Recebido: 2 de março de 2021 | Aceito: 2 de abril de 2021

DOI: 10.1002 / wics.1559

REVISÃO AVANÇADA

WIREs COMPUTATIONAL STATISTICS WILEY

Modelagem Bayesiana de séries temporais multivariadas de contagens

Refik Soyer | Di Zhang

Departamento de Ciências da Decisão, O Universidade George Washington, Washington, Distrito de Columbia, EUA

Correspondência
Refik Soyer, Departamento de Ciências da Decisão, The George Washington University, Funger Hall 415, Washington, DC 20052, EUA.
E-mail: soyer@gwu.edu

Editado por James E. Gentle e David W. Scott, Editores-Chefe

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma visão geral dos avanços recentes na modelagem e análise bayesiana de séries temporais multivariadas de contagens. Discutimos estratégias básicas de modelagem, incluindo processos autoregressivos de valor inteiro, séries temporais multivariadas de Poisson e modelos dinâmicos de fatores latentes. Ao fazê-lo, fazemos uma conexão com frameworks de modelagem univariada, como modelos dinâmicos generalizados, modelos de espaço de estados de Poisson com evolução gama e apresentamos abordagens Bayesianas que estendem esses frameworks para configurações multivariadas. Durante nosso desenvolvimento, abordagens Bayesianas recentes para a análise de processos autoregressivos de valor inteiro e modelos multivariados de Poisson são destacados e conceitos como "desacoplar/reacoplar" e "ambiente aleatório comum" são apresentados. O papel que esses conceitos desempenham na modelagem e análise bayesiana de séries temporais multivariadas são discutidos. Questões computacionais associadas à inferência Bayesiana e previsão desses modelos também são considerado.

Este artigo está classificado em:

Métodos Estatísticos e Gráficos de Análise de Dados > Métodos Bayesianos e Teoria

Modelos Estatísticos > Modelos de Séries Temporais

PALAVRAS-CHAVE

fatores latentes dinâmicos, processos INAR, binomial negativo multivariado, multivariado Poisson, modelagem de espaço de estados não gaussiana

1 | INTRODUÇÃO E VISÃO GERAL

Séries temporais de contagens surgem em muitos campos, incluindo negócios, economia, engenharia e medicina. Por exemplo, a série temporal em estudo pode ser o número de chegadas a um call center a cada 5 minutos (Aktekin & Soyer, 2011), número de viagens de compras das famílias em uma semana (Aktekin et al., 2018), número de hipotecas inadimplência de um determinado pool em um determinado mês (ver Aktekin et al., 2013), série temporal de contagens de acidentes de diferentes grupos demográficos em diferentes áreas geográficas (Hu et al., 2013), número de acidentes em um determinado intervalo de tempo (Serhiyenko et al., 2014) ou o número de mortes por uma doença específica em um determinado ano (Schmidt & Pereira, 2011). Conforme observado por Soyer (2018a) "Com o aumento do volume de dados baseados na Web, a modelagem e a análise de séries temporais com valores discretos ganharam mais atenção" na literatura. Avanços recentes em séries temporais de valor discreto e suas aplicações podem ser encontrados no volume de Davis et al. (2016).

A análise de séries de valores discretos apresenta dificuldades de modelagem e desafios computacionais. Como resultado, pouca atenção tem sido dada às séries temporais de valores discretos multivariados na literatura. Na modelagem de tempo multivariado série de contagens, a estrutura de modelos orientados por observação e por parâmetros de Cox (1981) ainda é aplicável para correlações temporais, mas também é preciso descrever a dependência entre os componentes da série temporal do vetor. Como apontado por Aktekin et al. (2020) existem estratégias alternativas para modelar a dependência contemporânea entre esses componentes. Por exemplo, uma estratégia é usar misturas de distribuições como discutido em Marshall e Olkin (1988) e obter distribuições multivariadas. Outra estratégia é descrever a dependência especificando distribuições como em Arnold et al. (2001). Essas diferentes estratégias podem ser usadas para desenvolver diferentes modelos para séries temporais multivariadas de contagens.

