Warum bin ich nicht einfach Staubsaugervertreter geworden?

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeiner Unsinn für Grundlagen aktuarieller Kalkulation

Sparten

- Umfasst Leben, Kranken, Komposit, Pensionen
- Leben, Kranken, Pensionen sind zusammen Personenversicherung
- Komposit: Schaden/Unfall
- Besonders: priv. Unfall ist Komposit

Definition 1 *(Farny) Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Mittelbedarfs unter Nutzung von Ausgleichsmechanismen im Kollektiv.*

Wichtigste Zweige Komposit

- Sachversicherung
- Haftpflichtversicherung
- Transportversicherung
- Technische Versicherung

Prämienzahlweise

- üblicherweise jährlich
- bei unterjährigen Zahlung Ableitung aus Jahresprämie

Diskont und Barwert

- Diskontfunktion bei einjährigem Zinssatz r: $D(t) = (1+r)^{-t}$
- Diskontfunktion bei Rechnungszins i: $D(t) = (\frac{1}{1+i})^t =: v^t$
- Barwert aller Leistungen: $L = \sum_{t=0}^{\bar{n}} D(t) \cdot L_t$
- Barwert aller Prämien: $P = \sum_{t=0}^{\bar{n}} D(t) \cdot P_t$
- Barwert aller Kosten: $K = \sum_{t=0}^{\bar{n}} D(t) \cdot K_t$

Äquivalenzprinzip

$$\text{(ÄP I):} \quad E(P) = E(L) \tag{1.1}$$

$$\text{(ÄP II):} \quad E(P) = E(L) + E(K) \tag{1.2}$$

Definition 2

- *Falls L und P das Äquivalenzprinzip erfüllen, dann heißt $P_\bullet$ Nettorisikoprämienprozess und P_t Nettorisikoprämie.*
- *L und P erfüllen ÄP und $\exists\ w_t$ Wahrscheinlichkeit der Prämienzahlung P_t und $\bar{P}$ konstant mit $E(P_t) = \bar{P} \cdot w_t\ \forall\ t \in \{0, ..., \bar{n}\}$. $\bar{P}$ konstante Nettorisikoprämie.*
- *Bruttorisikoprämie: $P^+ := \bar{P} + c$ mit $c > 0$ Sicherheitszuschlag.*
- *Alternativ: Sicherheitszuschlag bereits in Nettorisikoprämie enthalten*

Notation

- $\bar{n}$: Modelldauer
- t: Zeit in jahren
- r: einjähriger konstanter Zinssatz
- $D(t)$: Diskontfunktion
- L_t: Versicherungsleistung in t
- q_t: Eintrittswahrscheinlichkeit Leistungsfall in t
- P_t: Prämienzahlung in t
- w_t: Wahrscheinlichkeit Prämienzahöung in t

- K_t: Kosten in t
- L: Leistungsbarwert
- P: Prämienbarwert
- K: Kostenbarwert

Sterbetabeln

Alter	Männer				
	l_x durchlebte Bestandsjahre	t_x Tote	q_x^{roh} rohe Sterb-lichkeitswerte	$q_x^{2.Ord.}$ Sterblichkeit 2. Ordnung	q_x Sterblichkeit 1. Ordnung (Zuschlag 34%)
14	33.700	9	0,000267	0,000226	0,000303
15	35.163	7	0,000199	0,000311	0,000417
16	35.471	11	0,000310	0,000416	0,000557
17	36.430	15	0,000412	0,000529	0,000709
18	36.158	31	0,000857	0,000634	0,000850
19	36.500	28	0,000767	0,000711	0,000953
20	43.193	37	0,000857	0,000755	0,001012
21	64.534	64	0,000992	0,000763	0,001022
22	100.268	74	0,000738	0,000749	0,001004
23	142.584	110	0,000771	0,000719	0,000963

Allgemeine aktuarielle Herangehensweise, spartenübergreifend ähnliches Standardvorgehen zur Bewertung zufälliger zukünftiger Versicherungsleistungen

- Beobachtung von Vergangenheit (Daten) zur Vorhersage der Zukunft
- Anpassung geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Sorgfalt bzgl. möglicher Änderungen von Annahmen im zeitlichen Verlauf
- typischerweise konstante Prämienhöhe
- Risiko steigt mit zeitlichem Verlauf
- Ansparprozess und Entsparprozess

Rückstellungen

- Ziel: Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit
- versicherungstechnische Rückstellungen wichtigste Passivposition in der Bilanz des VU

- hohe bedeutung für interne Unternehmensbewertung
- Einfluss auf Besteuerung des VU
- Unterschied zwischen bilanzieller und einzelvertraglicher versicherungsmathematischer Deckungsrückstellung
- Deckungskapitel $\widehat{=}$ Erwarteter Barwert künftiger Leistungen - Erwarteter Barwert künftiger Beiträge

Rückstellungen in der Schadenversicherung

- Einzelschadenreserven: für noch nicht vollständig abgewickelte Schäden
- Deckungsrückstellungen: für Haftpflicht, Unfallrenten und Beitragsrückgewähr in Unfall
- Spätschadenpauschalreserve: für IBNR
- Schwankungsrückstellung: relevant für Zweige mit stark variierenden Schadenfällen

