Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeiner Unsinn für Grundlagen aktuarieller Kalkulation

Sparten

- Umfasst Leben, Kranken, Komposit, Pensionen
- Leben, Kranken, Pensionen sind zusammen Personenversicherung
- Komposit: Schaden/Unfall
- Besonders: priv. Unfall ist Komposit

Definition 1 *(Farny) Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Mittelbedarfs unter Nutzung von Ausgleichsmechanismen im Kollektiv.*

Wichtigste Zweige Komposit

- Sachversicherung
- Haftpflichtversicherung
- Transportversicherung
- Technische Versicherung

Prämienzahlweise

- üblicherweise jährlich
- bei unterjährigen Zahlung Ableitung aus Jahresprämie

Diskont und Barwert

- Diskontfunktion bei einjährigem Zinssatz r: $D(t) = (1+r)^{-t}$
- Diskontfunktion bei Rechnungszins i: $D(t) = (\frac{1}{1+i})^t =: v^t$
- Barwert aller Leistungen: $L = \sum_{t=0}^{\bar{n}} D(t) \cdot L_t$
- Barwert aller Prämien: $P = \sum_{t=0}^{\bar{n}} D(t) \cdot P_t$
- Barwert aller Kosten: $K = \sum_{t=0}^{\bar{n}} D(t) \cdot K_t$
- Sicherheitszuschlag: Eintrittswahrscheinlichkeit erhöhen, Diskont verringern

Äquivalenzprinzip

$$\text{(ÄP I):} \quad E(P) = E(L) \tag{1.1}$$

$$\text{(ÄP II):} \quad E(P) = E(L) + E(K) \tag{1.2}$$

Definition 2

- *Falls L und P das Äquivalenzprinzip erfüllen, dann heißt $P_\bullet$ Nettorisikoprämienprozess und P_t Nettorisikoprämie.*
- *L und P erfüllen ÄP und $\exists\ w_t$ Wahrscheinlichkeit der Prämienzahlung P_t und $\bar{P}$ konstant mit $E(P_t) = \bar{P} \cdot w_t\ \forall\ t \in \{0, ..., \bar{n}\}$. $\bar{P}$ konstante Nettorisikoprämie.*
- *Bruttorisikoprämie: $P^+ := \bar{P} + c$ mit $c > 0$ Sicherheitszuschlag.*
- *Alternativ: Sicherheitszuschlag bereits in Nettorisikoprämie enthalten*

Notation

- $\bar{n}$: Modelldauer
- t: Zeit in jahren
- r: einjähriger konstanter Zinssatz
- $D(t)$: Diskontfunktion
- L_t: Versicherungsleistung in t
- q_t: Eintrittswahrscheinlichkeit Leistungsfall in t
- P_t: Prämienzahlung in t

- w_t: Wahrscheinlichkeit Prämienzahöung in t
- K_t: Kosten in t
- L: Leistungsbarwert
- P: Prämienbarwert
- K: Kostenbarwert

Sterbetabeln

Alter	Männer				
	l_x durchlebte Bestandsjahre	t_x Tote	q_x^{roh} rohe Sterb-lichkeitswerte	$q_x^{2.Ord.}$ Sterblichkeit 2. Ordnung	q_x Sterblichkeit 1. Ordnung (Zuschlag 34%)
14	33.700	9	0,000267	0,000226	0,000303
15	35.163	7	0,000199	0,000311	0,000417
16	35.471	11	0,000310	0,000416	0,000557
17	36.430	15	0,000412	0,000529	0,000709
18	36.158	31	0,000857	0,000634	0,000850
19	36.500	28	0,000767	0,000711	0,000953
20	43.193	37	0,000857	0,000755	0,001012
21	64.534	64	0,000992	0,000763	0,001022
22	100.268	74	0,000738	0,000749	0,001004
23	142.584	110	0,000771	0,000719	0,000963

Allgemeine aktuarielle Herangehensweise, spartenübergreifend ähnliches Standardvorgehen zur Bewertung zufälliger zukünftiger Versicherungsleistungen

- Beobachtung von Vergangenheit (Daten) zur Vorhersage der Zukunft
- Anpassung geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Sorgfalt bzgl. möglicher Änderungen von Annahmen im zeitlichen Verlauf
- typischerweise konstante Prämienhöhe
- Risiko steigt mit zeitlichem Verlauf
- Ansparprozess und Entsparprozess

Rückstellungen

- Ziel: Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit
- versicherungstechnische Rückstellungen wichtigste Passivposition in der Bilanz des VU
- hohe bedeutung für interne Unternehmensbewertung
- Einfluss auf Besteuerung des VU
- Unterschied zwischen bilanzieller und einzelvertraglicher versicherungsmathematischer Deckungsrückstellung
- Deckungskapitel $\widehat{=}$ Erwarteter Barwert künftiger Leistungen - Erwarteter Barwert künftiger Beiträge

Rückstellungen in der Schadenversicherung

- Einzelschadenreserven: für noch nicht vollständig abgewickelte Schäden
- Deckungsrückstellungen: für Haftpflicht, Unfallrenten und Beitragsrückgewähr in Unfall
- Spätschadenpauschalreserve: für IBNR
- Schwankungsrückstellung: relevant für Zweige mit stark variierenden Schadenfällen

Prämienprinzipien

- Ziel: Zuordnung angemessener Prämie durch Bemessung geeigneter Sicherheitszuschläge
- Deckung der Leistungsfälle und zusätzliche Prämie zur Bereitschaft der Risikoübernahme durch VU (Sicherheitszuschlag SZ(X))
- Prämienprinzipien $H(X) := E(X) + SZ(X) = P^+$, X ist das versicherte Risiko
- Sicherheitszuschlag bei gleichem EW höher, wenn Risiko gefährlicher
- Nettorisikoprinzip: $H(X) = E(X)$
- Erwartungswertprinzip: $H(X) = E(X) + \delta \cdot E(X) = (1+\delta) \cdot E(X)$
- Varianzprinzip: $H(X) = E(X) + \delta \cdot Var(X)$

- Standardabweichungsprinzip: $H(X) = E(X) + \delta \cdot \sqrt{Var(X)} = E(X) + \delta \cdot \sigma(X)$ (anders als andere nicht additiv)

- Exponentialprinzip: $H(X) = \frac{1}{a} \cdot ln(M_X(a)) = \frac{1}{a} \cdot ln(E[e^{aX}])$ mit $a > 0$, Monumenterzeugender Funktion M_X, entspricht näherungsweise Varianzprinzip mit $\delta = \frac{a}{2}$ und ist ein Spezialfall des Nutzenprinzips

- Es gilt: $\Gamma(1,\lambda) = Exp(\lambda)$ und $X_i \sim \Gamma(a_i,\lambda),\ i = 1,...,n$ unabhängig $\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^n a_i,\lambda)$

Nettorisikoprämie berechnen

$$E(P) = \sum_{t=0}^{n} w_t \cdot D(t) \cdot P_t \tag{1.3}$$

$$E(L) = \sum_{t=0}^{n} q_t \cdot D(t) \cdot L_t \tag{1.4}$$

$$E(P) = E(L) \tag{1.5}$$

w_t, q_t sind die Wahrscheinlichkeiten, einer positiven Prämien- bzw. Leistungszahlung.

Definition 3 *(Ungleichung von Cantelli)*

$$P(X > E(X) + c) \leq \frac{Var(X)}{c^2 + Var(X)} \tag{1.6}$$

$$\textit{Hinweis: SZ wird hier stark überschätzt.} \tag{1.7}$$

$$c \leq \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{Var(X)} \tag{1.8}$$

Beispiele Risikomaße

- Erwartungswert $E(X)$
- Varianz $Var(X)$
- Schiefe $\gamma(X)$ (Symmetriemaß
- Tail-Whk $P(X > t)$
- Ruin- und Verlustwahrscheinlichkeiten
- Bernoulli-Nutzen
- Value at Risk (VaR), Expected Shortfall, Tail Value at Risk (TVaR)

Definition 4

$$\text{Additivität: } H(X+Y) = H(X) + H(Y)\ \forall\ X, Y \text{ stochastisch unabhängig} \tag{1.9}$$

$$\text{Subadditivität: } H(X+Y) \leq H(X) + H(Y)\ \forall\ X, Y \text{ stochastisch unabhängig} \tag{1.10}$$

$$\text{Erwartungswertübersteigend: } SZ(X) \geq 0 \tag{1.11}$$

Definition 5 *(1) Ein Kollektiv stellt eine Zusammenfassung von Risiken dar, die durch gleichartige Gefahren bedrohnt sind. Kollektiv bedeutet nicht zwangsläufig, dass es sich um versicherte Risiken handelt.*
(2) Der Risikoausgleich im Kollektiv stellt neben dem Ausgleich in der Zeit ein wesentliches Funktionsprinzip von Versicherungen dar.
(3) Ein Kollektiv heißt homogen, falls alle Risiken des Kollektivs dieselbe Verteilung besitzen, anderenfalls heißt es heterogen.
(!) Hinweis: Homogenität und Unabhängigkeit sind keine notwendige Voraussetzung für Risikoausgleich im Kollektiv. Im Gegenteil: gleicht sich durch gegenläufige Abhängigkeiten z.T. aus.

Risikoausgleich

- Das Überschreiten einer prozentualen Maximalabweichung vom Erwartungswert wird bei wachsendem Kollektiv immer unwahrscheinlicher.
- Risikoausgleich im Kollektiv erfolgt insofern, als dass der Variationskoeffizient als versicherungsspezifisches Risikomaß für wachsende Bestände gegen 0 konvergiert.
- Mit zunehmender Zahl von Risiken sinkt die relative Abweichung des arithmetischen Mittels vom Erwartungswert.