Uma revisão recente de Karlis (2016) fornece uma visão geral dos modelos multivariados e discute a análise estatística relacionada por meio de métodos clássicos. Por exemplo, alguns dos modelos recentes orientados por observação para contagens multivariadas incluem modelos multivariados autoregressivos de valor inteiro (INAR) de Pedeli e Karlis (2011) e Pedeli e Karlis (2020). Exemplos de modelos acionados por parâmetros incluem Ravishanker et al. (2014) que consideraram um modelo multivariado de observação de Poisson com uma configuração dinâmica hierárquica. Uma abordagem alternativa foi considerada por Aktekin et al. (2018) que usou o conceito de ambiente aleatório comum para incorporar a dependência entre os componentes multivariados do série de contagem. Tanto Ravishanker et al. (2014) e Aktekin et al. (2018) desenvolveram uma estrutura de espaço de estados Bayesiana para analisar seus modelos.

Neste artigo de revisão, focaremos na modelagem Bayesiana de séries temporais multivariadas de contagens. Em nosso desenvolvimento consideramos três classes principais de modelos de séries temporais multivariadas para contagens que ganharam atenção nos últimos Literatura Bayesiana de séries temporais. Em cada categoria, começamos com uma visão geral da literatura, discutimos as principais contribuições e apresentamos o trabalho bayesiano, destacando os recentes desenvolvimentos computacionais, como filtragem de partículas; ver para exemplo Singpurwalla et ai. (2018), e métodos combinados de Bayes linear/Bayes variacional; ver, por exemplo, Berry e Oeste (2019). A seguir, apresentamos primeiro modelos multivariados de séries temporais de Poisson e apresentamos recentes trabalhar. Isto é seguido por nossa discussão de modelos inteiros autorregressivos (INAR) e o multivariado INAR (MINAR) modelos. Consideramos a análise Bayesiana de modelos univariados e introduzimos uma nova classe de processos MINAR e desenvolver a análise Bayesiana. A terceira classe de modelos são os modelos de contagem multivariada de espaço de estado. Nossa cobertura neste A seção inclui modelos de ambiente aleatório, bem como modelos de fatores latentes de Berry e West (2019) e as estratégias de modelagem de desacoplamento/acoplamento de West (2020). A seção final inclui considerações finais.

2 | MODELOS DE SÉRIE TEMPORAL DE VENENO MULTIVARIADO

Modelos multivariados de séries temporais baseados em distribuição de Poisson ganharam atenção em séries temporais durante os últimos dois anos. muitos anos Para um exemplo, ver Ravishanker et al. (2014) e Ravishanker et al. (2016). Como observado por Mahamunulu (1967) o derivação da distribuição bivariada de Poisson remonta a Campbell (1932) e Teicher (1954) que consideraram a extensão para o caso multivariado. Regressões da distribuição multivariada de Poisson são discutidas em Mah amunulu (1967). Outras propriedades da distribuição multivariada de Poisson e suas generalizações podem ser encontradas na revisão recente de Inouye et al. (2017).

Como a avaliação da função de massa de probabilidade multivariada é complicada e a inferência estatística é desafiadora, a maioria das aplicações da distribuição tem se restringido ao caso bivariado. Karlis e Ntzoufras (2003) considerado um modelo bivariado de Poisson para descrever os gols marcados por times adversários em jogos de futebol. Eles mostraram que o na sua configuração, a diferença dos golos seguiu uma distribuição de Skellam; ver Skellam (1946). Uma análise bayesiana de o modelo bivariado de Poisson foi considerado em Karlis e Ntzoufras (2006). Um modelo bivariado de séries temporais baseado em Poisson foi considerado por Koopman e Lit (2015) para prever resultados de jogos de futebol. Os autores usaram um modelo bivariado de observação de Poisson e introduziram correlações temporais por meio das taxas de Poisson usando uma representação em espaço de estados. Inferência foi desenvolvido usando métodos baseados em verossimilhança com amostragem de Monte Carlo.