Prämienprinzipien

- Ziel: Zuordnung angemessener Prämie durch Bemessung geeigneter Sicherheitszuschläge
- Deckung der Leistungsfälle und zusätzliche Prämie zur Bereitschaft der Risikoübernahme durch VU (Sicherheitszuschlag SZ(X))
- Prämienprinzipien $H(X) := E(X) + SZ(X) = P^+$, X ist das versicherte Risiko
- Sicherheitszuschlag bei gleichem EW höher, wenn Risiko gefährlicher
- Nettorisikoprinzip: $H(X) = E(X)$
- Erwartungswertprinzip: $H(X) = E(X) + \delta \cdot E(X) = (1+\delta) \cdot E(X)$
- Varianzprinzip: $H(X) = E(X) + \delta \cdot Var(X)$
- Standardabweichungsprinzip: $H(X) = E(X) + \delta \cdot \sqrt{Var(X)} = E(X) + \delta \cdot \sigma(X)$
- Exponentialprinzip: $H(X) = \frac{1}{a} \cdot ln(M_X(a)) = \frac{1}{a} \cdot ln(E[e^{aX}])$ mit $a > 0$, Monumenterzeugender Funktion M_X, entspricht näherungsweise Varianzprinzip mit $\delta = \frac{a}{2}$

Definition 3 *(Ungleichung von Centelli)* $P(X > E(X) + c) \leq \frac{Var(X)}{c^2 + Var(X)}$
Hinweis: SZ wird hier stark überschätzt.

Beispiele Risikomaße

- Erwartungswert $E(X)$
- Varianz $Var(X)$
- Schiefe $\gamma(X)$ (Symmetriemaß
- Tail-Whk $P(X > t)$
- Ruin- und Verlustwahrscheinlichkeiten
- Bernoulli-Nutzen
- Value at Risk (VaR), Expected Shortfall, Tail Value at Risk (TVaR)

Definition 4

$$\textit{Additivität: } H(X+Y) = H(X) + H(Y)\ \forall\ X, Y \textit{ stochastisch unabhängig} \tag{1.3}$$
$$\textit{Subadditivität: } H(X+Y) \leq H(X) + H(Y)\ \forall\ X, Y \textit{ stochastisch unabhängig} \tag{1.4}$$
$$\textit{Erwartungswertübersteigend: } SZ(X) \geq 0 \tag{1.5}$$

Definition 5 *(1) Ein Kollektiv stellt eine Zusammenfassung von Risiken dar, die durch gleichartige Gefahren bedrohnt sind. Kollektiv bedeutet nicht zwangsläufig, dass es sich um versicherte Risiken handelt.*
(2) Der Risikoausgleich im Kollektiv stellt neben dem Ausgleich in der Zeit ein wesentliches Funktionsprinzip von Versicherungen dar.
(3) Ein Kollektiv heißt homogen, falls alle Risiken des Kollektivs dieselbe Verteilung besitzen, anderenfalls heißt es heterogen.
(!) Hinweis: Homogenität und Unabhängigkeit sind keine notwendige Voraussetzung für Risikoausgleich im Kollektiv. Im Gegenteil: gleicht sich durch gegenläufige Abhängigkeiten z.T. aus.

Risikoausgleich

- Das Überschreiten einer prozentualen Maximalabweichung vom Erwartungswert wird bei wachsendem Kollektiv immer unwahrscheinlicher.
- Risikoausgleich im Kollektiv erfolgt insofern, als dass der Variationskoeffizient als versicherungsspezifisches Risikomaß für wachsende Bestände gegen 0 konvergiert.
- Mit zunehmender Zahl von Risiken sinkt die relative Abweichung des arithmetischen Mittels vom Erwartungswert.

Definition 6 *$Y_i \geq$ kumulierter Gesamtaufwand des i-ten Risikos. $S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.*

$$\textit{Durch Linearität des EWs: } E(S^{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \tag{1.6}$$

$$\textit{Da } Y_i \textit{ unabhängig: } Var(S^{ind}) = \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) \tag{1.7}$$

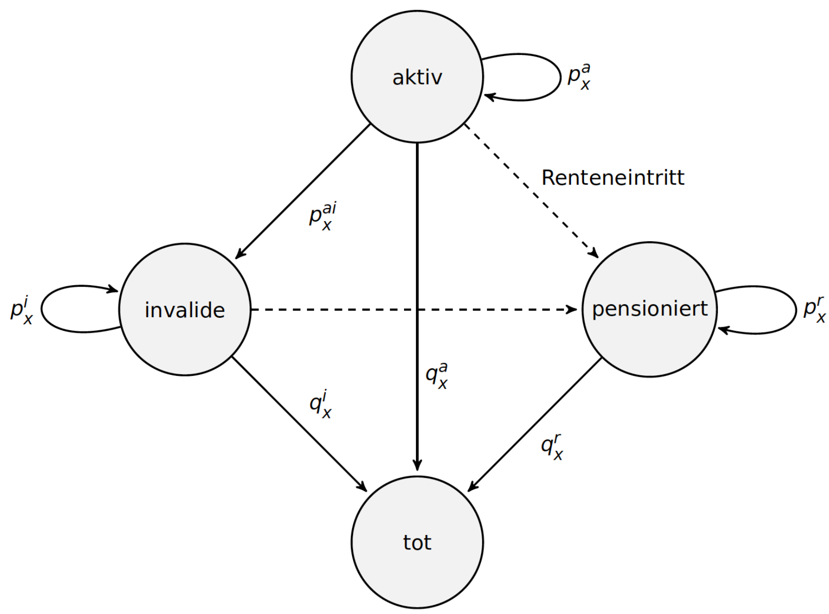
$$\textit{Variationskoeffizient: } Vko(S^{ind}) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i)}}{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)} \tag{1.8}$$