Definition 6 *$Y_i \geq$ kumulierter Gesamtaufwand des i-ten Risikos. $S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.*

$$\text{Durch Linearität des EWs: } E(S^{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \tag{1.12}$$

$$\text{Da } Y_i \text{ unabhängig: } Var(S^{ind}) = \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) \tag{1.13}$$

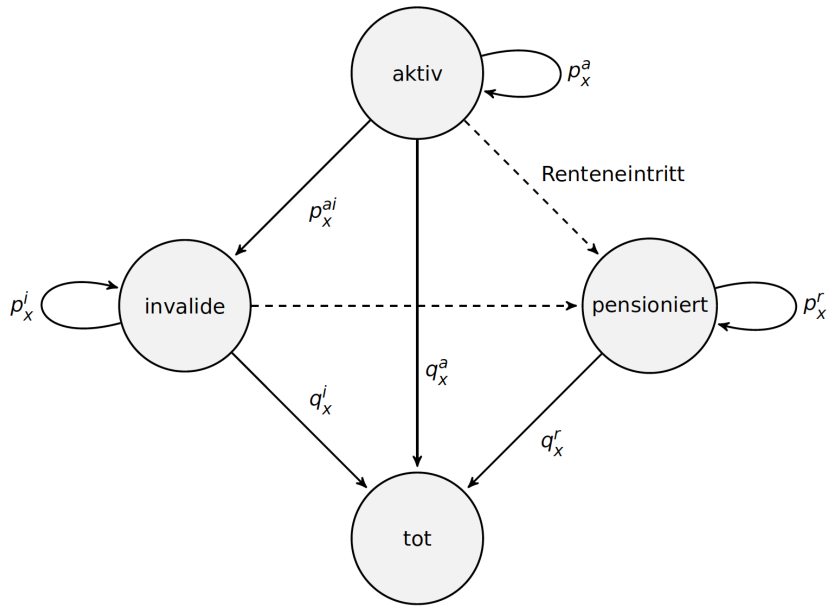
$$\text{Variationskoeffizient: } Vko(S^{ind}) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i)}}{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)} \tag{1.14}$$

Definition 7 *Erste und zweite Formel von Wald. N die Schadenzahl.*
(1) $E(S^{koll}) = E(N) \cdot E(X)$
(2) $Var(S^{koll}) = E(N) \cdot Var(X) + (E(X))^2 \cdot Var(N)$

Gegenüberstellung individuelles und kollektives Modell

- dieselbe Gesamtsumme $S^{ind} = S^{koll}$
- ind: $n =$ Anzahl individuell betrachteter Risiken (deterministisch), koll: $N =$ Anzahl der Finanzaufwände, Zufallsvariable
- ind: Gesamtaufwand ist endliche Summe, koll: Zufallssumme
- ind: $Y_i =$ kumulierter Finanzaufwand eines Risikos, koll: $X_j =$ Höhe der einzelnen Finanzaufwände
- im individuellen Modell Aggregation der einzelnen Aufwände pro Risiko und Zeitraum erforderlich
- kollektives Modell: Betrachtung einzelner Ereignisse ohne Erfassung, welches Risiko den Aufwand verursacht
- i.A. bietet das KM eine bessere Basis für die Schätzung der Verteilung
- Annahme identisch verteilter Aufwände bei IM nur näherungsweise erfüllt

Zustandsmodell der Personenversicherung



- Modellannahmen nicht immer sachgerecht
- Markov-Eigenschaft kritisch: Relevant, ob *aktiv* $\rightarrow$ *Rente* oder *invalide* $\rightarrow$ *Rente*
- z.T. sehr viele Zustände erforderlich (z.B. Abhängigkeit der Leistungshöhe von Anzahl Dienstjahren, bei Invalidität der Zeitpunkt des Eintritts in den Invalidenstatus)

- Markov in der Praxis begrenzt möglich, denn: Annahme der Markov-Eigenschaft oft kritisch, sehr viele Zustände zur Modellierung nötig, Erreichen des Gleichgewichtszustands fraglich

Risikoteilung

- teilweiser Risikotransfer im direkten Geschäft zwischen VN und Erstversicherer sowie im Rahmen von Rückversicherung (RV)
- Risikoteilung im Direktgeschäft: Selbstbehalt beim VN, genannt *Franchisen*
- in der Rückversicherung: Selbstbehalt beim Erstversicherer, genannt *Prioritäten*
- risikopolitisch und nicht gewinnorientierte Vorgehensweise
- für den Erstversicherer:
  - Verringerung des versicherungstechnischen Risikos
  - Erhöhung Zeichnungskapazität
  - Solvenzverbesserung
  - Kapitalkostenreduktion
- für den Rückversicherer:
  - Existenzgrundlage
  - bessere Diversifikation der Risiken als beim Erstversicherer

Begrifflichkeiten Rückversicherung

- aktive RV: Angebot von Rückversicherungskaapzitäten
- passive RV: Nachfrage nach RV-Schutz durch Erstversicherer
- Retrozession: Weitergabe in Rückdeckung genommener Risiken eines RV an anderen RV
- obligatorische RV: Verpflichtung des Erstversicherers zur Übertragung aller vertraglich definierten Risiken ohne Ablehnungsrecht des RV
- fakultative RV: individuelle Abgabe und Annahme von Risiken auf einzelvertraglicher Basis
- Originalbasis: RV erhält anteilig Prämie und muss Deckungskapital bilden
- Risikobasis: RV erhält Risikobeitrag und bildet kein Deckungskapital

Proportionale Risikoteilung

- proportionale Aufteilung der Schäden in festem Verhältnis zwischen Vertragspartnern
- Proportionen vorab fest und unabhängig von Schadenhöhen
- einfache Struktur, geringe Flexibilität
- bei RV Schicksalsteilung: Übernahme von Teilen des Erstversicherungsrisikos, aber nicht kaufmännischen oder unternehmerischen Risikos des Erstversicherers
- wichtigste Formen der proportionalen RV: Quotenrückversicherung, Summenexedentenrückversicherung
  - QRV: feste Quotenabgabe q, Selbstbehalt $\underline{S^{ind}} = (1-q) \cdot S^{ind}$
  - SERV: Festlegung eines Maximums v_0 als maximaler Selbstbehalt des Erstversicherers bei jedem einzelnen Risiko und vertragsindividuelle Quote $q_i = \frac{max\{v_i - v_0,\, 0\}}{v_i}$ in Abhängigkeit der jeweiligen Versicherungssumme
- SERV dient der Homogenisierung des Portfolios und der Reduktion von Spitzenrisiken
- Üblicherweise Haftungsbegrenzung für RV i.H.v. Vielfachem m von v_0. Mehrere aneinandergereiht, s.d. man Layering erhält.

nicht-proportionale Risikoteilung

- alle, die keine proportionale Aufteilung vorsehen
- komplizierte Strukturen
- schwierige quantitative Analysierbarkeit
- gut zur Erreichung gezielter Effekte
- dominierend: Abzugsfranchise
  - Franchisegrenze absoluter Höhe a zwischen VN und VU
  - Schaden in Höhe $X \;\Rightarrow \underline{X} = min\{X, a\}$, d.h. VU übernimmt Teil, der a übersteigt
  - Jahresfranchise: analog mit Franchisegrenze und Jahresgesamtschaden
  - Integralfranchise: wenn Grenze überschritten, übernimmt VU Schaden komplett

  - Zeitfranchise: VN trägt jeden Schaden bis zum Ablauf der Frist selbst

- wichtigste Formen:
  - Schadenexzedentenrückversicherung: Priorität a und Limit l, Übernahme des Teils, der a übersteigt und unter l liegt. Wirkt pro Risiko, eignet sich für LCs. Limitierte Layer als Differenz zweier unlimitierter Layer darstellbar.
  - Kumulschadenexzedentenrückversicherung: Priorität a^*, Limit l^* pro Kumulereignis (Anwendung auf Gesamtschäden von Kumulereignissen). Übernahme des die Prio übersteigenden Teils.
  - Jahresüberschadenexzedentenrückversicherung: Anwendung auf Jahresgesamtschaden, ebenfalls Priorität und Limit

Entschädigung

- Entschädigung $Z = g(X)$, $X \mathrel{\hat{=}}$ Finanzaufwand, g monoton wachsend, $g(x) \leq x$
- Selbstbehalt des VN $X - Z = X - g(X)$
- proportionale Selbstbeteiligung: $Z = g_1(X) := q \cdot X,\ q \in (0,1)$
- Abzugsfranchise: $Z = g_2(X) := (X-a)^+,\ a > 0$
- Haftungsbegrenzung: $Z = g_3(X) := min(X;I),\ I > 0$
- allgemeine Darstellung der Entschädigung:

$$Z = q \cdot min\{(X-a)^+, I\} = \begin{cases} 0 & X \leq a \\ q \cdot (X-a) & a < X \leq a+I \\ q \cdot I & a+i < X \end{cases} \tag{1.15}$$

- Prämie basiert auf Erwartungswert der Entschädigung $E(Z) := E[q \cdot min\{(X-a)^+, I\}] = q \cdot \int_a^{a+I} (1-F(x))dx$, wobei $F(x)$ die Verteilungsfunktion der Finanzaufwände ist.

Kapitel 2

Schadenversicheungsmathematik

Notation

- n: Anzahl der Verträge
- α_i: Jahreseinheit des i-ten Vertrages, $i = 1, \ldots, n$
- v_i: Versicherungssumme des i-ten Vertages
- b_i: Jahresbeitrag des i-ten Vertrages
- N: (zufällige)Anzahl Schäden
- X_j: (zufällige) Höhe des j-ten Einzelschadens, $j = 1, \ldots, N$
- r: Anzahl der Tarifmerkmale
- M_k: k-tes Tarifmerkmal, $k = 1, \ldots, r$
- n_k: Anzahl der verschiedenen Ausprägungen des k-ten Merkmals
- $a_{j,k}$: j-te Ausprägung des k-Tarifmerkmals, $j = 1, \ldots, n_k$

Schadenkennzahlen

- Schadendaten: Zeitpunkt, Art und Ursache, Sachlicher Bezug, Ort, Entschädigung
- Bestandsdaten: Versicherungssumme, persönliche Daten der VN, ...
- Exposure: Das Risiko eines Vertrags oder eines Bestandes
Exposuremaß: versicherungstechnische Risiko bzw Schadenbedarf eines Bestandes (Bsp: Jahreseinheiten, Anzahl Risiken, Summe Beiträge, ...)
- Anzahl Jahreseinheiten bzw. durchschnittliche Anzahl der Verträge: $n_0 := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
- Schadenhäufigkeit / Frequenz: $H := \frac{\text{Anzahl Schäden}}{\text{Anzahl Jahreseinheiten}} = \frac{N}{n_0}$

- Schadendurchschnitt: $D := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl Schäden}} := \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{S}{N}$
- Schadenbedarf: $SB := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl Jahreseinheiten}} = \frac{S}{n_0} = H \cdot D =$ Schadenhäufigkeit $\cdot$ Schadendurchschnitt
- Summe verdiente Beiträge: $b := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot b_i$
- Schadenquote: $SQ := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Summe verd. Beiträge}} = \frac{S}{b}$
- durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme: $v := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$
- Schadensatz: $SS := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{durchschn. kumulierte V-Summe}} = \frac{S}{v}$
- durchschnittliche Versicherungssumme: $v_0 := \frac{\text{durchschn. kumulierte V-Summe}}{\text{Anzahl Jahreseinheiten}} = \frac{v}{n_0}$
- Schadengrad: $SG := \frac{\text{Schadendurchschnitt}}{\text{durchschn. V-Summe}} = \frac{D}{v_0}$

Gütekriterien Exposuremaß

- Proportionalität zum Risiko
- Praktikabilität
- Zeitstabilität des Maßes

Datentypen

- Schadendaten: Zeitpunkt, Art und Ursache, Ort, Höhe der Entschädigung etc...
- Bestandsdaten: Versicherungssumme, persönliche Daten etc...