Tsionas (1999) discutiu a análise Bayesiana de um caso especial da distribuição multivariada de Poisson usando um método de Gibbs métodos de amostragem e aumento de dados; ver, por exemplo, Gelfand e Smith (1990). Uma análise bayesiana de dados bivariados Os dados de Poisson foram considerados por Karlis e Tsiamyrtzis (2008) que usaram métodos Monte Carlo de cadeia de Markov (MCMC) métodos para desenvolver inferências. Conforme observado pelos autores, a forma da função de verossimilhança causa ineficiências no desenvolvimento de inferência que é mais desafiadora para dimensões mais altas do multivariado Poisson modelo. Eles propuseram um método recursivo para avaliar a distribuição de probabilidade e um a priori usando misturas de densidades gama independentes. A abordagem proposta permitiu aos autores amostrar diretamente a partir das distribuições posteriores dos parâmetros. Em um artigo mais recente, Al-Wahsh e Hussein (2020) apresentaram uma análise bayesiana do modelo bivariado de espaço de estado de Poisson para analisar séries temporais diárias de visitas ao pronto-socorro relacionadas à asma.

3 | MODELOS BAYESIANOS PARA SÉRIES TEMPORÁRIAS MULTIVARIADAS DE VENENO

3.1 | Modelos dinâmicos de Poisson multivariados hierárquicos

Ravishanker et ai. (2014) consideram um vetor de contagem de séries temporais que segue uma distribuição multivariada de Poisson (MVP). Eles possuem dados longitudinais de contagens multivariadas de dimensão J, ou seja, $Y_{it} = (Y_{1it}, \ldots, Y_{Jit})$ para i = 1, 2, …, m e t = 1, 2, …, n onde Y_{jit} denota as contagens para o componente j observadas para a localização i no tempo t. Série temporal vetorial Y_{it} é assumida para seguir uma distribuição de MVP dimensional J com vetor de parâmetro λ_{it} denotado como

$$Y_{it} \mid \lambda_{it} \sim MVP(\lambda_{it}). \quad (1)$$

Dado λ_{it}'s, assume-se que os vetores Y_{it}'s são independentes entre localizações e períodos de tempo. Os autores usam o Distribuição MVP de Karlis e Meligkotsidou (2005) com a estrutura de covariância bidirecional para descrever a dependência entre os componentes do vetor de Y_{it}. Isto é conseguido representando Y_{it} em termos de q = J(J + 1)/2 independente Variáveis aleatórias de Poisson X_{kit} com parâmetros λ_{kit}, k = 1, 2, …, q, como

$$Y'_{it} = AX_{it}, \quad (2)$$

onde X_{it} é um vetor q 1 e A é uma matriz J q consiste em valores binários. Conforme apontado por Ravishanker et al. (2014), matriz A em (0.2) pode ser decomposta como A = [A1 A2] onde A1 é uma matriz identidade dimensional J e A2 é um J [J(J 1)]/2 matriz binária. No sentido de Karlis e Meligkotsidou (2005) A1 pode ser referido como a matriz de "efeitos principais" e A2 pode ser referido como a matriz de "efeitos de covariância de duas vias".

Segue de (1) e (2) que $E[Y_{it} \mid \lambda_{it}] = A\lambda_{it}$ e $Cov[Y_{it} \mid \lambda_{it}] = A\Lambda_{it}A'$, onde λ_{it} é um vetor aq 1 e Λ_{it} é aqq matriz diagonal de λ_{it}'s. Observe que, como resultado do compartilhamento de X_{kit}s comuns, o modelo acima implica uma dependência positiva estrutura entre os componentes do vetor Y_{it} . Pode-se mostrar que cada componente Y_{jit} segue um Poisson univariado distribuição.