Definition 7 *Erste und zweite Formel von Wald. N die Schadenzahl.*
(1) $E(S^{koll}) = E(N) \cdot E(X)$
(2) $Var(S^{koll}) = E(N) \cdot Var(X) + (E(X))^2 \cdot Var(N)$

Gegenüberstellung individuelles und kollektives Modell

- dieselbe Gesamtsumme $S^{int} = S^{koll}$
- im individuellen Modell Aggregation der einzelnen Aufwände pro Risiko und Zeitraum erforderlich
- kollektives Modell: Betrachtung einzelner Ereignisse ohne Erfassung, welches Risiko den Aufwand verursacht
- i.A. bietet das KM eine bessere Basis für die Schätzung der Verteilung
- Annahme identisch verteilter Aufwände bei IM nur näherungsweise erfüllt

Zustandsmodell der Personenversicherung



- Modellannahmen nicht immer sachgerecht
- Markov-Eigenschaft kritisch: Relevant, ob *aktiv* $\rightarrow$ *Rente* oder *invalide* $\rightarrow$ *Rente*
- z.T. sehr viele Zustände erforderlich (z.B. Abhängigkeit der Leistungshöhe von Anzahl Dienstjahren, bei Invalidität der Zeitpunkt des Eintritts in den Invalidenstatus)

Risikoteilung

- teilweiser Risikotransfer im direkten Geschäft zwischen VN und Erstversicherer sowie im Rahmen von Rückversicherung (RV)
- Risikoteilung im Direktgeschäft: Selbstbehalt beim VN, genannt *Franchisen*
- in der Rückversicherung: Selbstbehalt beim Erstversicherer, genannt *Prioritäten*
- risikopolitisch und nicht gewinnorientierte Vorgehensweise
- für den Erstversicherer:
  - Verringerung des versicherungstechnischen Risikos
  - Erhöhung Zeichnungskapazität
  - Solvenzverbesserung
  - Kapitalkostenreduktion
- für den Rückversicherer:
  - Existenzgrundlage
  - bessere Diversifikation der Risiken als beim Erstversicherer

Begrifflichkeiten Rückversicherung

- aktive RV: Angebot von Rückversicherungskaapzitäten
- passive RV: Nachfrage nach RV-Schutz durch Erstversicherer
- Retrozession: Weitergabe in Rückdeckung genommener Risiken eines RV an anderen RV
- obligatorische RV: Verpflichtung des Erstversicherers zur Übertragung aller vertraglich definierten Risiken ohne Ablehnungsrecht des RV
- fakultative RV: individuelle Abgabe und Annahme von Risiken auf einzelvertraglicher Basis
- Originalbasis: RV erhält anteilig Prämie und muss Deckungskapital bilden
- Risikobasis: RV erhält Risikobeitrag und bildet kein Deckungskapital

Proportionale Risikoteilung

- proportionale Aufteilung der Schäden in festem Verhältnis zwischen Vertragspartnern
- Proportionen vorab fest und unabhängig von Schadenhöhen
- einfache Struktur, geringe Flexibilität
- bei RV Schicksalsteilung: Übernahme von Teilen des Erstversicherungsrisikos, aber nicht kaufmännischen oder unternehmerischen Risikos des Erstversicherers
- wichtigste Formen der proportionalen RV: Quotenrückversicherung, Summenexedentenrückversicherung
  - QRV: feste Quotenabgabe q, Selbstbehalt $\underline{S^{ind}} = (1-q) \cdot S^{ind}$
  - SERV: Festlegung eines Maximums v_0 als maximaler Selbstbehalt des Erstversicherers bei jedem einzelnen Risiko und vertragsindividuelle Quote $q_i = \frac{max\{v_i - v_0,\, 0\}}{v_i}$ in Abhängigkeit der jeweiligen Versicherungssumme
- SERV dient der Homogenisierung des Portfolios und der Reduktion von Spitzenrisiken
- Üblicherweise Haftungsbegrenzung für RV i.H.v. Vielfachem m von v_0. Mehrere aneinandergereiht, s.d. man Layering erhält.

nicht-proportionale Risikoteilung

- alle, die keine proportionale Aufteilung vorsehen
- komplizierte Strukturen
- schwierige quantitative Analysierbarkeit
- gut zur Erreichung gezielter Effekte
- dominierend: Abzugsfranchise
  - Franchisegrenze absoluter Höhe a zwischen VN und VU
  - Schaden in Höhe $X \Rightarrow \underline{X} = min\{X, a\}$, d.h. VU übernimmt Teil, der a übersteigt
  - Jahresfranchise: analog mit Franchisegrenze und Jahresgesamtschaden
  - Integralfranchise: wenn Grenze überschritten, übernimmt VU Schaden komplett

- Zeitfranchise: VN trägt jeden Schaden bis zum Ablauf der Frist selbst

- wichtigste Formen:
  - Schadenexzedentenrückversicherung: Priorität a und Limit l, Übernahme des Teils, der a übersteigt und unter l liegt. Wirkt pro Risiko, eignet sich für LCs. Limitierte Layer als Differenz zweier unlimitierter Layer darstellbar.
  - Kumulschadenexzedentenrückversicherung: Priorität a^*, Limit l^* pro Kumulereignis (Anwendung auf Gesamtschäden von Kumulereignissen). Übernahme des die Prio übersteigenden Teils.
  - Jahresüberschadenexzedentenrückversicherung: Anwendung auf Jahresgesamtschaden, ebenfalls Priorität und Limit