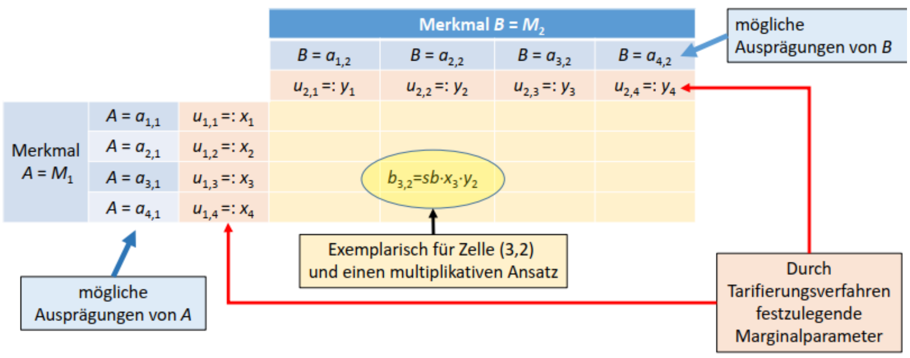
Grundlagen der Tarifierung

- Risikomerkmal: statistisch signifikanter Zusammenhang zum Schadenverhalten
- Tarifmerkmal: Rahmen der Tarifierung
- Risikoklasse: genau die Risiken, die bei sämtlichen Tarifmerkmalen die gleiche Ausprägung haben

Vorgehen:

- Jedem Risiko wird im Rahmen der Tarifierung zunächst der Vektor der Ausprägung $(a_{i_1,1}, a_{i_2,2}, ..., a_{i_r,r})$ der ausgewählten Tarifmerkmale $M_1, ..., M_r$ zugeordnet. Dieser Vektor legt dann genau ein der $t := \prod_{k=1}^{r} n_k =$Anzahl der Tarifzellen verschiedenen Tarifzellen eindeutig fest.
- Für jedes r-Tupel $(i_1, ..., i_r)$ und damir für jede Tarifzelle ist die Nettorisikoprämie $b_{i_1,...,i_r}$ zu bestimmen

- Tarifmodelle verwenden Schadenbedarfe und für jedes Merkmal M_k, $k = 1, \ldots, r$ und jede Ausprägung $a_{j,k}$, $j = 1, \ldots, n_k$ dieses k-ten Merkmals einen der insgesamt $n := \sum_{k=1}^{r} n_k$ sogenannten Marginalparameter
- Dieses Marginalfaktoren bzw. summanden repräsentieren die verschiedenen Ausprägungen der Merkmale und quantifizieren den mittleren Einfluss der Ausprägung auf die Schadenaufwendungen und sind zu schätzen
- $u_{k,j} :=$ Marginalfaktor bzw. summand der j-ten Ausprägung des k-ten Merkmals
- Multiplikatives Modell: $b_{i_1,\ldots,i_r} := sb \cdot \prod_{k=1}^{r} u_{k,i_k}$
- Additives Modell: $b_{i_1,\ldots,i_r} := sb + \sum_{k=1}^{r} u_{k,i_k}$



Tarifierungsverfahren

Alles multiplikative Modelle:

Vereinfachte Bezeichnungen: $A := M_1$, $B := M_2$ Merkmale mit $p := n_1$, $q := n_2$ Merkmalsausprägungen. Es gilt: $t = p \cdot q$ und $n = p + q$. Außerdem: $x_i := u_{1,i}, i = 1, \ldots, p$ und $y_j := u_{2,j}, j = 1, \ldots, q$. Zusätzlich $s_{i,j}$ Gesamtschaden in Tarifzelle (i, j), $v_{i,j}$ Volumenmaß und $sb_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{v_{i,j}}$ Schadenbedarf.

Es ergeben sich die Marginaldurchschnitt: $sb_{i,\circ} := \frac{s_{i\bullet}}{v_{i\bullet}}$ und $sb_{\circ,j} := \frac{s_{\bullet j}}{v_{\bullet j}}$ und der Schadenbedarf $sb := \frac{s_{\bullet\bullet}}{v_{\bullet\bullet}}$

Tarifierungsverfahren mit Marginaldurchschnitten:

- heuristischer Ansatz: Marginalfaktoren als normierte Marginaldurchschnitte der Risiken mit den jeweiligen Merkmalsausprägungen definieren:
  $x_i^{MD} := \frac{sb_{i\circ}}{sb}$
  $y_j^{MD} := \frac{sb_{\circ j}}{sb}$
- Dann folgt: $b_{i,j}^{MD} := sb \cdot x_i^{MD} \cdot y_j^{MD}$

- Verfahren liefert meist wenig zufriedenstellende Ergebnisse $\rightarrow$ Weiterentwicklung erforderlich

Tarifierungsverfahren von Bailey & Simon:

- Ansatz orientiert sich an der Abstandsfunktion des χ^2-Tests
- Versucht die Marginalfaktoren x_i, y_j so zu wählen, dass die Summe der (gewichteten) quadratischen Abstände zwischen den beobachteten Gesamtschäden s_{ij} und den kumulierten Nettorisikoprämien $v_{i,j} \cdot b_{i,j} = v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j$ über alle Zellen minimiert wird.
- Lösungen ergeben sich - nach Nullsetzen der partiellen Ableitungen - durch "p+q nichtlinearen Bestimmungsgleichungen"(nicht explizit lösbar, aber lösbar mit Fixpunktiteration)
- Grenzwerte der Iteration geben die Marginalfaktoren x_i^{BS} und y_j^{BS} (nicht eindeutig bestimmt)
- Es folgt: $b_{i,j}^{BS} := sb \cdot x_i^{BS} \cdot y_j^{BS}$
- Verfahren reagiert empfindlich auf Ausreißer und überschätzt beobachteten Gesamtschaden

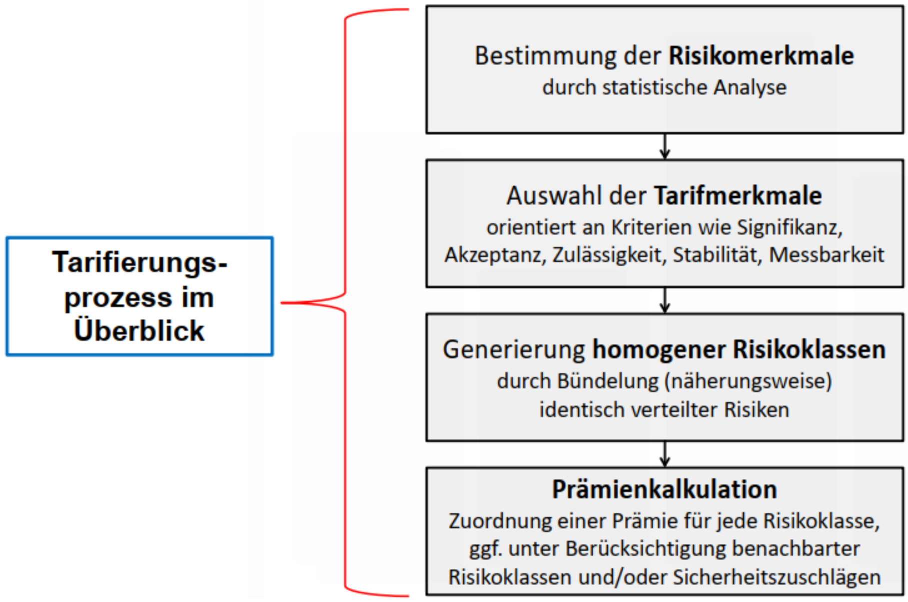
Marginalsummenverfahren

- Ansatz: Für jede Ausprägung eines der beiden Merkmale sollen die kumulierten Nettorisikoprämien mit den kumulierten Gesamtschäden übereinstimmen.
- Grundlage zur Bestimmung der Marginalfaktoren sind Marginalsummengleichungen
- Marginalsummengleichungen ergeben nichtlineares Gleichungssystem mit $p+q$ Gleichungen und Unbekannten
- Lösen ebenfalls mit Fixpunktiteration:

$$x_i = \frac{s_{i\bullet}}{sb \cdot \sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot y_j} \tag{2.1}$$

$$x_i = \frac{s_{i\bullet}}{sb \cdot \sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot x_i} \tag{2.2}$$

- Bei Konvergenz ergeben sich die Grenzwerte als Marginalfaktoren x_i^{MS} und y_j^{MS}



Auswahl der Tarifmerkmale

1. Ermittlung von Risikomerkmalen

   - Finden von statistisch signifikanten Merkmalen aus Daten zweierlei Arten: Schadendaten und Bestandsdaten

   - Auswahl potenzieller Risikomerkmale permanent prüfen

   - Besondere Beachtung der Großschäden durch "Kupierung": Schäden werden an sog. Kuperungsgrenzen abgeschnitten. Pro Schaden stellt die Grenze die max. Höhe dar, mit denen Schadenaufwendungen in den weiteren Analysen berücksichtigt werden

2. Auswahlkriterien einzelner Tarifmerkmale

   - Wichtigste Kriterien: Signifikanz, möglichst unabhängig, Zulässigkeit, Messbarkeit, Anzahl der Tarifmerkmale, Stabilität/Robustheit, Bezug zum Risiko, Imageaspekte

3. Auswahlmethoden der Gesamtheit der Tarifmerkmale

   - Einerseits: Gute Erklärung des Schadenaufkommens, andererseits: stochastische Unabhägigkeit oder Analysierung ihrer Wechselwirkung

   - Für die Tarifmerkmale gemeinsame Verteilung: $P^{X_1,\ldots,X_r}$

   - Bei stochastischer Abhängigkeit steigt der Grad der Komplexität um P zu berechnen deutlich an

   - Moderne Ansätze: Einsatz von Copulas für die Abhängigkeiten

- Ansatz 1: Multiple Regressionsanalyse (**GENAUER? Kap 4**)
- Ansatz 2: Verfahren der schrittweisen Auswahl (**GENAUER?**)

Abwicklungsmuster

Abwicklungsmuster sind die Basis der Modellbildung für zahlreiche Methoden der Schadenreservierung. Sie unterstellen für ausgewählte zentrale Kennzahlen der Schadenabwicklung bestimmte Systematiken und erklären die Abweichungen von diesen systematischen Größen (Erwartungswerten) als zufällige und unsystematische Schwankungen
1. für Anteile ϑ

- Für jedes Anfalljahr i wird der erwartete Zuwachs im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zum erwarteten Endschadenstand definiert: $\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$, $i,k = 0,...,n$ (Anteile unabhängig von Anfalljahr)
- Es gilt $\sum_{k=0}^{n} = 1$.
- Bei Schadenanzahl bzw. -zahlungen gilt: $\vartheta_k > 0$

2. für Quoten γ

- Für jedes Anfalljahr i wird der erwartete Schadenstand im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu dem erwarteten Endschadenstand definiert: $\gamma_k = \frac{S[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$, $i,k = 0,...,n$ (Quoten unabhängig von Anfalljahr)
- Es gilt $\gamma_n = 1$
- Bei Schadenanzahl bzw. -zahlungen gilt: $\gamma_0 < ... < \gamma_n$

3. Für Faktoren φ

- Für jedes Anfalljahr wird der erwartete Schadenstand im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zum erwarteten Schadenstand im $(k-1)$-ten Abwicklungsjahr definiert: $\varphi_k = \frac{S[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$, $i,k = 0,...,n$
- $\hat{\gamma}_k = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l}$
- Bei Schadenanzahl bzw. -zahlungen gilt: $\varphi_k > 1$

