0}^d \vartheta_t^i S_t^i \quad \text{für } t = 1,\ldots,T.$$

Selbstfinanzierende Handelsstrategie:

- Eine Handelsstrategie ϑ heißt selbstfinanzierend, falls gilt:

$$V_t^\vartheta = \sum_{i=0}^d \vartheta_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^d \vartheta_{t+1}^i S_t^i \quad \text{für alle } t = 1,\ldots,T-1.$$

- Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t ist gleich dem Wert des für den Zeitraum $(t, t+1]$ umgeschichteten Portfolios zum Zeitpunkt t.

Bewertung von Contingent Claims

Ziel: Bewertung einer bedingten Auszahlung C_T mit Fälligkeit in T.

- Replizierendes Portfolio: selbstfinanzierende Strategie ϑ mit $V_T^{\vartheta}(\omega) = C_T(\omega)$. Diese Gleichung muss in allen Szenarien $\omega \in \Omega$ gelten
- Vollständiges Finanzmarktmodell: Jeder Contingent Claim ist replizierbar.
- Unvollständiges Finanzmarktmodell: Der Markt ist nicht vollständig, d. h. es gibt Contingent Claims, die nicht replizierbar sind
- Ist der Contingent Claim CT replizierbar, so muss der Preis gleich den Kosten der perfekten Replikation sein. Anderenfalls gibt es Arbitrage!

- Finanzmarktmodell:
  - Arbitrage-freies Mehrperiodenmodell auf filtriertem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit $d+1$ primären Produkten,
  - zugehörigen Preisen $S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)^\top$, $t = 0, 1, \dots, T$
  - Numéraire S_t^0, $t = 0, 1, \dots, T$,
  - und relativen Preisen $\tilde{S}_t^i = S_t^i / S_t^0$, $t = 0, 1, \dots, T$, $i = 0, 1, \dots, d$
- Äquivalentes Martingalmaß:
  - Äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1}^i | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_{t+1}^i}{S_{t+1}^0} | \mathcal{F}_t\right] = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$$

  - Für jedes Szenario ω ist der erwartete diskontierte Preis in $t+1$, bedingt auf die in t verfügbare Information ($= \mathcal{F}_t$), gleich dem diskontierten Preis in t.

- 1. Fundamentalsatz: $\exists$ äquivalentes Martingalmaß $\Leftrightarrow$ Markt arbitrage-frei
- 2. Fundamentalsatz: $\exists!$ äquivalentes Martingalmaß $\Leftrightarrow$ Markt vollständig

2.5 Grundlagen der Zinstheorie

2.5.1 Arten der Versinsung

- Konversionsperiode: Zeitintervall an dessen Ende die Zinsen gutgeschrieben werden (meist 1 Jahr)
- p: Zinsfuß für eine Zeiteinheit
- $r = \frac{p}{100}$ Zinssatz
- diskontierliche Zinsgutschrift: Gutschrift am Ende einer Periode
  - einfache Verzinsung: $K_t = K_0(1 + [t]r)$
  - Zusammengesetzte Verzinsung: $K_t = K_0(1+r)^{[t]}$

- kontinuierliche Zinsgutschrift
  - einfache Verzinsung: $K_t = K_0(1+tr)$
  - Zusammengesetzte Verzinsung: $K_t = K_0(1+r)^t$
- Gemischte Verzinsung: $K_t = K_0(1+r)^{[t]}(1+(t-[t])r)$ für ganze Jahre $[t]$ und unterjährigen Teil $t-[t]$

2.5.2 Barwerte und Endwerte

- Vollkommener Kapitalmarkt in diskreter Zeit:
  - zu einem deterministischen Periodenzinssatz $r > 0$ können beliebig hohe Geltbeträge angelegt und beliebig hohe Kredite aufgenommen werden
  - Beliebige Zahlungen zu einem beliebigen Zeitpunkt können auf einen beliebigen anderen Zeitpunkt zu Kapitalmarktbedingungen transferiert werden.
- Kapitalmarktbewertung (Barwert der Zahlungsreihe):
  $BW_0(r) = \sum_{t=0}^{T} Z_t q^{-t} = \sum_{t=0}^{T} Z_t v^t$
- Endwert (resultierende Größe als Endwert der Zahlungsreihe):
  $EW_T(t) = BW_0(r) \cdot q^T = \sum_{t=0}^{T} Z_t q^{T-t}$

2.5.3 Allgemeine Zinsstrukturkurven

- Nullkuponanleihe
  - liefert normierte Auszahlung 1 zur Maturität T
  - $P(t,T)$ sei der Wert dieser Auszahlung in $t \leq T$, $P(T,T) = 1$
  - $P(t,T)$ vor t nicht mit Sicherheit bekannt, $t \to P(t,T)$ ist stochastisch
  - $P(t,T)$ dient als Diskontierungsfaktor, $T \to P(t,T)$ ist die Diskontkurve in t
  - Nichtnegative Zinsen: Bondpreise $t \to P(t,T) \leq 1$ mit der Zeit fallend
- Spot Rate zum Zeitpunkt t: Zins in t, der für eine Anlage von t bis T gezahlt wird
- Forward Rate zum Zeitpunkt t: Zins, der in t für eine Anlage von T bis S ($t \leq T \leq S$) vereinbart wird
- Arbitragefreiheit: Ein Kapitalbetrag, der in t bis T zur Spot Rate angelegt wird, muss zur Zeit T einen identischen Endwert aufweisen wie der Kapitalbetrag, der revolvierend jeweils über 1 Jahr zu den in t gültigen Forward Rates angelegt wird.
- Short Rate zum Zeitpunkt t: Zins für kurzfristige Anlage $r = f_t(t) = lim_{T \downarrow t} r_t^s(T)$

- Situation:
  - Arbitrage-freies Finanzmarktmodell
  - $\mathbb{Q}$ äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Geldmarktfonds als Numéraire
  - C_T Contingent Claim mit Maturität T
- Risikoneutrale Bewertung:
  - Arbitragefreier Preis in $t \leq T$:

$$C_t = K_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_T}{K_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

    Modellierung der gemeinsamen Verteilung von C_T und K_T erforderlich!
  - Spezialfall: Preisformel für Nullkuponanleihen

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{K_t}{K_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(-\int_t^T r_u \, du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Das Investment von $P(t,T)$ € in t liefert in T die sichere Auszahlung 1.

