

Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen interner Modelle im Kompositbereich	2
2	Bruttomodellierung (inkl. Katastrophenschäden)	4
2.1	Grundlagen	4
2.1.1	Zielgrößen und Gestalt der Ergebnisse	4
2.1.2	Definition des Prämienrisikos	5
2.1.3	Schadenmodellierung	7
2.1.4	Schadenmodellierung (excl. CAT)	8
2.2	Modellierung von Katastrophenschäden	9
2.2.1	Charakterisierung von Katastrophenschadenverteilungen	10
2.2.2	Modellierungsansätze für Katastrophenschäden	11
2.2.3	Explizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze	12
2.2.4	Implizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze	13

Kapitel 1

Grundlagen interner Modelle im Kompositbereich

Definition eines Unternehmensmodell

Bei einem internen Risikomodell handelt es sich um ein stochastisches Modell, das mittels stochastischer Verfahren messbare Aktiv- und Passivrisiken der betrachteten Gesellschaften abbildet.

Dabei sollte es über die unternehmensindividuelle Modellierung der stochastischen Geschäftsgrößen die signifikanten finanziellen Auswirkungen konsistent quantifizieren und Abhängigkeitsstrukturen zwischen alle Risikogrößen berücksichtigen.

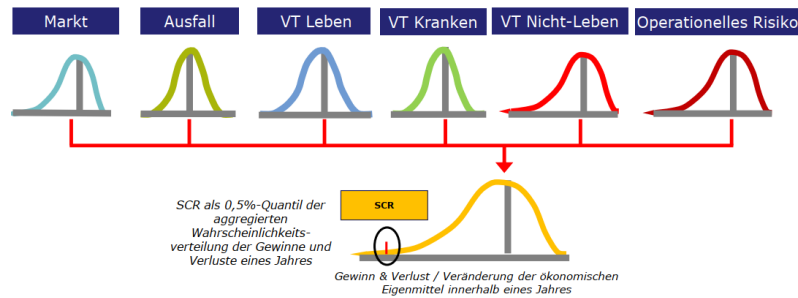
Zielgrößen sind die Gesamtverteilung der Geschäftsergebnisse sowie die Berechnung des benötigten Risikokapitals in einer Marktwertsicht (Anfalljahressicht).

Standardformel

- Anwendung vorgegebener Stressparameter / Risikofaktoren / Szenarien pro Einzelmodul (jeweils kalibriert auf den 200-Jahresstress) ergibt Einzel-SCR
- Jeweils Ein-Punkt-Betrachtung aller Risiken (Value-at-Risk Ansatz)
- Anschließende Aggregation der Einzel-SCRs mit der Wurzelformel anhand von vorgegebenen Korrelationsparametern.

Modellierung mit einem stochastischen Unternehmensmodell

- Simulationsbasiert: Hohe Anzahl an Simulationen erforderlich
- separate komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung per Risiko
- Beliebige Risikomaße anwendbar - neben VaR auch Expected Shortfall