4. Für Schadenquotenzuwächse

- In Anwendung verwendet man die Prämieneinnahmen der Anfalljahre für Volumenmaße $\pi_0,...,\pi_n$ Erwarteter Schadenquotenzuwachs des k-ten Abwicklungsjahrs für das i-te Anfalljahr: $\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$, $i,k = 0,...,n$
- erwartete Endschadenquote: $\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i}$

GLMs

- Verallgemeinerte lineare Modelle erweitern den Ansatz der linearen Regression durch Verwendung einer streng monoton wachsenden Transformation $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ -> "Link-Funktion"
- transformierter Erwartungswert soll lineare Funktion in x sein:

$$g(\mu(x)) = g(E[Y|X = x]) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i = \eta(x) \tag{2.3}$$

- $\eta(x)$ wird auch linearer Prädiktor genannt
- Durch inverse Link-Funktion: $\mu(x) = g^{-1}(\eta(x))$
- Zugehöriges GLM lautet:

$$Y = g^{-1}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot X_i\right) + \widetilde{\varepsilon} \tag{2.4}$$

- log-lineares Modell: $\mu(x) = e^{a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i} = e^{\eta(x)} > 0$
- Beziehung zu Marginalsummenverfahren: Für genau zwei Merkmale und den Ansatz Poisson-verteilter Schadenaufwände überführt den log-link-Ansatz das ursprüngliche Poisson-Modell in das Marginalsummenverfahren

Basisverfahren der Schadenreservierung

Chain-Ladder-Verfahren

- Chain-Ladder Faktoren:

$$\hat{\varphi}_k^{CL} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \cdot \frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}}, k = 1, ..., n \tag{2.5}$$

- Alle beobachtbaren Schadenstände werden verwendet (sonst nichts)
- Die aktuellen Schadenstände $S_{i,n-i}$, $i = 0, ..., n$, aus der Diagonale des Abwicklungsdreiecks mit Hilde der Chain-Ladder-Faktoren sukzessive auf das Niveau der späteren Abwicklungsjahre hochgerechnet.
- Ergebnisse werden als Chain-Ladder-Prädiktoren bezeichnet:

$$\hat{S}_{i,k}^{CL} := \hat{\varphi}_k^{CL} \cdot \hat{S}_{i,k-1}^{CL} \tag{2.6}$$

- Reserven für Anfalljahr i ergeben sich aus der Differenz der Prädiktoren für den erwarteten Entschadenstand und dem aktuellen Schadenstand:

$$\hat{R}_i^{CL} := \hat{S}_{i,n}^{CL} - S_{i,n-i} \tag{2.7}$$

Loss-Development-Verfahren

- Stellt ein Abwicklungsmuster für Quoten und dass für diese Quoten $\gamma_0, ..., \gamma_n$ a-priori-Schätzer $\hat{\gamma}_0, ..., \hat{\gamma}_n$ unterliegen
- Aktuelle Schadenstände $S_{i,n-i}$ per Division durch Schätzer auf Niveau des letzten Abwicklungsjahr hochgerechnet und mit Faktor $\hat{\gamma}_k$ auf Niveau des k-ten Abwicklungsjahrs zurück skaliert:

$$\hat{S}_{i,k}^{LD} := \hat{Y}_k \cdot \frac{S_{i,n-i}}{\hat{Y}_{n-i}} \tag{2.8}$$

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

- Ähnlich wie LD-Verfahren, aber zusätzlich zu a-priori Schätzer $\hat{\gamma}_0, ..., \hat{\gamma}_n$ für Quoten noch a-priori-Schätzer $\hat{\alpha}_0, ..., \hat{\alpha}_n$ für erwartete Schadenstände ($\alpha_i := E[S_{i.n}]$)
- aktuelle Schadenstände mit Hilfe der a-priori Schätzer linear fortgeschrieben.

$$\hat{S}_{i,k}^{BF} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{2.9}$$

- Durch Differenzbildung werden die BF-Prädiktoren für Zuwächste errechnet:

$$\hat{Z}_{i,k}^{BF} := \hat{S}_{i,k}^{BF} - \hat{S}_{i,k-1}^{BF} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{2.10}$$

- iteriertes Bornhuetter-Ferguson-Verfahren: Nach der ersten Anwendung werden die Prädiktoren $\hat{S}_{i,n}^{BF}$ anstatt der $\hat{\alpha}_i$ verwendet (Einfluss wird so reduziert). Verfahren wird so lange wiederholt bis sich Grenzwerte einstellen als Prädiktoren

Additives Verfahren/ Incremental-Loss-Ratio-Verfahren

- Basiert auf Annahme, dass es Volumenmaße $\pi_0, ..., \pi_n$ für die Anfalljahre $i = 0, ..., n$ gibt.
- Außerdem Abwicklungsmuster für die erwarteten (Schaden-)Quoten-Zuwächse $\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$, sodass es Parameter $\zeta_0, ..., \zeta_n$ gibt mit $\zeta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$
- Schätzer für relative Zuwächse werden additive Schadenquotenzuwächse verwendet:

$$\zeta_k^{AD} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\pi_j}{\sum_{h=0}^{n-k} \pi_h} \cdot \frac{Z_{j,k}}{\pi_j} \tag{2.11}$$

- Schätzer setzen für den Zuwachs des k-ten Abwicklungsjahr die Summe sämtlicher Zuwächse im k-Abwicklungsjahr zur Summe der zugehörigen Volumenmaße
- Mit diesen Schätzern erhält man Prädiktoren für Zuwächse und Schadenstände:

$$\hat{Z}_{i,k} := \pi_i \cdot \hat{\zeta}_k^{AD} \tag{2.12}$$

$$\hat{S}_{i,k}^{AD} := S_{i,n-i} + \sum_{j=n-i+1}^{k} \hat{Z}_{i,j}^{AD} \tag{2.13}$$

Cape-Cod-Verfahren

- Wie Additives Verfahren Volumenmaße $\pi_0, \ldots, \pi_n$. Zusätzlich a-priori-Schätzer $\hat{\gamma}_0, \ldots, \hat{\gamma}_n$ für Quoten
- Annahme: erwartete Schadenquoten unabhängig von Anfalljahr i, daher existiert Parameter κ: $\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i} = \kappa$
- κ wird geschätzt:

$$\hat{\kappa}^{CC} = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j}{\sum_{h=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-h} \cdot \pi_h} \cdot \frac{S_{j,n-j}}{\hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j} \tag{2.14}$$

- Cape-Code-Prädiktoren:

$$\hat{S}_{i,k}^{CC} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \pi_i \cdot \hat{\kappa}^{CC} \tag{2.15}$$

Alle Verfahren sind Spezialfälle von Bornhuetter-Ferguson-Verfahrens. Unterschieden nur durch die Schätzung der Parameter.

Verfahren	**Quoten $\hat{\gamma}_k$**	**Endschadenstände $\hat{\alpha}_i$**
Bornhuetter-Ferguson (BF)	beliebig, a priori	beliebig, a priori
Loss-Development (LD)	beliebig, a priori	$\hat{\alpha}_i$(aktuelle $S_{i,n-i}, \hat{\gamma}$)
Chain-Ladder (CL)	$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}}(S_{i,j})$	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \hat{\gamma}^{\text{CL}}$)
Cape-Cod (CC)	beliebig, a priori	$\hat{\alpha}_i$(aktuelle $S_{i,n-i}, \pi, \hat{\gamma}$)
Additiv (AD)	$\hat{\gamma}_k^{\text{AD}}(Z_{i,j}, \pi)$	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \pi, \hat{\gamma}^{\text{AD}}$)

Verfahren	Vorteile	Nachteile
BF	Flexibilität, externe Quoten und Endschadenstände möglich	Willkür bei Ansatz der a-priori-Schätzer für Quoten und Endschadenstände
LD	Verwendung von Abwicklungsdaten, externe Quoten möglich	Willkür bei Ansatz der a-priori-Schätzer für Quoten, verwendet nur aktuelle Schadenstände, empfindlich für Ausreißer
CL	ausschließliche Verwendung von Abwicklungsdaten	empfindlich für Ausreißer
CC	robustifizierend unter Verwendung von Volumenmaßen, externe Quoten möglich	Willkür bei Ansatz der a-priori-Schätzer für Quoten, verwendet nur aktuelle Schadenstände, Gefahr durch unangemessener Volumenmaße
AD	robustifizierend unter ausschließlicher Verwendung von Volumenmaßen	Gefahr durch unangemessener Volumenmaße

Erweiterung der Basisverfahren

1. Ausreißereffekte
Besser, wenn a-priori-Schätzer vorhanden. Daher Chain-Ladder sehr anfällig und Cape-Cod am besten
2. Inflation
Separationsverfahren bietet Möglichkeit, Kalendereffekte zu berücksichtigen und eine Art Inflationsvereinigung vorzunehmen. Kurze Zusammenfassung: Es gibt Parameter für Abwicklungsjahre und für Kalenderjahre und für die Zuwächse gilt: $E[Z_{i,k}] = v_i \cdot \gamma_{i+k} \cdot \vartheta_k$. Schätzung der Parameter durch Marginalsummengleichungen. Durch bspw. Extrapolation Schätzung der Inflationparameter der nächsten Jahre. Am Ende: $\hat{Z}_{i,k} = v_i \cdot \hat{\gamma}_{i+k} \cdot \hat{\vartheta}_k$
3. Nachlauf
Annahme: Schäden innerhalb von $n+1$ Jahren vollständig abgewickelt. In Ausnahmefällen noch nach dem n-ten Jahr Änderungen in Schadenständen -> "Nachlauf"

Kapitel 3

Personenversicherungsmathematik

Modell

- h Ereignisse bzgl. einer Person, das zuerst eintretende Ereignis führt zum Ausscheiden aus Gesamtheit
- h: Anzahl der Ausscheideursachen, T_i Zeitpunkt Eintritt des Ereignisses i, X_i Alter bei Eintritt des Ereignisses i
- $X_i = T_i - t^*$, $t^* \widehat{=}$ Geburtszeitpunkt, $G := \lfloor t^* \rfloor$ das Geburtsjahr
- $X := min\{X_i\}$ Ausscheidealter, $U := min\{i \in \{1, ..., h\} : X_i = X\}$: Ausscheideursache
- ${}_1q_x^{(i)}(G)$: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der HGSH mit Geburtsjahr G innerhalb des Zeitintervalls $(x, x+1)$ mit der Ursache i auszuscheiden. Verbleibewahrscheinlichkeit $p_x := 1 - q_x$
- Allgemein:

$$ {}_sq_x(G) := \mathbb{P}[X \leq x+s | X > x] \tag{3.1} $$

$$ {}_sp_x(G) := 1 - {}_sq_x(G) = \mathbb{P}[X > x+s | X > x] \tag{3.2} $$

- mehrjährige Verbleibewahrscheinlichkeit (noch mind. k Jahre in HGSH verbleiben): ${}_kp_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}$
- Zwillingsfreiheit: nur eine Ausscheideursache führt zum Ausscheiden.
- Zyklenfreiheit: keine Übergänge von Nebengesamtheit in Hauptgesamtheit

Typische Rechnungsgrundlagen

- biometrische Rechnungsgrundlagen / Ausscheideordnung
- Rechnungszins
- Kosten
- Rechnungsgrundlage 1. Ordnung: vorsichtig, inkl. Sicherheit
- Rechnungsgrundlage 2. Ordnung: Erwartungswert, keine Sicherheiten

Risikomerkmale von Ausscheidewahrscheinlichkeiten

- Eigenschaften, die in statistisch überprüfbarer Weise mit dem Erwartungswert zusammenhängen

- gleichzeitig mehrere Merkmale von Bedeutung (eines reicht nicht)
- Annahme: Ausscheidewahrscheinlichkeit hängt nur von den Merkmalen ab
- vieles wird nicht berücksichtigt

Kosten

- Kostenarten: Abschluss (α), Inkasso (β), Verwaltung (γ)
- Unterschieden werden proportionale (bezogen auf Beitrag oder VS) und Stückkosten

Erfüllungsbetrag

- Der Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung B ist extensional definiert durch die Menge seiner Realisierungen $b_m := \sum_n v^{t_n^{(m)}} s_n^{(m)}$ für $m = 0, 1, ..$, d.h. die Menge der finanzmathematischen Barwerte der ungewissen Verpflichtung.