- Spot Rate $r_t^e(T)$ für $[t,T]$ bei einfacher Verzinsung:

$$P(t,T)(1+(T-t)r_t^e(T)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_t^e(T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right)$$

- Spot Rate $r_t^z(T)$ für $[t,T]$ bei zusammengesetzter Verzinsung:

$$P(t,T)(1+r_t^z(T))^{T-t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_t^z(T) = \left(\frac{1}{P(t,T)}\right)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

- Spot Rate $r_t^s(T)$ für $[t,T]$ bei stetiger Verzinsung:

$$P(t,T)\exp(r_t^s(T)(T-t)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_t^s(T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

Forward Rates ergeben sich aus der Diskontstruktur („no arbitrage“).

- Forward Rate bei einfacher Verzinsung für $[T, S]$ zum Zeitpunkt t:

$$f_t^e(T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right).$$

- Forward Rate bei zusammengesetzter Verzinsung für $[T, S]$ zum Zeitpunkt t:

$$f_t^z(T,S) = \left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}\right)^{\frac{1}{S-T}} - 1$$

- Forward Rate bei stetiger Verzinsung für $[T, S]$ zum Zeitpunkt t:

$$f_t^s(T,S) = -\frac{\ln P(t,S) - \ln P(t,T)}{S-T}.$$

2.6 Zinsprodukte

2.6.1 Einfache Zinsprodukte

- Festverzinsliche Anleihe ist ein Finanztitel mit
  - zukünftigen äquidistanten Zahlungszeitpunkten $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$
  - T_n Maturität
  - deterministischen bei Vertragsabschluss festgelegten Kuponzahlungen $c_1, \ldots, c_n$
  - einem Nennwert N
- Variable verzinsliche Anleihen (Floating Rate Notes, Floater)
  - mehrere Zinsperioden, nach jeder Periode werden die Zinsen bezahlt
  - Zinssatz orientiert sich an einem Referenzzinssatz
  - Zins kann um einen festen Spread über oder unter diesen Sätzen liegen
  - Floor Floater: variable verzinsliche Anleihe, die Mindestmarke für Verzinsung garantiert
  - Cap Floater: variable verzinsliche Anleihe mit Höchstmarke für Verzinsung
  - Collared Floater: begrenzen Verzinsung durch Mindest- und Höchstssaätze
  - Reverse Floater: Zinszahlung als Differenz zwischen festem Zinssatz und Referenzzinssatz
  - Floater sind mit anderen Anleihetypen kombinierbar

Zinsstrukturkurve (Zero Coupon Curve, Spot Rate Curve):

- funktionale Abhängigkeit der Renditen (Spot Rates) von Nullkuponanleihen (gleicher Bonitätsstufe) von ihrer Restlaufzeit

Empirische Bestimmung der Zinsstrukturkurve:

- Aus Preisen von gehandelten Nullkuponanleihen:
  - Beispiel: $r_t^z(T) = P(t,T)^{-1/(T-t)} - 1$
  - Verfügbarkeitsproblem: Liquidität bei langen Laufzeiten
- Aus Preisen von gehandelten Kuponbonds:
  - Aus aktuellen Anleihe-Emissionen; methodisch: Bootstrapping; Verfügbarkeitsproblem
  - Aus sämtlichen gehandelten Kuponbonds; methodisch: Bootstrapping sowie statistische Glättungsverfahren wegen Verzerrung
- Alternativ: aus Swapsätzen (typische Quotierung am Markt, vgl. Folie 101 ff.)

2.6.2 Analyse des Zinsänderungsrisikos: Duration und Konvexität

Annahmen

- Zinsstruktur in $t = 0$ flach: $r_0^z(s) = r$ für alle $s \geq 0$
- Zinsänderung durch einmaligen Übergang in flache Zinsstruktur der Höhe $r + \Delta r$
- Auswirkungen der Zinsänderung:
  - $\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r)$
  - $\Delta K_T = K_T(r + \Delta r) - K_T(r)$
  - Steigender Marktzins: Barwert fällt, Endwert steigt
  - Fallender Marktzins: Barwert steigt, Endwert fällt

Duration

- Absolute Duration: $DUR^A(r) := -P'(r) = \frac{1}{1+r}\sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t}$
- Absolute Duration ist ein approximatives Maß für die Kursänderung bei absoluter Zinsänderung: $\Delta P(r) \approx -DUR^A(r) \cdot \Delta r$
- Absolute Duration mit Konvexität: $\Delta P(r) \approx -DUR^A(r) \cdot \Delta r + \frac{1}{2} CONV^A(r) \cdot (\Delta r)^2$
- $CONV^A(r) = P''(r)$
- Erste Ableitung der Barwertfunktion mit negativem Vorzeichen
- Zinsänderungsrisiko ist größer, wenn Duration größer

- Modifizierte Duration: $DUR^M(r) := \frac{DUR^A}{P(r)} = \frac{P'(r)}{P(r)} = (\frac{1}{1+r}\sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t})/P(r)$
- Modifizierte Duration ist ein approximatives Maß für die relative Kursänderung bei absoluter Zinsänderung: $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -DUR^M(r)\cdot\Delta r$
- Modifizierte (Relative) Konvexität: $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -DUR^M(r)\cdot\Delta r + \frac{1}{2}CONV(r)\cdot(\Delta r)^2$
- $CONV(r) = \frac{P''(r)}{P(r)}$
- Duration von 3 Faktoren beeinflusst:
  - Laufzeit der Bonds
  - Höhe des Kupons
  - Marktzins
- d.h.:
  - Duration sinkt, wenn Kupon steigt
  - Duration sinkt, wenn Marktzins steigt
  - Je länger die Laufzeit, desto größer die Duration

2.6.3 Komplexere Zinsprodukte

Forward-Kontrakt

Beschreibung:

- Zeitpunkte $t \leq T_1 < T_2$
- Ein Forward mit
  - Fälligkeit T_1
  - auf einen T_2-Bond (im Weiteren kurz für Zerobond mit Maturität T_2 und Nennwert $N = 1$)
  - mit in t festgelegtem Forward-Preis $F(t; T_1, T_2)$

  ist eine in t getroffene Vereinbarung, in T_1 den T_2-Bond für $F(t; T_1, T_2)$ zu kaufen (forward long) bzw. zu verkaufen (forward short).
- Auszahlungsfunktion in T_1 aus Sicht der Long-Partei:

$$P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2)$$

Bewertung:

- Der Forward-Preis in t wird so bestimmt, dass der Forward-Wert in t gleich null ist („no arbitrage"-Argumente).
- Hierzu betrachten wir zwei Strategien, die in T_2 die Auszahlung 1 € liefern:
  Strategie A:
  - In t: Kauf eines T_2-Bonds auf Kredit, d. h. Kreditaufnahme der Höhe $P(t, T_2)$
  - In T_1: Tilgung des Kredits: $P(t, T_2)\frac{1}{P(t,T_1)}$

  Strategie B:
  - In t: Abschluss des Forwards (kein Zahlungsfluß!)
  - In T_1: Zahlung des Forward-Preises $F(t; T_1, T_2)$
- Die Nettozahlung beider Strategien in t ist null, Zahlungen erfolgen nur in T_1. Damit muss gelten:

$$F(t; T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \quad \text{(Cost of Carry-Formel)}$$

- Der Forward-Preis hängt nicht von einem speziellen Zinsmodell ab, sondern basiert auf zwei Datenpunkten der Diskontierungsfunktion.

Risikoneutrale Bewertung:

Die Herleitung basiert auf modellfreien „no arbitrage"-Argumenten und ist konsistent mit dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung:

- $\mathbb{Q}$ äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Numéraires Geldmarktfonds $(K_t)_{t\geq 0}$, d. h. diskontierte Zerobondpreise sind Martingale unter $\mathbb{Q}$
- Risikoneutrale Bewertung der Auszahlung $P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2)$:

$$\begin{aligned} & K_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tfrac{1}{K_{T_1}}(P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2))|\mathcal{F}_t] \\ = \quad & K_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{K_{T_1}}P(T_1, T_2)|\mathcal{F}_t\right] - F(t; T_1, T_2)K_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{K_{T_1}}|\mathcal{F}_t\right] \\ = \quad & P(t, T_2) - F(t; T_1, T_2)P(t, T_1) \end{aligned}$$

- Dieser Wert ist 0 genau dann, wenn $F(t; T_1, T_2) = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$.

Überblick Zinsswap

- Finanzderivat, bei dem zwei Parteien vereinbaren, zu vorher festgesetzten zukünftigen Zeitpunkten Zinszahlungen auf Nennwerte zu tauschen
- Vereinfachung: Differenz zwischen Zinszahlungen wird getauscht
- Nennwerte stimmen i.d.R. überein
- Zins-Währungs-Swap: Zinsswap auf verschiedenen Währungen

- Typisch: Austausch fester gegen variable Zinsen
- Zweck: Absicherung gegen Zinsänderungen oder Spekulation auf diese
- Payer-Swap: Swap aus Sich der Vertragspartei, die den festen Zins zu zahlen hat und dafür den variablen Zinssatz erhält
- Receiver-Swap: Swap aus Sich der Vertragspartei, die den variablen Zins zu zahlen hat und dafür den festen Zinssatz erhält
- Wert Payer-Swap: $\Pi^p(t) = N(P(t,T_0) - P(t,T_n) - r\delta \sum_{k=1}^{n} P(t,T_k))$
- Wert Receiver-Swap: $\Pi^r(t) = -\Pi^p(t)$ entgegengesetzt zum Payer-Swap
- Forward Swap Rate: $\Pi^p(t) = -\Pi^r(t) = 0$

2.7 Risikoneutrale Bewertung von Aktienderivaten in Binomialbäumen

2.7.1 Klassische Aktienderivate

- Aktienderivat: Finanzkontrakt, dessen Auszahlung (Zahlungsstrom) sich aus dem realisierten Kursverlauf einer Aktie ableitet
- Formal: $C_t = f(S_0, S_1, \ldots, S_t)$ für eine Funktion f, $(S_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ der Aktienpreisprozess, C_T die Auszahlung
- Beispiele:
  - Call-Option: $C_T^{call} = S_T - K)^+$ mit Ausübungspreis $K > 0$
  - Put-Option: $C_T^{put} = (K - S_T)^+$ mit Ausübungspreis $K > 0$

Ausblick: Pfadabhängige Optionen

- Barrier-Optionen:
  - Up-and-in Call-Option: Ein*e Halter*in der Option besitzt das Recht zur Maturität T eine Aktie zum Ausübungspreis K zu erwerben, sofern der Aktienpreis bis dahin eine Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ überschritten hat. Formal:

$$C_T^{\text{call,up\&in}} = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{falls } \max_{0 \le t \le T} S_t \ge B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Up-and-out Call-Option: Ein*e Halter*in der Option besitzt das Recht zur Maturität T eine Aktie zum Ausübungspreis K zu erwerben, sofern der Aktienpreis bis dahin eine Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ nicht überschritten hat.

$$C_T^{\text{call,up\&out}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max_{0 \le t \le T} S_t \ge B, \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst.} \end{cases}$$