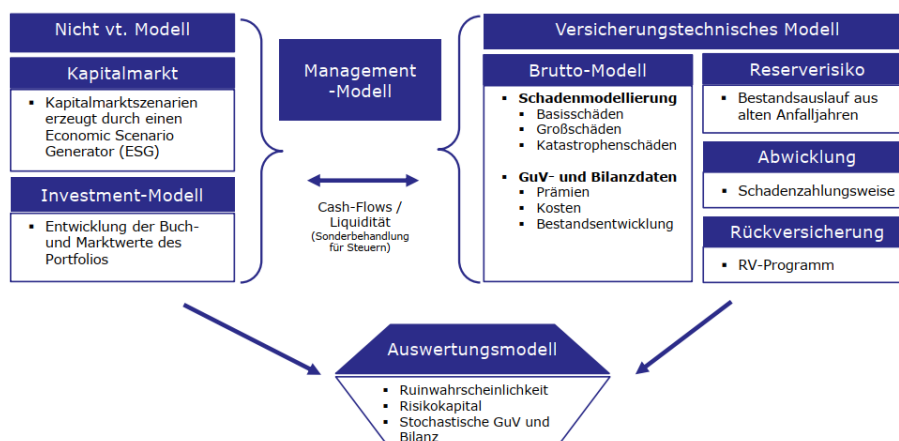


Definitionen

Ausgangspunkt: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ Simulationswerte $(^{(1)}X, ^{(2)}X, \dots, ^{(n)}X)$ einer Verlustvariable X sowie das Sicherheitsniveau $\alpha \in]0; 1[$. Weiterhin bezeichne $m := \lfloor n \cdot (1 - \alpha) \rfloor$ die Gaußklammer von $n \cdot (1 - \alpha)$ und $(^{(1 \downarrow n)}X, ^{(2 \downarrow n)}X, \dots, ^{(n \downarrow n)}X)$ die obere Ordnungsstatistik mit $(^{(1 \downarrow n)}X \geq ^{(2 \downarrow n)}X \geq \dots \geq ^{(n \downarrow n)}X$

<p>Schätzer für den Value-at-Risk $VaR_\alpha(X)$</p>	<p>Der $VaR_\alpha(X)$ zum Niveau α wird konservativ geschätzt durch den minimalen Verlust, der in den $m = \lfloor n \cdot (1 - \alpha) \rfloor$ schlechtesten Szenarien entsteht, d.h.</p> $\widehat{VaR}_{\alpha,n}(X) := ^{(m \downarrow n)}X$ <p>Eine alternative, weniger konservative Wahl bestünde in der Interpolation zwischen dem m-schlechtesten Wert $(^{(m \downarrow n)}X$ und $m + 1$-schlechtesten Wert $(^{(m+1 \downarrow n)}X$.</p>
<p>Schätzer für den Tail-Value at Risk</p>	$\widehat{TailVaR}_{\alpha,n}(X) := \frac{\sum_{k=1}^n ^{(k)}X \cdot \mathbb{I}_{[\widehat{VaR}_{\alpha,n}(X); \infty[} (^{(k)}X)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{[\widehat{VaR}_{\alpha,n}(X); \infty[} (^{(k)}X)}$
<p>Schätzer für den Expected Shortfall $ES_\alpha(X)$</p>	<p>Der $ES_\alpha(X)$ zum Niveau α wird geschätzt durch den mittleren Verlust, der in den $m = \lfloor n \cdot (1 - \alpha) \rfloor$ schlechtesten Szenarien entsteht, d.h.</p> $\widehat{ES}_{\alpha,n}(X) := \frac{\sum_{k=1}^m (^{(k \downarrow n)}X)}{m}$ <p>Es gilt ferner: $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{ES}_{\alpha,n}(X) = ES_\alpha(X)$ \mathbb{P}-fast sicher.</p>

Struktur eines DFA-Modells (Dynamische Finanzanalyse in S/U)



Kapitel 2

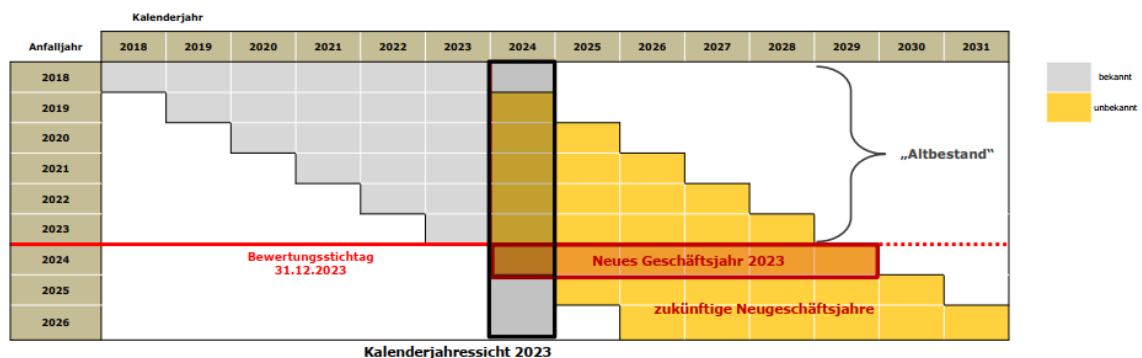
Bruttomodellierung (inkl. Katastrophenschäden)