Leistungsbarwert

- Barwert der Gesamtverpflichtung gegenüber einer Person:

$$ {}_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_kp_x \, {}_k\hat{L}_x \tag{3.3}$$

$$ {}_k\hat{L}_x := {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)} q_{x+k}^{(i)}, \; k = 0, 1, ... \tag{3.4}$$

- ${}_k\hat{L}_x$: Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+k, x+k+1[$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf Beginn des Jahres
- ${}_kL_x^{(0)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf Jahresbeginn
- ${}_kL_x^{(i)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch das Ausscheiden im Jahr $]x+k, x+k+1[$ aus der Ursache i verursacht werden, soweit nicht durch ${}_kL_x^{(0)}$ erfasst, diskontiert auf Jahresbeginn
- Leistungsbarwert zum Alter $x+m$:

$$ {}_mB_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_kp_{x+m} \, {}_{m+k}\hat{L}_x, \quad m = 0, 1, ... \tag{3.5}$$

Prämienbarwerte

- Prämienbarwert zum Alter x gegenüber einer Person:

$$ {}_0B_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_x {}_k\hat{P}_x \tag{3.6} $$

- ${}_k\hat{P}_x$: Erwartungswert der Prämienleistung des Jahres $]k,k+1]$, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf Jahresbeginn
- Prämienbarwert zum Alter $x+m$: ${}_mB_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_{x+m} {}_{k+m}\hat{P}_x,\ \ m = 0,1,...$

Reserven

- Prospektive Reserve ${}_mV_x^{pro}$: Betrag, der zum jeweiligen Stichtag verfügbar sein muss, um Vertrag im Mittel zu erfüllen
- Retrospektive Reserve ${}_mV_x^{retro}$: Betrag, der rechnungsmäßig nach Abrechnung von Einnahmen und Ausgaben noch vorhanden ist
- Nach m Jahren soll die Differenz zwischen Barwert zukünftiger Leistungen und Barwert zukünftiger Prämien durch die Reserve gedeckt sein:

$$ {}_mV_x^{pro} = {}_mB_x^L - {}_mB_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k {}_kp_{x+m} \left({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x \right) \tag{3.7} $$

$$ {}_mV_x^{retro} = \frac{1}{v^m {}_mp_x} \left[K + \sum_{k=0}^{m-1} v^k {}_kp_x \left({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x \right) \right] \tag{3.8} $$

$$ {}_mV_x^{pro} - {}_mV_x^{retro} = \frac{1}{v^m {}_mp_x} \left({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro} \right) \tag{3.9} $$

Versicherungsmathematische Bilanzgleichung

- ${}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + vp_{x+m}\, {}_{m+1}V_x$
- Spar- und Risikoprämie:

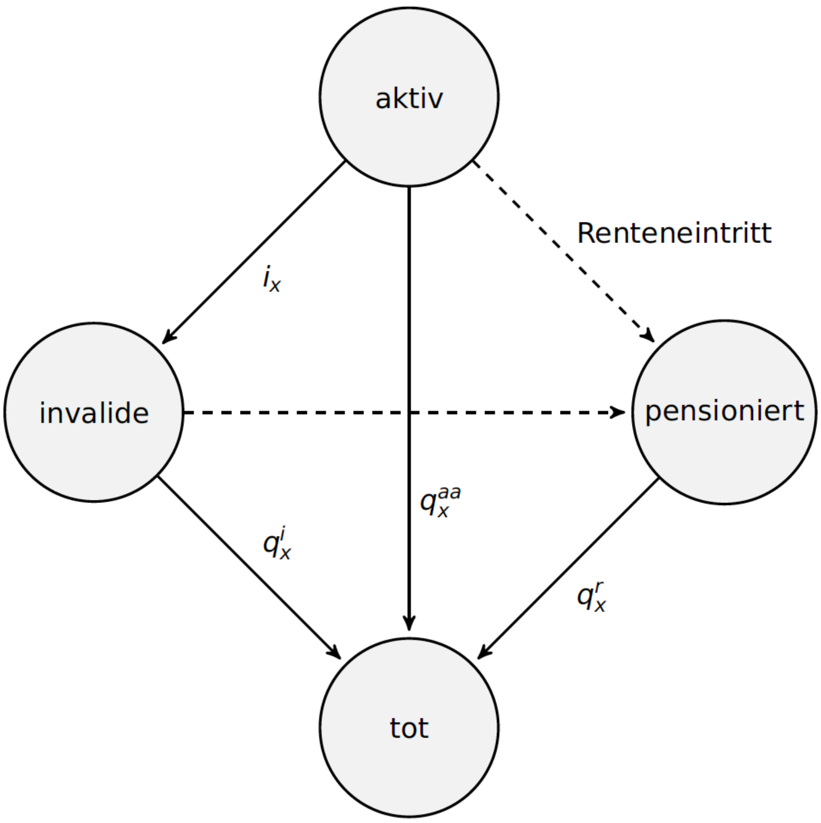
$$ {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R \tag{3.10} $$

$$ \Leftrightarrow {}_m\hat{P}_x = v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x + {}_m\hat{L}_x - v \cdot q_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x \tag{3.11} $$

Kapitel 4

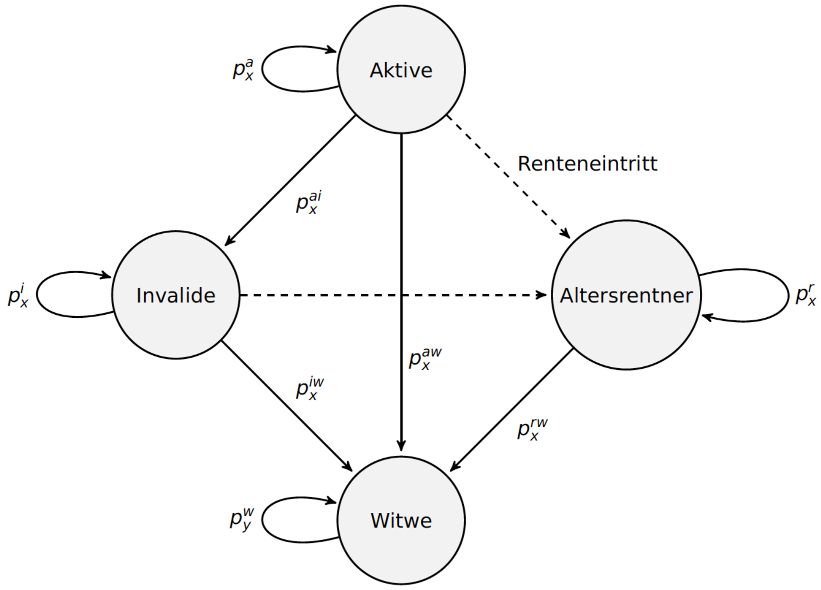
Pensionenversicherung

Bevölkerungsmodell - Ausscheidewahrscheinlichkeiten q und Verbleibewahrscheinlichkeiten p



Rechnungsgrundlagen - Steuerbilanz / Handelsbilanz

- Fluktuation: Ausscheiden eines Mitarbeiters ohne Versorgungsfall (Kündigung)
- Steuerbilanz: Zinssatz 6% vorgeschrieben, liegt über durchschnittlichem Marktzins der letzten 10 Geschäftsjahre ⇒ Unterbewertung der Verpflichtungen



- Steuerbilanz: künftige Erhöhungen nur einbeziehbar, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen
- Handelsbilanz: bestmögliche Schätzung vornehmen $\Rightarrow$ Unterbewertung in steuerbilanzieller Bewertung
- Berechnung Deckungsrückstellung regulierte Pensionskassen:
  - Rechnungsgrundlagen vorsichtig wählen, Sicherheitszu-/abschläge

Leistungsbarwerte

- Barwert einer Verpflichtung ggü. x-jähriger Person: ${}_0B_x^L = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_k\hat{L}_x$
- ${}_k\hat{L}_x$: EW der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $(x+k,\ x+k+1]$ ausgelöst wird.

Barwert einer lebenslänglich laufenden Rente, jährlich t Raten mit Betrag $1/t$ vorschüssig zahlbar

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^r = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x^r \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^r \tag{4.1} $$

${}_k^{(t)}\hat{L}_x^r$: Barwert der Rentenzahlung des Alters $(x+k, x+k-1]$ zum Beginn des Jahres (4.2)

Barwert einer über die Aktivenzeit laufenden Rente, Jahresbeitrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^a = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_kp_x^a \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^a \tag{4.3} $$

Invarianzsatz

- Auf der Basis des Axiomensystems hängen Anwartschaftsbarwerte von Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe nicht von der Zahlungsweise ab, wenn sowohl der Zeitpunkt des die Rente auslösenden Ereignisses als auch der Zeitpunkt des die Rente beendigenden Ereignisses innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind.
- Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Invalidenrente: ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x^{ai}$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf lebenslänglich laufende Invalidenrente, Jahresbetrag 1, vorschüssig in t Raten p.a. zahlbar

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_kp_x^a \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{ai} \tag{4.4} $$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf lebenslänglich laufende Altersrente, Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aA} = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_kp_x^a \cdot {}_k^{(t)}\hat{L}_x^{aA} = v^n \cdot {}_np_x^a \cdot {}^{(t)}\ddot{a}_z^r \tag{4.5} $$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf lebenslänglich laufende Alters- und Invalidenrente, Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a.