Entschädigung

- Entschädigung $Z = g(X)$, $X \mathrel{\hat{=}}$ Finanzaufwand, g monoton wachsend, $g(x) \leq x$
- Selbstbehalt des VN $X - Z = X - g(X)$
- proportionale Selbstbeteiligung: $Z = g_1(X) := q \cdot X,\ q \in (0,1)$
- Abzugsfranchise: $Z = g_2(X) := (X-a)^+,\ a > 0$
- Haftungsbegrenzung: $Z = g_3(X) := min(X;I),\ I > 0$
- allgemeine Darstellung der Entschädigung:

$$Z = q \cdot min\{(X-a)^+, I\} = \begin{cases} 0 & X \leq a \\ q \cdot (X-a) & a < X \leq a+I \\ q \cdot I & a+i < X \end{cases} \tag{1.9}$$

- Prämie basiert auf Erwartungswert der Entschädigung $E(Z) := E[q \cdot min\{(X-a)^+, I\}] = q \cdot \int_a^{a+I} (1-F(x))dx$, wobei $F(x)$ die Verteilungsfunktion der Finanzaufwände ist.

Kapitel 2

Schadenversicheungsmathematik

Notation

- n: Anzahl der Verträge
- α_i: Jahreseinheit des i-ten Vertrages, $i = 1, ..., n$
- v_i: Versicherungssumme des i-ten Vertages
- b_i: Jahresbeitrag des i-ten Vertrages
- N: (zufällige)Anzahl Schäden
- X_j: (zufällige) Höhe des j-ten Einzelschadens, $j = 1, ..., N$
- r: Anzahl der Tarifmerkmale
- M_k: k-tes Tarifmerkmal, $k = 1, ..., r$
- n_k: Anzahl der verschiedenen Ausprägungen des k-ten Merkmals
- $a_{j,k}$: j-te Ausprägung des k-Tarifmerkmals, $j = 1, ..., n_k$

Schadenkennzahlen

- Schadendaten: Zeitpunkt, Art und Ursache, Sachlicher Bezug, Ort, Entschädigung
- Bestandsdaten: Versicherungssumme, persönliche Daten der VN, ...
- Exposure: Das Risiko eines Vertrags oder eines Bestandes
  Exposuremaß: versicherungstechnische Risiko bzw Schadenbedarf eines Bestandes
  (Bsp: Jahreseinheiten, Anzahl Risiken, Summe Beiträge, ...)
- Anzahl Jahreseinheiten bzw. durchschnittliche Anzahl der Verträge: $n_0 := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
- Schadenhäufigkeit / Frequenz: $H := \frac{\text{Anzahl Schäden}}{\text{Anzahl Jahreseinheiten}} = \frac{N}{n_0}$

- Schadendurchschnitt: $D := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl Schäden}} := \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{S}{N}$
- Schadenbedarf: $SB := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl Jahreseinheiten}} = \frac{S}{n_0} = H \cdot D = \text{Schadenhäufigkeit} \cdot \text{Schadendurchschnitt}$
- Summe verdiente Beiträge: $b := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot b_i$
- Schadenquote: $SQ := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Summe verd. Beiträge}} = \frac{S}{b}$
- durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme: $v := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$
- Schadensatz: $SS := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{durchschn. kumulierte V-Summe}} = \frac{S}{v}$
- durchschnittliche Versicherungssumme: $v_0 := \frac{\text{durchschn. kumulierte V-Summe}}{\text{Anzahl Jahreseinheiten}} = \frac{v}{n_0}$
- Schadengrad: $SG := \frac{\text{Schadendurchschnitt}}{\text{durchschn. V-Summe}} = \frac{D}{v_0}$

Grundlagen der Tarifierung

- Jedem Risiko wird im Rahmen der Tarifierung zunächst der Vektor der Ausprägung $(a_{i_1,1}, a_{i_2,2}, ..., a_{i_r,r})$ der ausgewählten Tarifmerkmale $M_1, ..., M_r$ zugeordnet. Dieser Vektor legt dann genau ein der $t := \prod_{k=1}^{r} n_k$ =Anzahl der Tarifzellen verschiedenen Tarifzellen eindeutig fest.
- Für jedes r-Tupel $(i_1, ..., i_r)$ und damir für jede Tarifzelle ist die Nettorisikoprämie $b_{i_1,...,i_r}$ zu bestimmen
- Tarifmodelle verwenden Schadenbedarfe und für jedes Merkmal M_k, $k = 1, ..., r$ und jede Ausprägung $a_{j,k}$, $j = 1, ..., n_k$ dieses k-ten Merkmals einen der insgesamt $n := \sum_{k=1}^{r} n_k$ sogenannten Marginalparameter
- Dieses Marginalfaktoren bzw. summanden repräsentieren die verschiedenen Ausprägungen der Merkmale und quantifizieren den mittleren Einfluss der Ausprägung auf die Schadenaufwendungen und sind zu schätzen
- $u_{k,j} :=$ Marginalfaktor bzw. summand der j-ten Ausprägung des k-ten Merkmals
- Multiplikatives Modell: $b_{i_1,...,i_r} := sb \cdot \sum_{k=1}^{r} u_{k,i_k}$
- Additives Modell: $b_{i_1,...,i_r} := sb + \sum_{k=1}^{r} u_{k,i_k}$

