Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen interner Modelle im Kompositbereich **3**

2 Bruttomodellierung (inkl. Katastrophenschäden) **6**

2.1 Grundlagen 6

2.1.1 Zielgrößen und Gestalt der Ergebnisse 6

2.1.2 Definition des Prämienrisikos 7

2.1.3 Schadenmodellierung 9

2.1.4 Schadenmodellierung (excl. CAT) 10

2.2 Modellierung von Katastrophenschäden 11

2.2.1 Charakterisierung von Katastrophenschadenverteilungen 12

2.2.2 Modellierungsansätze für Katastrophenschäden 13

2.2.3 Explizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze 14

2.2.4 Implizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze 15

2.2.5 Funktionsweise exposure-basierter Modelle 16

2.2.6 Modellierung von Katastrophenschäden aus Naturgefahren 18

2.2.7 Modellierung von Man-Made-Katastrophenschäden 18

2.2.8 Idealtypischer Modellierungsprozess 19

2.2.9 Einbindung externer (exposure-basierter) Modelle in das interne Modell - Überblick 20

3 Rückversicherungsmodellierung **22**

4 Stochastische Modellierung des Reserverisikos und Erzeugung von Cashflows **23**

4.1 Modellierung des Reserverisikos und Generierung von Cashflows 23

4.1.1 Stochastische Modelle für die Schadenabwicklung 24

4.1.2 Ansätze zur Quantifizierung des ultimativen Reserverisikos 25

5 Überleitung in die einjährige Risikosicht in der Versicherungstechnik **28**

5.0.1 Allgemeine Überlegungen zum einjährigen Risikohorizont 28

5.0.2 Der einjährige Risikohorizont im Reserverisiko 30

5.0.3 Direkte Anpassung der CDR-Verteilung gemäß Analytik 31

Kapitel 1

Grundlagen interner Modelle im Kompositbereich

Definition eines Unternehmensmodell

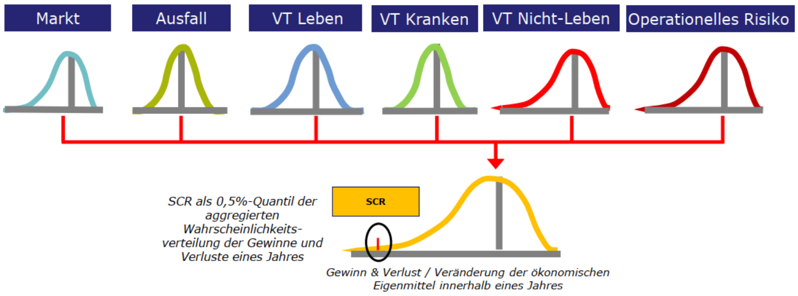
Bei einem internen Risikomodell handelt es sich um ein stochastisches Modell, das mittels stochastischer Verfahren messbare Aktiv- und Passivrisiken der betrachteten Gesellschaften abbildet.
Dabei sollte es über die unternehmensindividuelle Modellierung der stochastischen Geschäftsgrößen die signikanten finanziellen Auswirkungen konsistent quantifizieren und Abhängigkeitsstrukturen zwischen alle Risikogrößen berücksichtigen.
Zielgrößen sind die Gesamtverteilung der Geschäftsergebnisse sowie die Berechnung des benötigten Risikokapitals in einer Marktwertsicht (Anfalljahressicht).

Standardformel

- Anwendung vorgegebener Stressparameter / Risikofaktoren / Szenarien pro Einzelmodul (jeweils kalibriert auf den 200-Jahresstress) ergibt Einzel-SCR
- Jeweils Ein-Punkt-Betrachtung aller Risiken (Value-at-Risk Ansatz)
- Anschließende Aggregation der Einzel-SCRs mit der Wurzelformel anhand von vorgegebenen Korrelationsparametern.

Modellierung mit einem stochastischen Unternehmensmodell

- Simulationsbasiert: Hohe Anzahl an Simulationen erforderlich
- separate komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung per Risiko (jedes Risiko wird durch eine stochastische Ergebnisgröße repräsentiert
- Segmentierung und Kalibrierung (Verteilungen, Volatilitätsparameter) erfolgt unternehmensindividuell, Aggregation unter Copula-Annahmenil



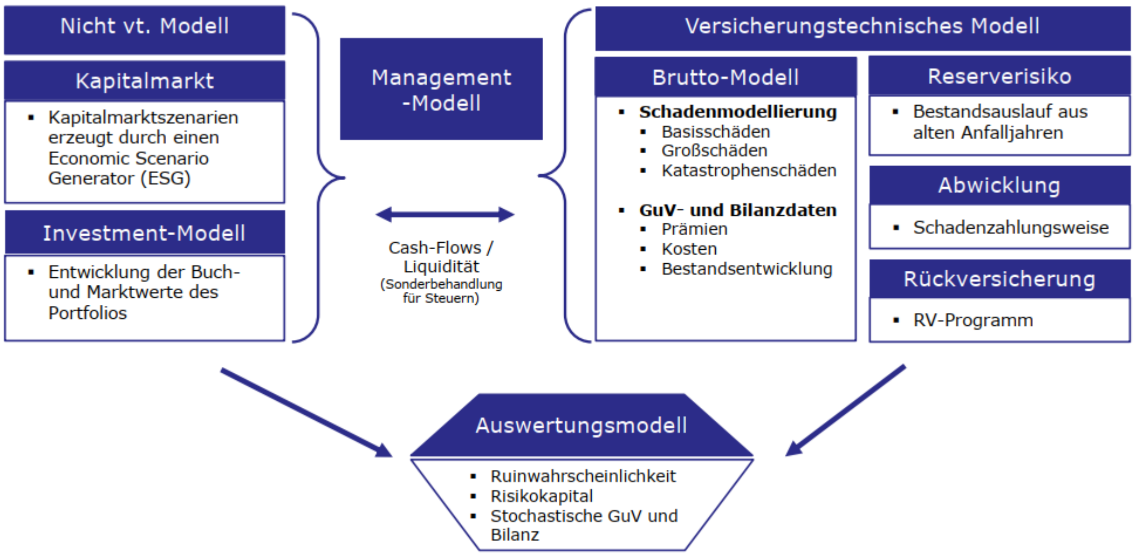
- Beliebige Risikomaße anwendbar - neben VaR auch Expected Shortfall

Definitionen

Ausgangspunkt: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ Simulationswerte $\left({}^{(1)}X, {}^{(2)}X, \ldots, {}^{(n)}X\right)$ einer Verlustvariable X sowie das Sicherheitsniveau $\alpha \in]0;1[$. Weiterhin bezeichne $m := \lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor$ die Gaußklammer von $n \cdot (1-\alpha)$ und $\left({}^{(1\downarrow n)}X, {}^{(2\downarrow n)}X, \ldots, {}^{(n\downarrow n)}X\right)$ die obere Ordnungsstatistik mit ${}^{(1\downarrow n)}X \geq {}^{(2\downarrow n)}X \geq \ldots \geq {}^{(n\downarrow n)}X$

Schätzer für den Value-at-Risk $VaR_\alpha(X)$	Der $VaR_\alpha(X)$ zum Niveau α wird *konservativ* geschätzt durch den **minimalen Verlust**, der in den $m = \lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor$ schlechtesten Szenarien entsteht, d.h. $\widehat{VaR}_{\alpha,n}(X) := {}^{(m\downarrow n)}X$ Eine alternative, weniger konservative Wahl bestünde in der Interpolation zwischen dem m-schlechtesten Wert ${}^{(m\downarrow n)}X$ und $m+1$-schlechtesten Wert ${}^{(m+1\downarrow n)}X$.
Schätzer für den Tail-Value at Risk	$\widehat{TailVaR}_{\alpha,n}(X) := \frac{\sum_{k=1}^{n} {}^{(k)}X \cdot \mathbb{I}_{[\widehat{VaR}_{\alpha,n}(X);\infty[}\left({}^{(k)}X\right)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{[\widehat{VaR}_{\alpha,n}(X);\infty[}\left({}^{(k)}X\right)}$
Schätzer für den Expected Shortfall $ES_\alpha(X)$	Der $ES_\alpha(X)$ zum Niveau α wird geschätzt durch den **mittleren Verlust**, der in den $m = \lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor$ schlechtesten Szenarien entsteht, d.h. $\widehat{ES}_{\alpha,n}(X) := \frac{\sum_{k=1}^{m} {}^{(k\downarrow n)}X}{m}$ Es gilt ferner: $\lim_{n\to\infty} \widehat{ES}_{\alpha,n}(X) = ES_\alpha(X)$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Struktur eines DFA-Modells (Dynamische Finanzanalyse in S/U


Nicht vt. Modell
Kapitalmarkt
Kapitalmarktszenarien erzeugt durch einen Economic Scenario Generator (ESG)
Investment-Modell
Entwicklung der Buch- und Marktwerte des Portfolios
Management -Modell
Cash-Flows / Liquidität
(Sonderbehandlung für Steuern)
Versicherungstechnisches Modell
Brutto-Modell
Schadenmodellierung
Basisschäden
Großschäden
Katastrophenschäden
GuV- und Bilanzdaten
Prämien
Kosten
Bestandsentwicklung
Reserverisiko
Bestandsauslauf aus alten Anfalljahren
Abwicklung
Schadenzahlungsweise
Rückversicherung
RV-Programm
Auswertungsmodell
Ruinwahrscheinlichkeit
Risikokapital
Stochastische GuV und Bilanz

Kapitel 2

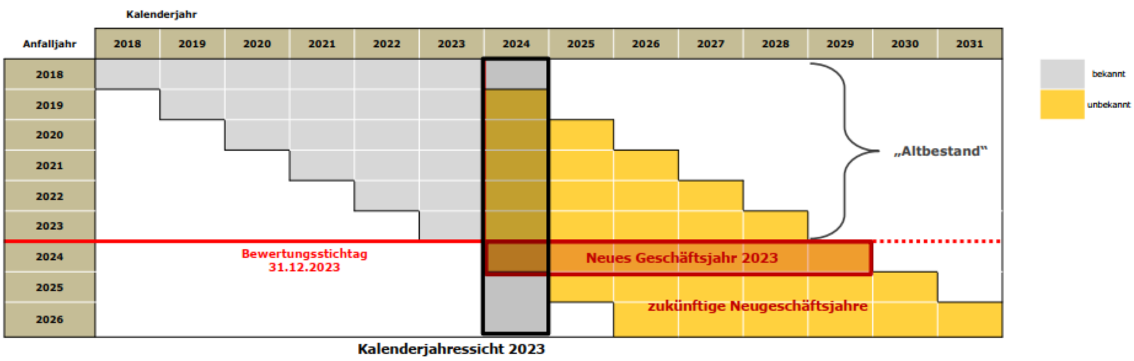
Bruttomodellierung (inkl. Katastrophenschäden)