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiA} = {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aA} + {}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} \tag{4.6} $$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf lebenslänglich laufende Ehegattenrente, Jahresbetrag 1, vorschüssig in t Raten p.a. zahlbar

$$ \text{Kollektivmethode: } {}^{(t)}\ddot{a}_x^{rw} = \ddot{a}_x^{rw} = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x^r \cdot {}_k\hat{L}_x^{rw} \tag{4.7} $$

Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters x auf lebenslänglich laufende Ehegattenrente, Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver, vorschüssig in t Raten p.a. zahlbar

$$ \text{Kollektivmethode: } {}^{(t)}\check{\ddot{a}}_x^{aaw} = \check{\ddot{a}}_x^{aaw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_kp_x^a \cdot {}_k\check{L}_x^{aaw} \tag{4.8} $$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf lebenslänglich laufende Ehegattenrente, Jahresbetrag 1 bei Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig in t Raten p.a. zahlbar

$$\text{Kollektivmethode: } {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aAw} = \ddot{a}_x^{aAw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_k p_x^a \cdot {}_k\hat{L}_x^{aAw} \tag{4.9}$$

Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf lebenslänglich laufende Ehegattenrente, Jahresbetrag 1 bei Tod als Invalider, vorschüssig in t Raten p.a. zahlbar

$$\text{Kollektivmethode: } {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiw} = \ddot{a}_x^{aiw} = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_k p_x^a \cdot {}_k\hat{L}_x^{aiw} \tag{4.10}$$

Zuordnung von Leistung auf Alter

- Rückrechnungsmethode: Dem Pensionsalter z wird die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Dem Alter $x < z$ wird die Leistung zugeordnet, die der um $z - x$ geringeren Dienstzeit entspricht.
- Stichtagsmethode: Dem Pensionsalter z wird die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Dem Alter $x < z$ wird die Leistung zum nächsten Geburtstag zugeordnet.

Steuerliches Teilwertverfahren

- $${}_mV_x = {}_mB_x^L - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m}^{a} \tag{4.11}$$

  $$\text{mit } P_x = \frac{{}_0B_x^L}{\ddot{a}_x^a} \tag{4.12}$$

- Steuerliche Besonderheiten:
  - Mindestalter 23 (ab 2018), 27 (2009-2017), 28 (2001-2008), 30 (vor 2001)
  - jährlich vorschüssige konstante Prämie
  - 6% Zins
- Vorgehen bei Teilwertberechnung:
  1. Ermittlung des Stichtagalters und des Finanzierungsbeginnalters
  2. Bestimmung des altersabhängigen Leistungsvektors (z.B. Rückrechenmethode)

3. Entwicklung der Barwertformeln zum Stichtagsalter zum zum Beginnalter (Beachte Mindestalter)
4. Anwenden der Teilwertformel

- Möglichkeit zur Bewertung in der Handelsbilanz: modifiziertes Teilwertverfahren nach Engbroks
- Bewertung nach IFRS (auch dt. Handelsbilanz): Projected Unit Credit Methode

Kapitel 5

Lebensversicherungsmathematik

Rechtliche Grundlagen

Versicherungsaufsichtsgesetz (§ 138 (1) VAG)

- angemessene versicherungsmathematische Annahmen
- Prämien finanzieren Verpflichtungen und Dekcungsrückstellungen → keine dauerhaft Finanzierung, die nicht aus Prämien stammen

Deckungsrückstellungsverordnung (§5 (1) DeckRV)

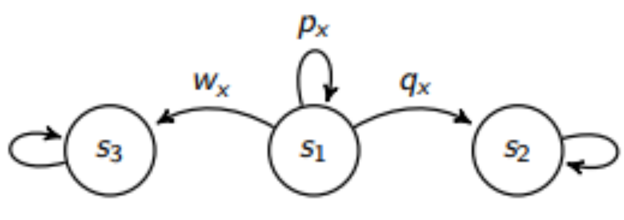
- Rechnungsgrundlagen nicht nur mit Erwartungswerten bestimmen
- Änderungen und Schwankungen der Daten berücksichtigen

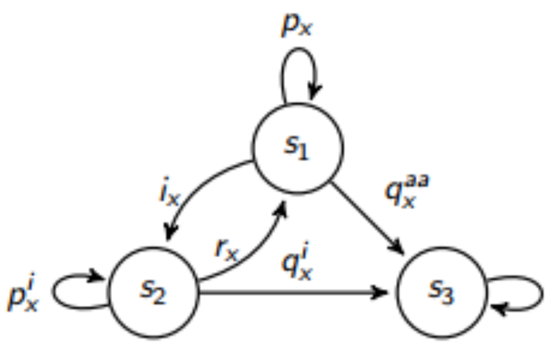
Versicherungsvertragsgesetz (§ 163 (1) VVG)

- Prämienanpassung bei nicht nur vorübergehender und nicht ¨ voraussehbarer Änderung ("Notfall-Paragraph")
- Anpassungen – wenn überhaupt – nur in der BU-Versicherung

Außerdem keine Differenzierung nach Geschlechtern erlaubt.

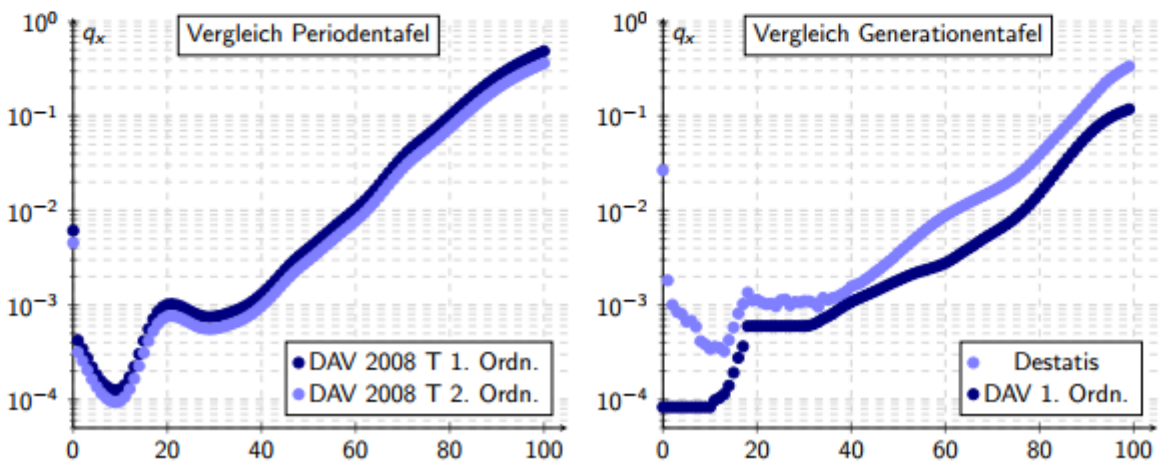
Zustandsmodelle





Sterbetafeln

Es gibt zwei verschiedene Arten: Periodentafel und Generationstafel.
Bei Erlebensfallrisiko mit aufgeschobener Leibrente: Generationentafel. Im Gegensatz zu Periodentafel berücksichtigt die Generationssterbetafel die Sterbewahrscheinlichkeit der jeweiligen Generation des Versicherten -> niedrigere Sterbewahrscheinlichkeit der jüngeren Generation
Unterschied DAV 2004 R Tafel und Destatis: DAV für Einschätzung des Erlebensfallrisikos verwendet (Sicherheitsabschläge enthalten). Destatis enthält keine Sicherheitszu- oder abschläge. Außerdem anderes Kollektiv (Versicherte, Gesamtbevölkerung) Todesfallrisiko: Periodentafel nutzen. Stornowahrscheinlichkeiten sind erforderlich, wenn bei Storno nicht die Deckungsrückstellung ausbezahlt wird (Cantelli)
In der Lebensversicherung kommen Sterbetafeln der DAV zum Einsatz.
Unterscheidung:
- 1. Ordnung: Werte enthalten Sicherheiten
- 2. Ordnung: Werten entsprechen Erwartungswert



Außerdem stellt die DAV Invaliditätswahrscheinlchkeiten zur Verfügung. Das enthält Wahrscheinlichkeiten zur Sterblichkeit von Invaliden sowie Reaktivierung. Ebenfalls 1. und 2. Ordnung

Rechnugszins

Für Rechnungszins der Prämienkalkulation:

- Einschränkung der Vorsichtsprinzip
- aber: im Prinzip frei wählbar -> Festlegung Verantwortung von Aktuaren

Rechnungszins für Deckungsrückstellungen:

- Verträge mit Zinsgarantie:
  - Beachten von HHöchstrechnungszins aus §2 (1) DeckRV
  - Rechnungszins bei Vertragabschluss gilt für ganze Laufzeit
- Abweichungen zum Rechnungszins der Prämienkalkulation möglich

Kosten

- Abschlusskosten (α-Kosten):
  zu beachten ist Höchstzillmersatz aus §4 (1) DeckRV kosten für Abschlussprovision, Fixkosten im Außendienst, Werbung, Angebotserstellung, Policierung, etc
- Inkassokosten (β- Kosten):
  Kosten für Beitragseinzug, Agenturinkasso, etc.
- Verwaltungskosten (γ-Kosten): Kosten für die Bestandsverwaltung, Bearbeitung von Leistungen, Vertragsänderungen, etc.

Lebensversicherungsprodukte (Auswahl)

- Risikoversicherungen: einmalige Zahlung im Todesfall, bspw. Risikolebensversicherung, Todesfallversicherung
- Kapitalversicherungen: einmalige Zahlung im Erlebensfall, bspw. Erlebensfallversicherung, Gemische Versicherung
- Rentenversicherung: regelmäßige Zahlungen im Erlebensfall, bspw. sofort beginnende Rentenversicherung, aufgeschobene Rentenversicherung

Wiederholung

- Person zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Alter x, dann gilt:

$$ {}_sB_x^L = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_k\hat{L}_x \tag{5.1} $$

mit ${}_k\hat{L}_x$ Erwartungswert des barwerts aller Leistungen, die mit dem Erreichen des Alters $x+k$ in der HGSH verbunden sind

- Erlebensfallversicherung: V-Summe S wird bei Erlebens des Zeitpunkts n ausgezahlt: ${}_sB_x^L = E(L) = v^n \cdot {}_np_x \cdot S = S \cdot {}_nE_x$

- Risikolebensversicherung: V-Summe S wird ausgezahlt bei Tod bis Zeitpunkt n: ${}_sB_x^L = E(L) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} \cdot v \cdot S = S \cdot {}_{|n}A_x$

Standardformeln und Bezeichnungen

x-jährige Person, Vertrag mit Laufzeit n Jahre, V-Summe S und Zins i. Ab Punkt 3: Rentenhöhen betrage R und wird jährlich vorschüssig bezahlt.