2.1 Grundlagen

2.1.1 Zielgrößen und Gestalt der Ergebnisse

Bei der Betrachtung des Versicherten-/ Schadenbestands lassen sich zwei Zeithorizonte bzw. Sichtweisen unterscheiden, die zu unterschiedlichen Risikodefinitionen führen:

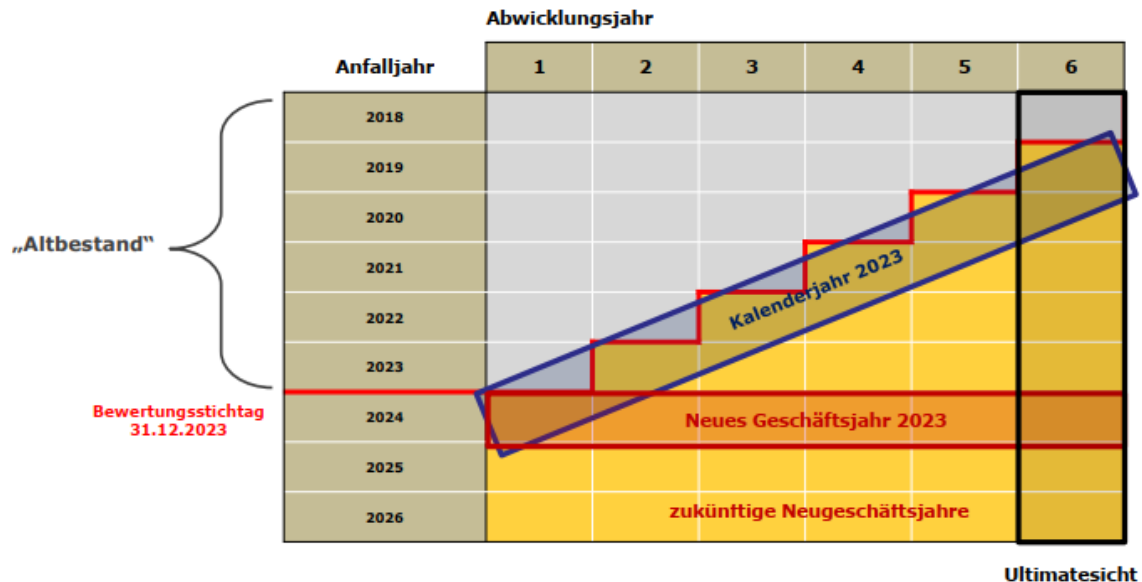
Kalenderjahressicht



- Neugeschäftsentwicklung im kommenden Kalenderjahr (Zahlungen + ausgehende Reserven)
- Abwicklung des Altbestands im kommenden Kalenderjahr
- Risikohorizont von Solvency II: Bemessungsgrundlage für die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Kalenderjahres Ruin zu erleiden
- Teilweise auch längere Zeithorizonte

- Mögliche Verwendungszwecke: Berechnung des regulatorischen SCR_s (bei internem Modell) bzw. Gesamtsolvabilitätsbedarf, Limitsysteme, Risikomarge für vt. Rückstellungen

Ultimatesicht



- Betrachtung der Ergebnisgrößen und damit verbundener Unsicherheiten über die komplette Abwicklungsdauer bis zum Endschadenstand = Ultimate auf einer Anfalljahresbasis
- resultiert in "natürlicher" Betrachtung der vt. Risiken
- entspricht nicht dem Risikohorizont, wie in SII für SCR vorgibt
- Mögliche Verwendungszwecke: Profitabilitätsmessung, Rückversicherungsanalyse, Risikozuschläge für Tarifierung

2.1.2 Definition des Prämienrisikos

Das Prämienrisiko

- resultiert aus der Unsicherheit / Volatilität in Bezug auf Prämien, Schaden und Kosten aus zukünftiger Risikotragung
- bezieht sich somit nur auf diejenigen Schäden, die innerhalb des modellierten Neugeschäftsjahres (Anfalljahressicht) anfallen

Das ultimative Prämienrisiko (synonym: Zeichnungsrisiko) bezeichnet das Risiko, dass die Prämien des Neugeschäftsjahres nicht ausreichen, um die zugehörigen Schäden und Kosten bis zur vollständigen Abwicklung zu decken.