2.1 Grundlagen

2.1.1 Zielgrößen und Gestalt der Ergebnisse

Bei der Betrachtung des Versicherten-/ Schadenbestands lassen sich zwei Zeithorizonte bzw. Sichtweisen unterscheiden, die zu unterschiedlichen Risikodefinitionen führen:

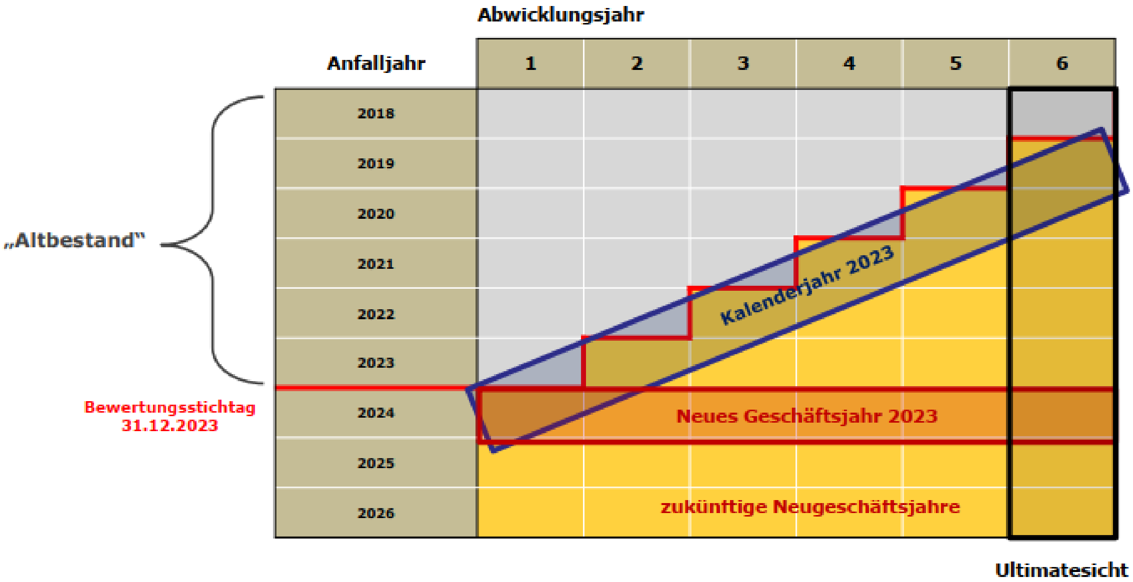
Kalenderjahressicht



- Neugeschäftsentwicklung im kommenden Kalenderjahr (Zahlungen + ausgehende Reserven)
- Abwicklung des Altbestands im kommenden Kalenderjahr
- Risikohorizont von Solvency II: Bemessungsgrundlage für die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Kalenderjahres Ruin zu erleiden
- Teilweise auch längere Zeithorizonte

- Mögliche Verwendungszwecke: Berechnung des regulatorischen SCRs (bei internem Modell) bzw. Gesamtsolvabilitätsbedarf , Limitsysteme, Risikomarge für vt. Rückstellungen

Ultimatesicht



- Betrachtung der Ergebnisgrößen und damit verbundener Unsicherheiten über die komplette Abwicklungsdauer bis zum Endschadenstand = Ultimate auf einer Anfalljahresbasis
- resultiert in "natürlicher"Betrachtung der vt. Risiken
- entspricht nicht dem Risikohorizont, wie in SII für SCR vorgibt
- Mögliche Verwendungszwecke: Profitatbilitäsmessung, Rückversicherungsanalyse, Risikozuschläge für Tarifierung

2.1.2 Definition des Prämienrisikos

Das Prämienrisiko

- resultiert aus der Unsicherheit / Volatilität in Bezug auf Prämien, Schaden und Kosten aus zukünftiger Risikotragung
- bezieht sich somit nur auf diejenigen Schäden, die innerhalb des modellierten Neugeschäftsjahres (Anfalljahressicht) anfallen

Das ultimative Prämienrisiko (synonym: Zeichnungsrisiko) bezeichnet das Risiko, dass die Prämien des Neugeschäftsjahres nicht ausreichen, um die zugehörigen Schäden und Kosten bis zur vollständigen Abwicklung zu decken.

Definition

Das (nominale) Anfalljahresergebnis T (= Technical Result) des Neugeschäftsjahres wird definiert als: $T := P - E - U$, mit
P: verdiente Prämie des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung
E: Kosten des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung
U: Endschadenaufwand des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung

Das Anfalljahresergebnis T ist eine Gewinnvariable:
$T > 0$ ist äquivalent zu $P > E * U$ und bedeutet einen zukünftigen Gewinn
während $T < 0 \Leftrightarrow P < E * U$ einen zukünftigen Verlust entspricht.
Alternative Defintion: ultimative Prämienrisiko (synonym: Zeichnungsrisiko) bezeichnet das Risiko, dass das Anfalljahresergebnis des Neugeschäftsjahres nach vollständiger Abwicklung negativ ist.

Frage: Sollte man das ultimative Prämienrisiko anhand des Anfalljahresergebnisses vor oder nach Zentrierung, d.h. vor oder nach Abzug des Mittelwerts, messen?

U.a. abhängig vom Verwendungszweck der Ergebnisse:

- Liegt Fokus auf Auswirkungen auf die Kapitalsituation?
- Sind Erträge und Verluste aus zukünftigen Neugeschäft in Eigenmitteln enthalten?
- Primär Darstellung Ergebnisvolatilität?
- Weitere Überlegungen:
  - Das erwartete Ergebnis (= Mittelwert der Simulationen) entspricht nicht zwingend dem geplantem Ergebnis
  - Bei hochprofitablem Geschäft ist ohne Zentrierung des originären Anfalljahresergebnisses bei bestimmten Risikomaßen (Bsp: VaR) sogar ein negatives Risikokapital möglich.

Ergebnisgrößen für das Prämienrisiko:

- Ergebniskomponenten:
  - Verdiente Prämie: i.d.R. fix, bei mehrjähriger Projektion sit Prämienzyklus zu berücksichtigen
  - Kosten: getrennt nach Vertrieb, Regulierung und Verwaltung

  - Schäden: stochastische Modellierung, zwecks genauer Abbildung der Rückversicherungsstruktur und Modellierung der spartenspezifischen Schadenvolatilitätn erfolgt Trennung nach Schadentp (Einzelne Großschäden, Einzelne Ereignisse)

- Segmentierung/ Modellierungstiefe:
  - Aufteilung in HUK und Sach
  - Bsp. HUK: Kasko, Haftpflicht, Unfal
  - Bsp. Sach: VGV, Feuerindustrie

2.1.3 Schadenmodellierung

Trennung der Schadentypen: Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden

Basisschäden

- hohe Schadenfrequenz und geringe Schadenhöhe
- Simulation als Aggregat
- Parametrisierung auf Basis eigener Schadenerfahrung

Großschäden

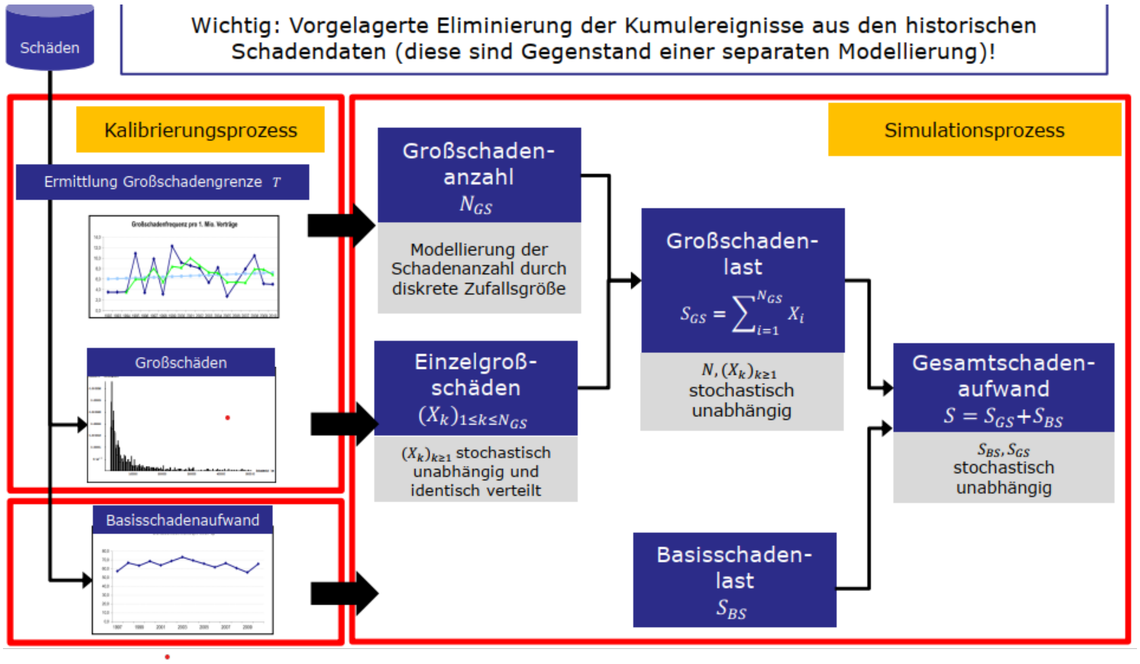
- Schäden oberhalb spezifischen Schwellenwerts
- geringe Frequenz, große Schadenhöhe
- Modellierung: Einzelbasis nach dem kollektiven Modell
- Parametrisierung auf Basis eigener Schadenerfahrung

