Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Portfoliooptimierung

1.1 Nutzenoptimierung

1.1.1 Nutzenbasierte Portfoliooptimierung

Ausgangslage: Finanzpositionen

- Ein Investor hat das Ziel, ausgehend von einem Startkapital $v > 0$, den Wert des Vermögens zu einem Zeitpunkt T zu optimieren
- Weitere Kapitalzuführungen ider -entnahmen sind nicht vorgesehen
- Das Vermögen V zum Zeitpunkt T kann mit einer reellwertigen Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum identifiziert werden
- Für Investitionen steht eine Menge $\mathcal{X}$ solcher Positionen zur Auswahl

Präferenzordnung

- Die Präferenzordnung $\succ$ auf $\mathcal{X}$ sei über das Präferenzfunktional $\mathcal{U}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(X)]$ expliziert
- $X \succ Y \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(X)] > \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(Y)]$, $(X, Y \in \mathcal{X})$
- $\mathbb{P}$ ein Referenzwahrscheinlichkeitsmaß
- u eine Nutzenfunktion
- Annahme: risikoaverses Verhalten der Investoren
- Nutzenfunktion einer risikoaversen Person: $u : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x \to x(x)$, falls u strikt konkav und strikt wachsend auf S
- Um die Positionen in $\mathcal{X}$ zu realisieren kann der Investor:

  - geeignete Portfolios aus primären Finanzprodukten konstruieren
  - mit derivaten Produkten handeln
- vollständiger Markt: gleiche Menge erreichbarer Positionen mit beiden Fällen
- unvollständiger Markt: Derivate bieten mehr Flexibilität

1.2 Portfoliotheorie nach Markowitz

1.2.1 Grundlagen

- Ausgangspunkt: Universum aus n Finanztiteln
- Risikoebene: Diversifikation
- Risiko/Wert-Ebene: Rendite/Risiko-Dominanz und effiziente Portfolios
- Ein Portfolio mit Rendite R_1 dominiert ein Portfolio mit Rendite R_2, wenn entweder
  $Var(R_1) < Var(R_2)$ und $\mathbb{E}[R_1] \geq \mathbb{E}[R_2]$
  oder
  $\mathbb{E}[R_1] > \mathbb{E}[R_2]$ und $Var(R_1) \leq Var(R_2)$
- Portfolio EV-effizient, wenn es durch kein anderes Portfolio dominiert wird
- nur effiziente Portfolios können optimale Portfolios sein

Ausgangsdaten:

- R_i: Einperiodenrendite der Aktie i (Zufallsvariable) $(i = 1, \ldots, n)$
- x_i: anteilige Investition in Aktie i $(i = 1, \ldots, n)$

Die Portfoliorendite R_P ist dann gegeben durch

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Notationen für Erwartungswerte, Standardabweichungen und Korrelationen:

- Einzeltitelebene: $\mu_i = \mathbb{E}[R_i]$, $\sigma_i = \sigma(R_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$,
  $\rho_{ij} = \rho(R_i, R_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$
- Portfolioebene: $\mu_P = \mathbb{E}[R_P]$, $\sigma_P = \sigma(R_P)$

1.2.2 Effiziente Portfolios

Generelle Voraussetzung: Reguläre Kovarianzmatrix

Aufgabe: Minimiere die Zielfunktion

$$Z(\mathbf{x}) = \mathrm{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

unter den Nebenbedingungen

- $\mathbb{E}[R_P] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = r$ (Renditetarget)
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (Budgetrestriktion)
- $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ (gegebenenfalls Nichtnegativitätsbedingung)

- Fall 1: Short Sales Allowed, Lösung mit Lagrange-Ansatz, lokalen Extremwert der Lagrange-Funktion bestimmen
  - geometrischer Rand der Menge aller zulässigen Portfolios besteht aus den Punkten, die bezüglich eines fixierten Erwartungswerts eine minimale Varianz aufweisen
  - geometrischer Rand ist eine Wurzelfunktion (als Funktion von σ^2, bzw. der rechte Ast der Hyperbel (als Funktion von σ^2
  - der effiziente Rand entspricht dem oberen Ast der Kurve inklusive dem global varianzminimalen Portfolio
- Fall 2: No Short Sales, Quadratische Programmierung, i.A. keine analytische Lösung, numerische Verfahren

Alternative Formulierungen des Problems

- Formulierung 1: $Z_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{min!}$
  Nebenbedingungen: $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} = r$, $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$
- Formulierung 2: $Z_2(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{max!}$
  Nebenbedingung: $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$
- Formulierung 3: $Z_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{max!}$
  Nebenbedingung: $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$

Vorausgesetzt wird dabei jeweils die Regularität der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$.

- Lagrange-Funktion für Formulierung 2:
  $L(x,\lambda) = tx^T\mu - \frac{1}{2}x^TCx - \lambda(x^Te - 1)$

Fallstudie?

1.2.3 Portfolioselektion