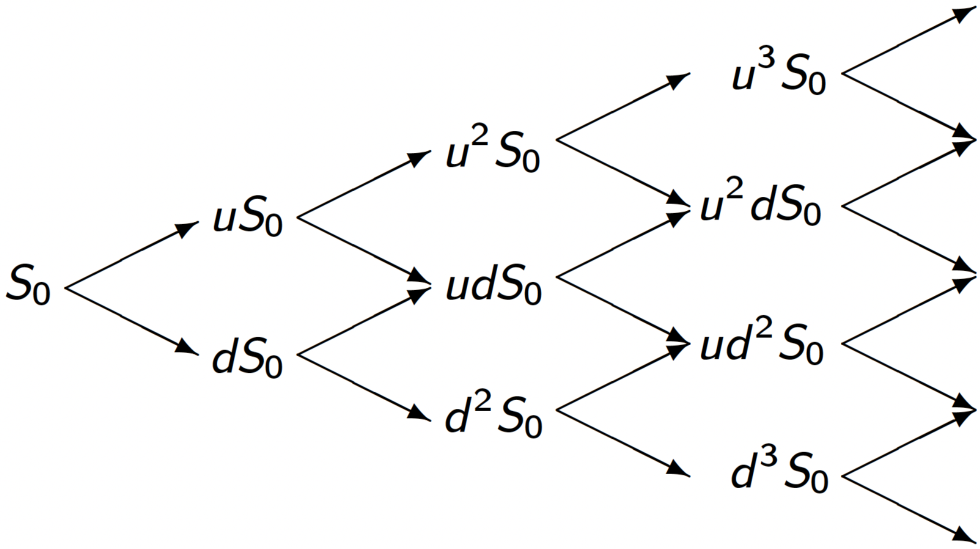
- (Floating Strike) Lookback Put-Option: $C_T^{\text{put,max}} := \max_{0 \le t \le T} S_t - S_T$
- Asiatische Optionen:
  - Die Auszahlung hängt vom Durchschnittspreis des Basistitels zu bestimmten Zeitpunkten $\mathbb{T} \subseteq \{0, 1, \ldots, T\}$ ab.
  - Eine Asiatische Call-Option mit Strike K entspricht dem Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{Asian call}} := \left(\frac{1}{|\mathbb{T}|} \sum_{t \in \mathbb{T}} S_t - K \right)^+.$$

Binomialmodell

Binomialmarktmodell nach Cox-Ross-Rubinstein

- diskretes Finanzmarktmodell mit T Handelsperioden
- Primäre Produkte:
  - Risikofreie Anlage (Sparbuch): deterministischer Periodenzins $r > -1$, $S_t^0 := (1+r)^t$, $t = 0, \ldots, T$
  - Risikobehaftete Anlage (Aktie): $S := S^1$
    - in jeder Handelsphase Up-Faktor u oder Down-Faktor d unterstellt
    - Aktienpreis springt entweder auf höheren Wert $S_t = S_{t-1} \cdot u$ oder niedrigeren Wert $S_t = S_{t-1} \cdot d$



- Szenarien: $\Omega := \{d, u\}^T = \{\omega = (y_1, \ldots, y_T) | y_i \in \{d, u\}\}$
- Modellierung des Aktienpreisprozesses:
  - Startwert $S_0 > 0$ konstant
  - $Y_t(\omega) := y_t$ für $\omega = (y_1, \ldots, y_T)$; Projektion auf die t-te Koordinate
  - $N_t(\omega) := \#\{1 \leq s \leq t | y_s = u\}$ Anzahl der Aufwärtsbewegungen bis t
  - Aktienpreisprozess in Szenario $\omega = (y_1, \ldots, y_T)$:

$$S_t(\omega) := S_0 \prod_{k=1}^{t} Y_k(\omega) = S_0 \cdot d^{t-N_t(\omega)} \cdot u^{N_t(\omega)}$$

- Information:
  - Die Informationsstruktur ist gegeben über die Filtration

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_0, \ldots, S_t), \quad t = 0, \ldots, T.$$

  - Hierbei gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \ldots, Y_t)$ und $\mathcal{F} := \mathcal{F}_T$ stimmt mit der Potenzmenge von Ω überein.
- Im Folgenden wird ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mathbb{P}[\{\omega\}] > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ fixiert, das als Referenzmaß fungiert.

Satz (Arbitragefreiheit und Vollständigkeit):

Das CRR-Modell ist arbitrage-frei genau dann, wenn $d < 1 + r < u$. Unter dieser Bedingung ist das CRR-Modell vollständig, und es gibt ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Das Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist dadurch charakterisiert, dass die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_T$ stochastisch unabhängig unter $\mathbb{Q}$ sind mit Verteilung

$$\mathbb{Q}[Y_t = u] = q := \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \mathbb{Q}[Y_t = d] = 1 - q, \quad t = 1, \dots, T.$$

Anmerkungen:

- Aufgrund der Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1-q)^{T - N_T(\omega)} \cdot q^{N_T(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

- In jedem Knoten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten unter $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}[Y_{t+1} = u | \mathcal{F}_t] = q \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{Q}[Y_{t+1} = d | \mathcal{F}_t] = 1 - q$$

- Unabhängigkeit der Zuwachsfaktoren $Y_1, \dots, Y_T$ unter $\mathbb{Q}$ ermöglicht einfache Simulation von risikoneutralen Pfaden für Bewertungszwecke.

Beispiel: Risikoneutrale Bewertung eines Lookback-Puts (1)

- Finanzmarktmodell: „Down"-Faktor $d = 0{,}5$, „Up"-Faktor $u = 2$, $r = 0{,}$
- Äquivalentes Martingalmaß: $q = 0{,}4$, $1 - q = 0{,}6$

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = \begin{cases} 0{,}16 & \text{für } \omega = (u, u), \\ 0{,}24 & \text{für } \omega = (u, d), \\ 0{,}24 & \text{für } \omega = (d, u), \\ 0{,}36 & \text{für } \omega = (d, d). \end{cases}$$

- Lookback-Put-Option:

$$C_2(\omega) = \max_{0 \le t \le 2} S_t - S_2 = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u, u), \\ 4 & \text{für } \omega = (u, d), \\ 0 & \text{für } \omega = (d, u), \\ 3 & \text{für } \omega = (d, d). \end{cases}$$

- Direkte Bewertung in $t = 0$:

$$C_0 = (1,1)^{-2}[0 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}24 + 0 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0,36] = \frac{204}{121}.$$