Definition

Das (nominale) Anfalljahresergebnis T (= Technical Result) des Neugeschäftsjahres wird definiert als: $T := P - E - U$, mit

P: verdiente Prämie des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung

E: Kosten des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung

U: Endschadenaufwand des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung

Das Anfalljahresergebnis T ist eine Gewinnvariable:

$T > 0$ ist äquivalent zu $P > E + U$ und bedeutet einen zukünftigen Gewinn

während $T < 0 \Leftrightarrow P < E + U$ einen zukünftigen Verlust entspricht.

Alternative Definition: ultimative Prämienrisiko (synonym: Zeichnungsrisiko) bezeichnet das Risiko, dass das Anfalljahresergebnis des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung negativ ist.

Frage: Sollte man das ultimative Prämienrisiko anhand des Anfalljahresergebnisses vor oder nach Zentrierung, d.h. vor oder nach Abzug des Mittelwerts, messen?

U.a. abhängig vom Verwendungszweck der Ergebnisse:

- Liegt Fokus auf Auswirkungen auf die Kapitalsituation?
- Sind Erträge und Verluste aus zukünftigen Neugeschäft in Eigenmitteln enthalten?
- Primär Darstellung Ergebnisvolatilität?
- Weitere Überlegungen:
 - Das erwartete Ergebnis (= Mittelwert der Simulationen) entspricht nicht zwingend dem geplanten Ergebnis
 - Bei hochprofitablem Geschäft ist ohne Zentrierung des originären Anfalljahresergebnisses bei bestimmten Risikomaßen (Bsp: VaR) sogar ein negatives Risikokapital möglich.

Ergebnisgrößen für das Prämienrisiko:

- Ergebniskomponenten:
 - Verdiente Prämie: i.d.R. fix, bei mehrjähriger Projektion ist Prämienzyklus zu berücksichtigen
 - Kosten: getrennt nach Vertrieb, Regulierung und Verwaltung

- Schäden: stochastische Modellierung, zwecks genauer Abbildung der Rückversicherungsstruktur und Modellierung der spartenspezifischen Schadenvolatilität erfolgt Trennung nach Schadentyp (Einzelne Großschäden, Einzelne Ereignisse)
- Segmentierung/ Modellierungstiefe:
 - Aufteilung in HUK und Sach
 - Bsp. HUK: Kasko, Haftpflicht, Unfall
 - Bsp. Sach: VGV, Feuerindustrie

2.1.3 Schadenmodellierung

Trennung der Schadentypen: Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden

Basisschäden

- hohe Schadenfrequenz und geringe Schadenhöhe
- Simulation als Aggregat
- Parametrisierung auf Basis eigener Schadenerfahrung

Großschäden

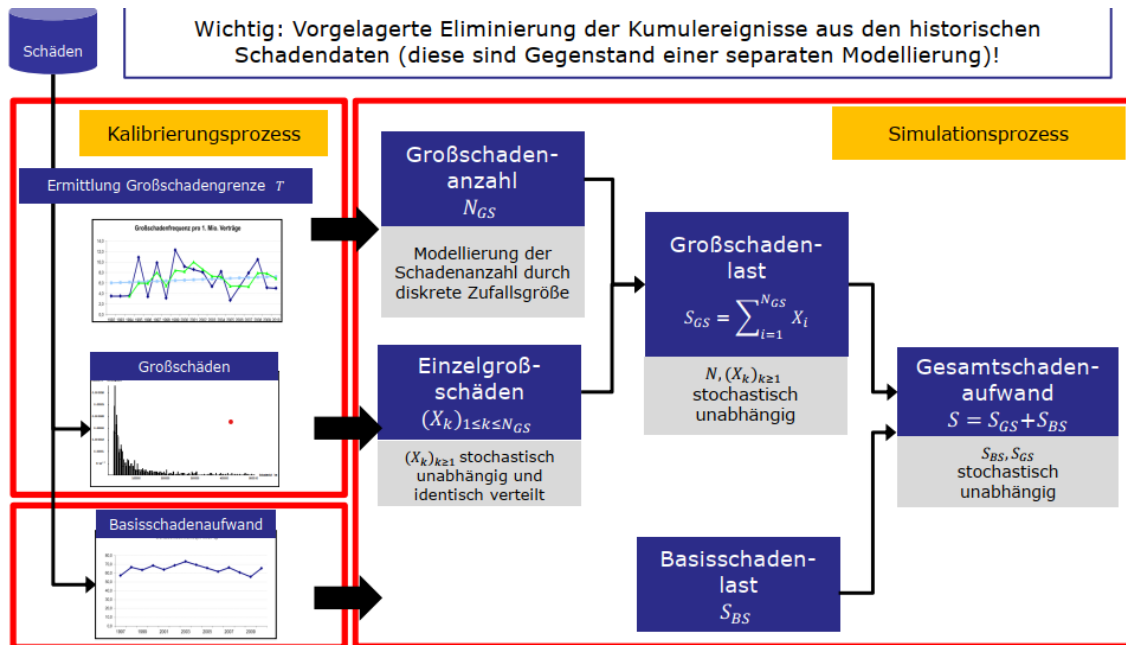
- Schäden oberhalb spezifischen Schwellenwerts
- geringe Frequenz, große Schadenhöhe
- Modellierung: Einzelbasis nach dem kollektiven Modell
- Parametrisierung auf Basis eigener Schadenerfahrung