Katastrophenschäden

- sehr niedrige Eintrittswahrscheinlichkeit, extreme Schadenhöhe
- Trennung nach Naturgefahren, Man-Made Gefahren, sonstiges wie Pandemien
- Charakteristika Naturgefahren: Treffen größere Region, Ereignisschaden setzt sich aus vielen kleinen Einzelschäden zusammen, Schäden betreffen viele Sparten gleichzeitig (Wohngebäude, Hausrat, Kraftfahrt...)
- Charakteristika Man-Made Gefahren: hohes Schadenpotenzial neben Kumulereignisen auch einzelne Spitzenrisiken (Bsp. Fabrikgebäude)

- i.d.R. Rückversicherungsschutz
- Modellierung i.A. auf Basis von Einzelereignissen

2.1.4 Schadenmodellierung (excl. CAT)



Kalibrierungsprozess

- Abwicklung der Schäaden (Ermittlung voraussichtlicher Endschadenstände)
- as if-Transformation der Schäden (wenn der Schaden im parametrisierenden Schadenjahr angefallen wäre)
  - Anpassung an aktuelle Bestandsgröße
  - Anpassung an momentanen Geldwert
  - Bereinigung um Trends
- Großschadenfrequenz: Schätze Erwartungswert und Varianz für Frequenz, Anpassung Schadenzahlverteilung (Poisson, Negativ Binomial)
- Einzelgroßschadenhöhe: Schadenhöhen Anpassung mit schwerer Verteilung: QQ-Plot, Statistische Bewertung
- Basisschadenlast: Analyse des Schadenbedarfs

2.2 Modellierung von Katastrophenschäden

Definition

Laut Solvency II stellt das Katastrophenrisiko das Risiko eines außergewöhnlich großen Ereignisses dar – gemäß Rahmenrichtlinie Artikel 105 (2) bezeichnet das Katastrophenrisiko Nicht-Leben das „Risiko eines Verlustes oder einer nachteiligen Veränderung des Werts der Versicherungsverbindlichkeiten, das sich aus einer signifikanten Ungewissheit in Bezug auf die Preisfestlegung und die Annahmen bei der Rückstellungsbildung für extreme oder außergewöhnliche Ereignisse ergibt“.
Beispiel Naturgefahren: Überschwemmung, Hagel, Erdbeben, ...
Beispiel Man-Made Gefahren: Explosion, Terror, Cyberangriffe, Luftfahrtunglück

Analyse und Bewertung des Katastrophenpotentials der versicherten Gefahren

- Analyse der Bruttoexponierung (Versicherungssumme, Prämienvolumen,...),
- Umfang an Rückversicherungsschutz
- Historische Schäden des Unternehmens, Referenzschäden aus dem Markt
- Ergebnisse von Quantifizierungsansätzen – Beispiele:
- Solvency II-Standardformel
- Externe Modelle
- Mathematisch-statistische Modellierung
- Szenarioanalysen
- Externe (Markt-)einschätzung / Externe Analysen
- Ergebnis: Qualitative / Quantitative Einschätzung der Materialität jeder Gefahr, Gegenüberstellung mit geeigneter Bezugsgröße des Unternehmens (wie Solvenzkapitalbedarf, Eigenmittel)

Analyse und Bewertung der Datenverfügbarkeit /-qualität

- Exposuredaten (Informationen in der benötigten Detailtiefe für den Bestand vorhanden?)
- Historische Schadendaten

2.2.1 Charakterisierung von Katastrophenschadenverteilungen

- Erwartungswert und Standardabweichung wenig aussagekräftig
- Daraus folgt: Komplette Verteilungsfunktion benötigt
- Zwecks Darstellung und Vergleich von Katastrophenschadenverteilungen (auf Jahresbasis) bietet sich die Übersetzung in sog. Überschreitungswahrscheinlichkeiten / Wiederkehrperioden an:
  - Schadenhöhe, die nur in $x\%$ aller Jahre überschritten wird: Ereignis weist eine jährliche Überschreitungswahrscheinlichkeit von $x\%$ auf.
  - Schadenhöhe, die im Mittel nur alle T Jahre beobachtet wird: Ereignis weist die Wiederkehrperiode / Jährlichkeit T auf.

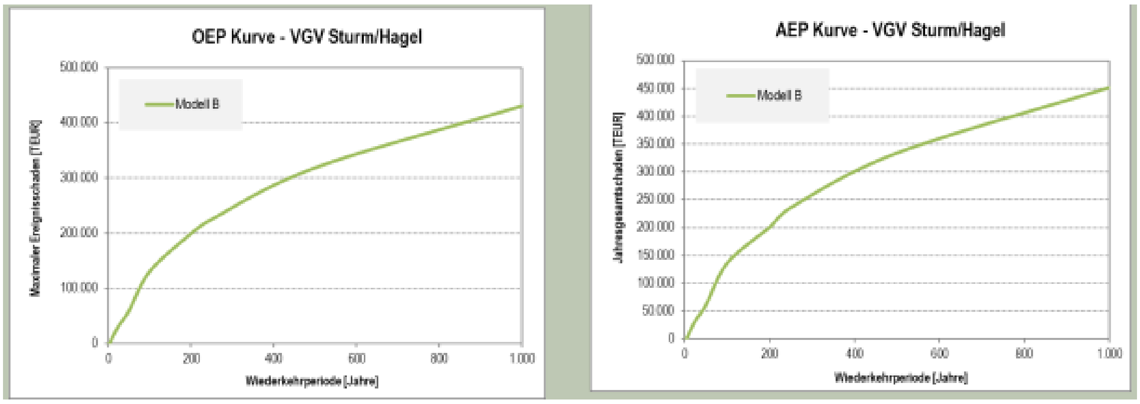
Definition

Bezeichne N die zufällige Anzahl an Ereigniseintritten in einem Jahr und $X_1,...,X_N$ die zugehörigen Ereignisschadenhöhen sowie
$M_N := max\{X_1,...,X_N\}$ den max. Ereignisschaden eines Jahres (mit $M_N = 0$ für $N = 0$)
$S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ den Jahresgesamtschaden
Seien weiter F_{M_N} die Verteilungsfunktion von M_N sowie F_S die Verteilungsfunktion von S und $F_{M_N}^{-1}$ und F_S^{-1}ihre zugehörigen Inversen.
Dann ergeben sind OEP-Kurve und AEP-Kurve als Punktepaare $(T, OEP(T))$ bzw. $(T, AEP(T))$ mit $T \in [1;\infty]$ und

$$OEP(T) := F_{M_N}^{-1}\left(1-\frac{1}{T}\right), AEP(T) := F_S^{-1}\left(1-\frac{1}{T}\right) \tag{2.1}$$

Die OEP-Kurve stellt den maximalen Ereignisschaden eines Jahres (Maximum Occurrence Loss) in Abhängigkeit der Wiederkehrperiode dar, die AEP-Kurve wiederum den Jahresgesamtschaden (Annual Aggregate Loss)

Liegen simulierte Ereignisse aus dem Simulationsmodell vor, lassen sich die AEP und OEP-Kurven aus den empirischen Verteilungen des maximalen jährlichen Ereignisschadens und Jahresgesamtschadens bestimmen.



Für OEP-Kruve ist unter bestimmten Voraussetzung auch analytische Ermittlung möglich:

Bei Gültigkeit des kollektiven Modells, d.h. bei unabhängig und identisch nach F_X verteilten Einzelereignissen $X_1, \ldots, X_N$ sowie davon unabhängiger $Poi(\lambda)$-verteilter Ereignisschadenanzahl N lässt sich die Verteilungsfunktion des Maximalschadens M_N über die Verteilungsfunktion F_{M_N} der Einzelereignisse darstellen:

$$F_{M_N}(z) = \exp\{-\lambda \cdot (1 - F_X(z))\}, \qquad z > 0.$$

Beweis siehe Übungsaufgaben im Begleitmaterial

Somit gilt für die verallgemeinerte Inverse $F_{M_N}^{-1}$ der Verteilungsfunktion

$$F_{M_N}^{-1}(q) = F_X^{-1}\left(1 + \frac{\ln(q)}{\lambda}\right) \qquad \text{für} \quad q \in [0,1[$$

Dieses Resultat führt zu:

$$OEP(T) = F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) = F_X^{-1}\left(1 + \frac{\ln\left[1 - \frac{1}{T}\right]}{\lambda}\right).$$

Dies bedeutet: ist die Einzelereignisverteilung F_X bekannt, und liegt die zugehörige Inverse F_X^{-1} in einer analytisch geschlossenen Darstellung vor, so lässt sich die OEP-Kurve mit der angegebenen Formel ebenfalls analytisch ermitteln.

2.2.2 Modellierungsansätze für Katastrophenschäden

- Mathematisch-statistische Modelle:
  Schaden wird basierend auf der Schadenerfahrung mit klassischen aktuariellen Verfahren

- Exposure-basierte probabilitische Modelle:
  zunächst die schadenbestimmende Ursache eines Ereignisses simulieren und anschließend ihre Schadenwirkungen auf die versicherten Risiken des Unternehmens (Exposure) bestimmt. (Naturgefahrenbereich: geophysikalisch-meteorologische Modelle)

- Szenario-basierte Modelle:
  Schadenpotential wird anhand von Szenarioanalysen geschätzt. Schadenhöhe und Eintrittswahrscheinlichkeit bzw. Wiederkehrperiode eines oder mehrerer Einzelszenarien werden mit Hilfe von Verteilungsannahmen in eine Wahrscheinlichkeitsverteilung übersetzt.

mathematisch-statistische (aktuarielle) Modellierung

Unterteilung in:

- Explizite Modellierung: im Modell liegt eine eigenständige Katastrophenschadenverteilung für diese Gefahr vor.
- Implizite Modellierung: keine eigene Katastrophenschadenverteilung, stattdessen:
  - Die Gefahr wird entweder gemeinsam mit anderen Gefahren modelliert
  - Katastrophenschäden dieser Gefahr werden gemeinsam mit anderen Schadenarten (Basis- oder Großschäden) modelliert
  - Loading: Zuschlag auf Gesamtebene

2.2.3 Explizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze

Allgemeine Methodik/ Vorgehen

- Katastrophenschadenverteilung ergibt sich aus der Anpassung geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilungen an Ereignisschadenhöhen und –anzahlen oder direkt an Jahresschadenlast
- aus Basis historischer Schadendaten (unternehmenseigene Schadenhistorie) nach as-if Transformation