Tarifierungsverfahren

Alles multiplikative Modelle:
Vereinfachte Bezeichnungen: $A := M_1$, $B := M_2$ Merkmale mit $p := n_1$, $q := n_2$ Merkmalsausprägungen. Es gilt: $t = p \cdot q$ und $n = p + q$. Außerdem: $x_i := u_{1,i}, i = 1, ..., p$ und $y_j := u_{2,j}, j = 1, ..., q$. Zusätzlich $s_{i,j}$ Gesamtschaden in Tarifzelle (i, j), $v_{i,j}$ Volumenmaß

und $sb_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{v_{i,j}}$ Schadenbedarf.
Es ergeben sich die Marginaldurchschnitt: $sb_{i,\circ} := \frac{s_{i\bullet}}{v_{i\bullet}}$ und $sb_{\circ,j} := \frac{s_{\bullet j}}{v_{\bullet j}}$ und der Schadenbedarf $sb := \frac{s_{\bullet\bullet}}{v_{\bullet\bullet}}$
Tarifierungsverfahren mit Marginaldurchschnitten:

- heuristischer Ansatz: Marginalfaktoren als normierte Marginaldurchschnitte der Risiken mit den jeweiligen Merkmalsausprägungen definieren:
  $x_i^{MD} := \frac{sb_{i\circ}}{sb}$
  $y_j^{MD} := \frac{sb_{\circ j}}{sb}$
- Dann folgt: $b_{i,j}^{MD} := sb \cdot x_i^{MD} \cdot y_j^{MD}$
- Verfahren liefert meist wenig zufriedenstellende Ergebnisse $\rightarrow$ Weiterentwicklung erforderlich

Tarifierungsverfahren von Bailey & Simon:

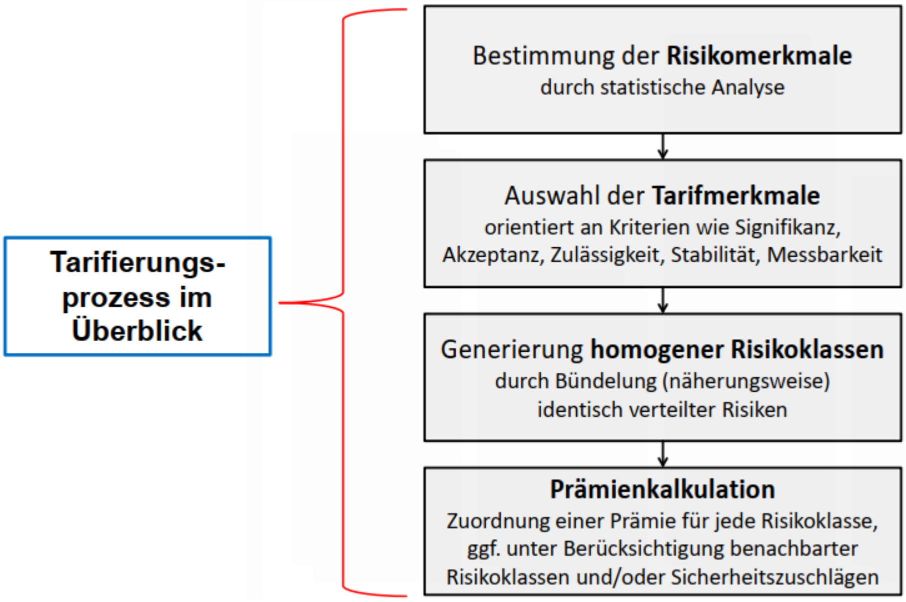
- Ansatz orientiert sich an der Abstandsfunktion des χ^2-Tests
- Versucht die Marginalfaktoren x_i, y_j so zu wählen, dass die Summe der (gewichteten) quadratischen Abstände zwischen den beobachteten Gesamtschäden s_{ij} und den kumulierten Nettorisikoprämien $v_{i,j} \cdot b_{i,j} = v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j$ über alle Zellen minimiert wird.
- Lösungen ergeben sich nach Nullsetzen der partiellen Ableitungen durch "p+q nichtlinearen Bestimmungsgleichungen"(nicht explizit lösbar, aber lösbar mit Fixpunktiteration)
- Mit den Grenzwerten der Iteration werden die Marginalfaktoren x_i^{BS} und y_j^{BS} gegeben (nicht eindeutig bestimmt)
- Es folgt: $b_{i,j}^{BS} := sb \cdot x_i^{BS} \cdot y_j^{BS}$
- Verfahren reagiert empfindlich auf Ausreißer und überschätzt beobachteten Gesamtschaden

Marginalsummenverfahren

- Ansatz: Für jede Ausprägung eines der beiden Merkmale sollen die kumulierten Nettorisikoprämien mit den kumulierten Gesamtschäden übereinstimmen.
- Grundlage zur Bestimmung der Marginalfaktoren sind Marginalsummengleichungen (**AUFSCHREIBEN??**)
- Marginalsummengleichungen ergeben nichtlineares Gleichungssystem mit $p+q$ Gleichungen und Unbekannten

- Lösen ebenfalls mit Fixpunktiteration.
- Bei Konvergenz ergeben sich die Grenzwerte als Marginalfaktoren x_i^{MS} und y_j^{MS}

Auswahl der Tarifmerkmale



1. Ermittlung von Risikomerkmalen

- Finden von statistisch signifikanten Merkmalen aus Daten zweierlei Arten: Schadendaten und Bestandsdaten
- Auswahl potenzieller Risikomerkmale permanent prüfen
- Besondere Beachtung der Großschäden durch "Kupierung": Schäden werden an sog. Kuperungsgrenzen abgeschnitten. Pro Schaden stellt die Grenze die max. Höhe dar, mit denen Schadenaufwendungen in den weiteren Analysen berücksichtigt werden