Katastrophenschäden

- sehr niedrige Eintrittswahrscheinlichkeit, extreme Schadenhöhe
- Trennung nach Naturgefahren, Man-Made Gefahren, sonstiges wie Pandemien
- Charakteristika Naturgefahren: Treffen größere Region, Ereignisschaden setzt sich aus vielen kleinen Einzelschäden zusammen, Schäden betreffen viele Sparten gleichzeitig (Wohngebäude, Hausrat, Kraftfahrt...)
- Charakteristika Man-Made Gefahren: hohes Schadenpotenzial neben Kumulereignissen auch einzelne Spitzenrisiken (Bsp. Fabrikgebäude)

- i.d.R. Rückversicherungsschutz
- Modellierung i.A. auf Basis von Einzelereignissen

2.1.4 Schadenmodellierung (excl. CAT)



Kalibrierungsprozess

- Abwicklung der Schäden (Ermittlung voraussichtlicher Endschadenstände)
- Δt Transformation der Schäden (wenn der Schaden im parametrisierenden Schadenjahr angefallen wäre)
 - Anpassung an aktuelle Bestandsgröße
 - Anpassung an momentanen Geldwert
 - Bereinigung um Trends
- Großschadenfrequenz: Schätze Erwartungswert und Varianz für Frequenz, Anpassung Schadenzahlverteilung (Poisson, Negativ Binomial)
- Einzelgroßschadenhöhe: Schadenhöhen Anpassung mit schwerer Verteilung: QQ-Plot, Statistische Bewertung
- Basisschadenlast: Analyse des Schadenbedarfs

2.2 Modellierung von Katastrophenschäden

Definition

Laut Solvency II stellt das Katastrophenrisiko das Risiko eines außergewöhnlich großen Ereignisses dar – gemäß Rahmenrichtlinie Artikel 105 (2) bezeichnet das Katastrophenrisiko Nicht-Leben das „Risiko eines Verlustes oder einer nachteiligen Veränderung des Werts der Versicherungsverbindlichkeiten, das sich aus einer signifikanten Ungewissheit in Bezug auf die Preisfestlegung und die Annahmen bei der Rückstellungsbildung für extreme oder außergewöhnliche Ereignisse ergibt“.

Beispiel Naturgefahren: Überschwemmung, Hagel, Erdbeben, ...

Beispiel Man-Made Gefahren: Explosion, Terror, Cyberangriffe, Luftfahrtunglück

Analyse und Bewertung des Katastrophenpotentials der versicherten Gefahren

- Analyse der Bruttoexposition (Versicherungssumme, Prämienvolumen,...),
- Umfang an Rückversicherungsschutz
- Historische Schäden des Unternehmens, Referenzschäden aus dem Markt
- Ergebnisse von Quantifizierungsansätzen – Beispiele:
- Solvency II-Standardformel
- Externe Modelle
- Mathematisch-statistische Modellierung
- Szenarioanalysen
- Externe (Markt-)einschätzung / Externe Analysen
- Ergebnis: Qualitative / Quantitative Einschätzung der Materialität jeder Gefahr, Gegenüberstellung mit geeigneter Bezugsgröße des Unternehmens (wie Solvenzkapitalbedarf, Eigenmittel)