Para ilustrar o acima, consideramos um exemplo simples com m = 1 usando o método de Ravishanker et al. (2014) configuração e assuma uma série temporal bivariada com J = 2. Então escrevemos $Y'_t = AX_t$ como

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} & Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

onde X_{kt}'s são variáveis aleatórias de Poisson independentes com parâmetros λ_{kt} para k = 1, …, 3. Observe que em (3) A1 é o matriz identidade bidimensional e A2 = (1 1)0 . Conforme observado por Ravishanker et al. (2014), no caso geral cada coluna de A2 terá dois 1's e (J 2) 0's. Para o caso simples temos

$$O\, Y_t \mid \lambda_t] = \begin{pmatrix} \lambda_{1t} + \lambda_{3t} & \lambda_{3t} \\ \lambda_{3t} & \lambda_{2t} + \lambda_{3t} \end{pmatrix},$$

onde λ_{3t} implica dependência positiva de Y_{1t} e Y_{2t}. A distribuição de probabilidade bivariada de Y_{1t} e Y_{2t} é dada por

$$P(y_{1t}, y_{2t}) = e^{-(\lambda_{1t}+\lambda_{2t}+\lambda_{3t})} \frac{\lambda_{1t}^{y_{1t}}}{y_{1t}!} \frac{\lambda_{2t}^{y_{2t}}}{y_{2t}!} \sum_{k=0}^{\min(y_{1t}, y_{2t})} \binom{y_{1t}}{k} \binom{y_{2t}}{k} k! \left(\frac{\lambda_{3t}}{\lambda_{1t}\lambda_{2t}}\right)^k \quad (4)$$

onde $\lambda_{kt} > 0$, k = 1, …, 3 e $y_{1t}, y_{2t} = 0, 1, \ldots$. Pode-se mostrar que as marginais para Y_{jt}'s são Poisson com parâmetros $(\lambda_{jt} + \lambda_{3t})$ para j = 1, 2. Observe que para $\lambda_{3t} = 0$ a distribuição bivariada (4) se reduz ao produto de dois Funções de massa de probabilidade de Poisson.

Ravishanker et ai. (2014) consideram uma versão hierárquica do modelo acima m > 1 usando Yit para i = 1, …, m. Elas suponha que cada componente do vetor de taxa ÿit depende de preditores exógenos com coeficientes variáveis de “local-tempo” através de uma função de ligação logarítmica no sentido de Gamerman (1998). As correlações temporais do modelo são criadas pela introdução de um parâmetro de estado “agregado” que segue a evolução markoviana no sentido de West e Harrison (1997) com erros gaussianos. Assim, a estrutura proposta sugere um modelo de série temporal acionado por parâmetros em o sentido de Cox (1981) onde a dependência de componentes de Yit é alcançada pelo modelo MVP. Ravishanker et ai. (2014) referem-se a esta classe de modelos como o modelo dinâmico multivariado hierárquico (HMDM).

Dada a série temporal do vetor observada Yit de m localizações, a análise Bayesiana do HMDM requer o uso de MCMC métodos. A abordagem proposta pelos autores envolve o uso de um amostrador de Gibbs com passos de Metropolis-Hasting; Vejo Chib e Greenberg (1995), para parâmetros específicos de localização-tempo. O parâmetro de estado agregado pode ser atualizado para todos períodos de tempo usando o Forward Filtering Backward Sampling (FFBS) de Fruhwirth-Schnatter (1994) e Carter e Kohn (1994) em cada iteração do amostrador de Gibbs. Os autores mostraram a implementação do HMDM usando dados ecológicos sobre contagens de gastrópodes em Porto Rico.

3.2 | Misturas finitas de séries temporais multivariadas de Poisson

Um dos primeiros usos de misturas de MVPs é devido a Brijs et al. (2004) que identificaram grupos de compradores com base em sua frequência de compra de certos tipos de categorias de produtos. Um estudo mais detalhado das propriedades das misturas de MVP são apresentados Karlis e Meligkotsidou (2007) que apontaram que as misturas finitas de MVPs têm a capacidade de incorporar correlações negativas entre os componentes. Como observado pelos autores, esta é uma vantagem das misturas de MVP sobre o modelo MVP padrão que só pode incorporar correlações positivas.