Kapitel 3

Risiko und Risikomaße

3.1 Risiko und Knightian Uncertainty

- Charakterisierung im Kontext der ökonomischen Entscheidungstheorie durch Differenzierung zwischen „Risiko“ und „Unsicherheit“:
  - "Risiko"bezieht sich auf Situationen, in denen das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}$ bekannt sind
  - Unsicherheitßtellt auf Fälle ab, in denen dies nicht der Fall
- Formalisierung Knight’scher Unsicherheit („Knightian Uncertainty“):
  - Familie $\mathcal{P}$ von möglichen Wahrscheinlichkeitsmaßen statt eines Referenzmaßes
  - Jedes Element von P spiegelt eine mögliche Ausprägung der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen wider.
- Standardvorgehen - Modellierung unter „Risiko“:
  - Modellierung von Preisentwicklungen durch stochastische Prozesse, deren Dynamik in der Regel bezüglich eines festen Maßes P spezifiziert ist.
  - Annahme: Investoren haben Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugrunde liegenden Preisprozesse.
- Realistischer - Knightian Uncertainty:
  - Wahrscheinlichkeiten von Finanzmarktereignissen sind unbekannt.
  - Ohne Unsicherheit sollten Finanzinstitutionen in der Lage sein, Finanzprodukte so zu bewerten, dass sie mögliche Verluste kontrollieren können.
  - Empirische Evidenz - wie etwa die Beobachtungen der Finanzmarktkrise vor etwa einem Jahrzehnt - zeigen, dass dies von der Realität weit entfernt ist.

3.2 Streuungsmaße und Risikomaße des Downside Risk

Risikomaße in der Praxis

- Anwendungsfehler:
  - Pufferfunktion gegen adverse Entwicklungen (z. B. Solvabilitätskapitalanforderung)
  - Steuerungsfunktion (z. B. Limit- und Schwellenwertsystem)
  - Vergleichsfunktion für Finanzpositionen, Portfolien oder Unternehmen
  - Bewertungsfunktion
- Kriterien für "gute"Risikomaße:
  - Ökonomische Eigenschaften: adäquate Berücksichtigung von Diversifikation, extremen Verlusten
  - Implementierung: umsetzbare Techniken für die statistische Schätzung von Risikomaßen

Risikomessung: Formalisierung

- Finanzpositionen:
  - X Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die den (diskontierten) Wert einer Finanzposition am Ende einer vorgegebenen Periode beschreibt
  - Voraussetzung: geeignete Integrierbarkeitsannahmen an X
  - Die Menge solcher Finanzpositionen wird mit $\mathcal{X}$ bezeichnet
- Die Risikomessung erfolgt bezüglich des statistischen Maßes $\mathbb{P}$ („real-world“), das die tatsächlichen Schwankungen widerspiegeln soll.
- Ein Risikomaß ist allgemein ein Funktional

$$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X) \tag{3.1}$$

  das einer Finanzposition X eine Risikokennzahl $\rho(X)$ zuordnet.

Streuungsmaße

- Variationskoeffizient: $cv = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$

Streuungsmaße

.1 4.2 4.3 4.4 4.5

- Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

  - Die Varianz quantifiziert die erwartete quadratische Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert.
  - Im Sinne der zweiseitigen Interpretation des Risikobegriffs werden Abweichungen nach oben und unten gleich behandelt.

- Standardabweichung (Volatilität):

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}$$

- Einseitige Standardabweichung (Semi-Standardabweichung):

$$\sigma_+(X) = \sqrt{\mathbb{E}[((\mathbb{E}[X] - X)^+)^2]} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_+(L) = \sqrt{\mathbb{E}[((L - \mathbb{E}[L])^+)^2]}$$

  - Im Gegensatz zur Varianz oder zur Standardabweichung werden bei einer Finanzposition X nur Unterschreitungen $X < \mathbb{E}[X]$ bzw. für eine Verlustvariable L nur Überschreitungen $L > \mathbb{E}[L]$ des Erwartungswertes berücksichtigt.

Momente

Obere und untere partielle Momente

.1 4.2 4.3 4.4 4.5

Die Gefahr einer Über- bzw. Unterschreitung einer vorgegebenen Verlustschwelle a messen die sogenannten Shortfall-Maße.

- Die oberen partiellen Momente (Upper Partial Moments) beziehen sich auf die Verlustvariable und gewichten die Abweichung mit einer Potenzfunktion:

$$\mathrm{UPM}_{k,a}(L) := \begin{cases} \mathbb{E}[((L-a)^+)^k] & \text{für } k > 0, \\ \mathbb{P}[L \geq a] & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

- Analog dazu sind die unteren partiellen Momente (Lower Partial Moments) bezogen auf die Finanzposition definiert:

$$\mathrm{LPM}_{k,a}(X) := \begin{cases} \mathbb{E}[((a-X)^+)^k] & \text{für } k > 0, \\ \mathbb{P}[X < a] & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

- Als Spezialfälle ergeben sich:
  - $k = 0$: Shortfall-Wahrscheinlichkeit zur Verlustschwelle a,
  - $k = 1$: mittlere Überschreitung bzw. Unterschreitung der Schwelle a,
  - $k = 2$: Shortfall-Varianz.

Value at Risk

Value at Risk $\lambda \in (0,1)$ einer Finanzposition X:

$$VAR_\lambda(X) := inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \lambda\} \tag{3.2}$$

- Der Parameter $\lambda \in (0,1)$ wird nahe 0 gewählt.
- Kleinster Geldbetrag („Risikokapital“), den man zu X hinzufügen muss, sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner oder gleich λ ausfällt.

Defizite:

- Extreme Verluste, die nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten, werden vom VaR völlig ausgeblendet.
- VaR setzt keine angemessenen Anreize für die Diversifikation

Mean Value at Risk: In der Praxis auf verwendet: $MVaR_\lambda(X) := VaR_\lambda(X - E(X))$
Ist Grundlage für die Definition der SCR unter SII

3.3 Axiomatische Theorie der Risikomaße

3.3.1 Risikomaße, Akzeptanzmenge und robuste Darstellung

Definition monetäres Risikomaß

Ein Funktional $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, falls die folgenden Eigenschaften bestehen:

- Inverse Monotonie: Ist $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, so gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$
- Geldinvarianz: Für jede reelle Zahl m gilt $\rho(X+m) = \rho(X) - m)$

Akzeptanzmenge eines monetären Risikomaßes

- Eine Position $X \in \mathcal{X}$ ist akzeptabel für ρ, wenn $\rho(X) \leq 0$.
- Die Menge $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\rho$ aller akzeptablen Positionen heißt Akzeptanzmenge: $\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$
- ρ ist eine Kapitalanforderung, d. h. $\rho(X) = inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\}$