Analyse und Bewertung der Datenverfügbarkeit /-qualität

- Exposuredaten (Informationen in der benötigten Detailtiefe für den Bestand vorhanden?)
- Historische Schadendaten

2.2.1 Charakterisierung von Katastrophenschadenverteilungen

- Erwartungswert und Standardabweichung wenig aussagekräftig
- Daraus folgt: Komplette Verteilungsfunktion benötigt
- Zwecks Darstellung und Vergleich von Katastrophenschadenverteilungen (auf Jahresbasis) bietet sich die Übersetzung in sog. Überschreitungswahrscheinlichkeiten / Wiederkehrperioden an:
 - Schadenhöhe, die nur in $x\%$ aller Jahre überschritten wird: Ereignis weist eine jährliche Überschreitungswahrscheinlichkeit von $x\%$ auf.
 - Schadenhöhe, die im Mittel nur alle T Jahre beobachtet wird: Ereignis weist die Wiederkehrperiode / Jährlichkeit T auf.

Definition

Bezeichne N die zufällige Anzahl an Ereigniseintritten in einem Jahr und X_1, \dots, X_N die zugehörigen Ereignisschadenhöhen sowie

$M_N := \max\{X_1, \dots, X_N\}$ den max. Ereignisschaden eines Jahres (mit $M_N = 0$ für $N = 0$)

$S := \sum_{i=1}^N X_i$ den Jahresgesamtschaden

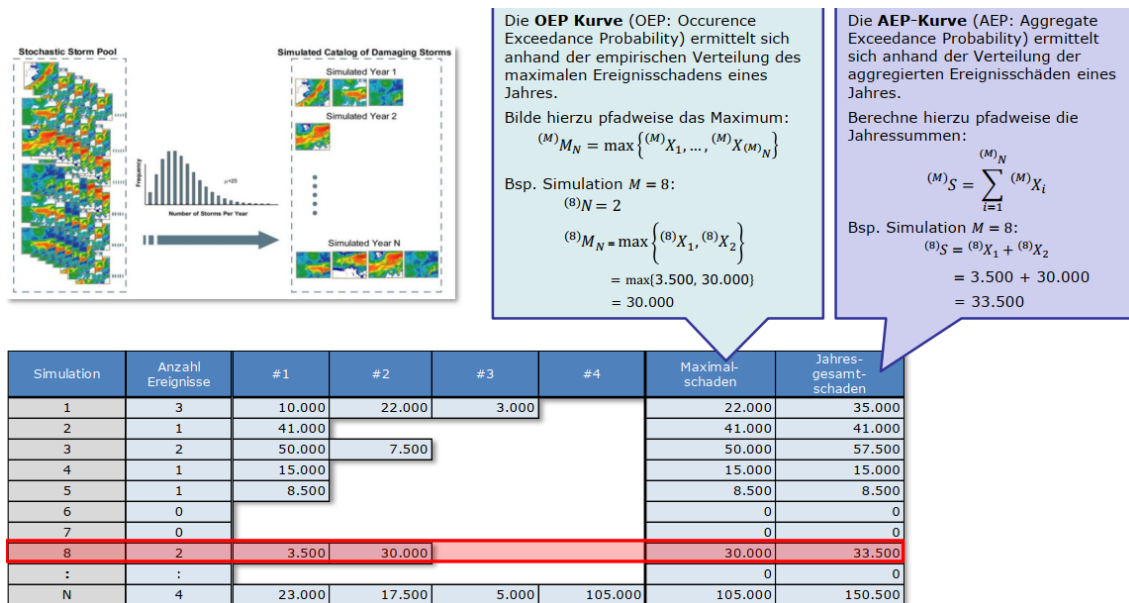
Seien weiter F_{M_N} die Verteilungsfunktion von M_N sowie F_S die Verteilungsfunktion von S und $F_{M_N}^{-1}$ und F_S^{-1} ihre zugehörigen Inversen.