Mögliche Ansätze/ Beispiele

- Ereignisschadenhöhe bedarf in der Regel hinreichend schwerer Verteilung (Bsp: Pareto)
- Ggf. auch differenziertere, zweistufige Modellierung der Ereignisschadenhöhe
- Sofern verfügbar: Einbezug von Marktschadendaten

2.2.4 Implizite Modellierung gemäß mathematisch-statistischer Ansätze

Allgemeines Vorgehen

- Anpassungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen an die (unternehmenseigenen) Schadendaten nach as-if Transformation
- Aber: keine vorgelagerte Trennung der Datengrundlage nach weiteren Einzelgefahren
- Gemeinsame Kalibrierung von Schäden mehrerer Gefahren, in der Folge keine weitere Unterscheidung nach Gefahr

Mögliche Ansätze/ Beispiele

- Naturgefahren: insbesondere für die nicht-materiellen „Nebengefahren“ (Alles außer Sturm, Überschwemmung, Hagel)
- Manmade: Extrapolation der Großschadenverteilung soll auch Kumulschäden abdecken

Vorteile

- Prinzipiell für alle Arten von Gefahren möglich
- Transparenz / mehr Freiheitsgrade im Vorgehen
- Im Wesentlichen statistisches Know-How zur Modellierung notwendig

Herausforderungen

- Übertragbarkeit der historischen Informationen ggf. fraglich
- i.a. nur wenige Daten vorhanden, dadurch Kalibrierung unsicher
- Annahmen über Abhängigkeiten in der Regel grob
- Schwierigkeit einer adäquaten Extrapolation

Implizite ggü. expliziter Modellierung

- Katastrophenschäden weisen äußerst erratisches Verhalten auf, folgen in der Regel anderen Gesetzmäßigkeiten als die Basis- und Großschäden.
- Andererseits lässt die Datenlage keine atomisierte Modellierung jeder einzelnen Gefahr zu (Fokus der Modellierung auf wirkliche materielle Gefahren)

2.2.5 Funktionsweise exposure-basierter Modelle

1. Portfeuille

- Das geophysikalisch-meteorologische Modell benötigt detaillierte Informationen zum versicherten Portefeuille des Versicherungsunternehmen
- Der Bestand wird zu einem bestimmten Zeitpunkt abgegriffen, Modell liefert also streng genommen nur eine Einschätzung zur Gefährdung zum Stichtag des Bestandsabzugs.
- Die Validität und Aussagekraft der Modellergebnisse hängt essentiell von der Qualität der verwendeten Bestandsdaten ab.

2. Ereigniserzeugung

- Das Modul umfasst einen Katalog mit historischen und synthetischen Ereignissen, wobei letztere Ergebnis eines Modellierungs- und Simulationsprozesses sind.
- Die Intensität der Ereignisse wird anhand schadenbestimmender Parameter beschrieben, die abhängig von der jeweiligen Naturgefahr sind (Bsp: Windgeschwindigkeit, Hagelkörner, Magnitude)

3. Schadenanfälligkeitsmodul

- Die aus dem Ereignis resultierenden Schäden an den versicherten Objekten werden mittels sogenannter Schadenfunktionen ermittelt. Schadenfunktionen beschreiben den funktionalen Zusammenhang zwischen der Intensität eines Ereignisses bzw. der zugehörigen Ausprägungen der Schadenparameter und dem mittleren Schadengrad
- In den GroundUp-Schäden sind noch keine versicherungsspezifischen Parameter wie Selbstbehalte oder Limite berücksichtigt

4. Finanzmodel

- Im Finanzmodul werden die Vertragsbedingungen und ggf. auch die Rückversicherungsstruktur (Beispiel: Summenexzedent) auf die GroundUp-Schäden angewendet, und so der beim Versicherer tatsächlich verbleibende Brutto- bzw. Nettoschaden ermittelt.

Output eines geophysikalischen Modells sind Informationen über die Schadenverteilungen (per Einzelereignis oder als Jahresaggregat) in komprimierter Form. Eine Event Loss

Table (ELT) ist neben AEP- und OEP-Kurve ein weiterer möglicher Output eines geophysikalischen Modells und stellt eine Auflistung der im Modell generierten Ereignisse dar.
Geophysikalische Modelle benötigen komplexe Software, daher werden sie nur von großen VU und Rückversicherern betrieben (Externes Modell)

Event Loss Table (ELT)

- Unterscheidet sich nach Anbieter
- Anbieter AIR:
  - Spalte Year: Simulationsjahr
  - Nr: Index des Ereignisschadens im entsprechenden Simulationsjahr
  - Spalte Company Loss: simulierten Brutto-Schaden des Unternehmens
  - Spalte Event: Ident-Nr. aus Ereigniskatalog
- Anbieter RMS:
  - Spalte EVENTID: Identifizierung
  - Spalte RATE: mittlere Anzahl der Ereigniseintritte in einem Jahr
  - Spalte PERSPVALUE: Erwartungswert der Schadenhöhenverteilung bei Ereigniseintritt
  - die Spalten STDDEVI und STDDEVC: Standardabweichung der Schadenhöhenverteilung bei Ereigniseintritt
  - Spalte EXPVALUE: Obergrenze für den resultierenden Ereignisschaden
- Anbieter CoreLogic:
  - Spalte Event frequency: mittlere Anzahl der Ereigniseintritte in einem Jahr
  - Spalte Event mean gross loss: Erwartungswert der Schadenhöhenverteilung bei Ereigniseintritt
  - Spalte Event sigma gross loss: Standabweichung der Schadenhöhenverteilung bei Ereigniseintritt
  - Event gross limit: Obergrenze für den resultierenden Ereignisschaden

Vorteile

- Basieren auf multidisziplinärem Know-How
- Detaillierte Modellierung von Abhängigkeiten

- Sowohl zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen als auch für (neue) Szenarioanalysen geeignet

Herausforderungen

- Sind nicht für alle Gefahren verfügbar
- Kalibrierung der Modelle (Gefährdung / Vulnerabilitäten) durch den Anbieter vorgegeben, Update der Kalibrierung mit neuer Modellversion
- Keine komplette Transparenz
- Für einige Gefahren liegen mitunter gleich mehrere externe Modelle (verschiedener Anbieter) mit unterschiedlichen Modellierungsansätzen vor.

Eigenentwicklung ggü. externem Modell

- Aufwand und Know-How-Bedarf
- höhere Transparenz
- mehr Freiheitsgrade bei Modellierung und Kalibrierung
- Zuschnitt auf unternehmensindividuelle Bedürfnisse

2.2.6 Modellierung von Katastrophenschäden aus Naturgefahren

Beobachtungen aus der Praxis

- Durch eingeschränkte Verfügbarkeit einer unternehmenseigenen Schadenhistorie für mathematisch-statistischer Ansätze ist die Modellierung für Sturm, Überschwemmung, Hagel und Erdbeben für deutsche Portefeuilles auf Basis geophysikalisch-meteorologischer Modelle am weitesten verbreitet
- Alle weiteren Naturgefahren i.d.R implizit modelliert

Teilweise werden im Zuge der Einbindung externer Modelle in das interne Unternehmensmodell noch individuelle Modifikationen am originären Modelloutput vorgenommen (Mischansätze)