Mais recentemente, na literatura de séries temporais, utilizando o framework bayesiano de Hu (2012), Ravishanker et al. (2016) consideraram misturas de modelos dinâmicos multivariados de Poisson para vetores de contagens de diferentes localizações. Mais especificamente, os autores assumiram uma série temporal MVP de dimensão J de mistura finita para a localização i como

$$P(Y_{it} \mid \lambda_{it}, \pi) = \sum_{h=1}^{H} \pi_h \, MVP(\lambda_{ith}) \quad (5)$$

onde ÿith = (ÿ1ith, ÿ2ith, …, ÿKith) e ÿit = (ÿit1, ÿit2, …, ÿitH) para locais i = 1, …, m. Observe que em (5) MVP(ÿith) é o h componente da mistura com probabilidade ÿh e ÿ = (ÿ1, …, ÿH). Eles consideraram preditores exógenos com coeficientes variáveis de “tempo de localização” na descrição de ÿkith's via funções de ligação logarítmica semelhantes à configuração dada por Ravishanker et ai. (2014). As evoluções markovianas são assumidas para os termos de interceptação das funções de enlace e as funções bayesianas. análise da mistura finita dinâmica multivariada (MDFM) O modelo de Poisson é desenvolvido usando métodos MCMC com aumento de dados ao longo das linhas de Diebolt e Robert (1994).

Ravishanker et ai. (2016) e Serhiyenko et al. (2018) considerou um modelo de Poisson (MDFM) para contagem de prescrições de diferentes medicamentos de diferentes médicos. Seu modelo MVP tinha J = 3 componentes com vetor médio ÿith para mistura componente h para o médico i. Observe que no momento t o vetor médio ÿith tem K = 6 elementos onde ÿ4ith, ÿ5ith e ÿ6ith são os componentes de covariância aos pares para as contagens de prescrição dos três medicamentos. Para cada componente da mistura h, os parâmetros de Poisson independentes são definidos como

$$\log(\lambda_{kith}) = \beta_{0kth} + \beta_{1kih}\log(D_{kit}+1) + \beta_{2kih}\log(Y_{ki,t-1,h}+1), \quad k = 1, \ldots, J \quad (6)$$

onde Dkit é o esforço de detalhamento associado a um determinado medicamento para o médico i. Notamos que os meios associados com o J = 3 medicamentos são dependentes de Dkit , bem como de Yki,t 1, h, o número de prescrições escritas para esse medicamento em tempo t 1 pelo médico i. Em (6), os termos ÿkith para k>J que estão associados às covariâncias aos pares não dependem desses dois componentes. Em outras palavras, os autores consideram modelos diferentes para os “efeitos principais” e os “efeitos de covariância de duas vias” no sentido de Karlis e Meligkotsidou (2005).

Também é importante notar que uma vez que ÿkith's para kÿJ são dependentes das contagens correspondentes Yki,t 1, h, o modelo por Serhiyenko et al. (2018) é um exemplo de modelo de série temporal orientado por observação. Na verdade, o tempo implícito a dependência pela relação de ligação proposta é semelhante aos modelos de séries temporais de Poisson conduzidos por observação considerados por Davis et al. (2003).

Uma vez que os únicos coeficientes dinâmicos são os termos de interceptação ÿ0kth acima, a especificação do modelo é completada pela introdução de equações de estado para ÿ0kth como em Serhiyenko et al. (2018) e a inferência Bayesiana é realizada usando MCMC seguindo Ravishanker et al. (2016).