- Gemischte Versicherung: Leistung bei Tod innerhalb der Laufzeit oder bei Erleben Laufzeitende:
  $E(L) = S \cdot ({}_{|n}A_x + {}_nE_x) =: S \cdot A_{x:n}$ **Hier um letztes n eigentlich zwei Linien, aber wie?**

- Todelfallversicherung: Leistung bei Tod (ω kalkulatorisches Höchstalter)
  $E(L) = S \cdot {}_{|\omega-x}A_x =: S \cdot A_x$

- Leibrente:
  $E(L) = R + R \cdot {}_1E_x + r \cdot {}_2E_x + \ldots =: R \cdot \ddot{a}_x$

- Aufgeschobene Leibrente um m Jahre:
  $E(L) = R \cdot {}_mE_x + R \cdot {}_{m+1}E_x + \ldots =: R \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x$
  Erwartungswert des Erfüllungsbetrags:
  ${}_0B_x^L = R \cdot \sum_m v^m \cdot {}_mp_x = R \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x$

- Temporäre Leibrente mit Dauer von n Jahre:
  $E(L) = R + R \cdot {}_1E_x + R \cdot {}_2E_x + \ldots + R \cdot {}_{n-1}E_x =: R \cdot \ddot{a}_{x:n}$ **Hier um letztes n eigentlich zwei Linien, aber wie? Folie 25**

Umgang mit Kosten

- Abschlusskosten (blau exemplarisch):
  - einmalig zu Vertragsbeginn: α^Z (Promillesatz) der Beitragssumme
  - jährlich vorschüssig α^γ (Promillesatz) der V-Summe

- Inkassokosten: jährlich vorschüssig β des jährlichen Beitrags

- Verwaltungskosten: jährlich vorschüssig γ der V-Summe

Leistungsbarwert der Kosten: (**zwei Striche**)

$$\alpha^Z \cdot n \cdot P + \alpha^\gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_{x:n} + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:n} + \gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_{x:n} \tag{5.2}$$

Prämien

- Einmalprämie P zu Vertragsbeginn, $P_0 = P$ und $P_1 = P_2 = ... = 0$: ${}_0B_x^P = P$
- Laufende konstante Prämie P jährlich vorschüssig, $P_0 = P_1 = ... = P_{n-1} = P, P_n = 0$: $P \cdot {}_{x:n}$ (**Striche**)
- Laufende konstante Prämie P vorschüssig für $m < n$ Jahre: $P_0 = ... = P_{m-1} = P$, $P_m = P_{m+1} = P_n = 0$: $P \cdot \ddot{a}_{x:m}$ (**Striche**)

Kosten

- α^Z: einmalige Abschlusskosten
- α^Y: Abschlusskosten während Vertrag
- β: Inkassokosten
- γ_1: Verwaltungkosten bis z.B. Renteneintritt
- γ_2: Verwaltungkosten während z.B. Rente

Äquivalenzprinzip für einen Vertrag

Striche um ms

$$P \cdot \ddot{a}_{x:m} = R \cdot {}_{|m}\ddot{a}_x + \alpha^Z \cdot m \cdot P + ((\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot R + \beta \cdot P) \cdot \ddot{a}_{x:m} + \gamma_2 \cdot R \cdot {}_{|m}\ddot{a}_x \tag{5.3}$$

Rekursiver Ansatz Prämienkalkulation

Betrachten LV-Vertrag mit Laufzeit n Jahre. Prämien können rekursiv bestimmt werden. Ausgangspunkt ist versicherungsmathematische Bilanzgleichung für alle $m \geq 0$ und ${}_nV_x = 0$ und Dauer Prämienzahlung a:

$$\begin{aligned}
{}_mV_x &= {}_m\hat{L}_x - {}_m\hat{P}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x \\
&= S \cdot v \cdot q_{x+m} + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + \gamma \cdot S + \begin{cases} a \cdot \alpha^Z \cdot P + \beta \cdot P - P & \text{für } m = 0 \\ \beta \cdot P + P & \text{für } 0 < m < a \\ 0 & \text{für } a \leq m < n \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Wir erhalten Gleichungen für ${}_{n-1}V_x, {}_{n-2}V_x$ bis ${}_0V_x$
Gesucht ist dann Prämienzahlungsstrom P, sodass ${}_0V_x -$ Anfangskapital $= 0$ (Bsp in Skript)

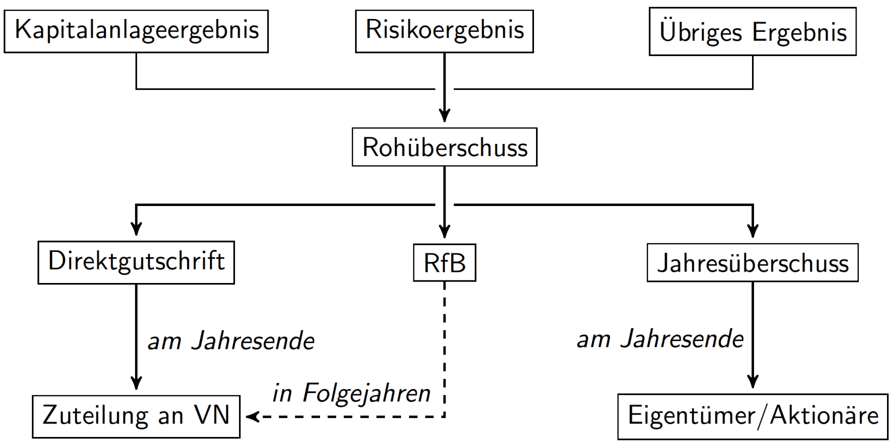
Überschussbeteiligung

Rechtliche Grundlagen

Bei Kalkulation von Beiträgen und Leistungen vorsichtige Herangehensweise, daher idR Überschüsse.

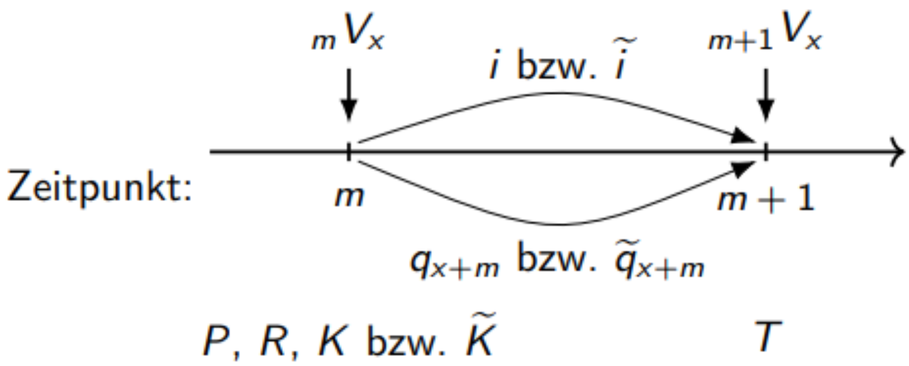
- Versicherungsvertragsgesetz (§153 (1) VVG)
  - Beteiligung der VN am Überschuss und Bewertungsreserven
  - Ausnahme: Beteiligung ausgeschlossen
- Versicherungsaufsichtsgesetz (§139 (1) VAG)
  - Direkte Zuteilung der Überschüsse oder
  - Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung (RfB)

Regelungen, die angemessen Beteiligung der VN am Überschuss sicherstellen (Mindestzuführungsverordnung): Überschüssen werden größtenteils an VN zurückgegeben, Verluste tragen zu großen Teilen die Eigentümer, Asymmetrie im Geschäftsmodell der dt. Lebensversicherung



Kontributionsgleichung

Ermitteln von Rohüberschuss kann pro Vertrag mit Kontributionsgleichung
Wir betrachten: LV-Vertrag nach m Jahren, Prämienzahlung P, Erlebensfallleistung R vorschüssig, Kosten K, Todesfallleistung T nachschüssig, tatsächlicher Zins: $\widetilde{i}$, tatsächliche Sterberate $\widetilde{q}$, tatsächliche Kosten $\widetilde{K}$



Mit kalkulatorischen Größen (Mit tatsächlichen analog):
Einnahmen: $E = ({}_mV_x + P) \cdot (1+i)$
Ausgaben: $A = q_{x+m} \cdot T + (R+K) \cdot (1+i) + (1-q_{x+m}) \cdot {}_{m+1}V_x$
Rohüberschuss im $(m+1)$-ten Jahr:

$$= ({}_mV_x + P - R - \widetilde{K}) \cdot (\widetilde{i} - i) + (T - {}_{m+1}V_x) \cdot (q_{x+m} - \widetilde{q}_{x+m}) + (K - \widetilde{K}) \cdot (1+i) \quad (5.5)$$
$$= \text{Zinsergebnis + Risikoergebnis + Kostenergebnis} \quad (5.6)$$

Rückstellung zur Beitragsrückerstattung

Die Rückstellung für Beitragsrückerstattung (RfB) ist Besonderheit der dt LV:

- Zeitliche Trennung des Aufwands für Überschussbeteiligung und der zugehörigen Auszahlung: (Vorstand, Aufsichtsrat und Aktuar beschließen Überschussdeklaration)
- Ziel: Deklaration einer relativ stabilen Überschussbeteiligung
- Drei Komponenten der RfB: gebundene RfB, Schlussüberschussanteilfonds (SÜA-Fonds), freie RfB
- Rechtliche Grundlage: Versicherungsaufsichtsgesetz §140 VAG
- Für überschussberechtigte Verträge gelten folgende Untergrenzen:
  - 90% der anzurechn. Kapitalerträge (Abzüglich Zinsen)
  - 90% des Risikoergebnis
  - 50% des übrigen Ergebnis
- Anmerkungen:
  - Übriges Ergebnis umfasst alle Ergebnisquellen außer Risiko und Kapitalanlage
  - Negative Kapitalanlageergebnisse können verrechnet werden

  - Negatives Risikoergebnis und übriges Ergebnis werden genullt

- Mindestzuführung kann mit Zustimmung der BaFin reduziert werden, um:
  - den Solvabilitätsbedarf für die überschussberechtigten Verträge des Gesamtbestands
  - unvorhersehbare Verluste aus Kapitalanlage-, Risiko- oder übrigen Ergebnis
  - den Erhöhungsbedarf in der Deckungsrückstellung

Bewertungsreserven

Bewertungsreserven (alternativ: Stille Reserven) einer Kapitalanlage (z. B. eines Wertpapiers) entstehen, wenn der Zeitwert dieser Kapitalanlage über dem Buchwert der Kapitalanlage liegt. Im anderen Fall (Zeitwert kleiner als Buchwert) entstehen stille Lasten.