2.2.7 Modellierung von Man-Made-Katastrophenschäden

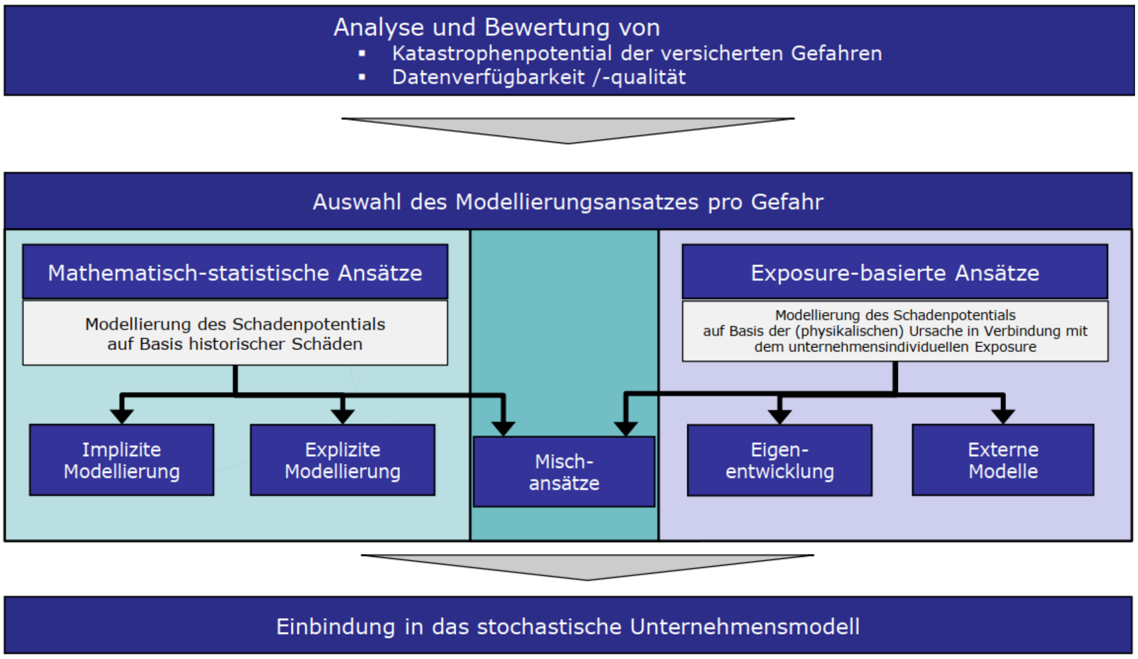
Beobachtungen aus der Praxis

- Die unternehmensindividuelle Schadenhistorie ist i.d.R. limitiert

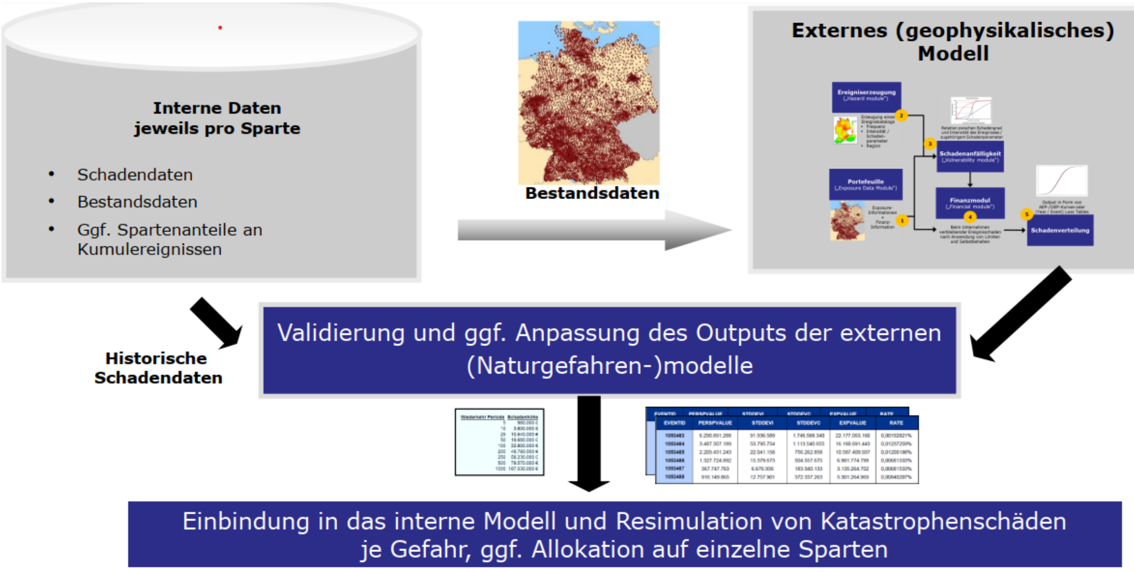
- Marktschadenverteilungen für Groß-/Kumulschäden in Man-Made exponierten Sparten sind prinzipiell vorhanden (GDV)

Bei den meisten Man-Made Gefahren nutzt man daher die implizite Modellierung oder szenario-basierte Modellierung. In vielen Fällen Rückgriff auf Verteilungen vom Pareto-Typ unter Verwendung, dass es für den Pareto-Parameter marktweit beobachtbare, spartentypische Ausprägungen gibt.

2.2.8 Idealtypischer Modellierungsprozess



2.2.9 Einbindung externer (exposure-basierter) Modelle in das interne Modell - Überblick



EVENTID	PERSPVALUE	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE	RATE
1053483	6.290.891.288	91.936.589	1.746.588.340	22.177.053.160	0,00192821%
1053484	3.487.307.189	53.795.754	1.113.540.655	16.160.691.443	0,01237259%
1053485	2.209.431.243	22.041.158	756.262.858	10.587.409.937	0,01200188%
1053486	1.327.724.892	15.379.673	504.557.675	6.981.774.799	0,00681533%
1053487	367.747.763	6.676.936	183.940.133	3.135.264.702	0,00681533%
1053488	916.149.865	12.757.901	372.337.263	5.301.264.969	0,00840207%

Die Event Loss Table des Anbieters RMS beschreibt das folgende *statistische Modell*:

- Die Szenarien $i, 1 \leq i \leq n$ (Zeilen) sind stochastisch unabhängig
  - Jedes Szenario i wird als kollektives Modell aufgefasst.
  - Die aus dem Eintritt des Szenarios i resultierenden Ereignisschäden $X_{ij}, j \in \mathbb{N}$ sind identisch verteilt mit Mittelwert $\mathbb{E}[X_{ij}] = \mu_i$ und Standardabweichung $\sigma[X_{ij}] = \sigma_i$
- Alle Zufallsvariablen sind stochastisch unabhängig (Ereignisschadenhöhen X_{ij} und Ereignisanzahl N_i)
- Die Ereignisanzahlen N_i genügen einer Poisson(λ_i)-Verteilung
- Für jeden Ereignisschaden $1 \leq j \leq N_i$ werde der Schadengrad $z_{ij} := X_{ij}/\max_i$ ($\max_i$ = von Szenario i betroffenes Exposure = maximal möglicher Schaden in Ereignis i) durch eine Beta-Verteilung $B(\alpha_i, \beta_i)$ mit den positiven reellen Parametern α_i und β_i beschrieben:

$$f_{z_{ij}}(x) = \frac{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\cdot\Gamma(\beta_i)} \cdot (1-x)^{\beta_i-1} \cdot x^{\alpha_i-1}, 0 \leq x \leq 1 \qquad \Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1} \exp\{-t\}\, dt$$

Bezeichne mit $S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$ den Jahresgesamtschaden eines einzelnen Szenarios $i \in \{1, \dots, n\}$

- Aufgrund der Annahme eines kollektiven Modells und der Poisson-Annahme für die Frequenz gilt für *Erwartungswert* $\mathbb{E}[S_i]$ und *Varianz* $\sigma^2[S_i]$ des *Jahresgesamtschadens eines einzelnen Szenarios*:

$$\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mu_i \,, \qquad \sigma^2[S_i] = \lambda_i \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$$

- Aufgrund der Unabhängigkeitsannahmen aller Szenarien ergeben sich *Erwartungswert (Annual Aggregate Loss, AAL) und Varianz des Jahresgesamtschadens* $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ der gesamten ELT mittels

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i], \qquad \sigma^2[S] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2[S_i]$$

Erwartungswert und Varianz des Jahresgesamtschadens lassen sich bei ELTs also bereits analytisch berechnen!

Aufgrund der Unabhängigkeit aller Szenarien ist zudem auch für den *Jahresgesamtschaden* S eine Darstellung als *kollektives Modell* möglich:

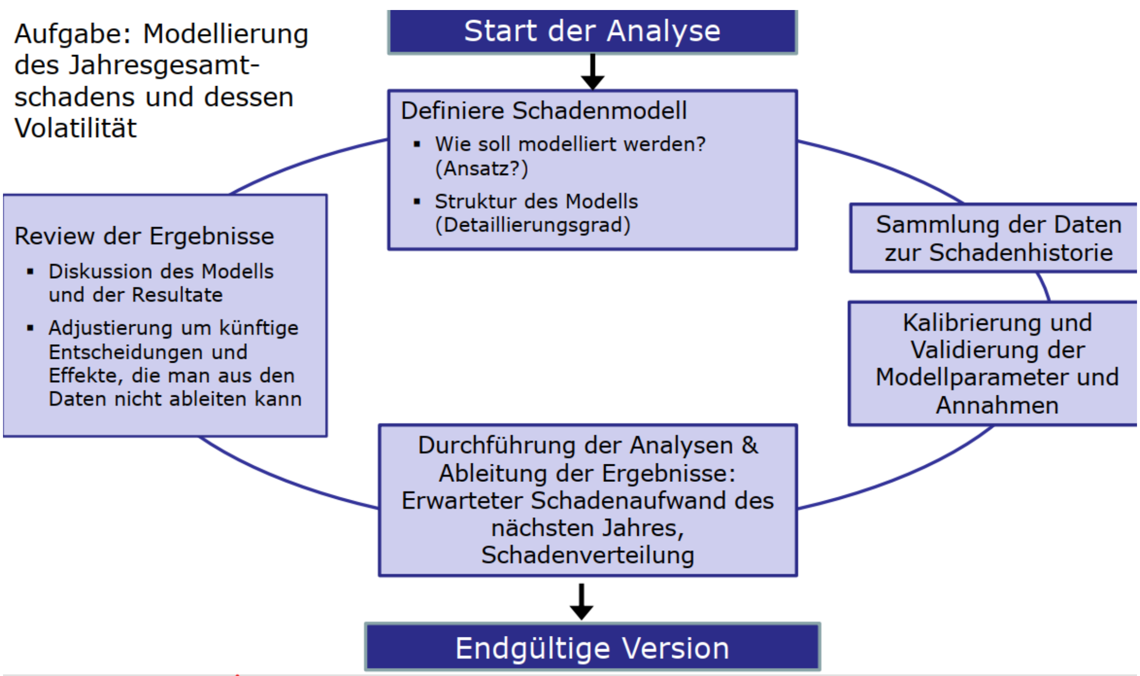
$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

Auf dieses Resultat werden wir bei der Resimulation aus der ELT zurückgreifen

- Die szenario-übergreifende Anzahl an Ereigniseintritten $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ genügt wieder einer Poisson-verteilung mit Parameter λ. Die Gesamtfrequenz ergibt sich als Summe der Einzelfrequenzen λ_i.
- Die szenario-übergreifende Schadenhöhe X_k ist eine Mischverteilung der Schadenhöhen pro Einzelszenario.

- Die primäre Unsicherheit bezieht sich auf die Unsicherheit über das grundsätzliche Eintreten eines Ereignisses (wird beschrieben durch RATE und PERSPVALUE),
- die sekundäre Unsicherheit bezieht sich auf die Unsicherheit in der Höhe des Schadenaufwands bei Eintritt des Ereignisses (wird beschrieben durch die Standardabweichungen)

Actuarial Control Cycle zur Schadenmodellierung



Kapitel 3

Rückversicherungsmodellierung

Grundidee

Rückversicherungsanalyse mit stochastischen Unternehmensmodellen:

- Abbildung von Rückversicherung mithilfe eines internen Modells von zentraler Bedeutung: Einfluss von Rückversicherung hinsichtlich Glättung von Volatilitätsspitzen und Reduktion des Risikokapitalbedarfs