2. Auswahlkriterien einzelner Tarifmerkmale

- Wichtigste Kriterien: Signifikanz, möglichst unabhängig, Zulässigkeit, Messbarkeit, Anzahl der Tarifmerkmale, Stabilität/Robustheit, Bezug zum Risiko, Imageaspekte

3. Auswahlmethoden der Gesamtheit der Tarifmerkmale

- Einerseits: Gute Erklärung des Schadenaufkommens, andererseits: stochastische Unabhägigkeit oder Analysierung ihrer Wechselwirkung
- Für die Tarifmerkmale gemeinsame Verteilung: $P^{X_1,\dots,X_r}$

- Bei stochastischer Abhängigkeit steigt der Grad der Komplexität um P zu berechnen deutlich an
- Moderne Ansätze: Einsatz von Copulas für die Abhängigkeiten
- Ansatz 1: Multiple Regressionsanalyse (**GENAUER? Kap 4**)
- Ansatz 2: Verfahren der schrittweisen Auswahl (**GENAUER?**)

Abwicklungsmuster

1. für Anteile ϑ

- Für jedes Anfalljahr i wird der erwartete Zuwachs im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zum erwarteten Endschadenstand definiert: $\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$, $i,k = 0,...,n$ (Anteile unabhängig von Anfalljahr)
- Es gilt $\sum_{k=0}^{n} = 1$.
- Bei Schadenanzahl bzw. -zahlungen gilt: $\vartheta_k > 0$

2. für Quoten γ

- Für jedes Anfalljahr i wird der erwartete Schadenstand im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu dem erwarteten Endschadenstand definiert: $\gamma_k = \frac{S[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$, $i,k = 0,...,n$ (Quoten unabhängig von Anfalljahr)
- Es gilt $\gamma_n = 1$
- Bei Schadenanzahl bzw. -zahlungen gilt: $\gamma_0 < ... < \gamma_n$

3. Für Faktoren φ

- Für jedes Anfalljahr wird der erwartete Schadenstand im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zum erwarteten Schadenstand im $(k-1)$-ten Abwicklungsjahr definiert: $\varphi_k = \frac{S[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$, $i,k = 0,...,n$
- Bei Schadenanzahl bzw. -zahlungen gilt: $\varphi_k > 1$

4. Für Schadenquotenzuwächse

- In Anwendung verwendet man die Prämieneinnahmen der Anfalljahre für Volumenmaße $\pi_0,...,\pi_n$ Erwarteter Schadenquotenzuwachs des k-ten Abwicklungsjahrs für das i-te Anfalljahr: $\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$, $i,k = 0,...,n$
- erwartete Endschadenquote: $\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i}$

Basisverfahren der Schadenreservierung

Chain-Ladder-Verfahren

- Chain-Ladder Faktoren:

$$\hat{\varphi}_k^{CL} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \cdot \frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}}, k = 1, ..., n \tag{2.1}$$

- Alle beobachtbaren Schadenstände werden verwendet (sonst nichts)
- Die aktuellen Schadenstände $S_{i,n-i}$, $i = 0, ..., n$, aus der Diagonale des Abwicklungsdreiecks mit Hilde der Chain-Ladder-Faktoren sukzessive auf das Niveau der späteren Abwicklungsjahre hochgerechnet.
- Ergebnisse werden als Chain-Ladder-Prädiktoren bezeichnet:

$$\hat{S}_{i,k}^{CL} := \hat{\varphi}_k^{CL} \cdot \hat{S}_{i,k-1}^{CL} \tag{2.2}$$

- Reserven für Anfalljahr i ergeben sich aus der Differenz der Prädiktoren für den erwarteten Entschadenstand und dem aktuellen Schadenstand:

$$\hat{R}_i^{CL} := \hat{S}_{i,n}^{CL} - S_{i,n-i} \tag{2.3}$$

Loss-Development-Verfahren

- Stellt ein Abwicklungsmuster für Quoten und dass für diese Quoten $\gamma_0, ..., \gamma_n$ a-priori-Schätzer $\hat{\gamma}_0, ..., \hat{\gamma}_n$ unterliegen
- Aktuelle Schadenstände $S_{i,n-i}$ per Division durch Schätzer auf Niveau des letzten Abwicklungsjahr hochgerechnet und mit Faktor $\hat{\gamma}_k$ auf Niveau des k-ten Abwicklungsjahrs zurück skaliert:

$$\hat{S}_{i,k}^{LD} := \hat{Y}_k \cdot \frac{S_{i,n-i}}{\hat{Y}_{n-i}} \tag{2.4}$$

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

- Ähnlich wie LD-Verfahren, aber zusätzlich zu a-priori Schätzer $\hat{\gamma}_0, ..., \hat{\gamma}_n$ für Quoten noch a-priori-Schätzer $\hat{\alpha}_0, ..., \hat{\alpha}_n$ für erwartete Schadenstände ($\alpha_i := E[S_{i.n}]$)
- aktuelle Schadenstände mit Hilfe der a-priori Schätzer linear fortgeschrieben.

$$\hat{S}_{i,k}^{BF} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{2.5}$$

- Durch Differenzbildung werden die BF-Prädiktoren für Zuwächste errechnet:

$$\hat{Z}_{i,k}^{BF} := \hat{S}_{i,k}^{BF} - \hat{S}_{i,k-1}^{BF} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{2.6}$$