Diversifikation

- Diversifikation ist eines der zentralen Prinzipien im Risikomanagement und in der Portfolioselektion.
- Um der Idee Rechnung zu tragen, dass Diversifikation das Risiko nicht erhöhen sollte, ist folgende Anforderung natürlich:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq max\{\rho(X), \rho(Y)\} \text{ für } X, Y \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \in (0,1) \tag{3.3}$$

- Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ is konvex.
- ρ ist ein konvexes Funktional $\mathcal{X}$:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \text{ für } X,Y \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \in (0,1) \quad (3.4)$$

Definition konvexes Risikomaß

- Ein monetäres Risikomaß ρ auf $\mathcal{X}$ heißt konvexes Risikomaß, falls es ein konvexes Funktional ist und damit Diversifikation nicht bestraft.
- Ein konvexes Risikomaß wird kohärent genannt, falls es zusätzlich positiv homogen ist, d. h. es gilt $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $\lambda \geq 0$

Robuste Darstellung konvexer Risikomaße

Ein konvexes Risikomaß ρ besitzt unter milden Voraussetzungen eine robuste Darstellung:

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_\rho} \{\mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha^{\min}(\mathbb{Q})\}$$

- $\mathcal{Q}_\rho$ Teilfamilie von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus der Menge $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega,\mathcal{F})$
- $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\cdot]$ Erwartungswert unter dem Maß $\mathbb{Q}$
- (minimale) Straffunktion (penalty function)

$$\alpha^{\min}(\mathbb{Q}) := \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X]$$

Verteilungsbasierte Risikomaße

Es sei nun $\mathbb{P}$ ein Referenzwahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega,\mathcal{F})$, ferner $\mathcal{X}$ ein linearer Raum von Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, z. B. $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathcal{X} = L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ für $1 \leq p < \infty$.

Definition (verteilungsbasiertes Risikomaß):

Ein monetäres Risikomaß ρ auf $\mathcal{X}$ heißt verteilungsbasiert (oder verteilungsinvariant), falls $\rho(X)$ nur von der Verteilung von X unter $\mathbb{P}$ abhängt, d. h. es gilt $\rho(X) = \rho(Y)$, falls X und Y unter $\mathbb{P}$ dieselbe Verteilung besitzen.

Existenz einer robusten Darstellung:

Für verteilungsbasierte konvexe Risikomaße existiert eine robuste Darstellung.

Value at Risk - Normalverteilung

- Formelsammlung: Ist X normalverteilt, so gilt

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[-X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma_\mathbb{P}(X) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[-X] + \Phi^{-1}(1-\lambda)\sigma_\mathbb{P}(X).$$

  Hierbei: Φ^{-1} Inverse der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung
- Herleitung - Rechenschema:
  - Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der V@R bestimmt durch
    $$\lambda = \mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0].$$
  - Hierbei gilt für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
    $$\mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = \mathbb{P}\left[Z \le \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}_\mathbb{P}[X]}{\sigma_\mathbb{P}(X)}\right] = \Phi\left(\frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}_\mathbb{P}[X]}{\sigma_\mathbb{P}(X)}\right).$$
  - Dies liefert:
    $$\Phi^{-1}(\lambda) = \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}_\mathbb{P}[X]}{\sigma_\mathbb{P}(X)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{V@R}_\lambda(X) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[-X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma_\mathbb{P}(X)$$
  - Die zweite Darstellung folgt wegen $\Phi^{-1}(1-\lambda) = -\Phi^{-1}(\lambda)$.

Average Value at Risk

Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1]$:

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha$$

Eigenschaften:

- Berücksichtigt im Gegensatz zum V@R per definitionem extreme Verluste
- $\mathrm{AV@R}_\lambda$ ist ein kohärentes Risikomaß mit robuster Darstellung
  $$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] \quad \text{mit } \mathcal{Q}_\lambda := \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid \tfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \le \tfrac{1}{\lambda}\}^3$$
- Wegen der Monotonie von $\alpha \mapsto \mathrm{V@R}_\alpha(X)$ gilt:
  $$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) \ge \mathrm{V@R}_\lambda(X).$$
- Für $\lambda = 1$ entspricht AV@R dem erwarteten Verlust $\mathbb{E}_\mathbb{P}[-X]$.

3.3.2 Tail Value ar Risk

3.3.3 Berechnung des erforderlichen Risikokapitals mit Risikomaßen

Quantifizierbare Risiken: Marktrisiken, Ausfallrisiken (Herausforderungen: Datenqualität, Abhängigkeiten, operationelle Risiken)
Qualitativ bewertete Risiken: Emerging Risks, Strategische Risiken (Bewertung auf Expertenschätzung)

Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$:

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathbb{E}_\mathbb{P}[-X \mid -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)]$$

Ökonomische Interpretation:

$\mathrm{TV@R}_\lambda(X)$ entspricht dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet.

3.3.4 Risikomessung unter SII

- Drei Säulen: Quantitative Anforderungen (Vt. Rückstellungen, SCR), Qualitative Anforderungen (ORSA-Prozess, Risikomanagementsystem), Berichterstattung (SFCR, ORSA-Bericht)
- Die Basiseigenmittel - definiert als Differenz von Assets und Liabilities gemäß Solvenzbilanz - werden mit E_0 bzw. E_1 bezeichnet.
  - Basiseigenmittel E_0 zu $t = 0$ sind deterministisch
  - Basiseigenmittel E_1 im Einjahreshorizont sind stochastisch
- Vorgabe: SCR muss ausreichend sein, um einem Ruin im Einjahreshorizont mit der Wahrscheinlichkeit $99,5\%$ vorzubeugen

SCR-Definition:

$$\widetilde{\mathrm{SCR}}(E_1) := \mathrm{V@R}_\lambda(E_1 - E_0)$$

Mit dieser Definition sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

$$\mathbb{P}[E_1 < 0] \leq \lambda \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \in \mathcal{A}_{\mathrm{V@R}_\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\mathrm{SCR}}(E_1) \leq E_0.$$

Hierbei ist $\mathcal{A}_{\mathrm{V@R}_\lambda} = \{X \mid \mathbb{P}[X < 0] \leq \lambda\}$ die Akzeptanzmenge von $\mathrm{V@R}_\lambda$.