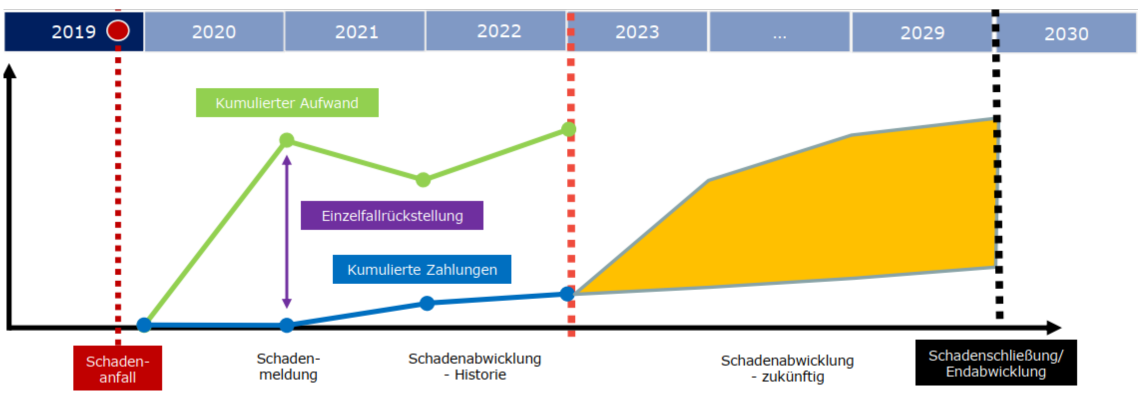
Einsatz interner Modelle zur RV-Analyse

- Analyse und Gegenüberstellung der Verteilungen Brutto / Netto bzw. RV-Recoveries ermöglicht genaue Abschätzung von Kosten und Nutzen von RV-Verträgen
- hilft bei Identifikation von Deckungslücken und der Frage nach der Effizienz der RV
- Ableitung unzähliger Kennzahlen möglich (RV-Preis vs. durchschnittliche Recoveries, RV-Preis vs. Risikokapitalersparnis, Gewinnwahrscheinlichkeiten. . .)
- Rückversicherungsanalyse mit internen Modellen kann Verhandlungsposition gegenüber Rückversicherern stärken
- Vor Solvency II für viele VU Motivation zum Aufbau interner Modelle, heute oft zum Nachweis des „Use Test“ (Verwendungstests) unter Solvency II verwendet

Kapitel 4

Stochastische Modellierung des Reserverisikos und Erzeugung von Cashflows

4.1 Modellierung des Reserverisikos und Generierung von Cashflows



Aktuarielle Reservierungsverfahren liefern mit dem Best-Estimate für die Schadenrückstellungen eine Punktschätzung („wahrscheinlichkeitsgewichtetes Mittel“) und damit lediglich ein mögliches Auskommen der Reserve

- Das Reserverisiko beschreibt allgemein die Unsicherheit, die mit der Vorhersage der Abwicklung bereits eingetretener Schäden verbunden ist (zur genauen Definition kommen wir später).

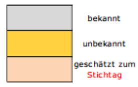
- Das Reserverisiko beinhaltet zwei Aspekte:

  – Höhe der Reserven (Reservierungsrisiko (= Unsicherheit über die zukünftige Auszahlungshöhe)

- Auszahlungszeitpunkte der Zahlungen („Abwicklungsmuster“) (Auszahlungsrisiko (= Unsicherheit über die konkreten Auszahlungszeitpunkte))

4.1.1 Stochastische Modelle für die Schadenabwicklung

	Abwicklungsjahr					Nachlauf			
Anfalljahr	1	2	..	..	n	n+1	...	...	ω
1	$S_{1,1}$				$S_{1,n}$	$S_{1,n+1}$			$S_{1,\omega}$
:		$\mathcal{D}_n$							
i			$S_{i,n-i+1}$	$S_{i,n-i+2}$					$S_{i,\omega}$
:									
n	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$			$S_{n,n}$	$S_{n,n+1}$			$S_{n,\omega}$



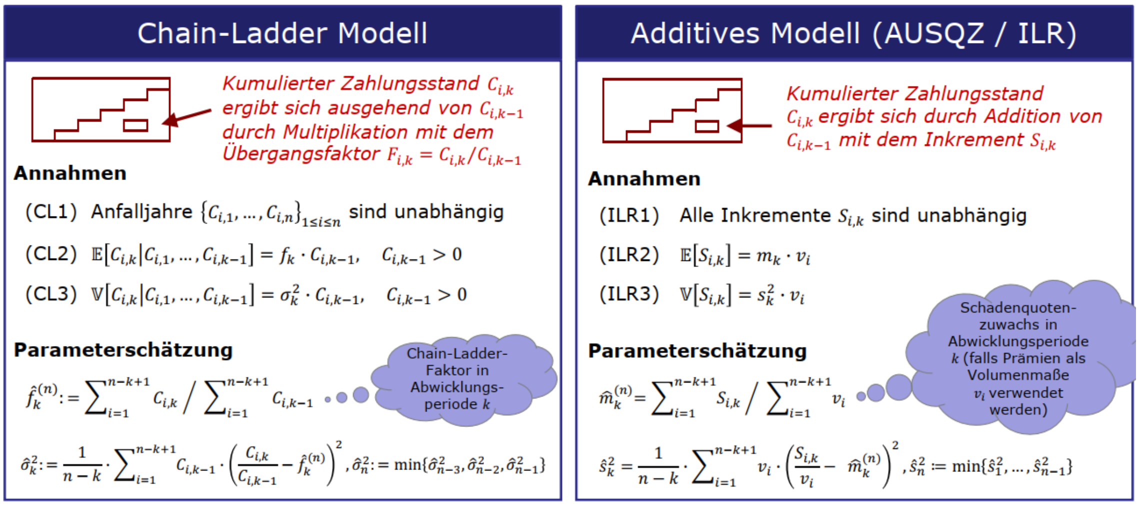
Ausgangsituation/ Notation

- $S_{i,k}$ bezeichnet die (nominalen) inkrementellen Zahlungen für das Anfalljahr $1 \leq i \leq n$ im Abwicklungsjahr $1 \leq k \leq \omega$ (mit ω Endabwicklungszeitpunkt)
- $C_{i,k} = \sum_{j=1}^{k} S_{i,j}$ repräsentiert die kumulierten Zahlungen eines Anfalljahres nach k Abwicklungsjahren
- Das Schadendreieck $D_n := \{S_{i,k}\}_{i+k \leq n+1}$ enthält die bis $T = n$ bereits geleisteten Schadenzahlungen
- Die Zahlungen $\{S_{i,k}\}_{1 \leq i \leq n, n-i+1 < k \leq \omega}$ sind zum Zeitpunkt $T = n$ noch unbekannt und damit ebenfalls:
  - die nominale Bedarfsreserve $R_i^{(n)} := \sum_{k=n-i+2}^{\omega} S_{i,k}$ eines einzelnen Anfallsjahres $1 \leq i \leq n$
  - die nominale Bedarfsreserve $R^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} R_i^{(n)}$ aller Anfalljahre
  - der nominale Endschadenaufwand (Ültimate") $U_i := C_{i,\omega}$ eines Anfalljahres $1 \leq i \leq n$

Aktuarieller Schätzprozess:

- Schätze die *erwarteten (nominalen) zukünftigen Zahlungen* $\{\mathbb{E}[S_{i,k}|\mathcal{D}_n]\}_{1 \leq i \leq n, n-i+1 < k \leq \omega}$ auf Basis der zum Zeitpunkt $T = n$ vorhandenen Informationen (repräsentiert durch die Dreieckshistorie $\mathcal{D}_n$).
- mit einer geeigneten *Reservierungsmethode* $\mathcal{T}_n$ (Bsp: Chain-Ladder, AUSQZ bzw. ILR,...) und erhalte:
  - $\hat{S}_{i,k}^{(n)} := \hat{\mathbb{E}}[S_{i,k}|\mathcal{D}_n]$
  - Nominaler *Reserveschätzer für ein einzelnes Anfalljahr* $\hat{R}_i^{(n)} := \sum_{k=n-i+2}^{\omega} \hat{S}_{i,k}^{(n)}$
  - Nominaler *Reserveschätzer für alle Anfalljahre* $\hat{R}^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{(n)}$
  - *Schätzer* für den *erwarteten nominalen Endschadenaufwand* $\hat{U}_i^{(n)} := \hat{\mathbb{E}}[U_i|\mathcal{D}_n]$
    $\Rightarrow \hat{U}_i^{(n)} = \hat{R}_i^{(n)} + C_{i,n-i+1}$ wegen $U_i = C_{i,\omega} = C_{i,n-i+1} + \sum_{k=n-i+2}^{\omega} S_{i,k} = C_{i,n-i+1} + R_i^{(n)}$

Zur Messung des Reserverisikos ist unabhängig vom konkreten Risikohorizont die Formulierung eines geeigneten stochastischen Modells für die Schadenabwicklung notwendig, welches konsistent zum verwendeten Reservierungsverfahren $\mathcal{T}_n$ für die Best-Estimate Schätzung ist.



Definition ultimatives Reserverisiko

Als ultimatives Reserverisiko wird das Risiko bezeichnet, dass die Best-Estimate Rückstellungen für angefallene, aber noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle nicht ausreichen, um allen zukünftigen Schadenzahlungen bis zur vollständigen Abwicklung nachzukommen.
Maßgebliche Größen für die Messung sind die Abweichungen der zukünftigen Zahlungen von den zugehörigen Reserveschätzern:

- Einzelnes Anfalljahr $1 \le i \le n$: $R_i^{(n)} - \hat{R}_i^{(n)} = U_i - \hat{U}_i^{(n)}$
- Gesamtportfolio, d.h. alle Anfalljahre $\{1,\dots,n\}$: $R^{(n)} - \hat{R}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(R_i^{(n)} - \hat{R}_i^{(n)})$

4.1.2 Ansätze zur Quantifizierung des ultimativen Reserverisikos

Wahl der Reserveverteilung für das ultimative Reserverisiko:

- lediglich zweiparametrige Verteilungen
- Die Lognormal- und Gammaverteilung zeichnen sich durch ihre Rechtsschiefe aus, die Lognormalverteilung hat dabei in der Regel den schwereren Tail.
- Einschränkungen der Normalverteilung: symmetrisch, kein ausschließlich positiver Wertebereich

Bei Gültigkeit des Chain-Ladder-Modells / additiven Modells und Anwendung der entsprechenden Reservierungsverfahren ergeben sich geschlossene analytische Formeln für die *mittleren quadratischen Vorhersagefehler*

- *des Reserveschätzers eines einzelnen Anfalljahres* $1 \leq i \leq n$

$$\widehat{\text{msep}}_{R_i^{(n)}|\mathcal{D}_n}\left(R_i^{(n)}\right) := \mathbb{E}\left[\left(\hat{R}_i^{(n)} - R_i^{(n)}\right)^2 \middle| \mathcal{D}_n\right] = \mathbb{E}\left[\left(\hat{U}_i^{(n)} - U_i\right)^2 \middle| \mathcal{D}_n\right]$$