- iteriertes Bornhuetter-Ferguson-Verfahren: Nach der ersten Anwendung werden die Prädiktoren $\hat{S}_{i,n}^{BF}$ anstatt der $\hat{\alpha}_i$ verwendet (Einfluss wird so reduziert). Verfahren wird so lange wiederholt bis sich Grenzwerte einstellen als Prädiktoren

Additives Verfahren/ Incremental-Loss-Ratio-Verfahren

- Basiert auf Annahme, dass es Volumenmaße $\pi_0, ..., \pi_n$ für die Anfalljahre $i = 0, ..., n$ gibt.
- Außerdem Abwicklungsmuster für die erwarteten (Schaden-)Quoten-Zuwächse $\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$, sodass es Parameter $\zeta_0, ..., \zeta_n$ gibt mit $\zeta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$
- Schätzer für relative Zuwächste werden additive Schadenquotenzuwächse verwendet:

$$\zeta_k^{AD} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\pi_j}{\sum_{h=0}^{n-k} \pi_h} \cdot \frac{Z_{j,k}}{\pi_j} \tag{2.7}$$

- Schätzer setzen für den Zuwachs des k-ten Abwicklungsjahr die Summe sämtlicher Zuwächse im k-Abwicklungsjahr zur Summe der zugehörigen Volumenmaße
- Mit diesen Schätzern erhält man Prädiktoren für Zuwächse und Schadenstände:

$$\hat{Z}_{i,k} := \pi_i \cdot \hat{\zeta}_k^{AD} \tag{2.8}$$

$$\hat{S}_{i,k}^{AD} := S_{i,n-i} + \sum_{j=n-i+1}^{k} \hat{Z}_{i,j}^{AD} \tag{2.9}$$

Cape-Cod-Verfahren

- Wie Additives Verfahren Volumenmaße $\pi_0, ..., \pi_n$. Zusätzlich a-priori-Schätzer $\hat{\gamma}_0, ..., \hat{\gamma}_n$ für Quoten
- Annahme: erwartete Schadenquoten unabhängig von Anfalljahr i, daher existiert Parameter κ: $\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i} = \kappa$
- κ wird geschätzt:

$$\hat{\kappa}^{CC} = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j}{\sum_{h=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-h} \cdot \pi_h} \cdot \frac{S_{j,n-j}}{\hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j} \tag{2.10}$$

- Cape-Code-Prädiktoren:

$$\hat{S}_{i,k}^{CC} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \pi_i \cdot \hat{\kappa}^{CC} \tag{2.11}$$

Alle Verfahren sind Spezialfälle von Bornhuetter-Ferguson-Verfahrens. Unterschieden nur durch die Schätzung der Parameter.

Verfahren	Quoten $\hat{\gamma}_k$	Endschadenstände $\hat{\alpha}_i$
Bornhuetter-Ferguson (BF)	beliebig, a priori	beliebig, a priori
Loss-Development (LD)	beliebig, a priori	$\hat{\alpha}_i$(aktuelle $S_{i,n-i}, \hat{\gamma}$)
Chain-Ladder (CL)	$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}}(S_{i,j})$	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \hat{\gamma}^{\mathrm{CL}}$)
Cape-Cod (CC)	beliebig, a priori	$\hat{\alpha}_i$(aktuelle $S_{i,n-i}, \pi, \hat{\gamma}$)
Additiv (AD)	$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}}(Z_{i,j}, \pi)$	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \pi, \hat{\gamma}^{\mathrm{AD}}$)

Verfahren	Vorteile	Nachteile
BF	Flexibilität, externe Quoten und Endschadenstände möglich	Willkür bei Ansatz der a-priori-Schätzer für Quoten und Endschadenstände
LD	Verwendung von Abwicklungsdaten, externe Quoten möglich	Willkür bei Ansatz der a-priori-Schätzer für Quoten, verwendet nur aktuelle Schadenstände, empfindlich für Ausreißer
CL	ausschließliche Verwendung von Abwicklungsdaten	empfindlich für Ausreißer
CC	robustifizierend unter Verwendung von Volumenmaßen, externe Quoten möglich	Willkür bei Ansatz der a-priori-Schätzer für Quoten, verwendet nur aktuelle Schadenstände, Gefahr durch unangemessener Volumenmaße
AD	robustifizierend unter ausschließlicher Verwendung von Volumenmaßen	Gefahr durch unangemessener Volumenmaße

Erweiterung der Basisverfahren

1. Ausreißereffekte
Besser, wenn a-priori-Schätzer vorhanden. Daher Chain-Ladder sehr anfällig und Cape-Cod am besten
2. Inflation
Separationsverfahren bietet Möglichkeit, Kalendereffekte zu berücksichtigen und eine Art Inflationsvereinigung vorzunehmen. Kurze Zusammenfassung: Es gibt Parameter für Abwicklungsjahre und für Kalenderjahre und für die Zuwächse gilt: $E[Z_{i,k}] = v_i \cdot \gamma_{i+k} \cdot \vartheta_k$. Schätzung der Parameter durch Marginalsummengleichungen. Durch bspw. Extrapolation Schätzung der Inflationparameter der nächsten Jahre. Am Ende: $\hat{Z}_{i,k} = v_i \cdot \hat{\gamma}_{i+k} \cdot \hat{\vartheta}_k$
3. Nachlauf
Annahme: Schäden innerhalb von $n+1$ Jahren vollständig abgewickelt. In Ausnahmefällen noch nach dem n-ten Jahr Änderungen in Schadenständen -> "Nachlauf"