Rechtliche Grundlagen

Durch Bilanzierung von Kapitalanlagen nach Niederwertprinzip entstehen Bewertungsreserven:

- Versicherungsvertragsgesetz (§153 (3) VVG)
  - Bewertungsreserven jährlich neu ermitteln
  - nach verursachungsorientiertem Verfahren zuordnen
  - mind. hälftige Zuteilung bei Vertragsende bzw bei Renten: nach Ansparphase
- Versicherungsaufsichtsgesetz: best festverzinslichen Anlagen und Zinsabsicherungsgeschäften: Nur Teil über Sicherungsbedarf relevant

Beteiligung an Bewertungsreserven:

- Erweiterung der klassischen Zinsgewinnbeteiligung an noch nicht realisierten Erträgen (aber: Einbeziehung der stillen lasten unzulässig)
- Unterscheidung der Bewertungsreserven: aus festverzinslichen Kapitalanlagen und andere Kapitalanlagen (z.B. Aktien, Immobilien)

Sicherungsbedarf

Beteiligung an den Bewertungsreserven aus festverzinslichen Wertpapieren nur, wenn Sicherungsbedarf überschritten
Berechnung Sicherungsbedarf: Differenz aus Deckungsrückstellung mit "Bezugszinsünd Deckungsrückstellung mit Rechnungszins

Anspruchberechtigung

Beteiligung an den Bewertungsreserven nur für anspruchsberechtigte Vertäge

- anspruchberechtigt: Kapitalbildende klassische Lebens- und Rentenversicherungen
- nicht anspruchberechtigt: Fondsgebundene Versicherungen und Versicherungen mit Deckungsrückstellungen, die lediglich zur Glättung der Risikoverlaufs bei konstanten Prämien dienen

Kapitel 6

Krankenversicherung

Allgemeines

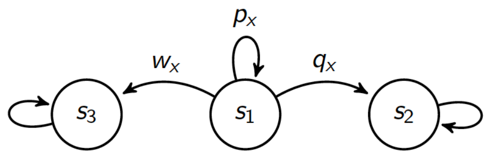
- duales System (PKV, GKV)
- versicherungsfreie Personen: Gehalt oberhalb der Grenze, beihilfeberechtigte Personen, Personen mit freier Heilfürsorge
- VVG: Krankheitskostenversicherung für ambulante und stationäre Behandlung, max. 5000€ Selbstbehalt
- Unterscheidung substituive (ersetzt ganz oder teilweise den Schutz des gesetzlichen Systems, muss nach Art der Lebensversicherung betrieben) und nicht substituive Krankenversicherung (kann nach Art der Lebensversicherung betrieben werden)
- Wechsel in der PKV:
  - keine Übertragung der Altersrückstellung für nicht-substituive KV, subst. KV mit Beginn vor 01.01.2009 und Krankentagegeldversicherung
  - Übertragung für subst. KV mit Beginn nach 01.01.2009 (Wert: gleicher, der sich bei Basistarif ergeben hätte)
- Periodensterbetafel: zu einem bestimmten Zeitraum
- Generationensterbetafel: zu einer Geburtskohorte
- Sterbetafel mit Referenzjahr: Prognose

Zustandsmodell KV - Teil 1

Rechnungsgrundlagen PKV

- Rechnungszins: Obergrenze 3,5%, orientiert sich an AUZ, nicht notwendigerweise für ganze Laufzeit garantiert

Zustandsmodell mit s_1 aktiv, s_2 tot und s_3 storniert
Leistung bei Verbleib im aktiven Zustand
Prämien und Kosten bei Verbleib im aktiven Zustand



- Ausschreideordnung: bei Tod und Storno. Für x-jährige Person $q_x^{Tod} =: q_x$, $q_x^{Storno} =: w_x$, Verbleibewahrscheinlichkeit $p_x = 1 - q_x - w_x$
- Übertrittswahrscheinlichkeiten
- Sonstige Zuschläge
- Praxis:
  - Doku jedes Tarifs in technischen Berechnungsgrundlagen
  - Rechnungszins orientiert sich am AUZ (Aktuarieller Unternehmenszins)
  - Ausscheideordnung: üblicherweise Verbandswerte wegen zu kleiner Bestände, unternehmenseigene Werte zulässig

Sterbewahrscheinlichkeit Herleitung

$\rightarrow$ Praxis: jährlich neue Sterbetafel veröffentlicht

1. Schätzung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten
2. Ausgleich der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten
3. Berücksichtigung Sicherheitsabschlag
4. Bestimmung Trend, Projektion um 7 Jahre
5. Abgleich mit Vorjahreswerten

Kopfschäden

- erwartete Leistung für eine Person
- Beobachtungszeitraum: 12 Monate
- abhängig von Tarif und Alter
- Notation für x-jährige Person: K_x

- Besonderheiten:
  - Wartezeit- und Selektionsersparnisse: Neukunden sind bessere Risiken als gleichaltrige Kunden (Ursachen: gewisse Leistungen erst nach 3 Monaten, Risikoprüfung bei Vertragsabschluss)
  - S-Kosten: Leistungsausgaben bedingt durch Schwangerschaft, Geburt und Mutterschutz (Umlage durch allg. Gleichbehandlungsgesetz, geschlechtsunabh. Kalkulation)
  - Tatsächlicher Grundkopfschaden: abzüglich Nettorisikozuschläge, einschließlich Leistungen wegen Schwanger- und Mutterschaft, rechnungsmäßige Profilwerte nutzen, für jedes Alter abzugrenzen

Rusam-Methode

- fixiere Alter x_0, bestimme für jedes Alter $k_x := \frac{K_x}{K_{x_0}}$
- k_x: normierter Kopfschaden zum Alter x
- Gesamtheit aller k_x heißt Profil
- Grundkopfschaden: $G := K_{x_0} \Rightarrow K_x = k_x \cdot G$
- Zerlegung in Grundkopfschaden und Profil ist Standard bei Bestimmung der Kopfschäden in der PKV
- Vorteile: Profile für mehrere Tarife nutzbar und im Zeitablauf stabil, vereinfachen Kalkulation

Kosten und Zuschläge

- Sicherheitszuschlag verpflichtend, mind. 5% der Bruttoprämie, nicht in anderen Rechnungsgrundlagen enthalten
- ansetzbare Kosten: Abschlusskosten, Verwaltungskosten, KV-spezifische Zuschläge
- Bei Festlegung zu beachten: Einschränkungen der Höhe bei unmittelbaren Abschlusskosten, nur altersunabhängige absolute Kostenzuschläge erlaubt

Überprüfung Rechnungsgrundlagen

- Voraussetzung für Prämienanpassung: „... nicht nur als vorübergehend anzusehenden Veränderung einer für die Prämienkalkulation maßgeblichen Rechnungsgrundlage ...“

- maßgebliche Rechnungsgrundlagen: Versicherungsleistung (Kopfschaden) und Sterbewahrscheinlichkeiten

Auslösender Faktor für Schäden

- Überprüfung der Rechnungsgrundlage der Kopfschäden durch Vergleich erforderlicher und kalkulatorischer Leistungen mindestens jährlich
- Auslösender Faktor für Versicherungsleistungen (Kopfschäden): $AF_{Schaden} := \frac{S^{erf}}{S^{kalk}}$
- Prämien überprüfen, falls $|1 - AF_{Schaden}| > 10\%$ und Änderung nicht nur vorübergehend
- Bestimmung der erforderlichen Leistungen auf Basis einer Extrapolation der letzten drei Jahre
- Tatsächlicher Grundkopfschaden in einem Jahr (S abgegrenzter Schaden, n_x abgegrenzter mittlerer Bestand, k_x rechn.mäßiges Profil für Alter x:

$$G = \frac{S}{\sum_x n_x \cdot k_x} \tag{6.1}$$

- Extrapolierter Grundkopfschaden um 18 Monate unter Verwendung von G_t, G_{t-1}, G_{t-2}:

$$G^{(ext)} = \frac{3}{2} \cdot (G_t - G_{t-2}) + \frac{1}{3} \cdot (G_{t-2} + G_{t-1} + G_t) \tag{6.2}$$

- erforderliche Versicherungsleistungen:

$$S^{erf} := \sum_x n_x \cdot G^{(ext)} \cdot k_x^{rech} \tag{6.3}$$

- kalkulatorische Versicherungsleistungen:

$$S^{kalk} := \sum_x n_x \cdot G^{(rech)} \cdot k_x^{rech} \tag{6.4}$$

- mit: n_x abgegrenzte mittlere Bestandsgröße im Alter x und $G^{(ext)}$ extrapolierter Grundkopfschaden
- Ergebnis: Vergleich der Grundkopfschäden

Auslösender Faktor für Sterblichkeit

- mindestens jährlicher Vergleich von erforderlichen und kalkulatorischen Sterbewahrscheinlichkeiten (Leistungsbarwerte vergleichen)

- auslösender Faktor Sterblichkeit:

$$AF_{Sterb} := max\left\{ \frac{1}{25} \cdot \sum_{x=21}^{45} \frac{A_x^{(erf)}}{A_x^{(kalk)}}, \frac{1}{25} \cdot \sum_{x=46}^{70} \frac{A_x^{(erf)}}{A_x^{(kalk)}}, \frac{1}{25} \cdot \sum_{x=71}^{95} \frac{A_x^{(erf)}}{A_x^{(kalk)}} \right\} \tag{6.5}$$

- Überprüfung der Prämien, wenn $|1 - AF_{Sterb}| > 5\%$
- Bestimmung des Leistungsbarwerts ohne Storno-Whk.
- bei Krankengeld: Betrachtung Alter 21-45 und 46-65
- Leistungsbarwert mit kalkulatorischen Sterbewahrscheinlichkeiten:

$$A_x^{(kalk)} = \sum_{t \geq 0} v^t \cdot {}_tp_x \cdot K_{x+t} \tag{6.6}$$

- Leistungsbarwert mit erforderlichen Sterbewahrscheinlichkeiten

$$A_x^{(erf)} = \sum_{t \geq 0} v^t \cdot {}_tp_x^{BaFin} \cdot K_{x+t} \tag{6.7}$$

- $q_x^{(BaFin)}$ Sterblichkeit aus aktueller PKV-Sterbetafel

Zustandsmodell KV - Teil 2

- nach t-jährigem Verbleib in Hauptgesamtheit:

$${}_t\hat{L}_x = K_{x+t} + w_{x+t} \cdot v \cdot \ddot{U}_{x+t+1} \tag{6.8}$$

- $\ddot{U}_{x+t+1}$ ist die Übertragungswertzahlung bei Storno in Vertragsjahr $t+1$, Rechnung mit $\ddot{U}_x = 0$
- Leistungsbarwert mit Übertragungswertzahlung (ab 2009):

$$A_x := \sum_{t=0}^{\omega - x} v^t \cdot {}_tp_x \cdot (K_{x+t} + w_{x+t} \cdot v \cdot \ddot{U}_{x+t+1}) \tag{6.9}$$

Prämienanpassung

$${}_mV_x + B_u^{a/n} \cdot \ddot{a}_u = A_u + \Delta \cdot B_u^{a/n} \cdot \ddot{a}_u + \gamma \cdot \ddot{a}_u + \alpha_u'' \cdot max\{B_u^{a/n} - B^a; 0\} \tag{6.10}$$

Altenproblem

$$P_u^{a/n} = (1+\lambda) \cdot P^a + \lambda \cdot (P_u^a - P^a) \tag{6.11}$$

Äquivalenzgleichung

- verallgemeinertes Äquivalenzprinzip (Abschlussalter x, jetzt $x+m$)

$$ {}_mV_x + B^a \cdot \ddot{a}_u^{\,a} = A_u^a + \Delta^a \cdot B^a \cdot \ddot{a}_u^{\,a} + \gamma^a \cdot \ddot{a}_u^{\,a} \tag{6.12} $$

- d.h. Altersrückstellungen zzgl. erw. Barwert aller zukünftiger Prämien finanziert Leistungsbarwert der Versicherungsleistungen und Kosten

- ohne Kosten:

$$ {}_mV_x^{(netto)} + P^a \cdot \ddot{a}_u^{\,a} = A_u^a \tag{6.13} $$