Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Portfoliooptimierung

1.1 Nutzenoptimierung

1.1.1 Nutzenbasierte Portfoliooptimierung

Ausgangslage: Finanzpositionen

- Ein Investor hat das Ziel, ausgehend von einem Startkapital $v > 0$, den Wert des Vermögens zu einem Zeitpunkt T zu optimieren
- Weitere Kapitalzuführungen ider -entnahmen sind nicht vorgesehen
- Das Vermögen V zum Zeitpunkt T kann mit einer reellwertigen Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum identifiziert werden
- Für Investitionen steht eine Menge $\mathcal{X}$ solcher Positionen zur Auswahl

Präferenzordnung

- Die Präferenzordnung $\succ$ auf $\mathcal{X}$ sei über das Präferenzfunktional $\mathcal{U}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(X)]$ expliziert
- $X \succ Y \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(X)] > \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x(Y)]$, $(X, Y \in \mathcal{X})$
- $\mathbb{P}$ ein Referenzwahrscheinlichkeitsmaß
- u eine Nutzenfunktion
- Annahme: risikoaverses Verhalten der Investoren
- Nutzenfunktion einer risikoaversen Person: $u : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x \to x(x)$, falls u strikt konkav und strikt wachsend auf S
- Um die Positionen in $\mathcal{X}$ zu realisieren kann der Investor:

  - geeignete Portfolios aus primären Finanzprodukten konstruieren
  - mit derivaten Produkten handeln

- vollständiger Markt: gleiche Menge erreichbarer Positionen mit beiden Fällen
- unvollständiger Markt: Derivate bieten mehr Flexibilität

1.2 Portfoliotheorie nach Markowitz

1.2.1 Grundlagen

- Ausgangspunkt: Universum aus n Finanztiteln
- Risikoebene: Diversifikation
- Risiko/Wert-Ebene: Rendite/Risiko-Dominanz und effiziente Portfolios
- Ein Portfolio mit Rendite R_1 dominiert ein Portfolio mit Rendite R_2, wenn entweder $Var(R_1) < Var(R_2)$ und $\mathbb{E}[R_1] \geq \mathbb{E}[R_2]$
  oder
  $\mathbb{E}[R_1] > \mathbb{E}[R_2]$ und $Var(R_1) \leq Var(R_2)$
- Portfolio EV-effizient, wenn es durch kein anderes Portfolio dominiert wird
- nur effiziente Portfolios können optimale Portfolios sein

Ausgangsdaten:

- R_i: Einperiodenrendite der Aktie i (Zufallsvariable) $(i = 1, \ldots, n)$
- x_i: anteilige Investition in Aktie i $(i = 1, \ldots, n)$

Die Portfoliorendite R_P ist dann gegeben durch

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Notationen für Erwartungswerte, Standardabweichungen und Korrelationen:

- Einzeltitelebene: $\mu_i = \mathbb{E}[R_i]$, $\sigma_i = \sigma(R_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$,
  $\rho_{ij} = \rho(R_i, R_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$
- Portfolioebene: $\mu_P = \mathbb{E}[R_P]$, $\sigma_P = \sigma(R_P)$

1.2.2 Effiziente Portfolios

Generelle Voraussetzung: Reguläre Kovarianzmatrix

Aufgabe: Minimiere die Zielfunktion

$$Z(\mathbf{x}) = \mathrm{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

unter den Nebenbedingungen

- $\mathbb{E}[R_P] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = r$ (Renditetarget)
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (Budgetrestriktion)
- $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ (gegebenenfalls Nichtnegativitätsbedingung)

- Fall 1: Short Sales Allowed, Lösung mit Lagrange-Ansatz, lokalen Extremwert der Lagrange-Funktion bestimmen
  - geometrischer Rand der Menge aller zulässigen Portfolios besteht aus den Punkten, die bezüglich eines fixierten Erwartungswerts eine minimale Varianz aufweisen
  - geometrischer Rand ist eine Wurzelfunktion (als Funktion von σ^2, bzw. der rechte Ast der Hyperbel (als Funktion von σ^2
  - der effiziente Rand entspricht dem oberen Ast der Kurve inklusive dem global varianzminimalen Portfolio
- Fall 2: No Short Sales, Quadratische Programmierung, i.A. keine analytische Lösung, numerische Verfahren