Kapitel 3

Personenversicherungsmathematik

Modell

- h Ereignisse bzgl. einer Person, das zuerst eintretende Ereignis führt zum Ausscheiden aus Gesamtheit
- h: Anzahl der Ausscheideursachen, T_i Zeitpunkt Eintritt des Ereignisses i, X_i Alter bei Eintritt des Ereignisses i
- $X_i = T_i - t^*$, $t^* \hat{=}$ Geburtszeitpunkt, $G := \lfloor t^* \rfloor$ das Geburtsjahr
- $X := min\{X_i\}$ Ausscheidealter, $U := min\{i \in \{1,...,h\} : X_i = X\}$: Ausscheideursache
- ${}_1q_x^{(i)}(G)$: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der HGSH mit Geburtsjahr G innerhalb des Zeitintervalls $(x, x+1)$ mit der Ursache i auszuscheiden. Verbleibewahrscheinlichkeit $p_x := 1 - q_x$
- Allgemein:

$$ {}_sq_x(G) := \mathbb{P}[X \leq x + s | X > x] \tag{3.1} $$
$$ {}_sp_x(G) := 1 - {}_sq_x(G) = \mathbb{P}[X > x + s | X > x] \tag{3.2} $$

- mehrjährige Verbleibewahrscheinlichkeit (noch mind. k Jahre in HGSH verbleiben): ${}_kp_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}$

Typische Rechnungsgrundlagen

- biometrische Rechnungsgrundlagen / Ausscheideordnung
- Rechnungszins
- Kosten

Risikomerkmale von Ausscheidewahrscheinlichkeiten

- Eigenschaften, die in statistisch überprüfbarer Weise mit dem Erwartungswert zusammenhängen
- gleichzeitig mehrere Merkmale von Bedeutung (eines reicht nicht)
- Annahme: Ausscheidewahrscheinlichkeit hängt nur von den Merkmalen ab
- vieles wird nicht berücksichtigt

Kosten

- Kostenarten: Abschluss (α), Inkasso (β), Verwaltung (γ)
- Unterschieden werden proportionale (bezogen auf Beitrag oder VS) und Stückkosten

Erfüllungsbetrag

- Der Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung B ist extensional definiert durch die Menge seiner Realisierungen $b_m := \sum_n v^{t_n^{(m)}} s_n^{(m)}$ für $m = 0, 1, ..$, d.h. die Menge der finanzmathematischen Barwerte der ungewissen Verpflichtung.

Leistungsbarwert

- Barwert der Gesamtverpflichtung gegenüber einer Person:

$$ {}_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x {}_k\hat{L}_x \tag{3.3}$$

$$ {}_k\hat{L}_x := {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)} q_{x+k}^{(i)},\ k = 0, 1, \ldots \tag{3.4}$$

- ${}_k\hat{L}_x$: Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+k, x+k+1[$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf Beginn des Jahres
- ${}_kL_x^{(0)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf Jahresbeginn
- ${}_kL_x^{(i)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch das Ausscheiden im Jahr $]x+k, x+k+1[$ aus der Ursache i verursacht werden, soweit nicht durch ${}_kL_x^{(0)}$ erfasst, diskontiert auf Jahresbeginn
- Leistungsbarwert zum Alter $x+m$:

$$ {}_mB_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_{x+m} {}_{m+k}\hat{L}_x, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.5}$$

Prämienbarwerte

- Prämienbarwert zum Alter x gegenüber einer Person:

$$ {}_0B_x^P = \sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x {}_k\hat{P}_x \tag{3.6}$$

- ${}_{k}\hat{P}_x$: Erwartungswert der Prämienleistung des Jahres $]k, k+1]$, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf Jahresbeginn
- Prämienbarwert zum Alter $x+m$: ${}_{m}B_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k {}_{k}p_{x+m} {}_{k+m}\hat{P}_x,\ \ m = 0, 1, ...$

Reserven

- Prospektive Reserve ${}_{m}V_x^{pro}$: Betrag, der zum jeweiligen Stichtag verfügbar sein muss, um Vertrag im Mittel zu erfüllen
- Retrospektive Reserve ${}_{m}V_x^{retro}$: Betrag, der rechnungsmäßig nach Abrechnung von Einnahmen und Ausgaben noch vorhanden ist
- Nach m Jahren soll die Differenz zwischen Barwert zukünftiger Leistungen und Barwert zukünftiger Prämien durch die Reserve gedeckt sein:

$$ {}_{m}V_x^{pro} = {}_{m}B_x^L - {}_{m}B_x^P = \sum_{k\geq 0} v^k {}_{k}p_{x+m} \left({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x \right) \tag{3.7} $$

$$ {}_{m}V_x^{retro} = \frac{1}{v^m {}_{m}p_x} \left[K + \sum_{k=0}^{m-1} v^k {}_{k}p_x \left({}_{k}\hat{P}_x - {}_{k}\hat{L}_x \right) \right] \tag{3.8} $$

$$ {}_{m}V_x^{pro} - {}_{m}V_x^{retro} = \frac{1}{v^m {}_{m}p_x} \left({}_{0}V_x^{pro} - {}_{0}V_x^{retro} \right) \tag{3.9} $$

Versicherungsmathematische Bilanzgleichung

- ${}_{m}V_x + {}_{m}\hat{P}_x = {}_{m}\hat{L}_x + v p_{x+m} {}_{m+1}V_x$
- Spar- und Risikoprämie: ${}_{m}V_x + {}_{m}\hat{P}_x = {}_{m}P_x^S + {}_{m}P_x^R$

Satz von Cantelli

- braucht man das?