- sowie *des Schätzers* $\hat{R}^{(n)}$ *für die Gesamtreserve*

$$\widehat{\text{msep}}_{R^{(n)}|\mathcal{D}_n}\left(R^{(n)}\right) := \mathbb{E}\left[\left(\hat{R}^{(n)} - R^{(n)}\right)^2 \middle| \mathcal{D}_n\right].$$

Die konkreten Formeln finden sich im Skript von Hrn. Quarg sowie dem Begleit-material (Excel-Implementierung)

In diesem Fall sind die ersten beiden Momente der Reserveverteilung bekannt:

- Mittelwert der Vorhersageverteilung: Best-Estimate-Reserve $\hat{R}_i^{(n)}$ bzw. $\hat{R}^{(n)}$
- Varianz der Vorhersageverteilung: $\widehat{\text{msep}}_{\hat{R}_i^{(n)}|\mathcal{D}_n}\left(R_i^{(n)}\right)$ bzw. $\widehat{\text{msep}}_{\hat{R}^{(n)}|\mathcal{D}_n}\left(R^{(n)}\right)$

Berechnung der Verteilungsparameter ausgehend von $\hat{R} := \hat{R}_i^{(n)}$ und $\widehat{\text{msep}} := \widehat{\text{msep}}_{\hat{R}_i^{(n)}|\mathcal{D}_n}\left(R_i^{(n)}\right)$

Normal $\mathcal{N}_1(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu} = \hat{R}$	$\hat{\sigma}^2 = \widehat{\text{msep}}$
Gamma(α,β)	$\hat{\alpha} = \hat{R}^2/\widehat{\text{msep}}$	$\hat{\beta} = \widehat{\text{msep}}/\hat{R}$
Lognormal$(\mu\ \ ,\sigma_{LN}^2)$	$\hat{\mu}_{LN} = \ln\left(\hat{R}^2/\sqrt{\hat{R}^2 + \widehat{\text{msep}}}\right) = \ln(\hat{R}) - \hat{\sigma}_{LN}^2/2$	$\hat{\sigma}_{LN}^2 = \ln\left(\widehat{\text{msep}}/\hat{R}^2 + 1\right)$

Mögliches Vorgehen:

- Simuliere anhand der mittleren quadratischen Vorhersagefehler (gegeben die Dreieckshistorie D_n) die Bedarfsreserven pro einzelnem Anfalljahr aus einer parametrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Da die Vorhersagen der Reserven für die einzelnen Anfalljahre weder unabhängig (gemeinsamer Schätzprozess) noch vollständig positiv (Unabhängigkeit im Prozess) korreliert sind, sind Einzelreserven geeignet in Abhängigkeit zu bringen, damit der Vorhersagefehler der Gesamtreserve nach Aggregation der Einzelreserven reproduziert wird.
- Aus den analytischen Formeln zu den Vorhersagefehlern lassen sich zusätzlich lineare Korrelationen ermitteln, die zur Kalibrierung der Abhängigkeiten genutzt werden können.

Berechnung des Risikokapitals

- Verlustvariable für das ultimative Reserverisiko ist $R_i^{(n)} - \hat{R}_i^{(n)} = U_i - \hat{U}_i^{(n)}$
- Standardabweichung: $\sigma\left(R_i^{(n)} - \hat{R}_i^{(n)}\right) = \widehat{\text{msep}}_{R_i^{(n)}|\mathcal{D}_n}\left(R_i^{(n)}\right)^{1/2}$
- Value at Risk: $VaR_\alpha\left(R_i^{(n)} - \hat{R}_i^{(n)}\right) = VaR_\alpha\left(R_i^{(n)}\right) - \hat{R}_i^{(n)}$ (analog bei Expected Shortfall und TailVaR)

In den wenigsten Fällen: Verwendung von Basisverfahren für Best-Estimate-Schätzungen
Stattdessen: Variationen des Basisverfahrens (Ausschluss einzelner Übergangsfaktoren, Beschränkung der Übergangfaktoren, Glättung der Chain-Ladder-Faktoren)

Wie ist bei der Risikobewertung mit Modifikationen der Basisverfahren umzugehen?

- Grundsätzlich: Modifikationen können schwankungserhöhend, aber auch schwankungsmindernd wirken
- Pragmatischer Ansatz: Übertrage den theoretischen Vorhersagefehler unter dem Basisverfahren bzw. dem zugehörigen stochastischen Abwicklungsmodell (sofern analytisch ermittelbar) auf die mit dem Verfahren $\mathcal{T}_n$ tatsächlich geschätzte Best-Estimate-Reserve
- Zur Sicherstellung größtmöglicher Konsistenz zwischen Best-EstimateBewertung und Risikomessung sollte das Basisverfahren hinreichend nahe an $\mathcal{T}_n$ liegen

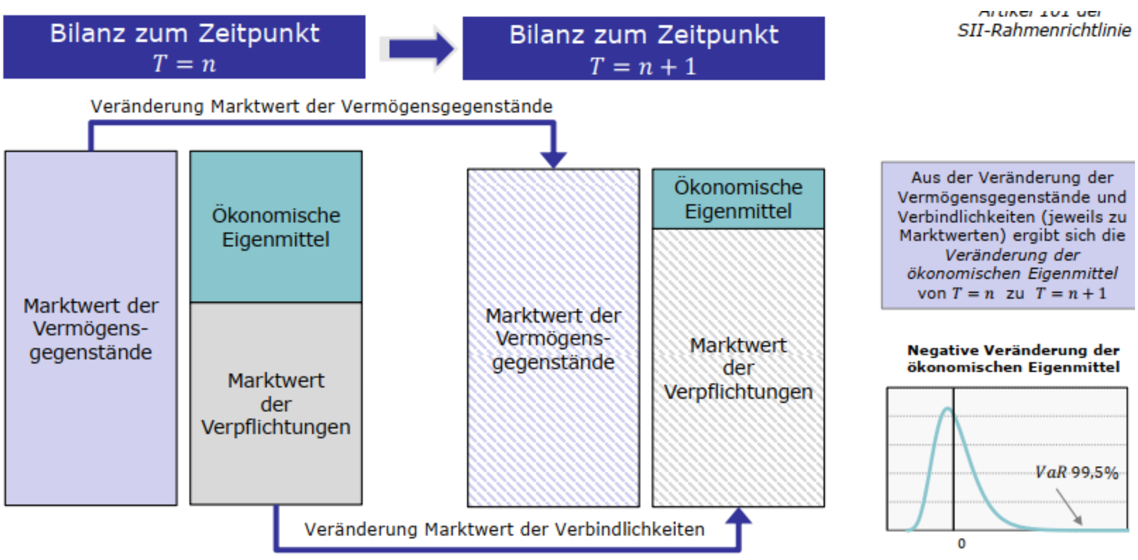
Bei Schwierigkeiten: Bootstrapping-Verfahren

Kapitel 5

Überleitung in die einjährige Risikosicht in der Versicherungstechnik

5.0.1 Allgemeine Überlegungen zum einjährigen Risikohorizont

Das SCR (Solvenzkapitalanforderung) entspricht dem Value-at-Risk der Veränderung der Basiseigenmittel eines Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmens zu einem Konfidenzniveau von 99,5



Zu Beginn des Kalenderjahres (erstes Rechteck):

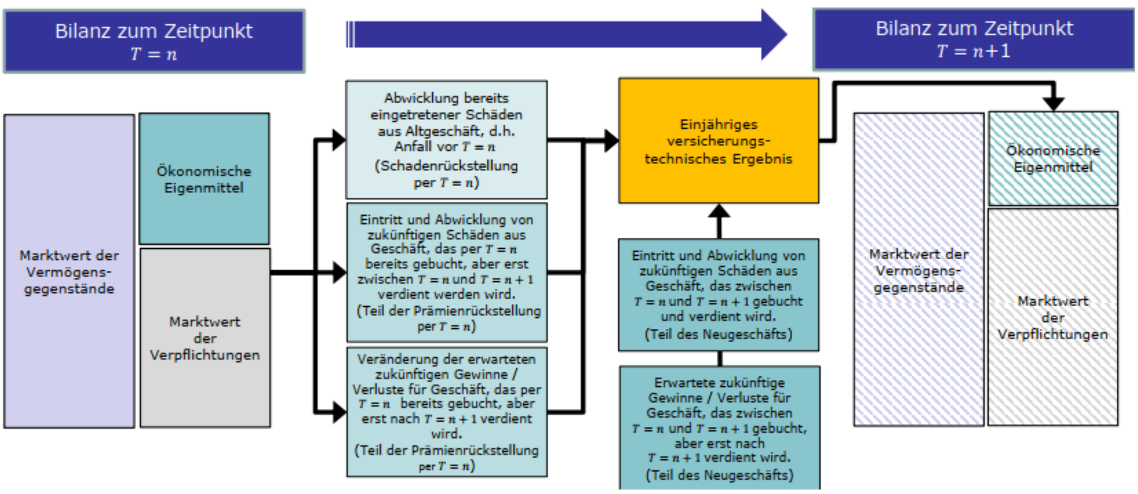
- liegt eine ökonomische Bewertung der vt. Verbindlichkeiten zum Stichtag $T = n$ vor
- Bester Schätzwert ist brutto (ohne Abzug von RV-Verträgen)
- Einforderbare Beträge werden gesondert berechnet

Während des Kalenderjahres (Pfeil):

- werden Schäden aus Altjahren gemeldet, bezahlt, Schadenrückstellungen aufgelöst und neu gebildet
- fallen Kosten für den Versicherungsbetrieb und Schadenregulierung an
- Angefallene Schäden im Kalenderjahr gemeldet, bezahlt, Schadenrückstellungen gebildet

Am Ende des Kalenderjahres (Zweites Rechteck)

- erfolgt ökonomische Neubewertung der vt. Verbindlichkeiten zum Stichtag ($T = n+1$) unter der Berücksichtigung der Entwicklungen
- In der einjährigen Risikosicht werden die Auswirkungen von Eintritt und Abwicklung der Schäden auf die ökonomischen Eigenmittel innerhalb des auf den Bewertungsstichtag folgenden Kalenderjahres betrachtet.
- Die Trennung zwischen Prämien- und Reserverisiko erfolgt anhand des Zeitpunkts des Schadenanfalls (beim Reserverisiko werden ausschließlich die bis zum Bewertungsstichtag bereits angefallenen Schäden betrachtet, beim Prämienrisiko die nach dem Bewertungsstichtag anfallenden Schäden).