Como alternativa aos modelos dinâmicos de MVP, Serhiyenko et al. (2018) propuseram modelos "níveis correlacionados" de Serhiyenko et al. (2015) para fornecer uma estrutura de correlação mais flexível para componentes do vetor de contagens. Os autores consideram o vetor J-variável (diferentes medicamentos) de contagens coletadas em n indivíduos (médicos) durante T períodos de tempo. O modelo de nível correlacionado (LCM) é dado por

$$Yjit \mid jit \ \text{Pois} \ ÿjit , \qquad ð7Þ$$

para j = 1, …, J, i = 1, …, n, t = 1, …, T com equação de ligação

$$\log ÿjit ¼ ÿjt þÿji0 \ þz0 \ jitÿji \ þÿjit$$

onde o vetor de termo de efeito aleatório dimensional J ÿit N(0, ÿi) induz a estrutura de correlação para componentes do vetor de contagem Yit. Além disso, a equação de estado para cada componente é dada por

$$ÿjt ¼ ÿj ,t 1 \ þwjt$$

onde wjt N(0, 1/Wj). Essa estrutura markoviana introduz as correlações temporais no modelo.

Os autores desenvolvem uma inferência Bayesiana para o modelo através da aproximação integrada de Laplace (INLA). Eles apontam que para grandes m INLA é mais eficiente que os métodos MCMC. O procedimento de estimação proposto parece ser bastante eficiente para valores baixos de J. Embora a aplicação envolva J = 3, é importante notar que a implementação do INLA pode ser um desafio à medida que J aumenta devido à avaliação dos modos posteriores.

Serhiyenko et ai. (2018) apontam que a equação de observação em (7) pode ser generalizada para qualquer outra distribuição univariada de contagens, como binomial negativo e modelos de Poisson inflacionados com zero.

3.3 | Processos autorregressivos inteiros multivariados

O desenvolvimento de processos AR de valor inteiro (INAR) remonta à década de 1980. O processo Poisson AR(1) foi introduzido por McKenzie (1985, 1988) e Al-Osh e Alzaid (1987).

Considere uma série temporal estacionária Yt representada como

$$Yt ¼ ÿÿYt 1 \ þÿt \qquad 8Þ$$

onde "ÿ" denota operação de desbaste binomial definida como

$$ÿÿYt 1 \ ¼ \sum_{j¼1}^{\text{Ano 1}} Bjt \qquad 9Þ$$

onde Bjt's são variáveis aleatórias de Bernoulli com probabilidade de sucesso ÿ. Dado Yt 1, ÿ ÿ Yt 1 tem uma distribuiçãobinomial com os parâmetros ÿ e Yt 1. Na configuração acima assume-se que {ÿt} é uma sequência de variáveis aleatórias iid Poisson com parâmetro ÿ e Bjt's são independentes de ÿt's. É importante notar que o desbaste é realizado em cada ponto de tempo t e é independente do desbaste em outros períodos.

Se Y0 é assumido como Poisson com parâmetro ÿ/(1 ÿ) então pode-se mostrar que Yt's é uma série de Poisson estacionária com parâmetro ÿ/(1 ÿ). Além disso, a função de autocorrelação do processo é dada por ÿY(k) = ÿk para k> 0; ver, por exemplo, McKenzie (1988).

Conforme observado por Weiß (2008), o INAR(1) pode ser interpretado como um caso especial de ramificação de processos com a imigração. Então em (8), Yt é a população no tempo t que consiste em dois componentes: ÿ ÿ Yt 1, aqueles que sobrevivem do tempo (t 1) com probabilidade ÿ e ÿt, aqueles que chegam no início do tempo t.

Dado Yt 1, a distribuição condicional de Yt é obtida como uma convolução de um binômio e um Poisson dado por

Yð p Yt ð jYt 1, ÿ, ÿÞ¼ min Xt 1,Ytº j¼0 e ÿ ÿYt j / ð Þ Yt j! Ano 1 j ÿj ð Þ 1a Yt 1j , ð10Þ

com E [Ytj Yt 1, ÿ, ÿ] = ÿYt 1 + ÿ.