Alternative Formulierungen des Problems

- Formulierung 1: $Z_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{min!}$
  Nebenbedingungen: $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} = r$, $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$
- Formulierung 2: $Z_2(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{max!}$
  Nebenbedingung: $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$
- Formulierung 3: $Z_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \lambda\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{max!}$
  Nebenbedingung: $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$

Vorausgesetzt wird dabei jeweils die Regularität der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$.

- Lagrange-Funktion für Formulierung 2:
  $L(x,\lambda) = tx^T\mu - \frac{1}{2}x^TCx - \lambda(x^Te-1)$
- $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{1}{\alpha_1}(\mu-\mu_0)^2$
- $\mu = \mu_0 \pm \sqrt{\alpha_1(\sigma^2-\sigma_0^2)}$

1.2.3 Portfolioselektion

- Trade-Off zwischen Risiko und Rendite, d.h. Selektion einer charakteristischen (σ,μ)-Position auf dem effizienten Rand
- Spezifizierung einer EV-Präferenzfunktion: $\mathcal{U}(R) = H(\mathbb{E}[R], \sigma(R))$
- Optimierungsproblem: $H(\mu,\sigma) = V(x_1,...,x_n) \to max$, Nebenbed.: $(\sigma,\mu) \in M, (x_1,...,x_n) \in D$ mit M Menge der zulässigen (μ,σ)-Positionen bzw. D die Menge der zulässigen Investmentgewichte

1.2.4 Probleme des Markowitz-Ansatzes

- Markowitz-Basismodell beruht auf Risikomaß Standardabweichung (vor allem für symmetrische Verteilungen, in der Praxis aber oft signifikante Schiefe vorhanden)
- Optimierte Portfolios besitzen oftmals extreme Allokationen (hohe Leerverkaufspositionen oder geringe Diversifikation, optimale Portfolios übergewichten Assets, die hohe geschätzte erwartete Renditen und geringe Varianzen aufweisen)
- Optimierung sehr sensitiv bezüglich Inputdaten

1.3 Alternative Ansätze der Portfoliooptimierung

- Markowitz-Modell: Standardabweichung als Risikomaß
- jetzt andere Risikomaße verwenden
- Value at Risk:
  - nicht subadditiv
  - Portfoliorisiko $V@R_\lambda(R_P(x))$ i.A. keine konvexe Funktion
- Average Value at Risk
  - lageabhängiges Risikomaß (auch Mean-AV@R und Mean-V@R in der Literatur betrachtet)

- Generelle Form: $AV@R_{\lambda}(R_P(x)) \to min$
- Nebenbedingungen:

1. $E[R_P(x)] = r$
2. $x^T e = 1$
3. $x \geq 0$

- $AV@R_{\lambda}(X) = V@R_{\lambda}(X) + \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(-X - V@R_{\lambda}(X))^+]$

1.4 Asset Pricing

1.4.1 Portfoliotheorie mit sicherer Anlage

Erweiterung des Anlagespektrums

- Risikolose Anlage (Renditevarianz = 0) zum sicheren Zins r_0
- vollkommener Kapitalmarkt: zum Zins r_0 können beliebige Beträge angelegt oder aufgenommen werden

Elementare Analyse

- fixiere riskantes Portfolio $P \in M$, d.h. Portfolio aus der Menge der durch Aktienmischung realisierbaren Portfolios
- Betrachte Portfolio, das z.T. in sichere Anlagen investiert und zum Teil in P
- R_P ist die Rendite von P
- $0 \leq x \leq \infty$ anteilige Investition in P
- $-\infty < 1 - x \leq 1$ anteilige in Investition in sichere Anlage
- Rendite gesamt: $R = xR_P + (1-x)r_0$
- $\mu = r_0 + x(\mu_P - r_0)$
- $\sigma^2 = x^2\sigma_P^2$