-
- Mean Value at Risk der Basiseigenmittel E_1:

$$SCR(E_1) = VaR_{0,005}(E_1 - E(E_1)) \tag{3.5}$$

- Standardformel:
  - Modularer Aufbau: operationelles Risiko und Risikomodule „nichtlebensvt. Risiko“, „lebensvt. Risiko“, „krankenvt. Risiko“, „Marktrisiko“ und „Gegenparteiausfallrisiko“ der Basissolvabilitätskapitalanforderung
  - Risikoaggregation per Wurzelformel
- Internes Modell:

- Implementierung in komplexen Simulationsmodellen
- Genehmigung durch Aufsicht (BaFin) notwendig

Kapitel 4

Portfoliooptimierung

4.1 Nutzenoptimierung

4.1.1 Nutzenbasierte Portfoliooptimierung

Ausgangslage: Finanzpositionen

- Ein Investor hat das Ziel, ausgehend von einem Startkapital $v > 0$, den Wert des Vermögens zu einem Zeitpunkt T zu optimieren
- Weitere Kapitalzuführungen ider -entnahmen sind nicht vorgesehen
- Das Vermögen V zum Zeitpunkt T kann mit einer reellwertigen Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum identifiziert werden
- Für Investitionen steht eine Menge $\mathcal{X}$ solcher Positionen zur Auswahl

Präferenzordnung

- Die Präferenzordnung $\succ$ auf $\mathcal{X}$ sei über das Präferenzfunktional $\mathcal{U}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(X)]$ expliziert
- $X \succ Y \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(X)] > \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(Y)]$, $(X, Y \in \mathcal{X})$
- $\mathbb{P}$ ein Referenzwahrscheinlichkeitsmaß
- u eine Nutzenfunktion
- Annahme: risikoaverses Verhalten der Investoren
- Nutzenfunktion einer risikoaversen Person: $u : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x \to x(x)$, falls u strikt konkav und strikt wachsend auf S
- Um die Positionen in $\mathcal{X}$ zu realisieren kann der Investor:

  - geeignete Portfolios aus primären Finanzprodukten konstruieren
  - mit derivaten Produkten handeln

- vollständiger Markt: gleiche Menge erreichbarer Positionen mit beiden Fällen
- unvollständiger Markt: Derivate bieten mehr Flexibilität

4.2 Portfoliotheorie nach Markowitz

4.2.1 Grundlagen

- Ausgangspunkt: Universum aus n Finanztiteln
- Risikoebene: Diversifikation
- Risiko/Wert-Ebene: Rendite/Risiko-Dominanz und effiziente Portfolios
- Ein Portfolio mit Rendite R_1 dominiert ein Portfolio mit Rendite R_2, wenn entweder $Var(R_1) < Var(R_2)$ und $\mathbb{E}[R_1] \geq \mathbb{E}[R_2]$
  oder
  $\mathbb{E}[R_1] > \mathbb{E}[R_2]$ und $Var(R_1) \leq Var(R_2)$
- Portfolio EV-effizient, wenn es durch kein anderes Portfolio dominiert wird
- nur effiziente Portfolios können optimale Portfolios sein

Ausgangsdaten:

- R_i: Einperiodenrendite der Aktie i (Zufallsvariable) $(i = 1, \ldots, n)$
- x_i: anteilige Investition in Aktie i $(i = 1, \ldots, n)$

Die Portfoliorendite R_P ist dann gegeben durch

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Notationen für Erwartungswerte, Standardabweichungen und Korrelationen:

- Einzeltitelebene: $\mu_i = \mathbb{E}[R_i]$, $\sigma_i = \sigma(R_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$,
  $\rho_{ij} = \rho(R_i, R_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$
- Portfolioebene: $\mu_P = \mathbb{E}[R_P]$, $\sigma_P = \sigma(R_P)$

4.2.2 Effiziente Portfolios

Generelle Voraussetzung: Reguläre Kovarianzmatrix

Aufgabe: Minimiere die Zielfunktion

$$Z(\mathbf{x}) = \mathrm{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

unter den Nebenbedingungen

- $\mathbb{E}[R_P] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = r$ (Renditetarget)
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (Budgetrestriktion)
- $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ (gegebenenfalls Nichtnegativitätsbedingung)

- Fall 1: Short Sales Allowed, Lösung mit Lagrange-Ansatz, lokalen Extremwert der Lagrange-Funktion bestimmen
  - geometrischer Rand der Menge aller zulässigen Portfolios besteht aus den Punkten, die bezüglich eines fixierten Erwartungswerts eine minimale Varianz aufweisen
  - geometrischer Rand ist eine Wurzelfunktion (als Funktion von σ^2, bzw. der rechte Ast der Hyperbel (als Funktion von σ^2
  - der effiziente Rand entspricht dem oberen Ast der Kurve inklusive dem global varianzminimalen Portfolio
- Fall 2: No Short Sales, Quadratische Programmierung, i.A. keine analytische Lösung, numerische Verfahren

Alternative Formulierungen des Problems

- Formulierung 1: $Z_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \min!$
  Nebenbedingungen: $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} = r$, $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$
- Formulierung 2: $Z_2(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \max!$
  Nebenbedingung: $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$
- Formulierung 3: $Z_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \lambda\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \max!$
  Nebenbedingung: $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$

Vorausgesetzt wird dabei jeweils die Regularität der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$.