A distribuição k-passo à frente no tempo t, p(Yt + h j Yt, ÿ, ÿ), foi obtida por Silva et al. (2009), bem como a condicional quer dizer

E Ytþh, Yt ½ ¼, ÿjÿ ÿh Yt ÿ / ð1 a º º ÿ / ð1 a º ð11Þ

3.4 | Análise Bayesiana de processos INAR univariados

A análise bayesiana do modelo INAR(1) foi considerada em Silva et al. (2005) usando beta e gama independentes priors para ÿ e ÿ, respectivamente. Os autores usaram um amostrador de Gibbs com Metropolis uma vez que os condicionais posteriores completos não eram formas conhecidas. Neal e Subba Rao (2007) discutiram a análise Bayesiana de processos ARMA inteiros com erros de Poisson usando métodos MCMC que também envolveram o uso de etapas Metropolis-Hasting em Gibbs amostrador.

Mais recentemente, Marques et al. (2020) propuseram um algoritmo de aumento de dados que lhes permitiu obter condicionais posteriores e desenvolver um amostrador de Gibbs. Mais especificamente, usando variáveis latentes Mt = ÿ ÿ Yt 1 onde

Mt j Yt 1, ÿ Bin Yð t 1, ÿ º ð12Þ

e o fato de Yt j Mt, ÿ ser um Poisson truncado, ou seja,

p YtjMt ð Þ¼, ÿ e ÿÿYt Mt / ð Þ Yt Mt ! Ið Þ Yt ÿ Mt ,

eles obtêm uma função de verossimilhança aumentada para ÿ e ÿ como

L ÿ, ÿ; Mn, In ð ¼Yn t¼2 p Mt ð þ jYt 1, ÿ p YtjMt, ÿ Þ, ÿ,

onde Mn = (M1, …, Mn) e Yn = (Y1, … , Yn).

Usando priores beta e gama independentes para ÿ e ÿ como

pð Þ¼ ÿ, ÿ Beta að Þ ÿ, bÿ Gam aðÞ ÿ, bÿ ð 13Þ

os condicionais posteriores completos podem ser obtidos como

ÿ j Mn, Em Beta aÿ þ Xn t¼2 Mt, bÿ þ Xn t¼2 ð Yt 1 Mt ! º ð14Þ

$$ÿ \; j \; Mn, Yn \; Gam \; aÿ \; þ \; Xn \quad ð \quad t¼2 \quad Yt \; Mt \; , \; bÿ \; þð \; Þ \; n \; 1 \; !: \quad ð15Þ$$

Os condicionais posteriores de Mt's também são obtidos como

$$p \; MtjYt \; ð \; Þ \; /, \; Yt \; 1, \; ÿ, \; ÿ \quad \frac{1}{ðõÞ \; Yt \; 1Mt \; ! \; Mt!} \quad \frac{uma}{ÿð \; 1 \; a} \quad Monte \quad ð16Þ$$

onde Mt = 0, 1, …, min(Yt 1, Yt).

3.5 | Modelos de processo INAR multivariados

Processos multivariados INAR têm sido considerados na literatura; ver, por exemplo, Latour (1997) e Pedeli e Karlis (2011, 2013). Por exemplo, um INAR(1) multivariado é discutido em Pedeli e Karlis (2013) usando o método "random operador matricial" de Latour (1997) como

$$Yt \; ¼ \; AÿYt \; 1 \; þÿt \quad ð17Þ$$

onde Yt é um vetor J 1 da série temporal, ÿt é o vetor de erro correspondente e A é uma matriz JJ e A ÿ Yt 1 é o operador de desbaste matricial.