Dann ergeben sich OEP-Kurve und AEP-Kurve als Punktpaare $(T, OEP(T))$ bzw. $(T, AEP(T))$ mit $T \in [1; \infty]$ und

$$OEP(T) := F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right), AEP(T) := F_S^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) \quad (2.1)$$

Die OEP-Kurve stellt den maximalen Ereignisschaden eines Jahres (Maximum Occurrence Loss) in Abhängigkeit der Wiederkehrperiode dar, die AEP-Kurve wiederum den Jahresgesamtschaden (Annual Aggregate Loss)

Liegen simulierte Ereignisse aus dem Simulationsmodell vor, lassen sich die AEP und OEP-Kurven aus den empirischen Verteilungen des maximalen jährlichen Ereignisschadens und Jahresgesamtschadens bestimmen.



Für OEP-Kurve ist unter bestimmten Voraussetzung auch analytische Ermittlung möglich:

Bei Gültigkeit des kollektiven Modells, d.h. bei unabhängig und identisch nach F_X verteilten Einzelereignissen X_1, \dots, X_N sowie davon unabhängiger $Poi(\lambda)$ -verteilter Ereignisschadenanzahl N lässt sich die Verteilungsfunktion des Maximalschadens M_N über die Verteilungsfunktion F_{M_N} der Einzelereignisse darstellen:

$$F_{M_N}(z) = \exp\{-\lambda \cdot (1 - F_X(z))\}, \quad z > 0.$$

Somit gilt für die verallgemeinerte Inverse $F_{M_N}^{-1}$ der Verteilungsfunktion

$$F_{M_N}^{-1}(q) = F_X^{-1}\left(1 + \frac{\ln(q)}{\lambda}\right) \quad \text{für } q \in [0,1[$$

Dieses Resultat führt zu:

$$OEP(T) = F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) = F_X^{-1}\left(1 + \frac{\ln\left[1 - \frac{1}{T}\right]}{\lambda}\right).$$

Dies bedeutet: ist die Einzelereignisverteilung F_X bekannt, und liegt die zugehörige Inverse F_X^{-1} in einer analytisch geschlossenen Darstellung vor, so lässt sich die OEP-Kurve mit der angegebenen Formel ebenfalls analytisch ermitteln.

Beweis siehe Übungsaufgaben im Begleitmaterial

2.2.2 Modellierungsansätze für Katastrophenschäden

- Mathematisch-statistische Modelle:
Schaden wird basierend auf der Schadenerfahrung mit klassischen aktuariellen Verfahren
- Exposure-basierte probabilistische Modelle:
zunächst die schadenbestimmende Ursache eines Ereignisses simulieren und anschließend ihre Schadenwirkungen auf die versicherten Risiken des Unternehmens

(Exposure) bestimmt. (Naturgefahrenbereich: geophysikalisch-meteorologische Modelle)

- Szenario-basierte Modelle:
Schadenpotential wird anhand von Szenarioanalysen geschätzt. Schadenhöhe und Eintrittswahrscheinlichkeit bzw. Wiederkehrperiode eines oder mehrerer Einzelszenarien werden mit Hilfe von Verteilungsannahmen in eine Wahrscheinlichkeitsverteilung übersetzt.

mathematisch-statistische (aktuarielle) Modellierung

Unterteilung in:

- Explizite Modellierung: im Modell liegt eine eigenständige Katastrophenschadenverteilung für diese Gefahr vor.
- Implizite Modellierung: keine eigene Katastrophenschadenverteilung, stattdessen:
 - Die Gefahr wird entweder gemeinsam mit anderen Gefahren modelliert
 - Katastrophenschäden dieser Gefahr werden gemeinsam mit anderen Schadenarten (Basis- oder Großschäden) modelliert
 - Loading: Zuschlag auf Gesamtebene

2.2.3 Explizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze

Allgemeine Methodik/ Vorgehen

- Katastrophenschadenverteilung ergibt sich aus der Anpassung geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilungen an Ereignisschadenhöhen und –anzahlen oder direkt an Jahresschadenlast
- aus Basis historischer Schadendaten (unternehmenseigene Schadenhistorie) nach as-if Transformation

Mögliche Ansätze/ Beispiele

- Ereignisschadenhöhe bedarf in der Regel hinreichend schwerer Verteilung (Bsp: Pareto)
- Ggf. auch differenziertere, zweistufige Modellierung der Ereignisschadenhöhe
- Sofern verfügbar: Einbezug von Marktschadendaten

2.2.4 Implizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze

Folie 46