Vt. Ergebnis des nächsten Kalenderjahres setzt sich zusammen aus:

- Zukünftige Gewinne/Verluste aus der Abwicklung der Altschäden (aus Anfalljahren $1,\dots,n$) während des nächsten Kalenderjahres
- Zukünftige Gewinne/Verlusten aus Anfall und Abwicklung von Neuschäden aus zukünftig verdientem Geschäft (Anfalljahr $n+1$) während des nächsten Kalenderjahres

5.0.2 Der einjährige Risikohorizont im Reserverisiko

Aktuarielle (Neu-)Schätzung der erwarteten zukünftigen Zahlungen $\{\mathbb{E}[S_{i,k}|\mathcal{D}_{n+1}]\}_{1\le i\le n,n-i+2<k\le\omega}$ mit der Reservierungsmethode $\mathcal{T}_{n+1}$

- *Schätzer* für die *nominale Reserve* $\hat{R}^{(n+1)} := \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{(n+1)}$ mit $\hat{R}_i^{(n+1)} := \sum_{k=n-i+3}^{\omega} \hat{S}_{i,k}^{(n+1)}, \hat{S}_{i,k}^{(n+1)} := \hat{\mathbb{E}}[S_{i,k}|\mathcal{D}_{n+1}]$
- *Schätzer* für den *nominalen Endschadenaufwand* $\hat{U}_i^{(n+1)} := \hat{R}_i^{(n+1)} + C_{i,n-i+2}$

Das ***einjährige (nominale) ökonomische Abwicklungsergebnis*** $\widehat{\mathrm{CDR}}^{(n\to n+1)}$ (= „*Claims Development Result*") für die Anfalljahre $\{1,\dots,n\}$ lässt sich definieren als:

$$\widehat{\mathrm{CDR}}^{(n\to n+1)} := \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathrm{CDR}}_i^{(n\to n+1)}$$

mit

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_i^{(n\to n+1)} = \hat{R}_i^{(n)} - S_{i,n-i+2} - \hat{R}_i^{(n+1)},$$

- $\hat{R}_i^{(n)}$ eingehende nominale Best-Estimate-Reserve für das Anfalljahr i zum Zeitpunkt $T = n$
- $\hat{R}_i^{(n+1)}$ ausgehende nominale Best-Estimate-Reserve für das Anfalljahr i zum Zeitpunkt $T = n+1$
- $S_{i,n-i+2}$ nominale Schadenzahlungen für Anfalljahr i zwischen $T = n$ und $T = n+1$

Das nominale ökonomische Abwicklungsergebnis für ein einzelnes Anfalljahr $1 \le i \le n$ lässt sich äquivalent darstellen als *Differenz zwischen den Ultimateschätzungen* in $T = n$ (= $\hat{U}_i^{(n)}$) und in $T = n+1$ (= $\hat{U}_i^{(n+1)}$) :

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_i^{(n\to n+1)} = \hat{U}_i^{(n)} - \hat{U}_i^{(n+1)}$$

$\widehat{\mathrm{CDR}}_i^{(n\to n+1)} > 0$ bedeutet einen **Abwicklungsgewinn** und führt ceteris paribus zu einem Anstieg der ökonomischen Eigenmittel, $\widehat{\mathrm{CDR}}_i^{(n\to n+1)} < 0$ hingegen einen **Abwicklungsverlust,** der damit ceteris paribus zu einem Rückgang der ökonomischen Eigenmittel führt.

Definition

Als einjähriges (nominales) Reserverisiko wird das Risiko eines (nominalen) Definition ökonomischen Abwicklungsverlustes über den Zeitraum von einem Kalenderjahr bezeichnet.

Ziel

Modellierung der kompletten Vorhersageverteilung des einjährigen nominalen ökonomischen Ziel Abwicklungsergebnisses $C\hat{D}R^{(n\to n+1)}$ gegeben die Dreieckshistorie D_n.

5.0.3 Direkte Anpassung der CDR-Verteilung gemäß Analytik

Analog zur ultimativen Risikosicht liegt für die gängigen stochastischen Abwicklungsmodelle (bspw. für das Chain-Ladder-Modell oder das additive Modell) auch der *mittlere quadratische Vorhersagefehler der einjährigen ökonomischen Abwicklungsergebnisse*

$$\widehat{\mathrm{msep}}_{\mathrm{CDR}_i^{(n\to n+1)}|\mathcal{D}_n}(0)$$

für einzelne Anfalljahre $i \in \{1, \ldots, n\}$ sowie

$$\widehat{\mathrm{msep}}_{\mathrm{CDR}^{(n\to n+1)}|\mathcal{D}_n}(0)$$

für das Gesamtportfolio in einer analytisch geschlossenen Darstellung vor.

- Diese Ergebnisse können erneut genutzt werden, um die Vorhersageverteilung des einjährigen ökonomischen Abwicklungsergebnisses mithilfe einer zweiparametrigen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu beschreiben.
- Setze hierzu:
  - Erwartungswert der Vorhersageverteilung = Prognostiziertes Abwicklungsergebnis = Null
  - Varianz der Vorhersageverteilung = mittlerer quadratischer Vorhersagefehler des Abwicklungsergebnisses
- und rechne beide Größen mittels Momentenmethode in die Parameter einer geeigneten parametrischen Verteilung um. Simuliere abschließend aus der spezifizierten Verteilung.
- Letztendlich erfolgt mit diesem Ansatz nur eine gesamthafte Modellierung aller Komponenten des Abwicklungsergebnisses, in der die Neuschätzung $\hat{R}^{(n+1)}$ implizit aufgeht.

Überlegungen zur **Verteilungswahl für das einjährige ökonomische Abwicklungsergebnis**:

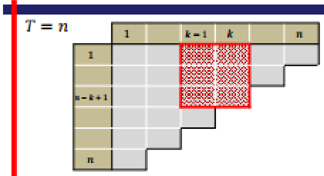
- Die *Normalverteilung* ist eine *symmetrische Verteilung* mit *unbeschränkter Trägermenge*, während die *Lognormal-* und *Gammaverteilung* beide eine *positive Trägermenge* besitzen und *Rechtsschiefe* aufweisen.
- Da das Abwicklungsergebnis eine zentrierte Zufallsgröße ist, die auch negative Werte annehmen kann, ist es bei der Lognormal- und der Gammaverteilung erforderlich, die Trägermenge zu verschieben.
- Da die Größe $\widehat{\mathrm{CDR}}^{(n\to n+1)}$ zudem eine Gewinnvariable darstellt, sollte bei Lognormal- und der Gammaverteilung der Übergang zur Verlustvariablen $-\widehat{\mathrm{CDR}}^{(n\to n+1)}$ erfolgen: somit sind die Abwicklungsgewinne durch die Trägeruntergrenze beschränkt und Abwicklungsverluste theoretisch unbeschränkt.

Berechnung der Verteilungsparameter von $-\widehat{\mathrm{CDR}}^{(n\to n+1)}$ ausgehend von $\hat{R} \coloneqq \hat{R}^{(n)}$ und $\widehat{\mathrm{msep}} \coloneqq \widehat{\mathrm{msep}}_{\widehat{\mathrm{CDR}}^{(n\to n+1)}|\mathcal{D}_n}(0)$

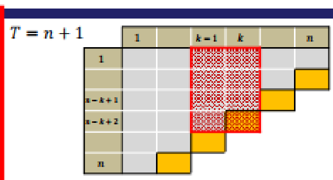
Normal $\mathcal{N}_1(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu} = 0$	$\hat{\sigma}^2 = \widehat{\mathrm{msep}}$	
Verschoben Gamma(α,β,τ)	$\hat{\alpha} = \hat{R}^2/\widehat{\mathrm{msep}}$	$\hat{\beta} = \widehat{\mathrm{msep}}/\hat{R}$	$\tau = -\hat{R}$
Verschoben Lognormal(μ,σ^2,τ)	$\hat{\mu} = \ln\left(\hat{R}^2/\sqrt{\hat{R}^2+\widehat{\mathrm{msep}}}\right) = \ln(\hat{R}) - \hat{\sigma}^2/2$	$\hat{\sigma}^2 = \ln\left(\widehat{\mathrm{msep}}/\hat{R}^2 + 1\right)$	$\tau = -\hat{R}$

Unter der (vereinfachten) Annahme, dass die aktuarielle Bewertung der Schadenreserven zu beiden Stichtagen n und $n+1$ ausschließlich anhand eines **reinen Chain-Ladder-Verfahrens** (d.h. keine Faktorenausschlüsse und Kurvenglättung) ohne Nachlauf auf den kompletten Schadendreiecken $\mathcal{D}_n$ bzw. $\mathcal{D}_{n+1}$ vorgenommen wird, ergibt sich folgende Darstellung des einjährigen Abwicklungsergebnisses:

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_i^{(n\to n+1)} = \hat{U}_i^{(n)} - \hat{U}_i^{(n+1)} = C_{i,n-i+1}\cdot\left[\prod_{k=n-i+2}^{n}\hat{f}_k^{(n)} - F_{i,n-i+2}\cdot\prod_{k=n-i+3}^{n}\hat{f}_k^{(n+1)}\right]$$



$$\hat{f}_k^{(n)} := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,k-1}}$$



$$\hat{f}_k^{(n+1)} := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+2} C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+2} C_{i,k-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+2} C_{i,k-1}}\cdot\hat{f}_k^{(n)} + \frac{C_{n-k+2,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+2} C_{i,k-1}}$$

Dieser Ansatz ist der Ausgangspunkt der sog. **Merz-Wüthrich-Formeln**, die bei Gültigkeit der Voraussetzungen des stochastischen Chain-Ladder Modells (siehe Folie 90) eine geschlossene analytische Darstellung für den Vorhersagefehler des einjährigen Abwicklungsergebnisses bei Chain-Ladder basierten Schätzungen beinhalten.

Implementierung verfügbar