$\Rightarrow$ $\mu = r_0 + \frac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}\sigma$

- Menge aller effizienten bzw. optimalen Portfolios ist eine Gerade (Tangentialgerade an den bisherigen effizienten Rand

1.4.2 Capital Asset Pricing Model

Prämissen des CAPM

- Fall $r_0 < \mu_0$
- Es gibt m EV-Investoren mit Wertpapierbudgets $V_i > 0$, $V = \sum_{i=1}^{m} V_i$
- alle Investoren schätzen r_0, $\mathbb{E}[R_i]$, $Var(R_i)$ und $Cov(R_i, R_j)$ gleich ein
- Marktgleichgewicht (Angebot = Nachfrage)

Marktportfolio

- jeder Investor erwirbt EV-effizientes Portfolio, Anteil λ_i des Budgets V_i in Tangentialportfolio, Rest $(1-\lambda_i)$ in sichere Anlage
- Nachfrageportfolio des Marktes nach Aktien: $(\lambda^T V)x_T$
- Angebotsportfolio: alle Aktien, die zu $t = 0$ zu Marktwerten bewertet werden

Definition (Marktportfolio):

Ist P_i der Marktwert, der in Aktie i, $i = 1, \ldots, n$, investiert ist, und bezeichnet $P := P_1 + \ldots + P_n$ den Gesamtmarktwert, so ist das Marktportfolio M definiert durch die Investmentgewichte

$$\mathbf{x}_M = (P_1/P, \ldots, P_n/P)^\top.$$

Notation: R_M=Rendite Marktportfolio

- Die Bedingung für ein Marktgleichgewicht lautet somit formal

$$(\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{V})\mathbf{x}_T = P\mathbf{x}_M$$

  - Da $\boldsymbol{\lambda}^\top\ \mathbf{V} = \sum \lambda_i V_i$ der in das Tangentialportfolio T angelegte Geldbetrag ist und P den Gesamtmarktwert in M darstellt, können sich die Vektoren $\mathbf{x}_T$ und $\mathbf{x}_M$ nur um einen Skalierungsfaktor unterscheiden. Da jedoch beide Investmentvektoren darstellen, gilt sogar $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_M$ and entsprechend $P = \sum \lambda_i V_i$.
- Fazit: Im Marktgleichgewicht sind Angebot und Nachfrage ausgeglichen, d. h. das Tangentialportfolio T ist identisch mit dem „Marktportfolio“ M.

CAPM-Analytik

Mit den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts sowie $T = M$ erhalten wir:

1) Effizienter Rand (Kapitalmarktlinie)

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R)$$

2) (Wertpapiermarktlinie)

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \beta(\mathbb{E}[R_M] - r_0),$$

wobei $\beta = \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ (Beta-Faktor)

Alternativer direkter Nachweis der Wertpapiermarktlinie: Maximiere die Sharpe Ratio über alle rein riskanten Portfolios.

Hauptresultate des CAPM

- Menge aller optimalen Portfolios R (Kapitalmarktlinie): $\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M]-r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R)$
- Menge aller optimalen Portfolios R (Wertpapiermarktlinie): $\mathbb{E}[R] = r_0 + \beta_R(\mathbb{E}[R_M] - r_0)$ mit $\beta_R = \frac{Cov(R,R_M)}{Var(R_M)}$
- Preisgleichung $P = \frac{\mathbb{E}[V]}{1+r_0+\beta(\mathbb{E}[R_M]-r_0)}$
- P der anfänglichen Preisen eines Titels mit zufallsabhängigem Endwert V und korrespondierender Einperiodenrendite R
- r_0 sicherer Zins
- R_M Rendite des Marktportfolios