- Lagrange-Funktion für Formulierung 2:
  $L(x,\lambda) = tx^T\mu - \frac{1}{2}x^TCx - \lambda(x^Te - 1)$
- $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{1}{\alpha_1}(\mu - \mu_0)^2$
- $\mu = \mu_0 \pm \sqrt{\alpha_1(\sigma^2 - \sigma_0^2)}$

4.2.3 Portfolioselektion

- Trade-Off zwischen Risiko und Rendite, d.h. Selektion einer charakteristischen (σ,μ)-Position auf dem effizienten Rand
- Spezifizierung einer EV-Präferenzfunktion: $\mathcal{U}(R) = H(\mathbb{E}[R], \sigma(R))$
- Optimierungsproblem: $H(\mu,\sigma) = V(x_1,...,x_n) \to max$, Nebenbed.: $(\sigma,\mu) \in M, (x_1,...,x_n) \in D$ mit M Menge der zulässigen (μ,σ)-Positionen bzw. D die Menge der zulässigen Investmentgewichte

4.2.4 Probleme des Markowitz-Ansatzes

- Markowitz-Basismodell beruht auf Risikomaß Standardabweichung (vor allem für symmetrische Verteilungen, in der Praxis aber oft signifikante Schiefe vorhanden)
- Optimierte Portfolios besitzen oftmals extreme Allokationen (hohe Leerverkaufspositionen oder geringe Diversifikation, optimale Portfolios übergewichten Assets, die hohe geschätzte erwartete Renditen und geringe Varianzen aufweisen)
- Optimierung sehr sensitiv bezüglich Inputdaten

4.3 Alternative Ansätze der Portfoliooptimierung

- Markowitz-Modell: Standardabweichung als Risikomaß
- jetzt andere Risikomaße verwenden
- Value at Risk:
  - nicht subadditiv
  - Portfoliorisiko $V@R_\lambda(R_P(x))$ i.A. keine konvexe Funktion
- Average Value at Risk
  - lageabhängiges Risikomaß (auch Mean-AV@R und Mean-V@R in der Literatur betrachtet)

– Generelle Form: $AV@R_\lambda(R_P(x)) \to min$

– Nebenbedingungen:

1. $E[R_P(x)] = r$
2. $x^T e = 1$
3. $x \geq 0$

– $AV@R_\lambda(X) = V@R_\lambda(X) + \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(-X - V@R_\lambda(X))^+]$

4.4 Asset Pricing

4.4.1 Portfoliotheorie mit sicherer Anlage

Erweiterung des Anlagespektrums

- Risikolose Anlage (Renditevarianz = 0) zum sicheren Zins r_0
- vollkommener Kapitalmarkt: zum Zins r_0 können beliebige Beträge angelegt oder aufgenommen werden

Elementare Analyse

- fixiere riskantes Portfolio $P \in M$, d.h. Portfolio aus der Menge der durch Aktienmischung realisierbaren Portfolios
- Betrachte Portfolio, das z.T. in sichere Anlagen investiert und zum Teil in P
- R_P ist die Rendite von P
- $0 \leq x \leq \infty$ anteilige Investition in P
- $-\infty < 1 - x \leq 1$ anteilige in Investition in sichere Anlage
- Rendite gesamt: $R = xR_P + (1-x)r_0$
- $\mu = r_0 + x(\mu_P - r_0)$
- $\sigma^2 = x^2\sigma_P^2$

$\Rightarrow$ $\mu = r_0 + \frac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}\sigma$

- Menge aller effizienten bzw. optimalen Portfolios ist eine Gerade (Tangentialgerade an den bisherigen effizienten Rand

4.4.2 Capital Asset Pricing Model

Prämissen des CAPM

- Fall $r_0 < \mu_0$
- Es gibt m EV-Investoren mit Wertpapierbudgets $V_i > 0$, $V = \sum_{i=1}^{m} V_i$
- alle Investoren schätzen r_0, $\mathbb{E}[R_i]$, $Var(R_i)$ und $Cov(R_i, R_j)$ gleich ein
- Marktgleichgewicht (Angebot = Nachfrage)

Marktportfolio

- jeder Investor erwirbt EV-effizientes Portfolio, Anteil λ_i des Budgets V_i in Tangentialportfolio, Rest $(1-\lambda_i)$ in sichere Anlage
- Nachfrageportfolio des Marktes nach Aktien: $(\lambda^T V)x_T$
- Angebotsportfolio: alle Aktien, die zu $t = 0$ zu Marktwerten bewertet werden

Definition (Marktportfolio):

Ist P_i der Marktwert, der in Aktie i, $i = 1, \ldots, n$, investiert ist, und bezeichnet $P := P_1 + \ldots + P_n$ den Gesamtmarktwert, so ist das Marktportfolio M definiert durch die Investmentgewichte

$$\mathbf{x}_M = (P_1/P, \ldots, P_n/P)^\top .$$

Notation: R_M=Rendite Marktportfolio

- Die Bedingung für ein Marktgleichgewicht lautet somit formal

$$(\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{V})\mathbf{x}_T = P\mathbf{x}_M$$

  - Da $\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{V} = \sum \lambda_i V_i$ der in das Tangentialportfolio T angelegte Geldbetrag ist und P den Gesamtmarktwert in M darstellt, können sich die Vektoren $\mathbf{x}_T$ und $\mathbf{x}_M$ nur um einen Skalierungsfaktor unterscheiden. Da jedoch beide Investmentvektoren darstellen, gilt sogar $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_M$ and entsprechend $P = \sum \lambda_i V_i$.
- Fazit: Im Marktgleichgewicht sind Angebot und Nachfrage ausgeglichen, d. h. das Tangentialportfolio T ist identisch mit dem „Marktportfolio“ M.

CAPM-Analytik

Mit den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts sowie $T = M$ erhalten wir:

1) Effizienter Rand (Kapitalmarktlinie)

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R)$$

2) (Wertpapiermarktlinie)

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \beta(\mathbb{E}[R_M] - r_0),$$

wobei $\beta = \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ (Beta-Faktor)

Alternativer direkter Nachweis der Wertpapiermarktlinie: Maximiere die Sharpe Ratio über alle rein riskanten Portfolios.

Hauptresultate des CAPM

- Menge aller optimalen Portfolios R (Kapitalmarktlinie): $\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M]-r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R)$
- Menge aller optimalen Portfolios R (Wertpapiermarktlinie): $\mathbb{E}[R] = r_0 + \beta_R(\mathbb{E}[R_M] - r_0)$ mit $\beta_R = \frac{Cov(R,R_M)}{Var(R_M)}$
- Preisgleichung $P = \frac{\mathbb{E}[V]}{1+r_0+\beta(\mathbb{E}[R_M]-r_0)}$
- P der anfänglichen Preisen eines Titels mit zufallsabhängigem Endwert V und korrespondierender Einperiodenrendite R
- r_0 sicherer Zins
- R_M Rendite des Marktportfolios