Conforme observado por Pedeli e Karlis (2020), cada elemento ÿij de A em (17) define um operador de desbaste binomial ÿijÿ Y. Para exemplo, no caso bivariado temos

$$\begin{matrix} Y1t \\ Y2t \end{matrix} \; ¼ \; \begin{matrix} ÿ11 & ÿ12 \\ ÿ21 & ÿ22 \end{matrix} \; ÿ \; \begin{matrix} Y1, t1 \\ Y2,t \; 1 \end{matrix} \; o \; \begin{matrix} ÿ1t \\ ÿ2t \end{matrix} \quad ð18Þ$$

onde a j-ésima componente de Yt é dada por

$$Yjt \; ¼ \; X_{i¼1}^{2} \; ÿij \; ÿYi,t \; 1 \; þÿjt$$

para j = 1, 2. Cada componente ÿijÿ Yi,t 1 em (18) representa um desbaste binomial e como no caso univariado todo desbaste as operações são mutuamente independentes no tempo t. Eles também são independentes do desbaste em outros períodos e dos componentes do vetor de erro ÿt. Assim, cada componente ÿijÿ Yi,t 1 terá uma distribuição binomial com os parâmetros ÿij e Yi,t 1.

Elementos do vetor de erro ÿt terão uma distribuição conjunta para refletir uma estrutura de dependência ou podem ser assumidos para ser independente. Por exemplo, Pedeli e Karlis (2020) assumiram que ÿjt's são variáveis aleatórias de Poisson independentes com parâmetros ÿj e mostrou que a distribuição condicional de Yt dado Yt 1 pode ser obtida como as convoluções de soma de J binômios com Poissons. Como mostram Pedeli e Karlis (2020), neste caso, a distribuição conjunta é o produto de J distribuições de Poisson generalizadas.

Um caso especial do INAR(1) multivariado surge quando A é diagonal em (17). Neste caso, uma vez que as séries individuais são desacoplados, a dependência entre Yjt's é obtida especificando uma estrutura de dependência para elementos de erro vetor ÿt. Pedeli e Karlis (2011) consideraram um INAR(1) bivariado com uma matriz diagonal A e assumiram uma bivariada Modelo de Poisson para (ÿ1t, ÿ2t) como em (4).

A estimativa do processo AR(1) bivariado diagonal por meio de métodos baseados em verossimilhança é discutida em Pedeli e Karlis (2013). Conforme observado por Karlis (2016) um Bayesiano desse modelo foi considerado no trabalho inédito de Sofronas (2012). Silva et ai. (2005) consideraram réplicas de processos INAR(1) e discutiram a análise Bayesiana.

A seguir, iremos propor uma abordagem de modelagem alternativa para processos INAR multivariados e desenvolver a análise Bayesiana. Nossa abordagem proposta pode ser considerada como a generalização multivariada do trabalho de Marques et al. (2020).

3.6 | Um processo INAR multivariado Bayesiano

Suponha que temos J séries temporais de contagens que são condicionalmente independentes no tempo t onde cada uma é descrita por um processo INAR(1) como

Yjt ¼ ÿj ÿYj,t 1 þÿjt ð19Þ

onde "ÿ" denota operação de desbaste binomial para a série j como no caso univariado (8). Dado Yj,t 1, ÿjÿ Yj ,t 1 tem uma distribuição binomial com parâmetros ÿj e Yj,t 1. Assumimos agora que {ÿjt} é uma sequência de variáveis aleatórias iid Poisson com parâmetro ÿÿj e ÿjt é independente de ÿjÿ Yj ,t 1. Como no caso univariado, para cada série o desbaste é realizado em cada ponto de tempo t e é independente do desbaste em outros períodos. Além disso, operações de desbaste para cada série e ÿjt's são condicionalmente independentes de outras séries dados os respectivos ÿj's e ÿj's e o componente comum ÿ.

O componente compartilhado ÿ, que segue uma distribuição gama ÿ Gam(aÿ, bÿ), induz dependência entre as séries individuais. Semelhante ao desenvolvimento apresentado por Marques et al. (2020) podemos desenvolver análise Bayesiana para o modelo dado os dados observados da série J Y ¼ Yn ,…,Yn onde Yn ¼ Yj1,…,Yjn . Podemos introduzir variáveis latentes para cada série como Mjt

Mjt j Yj, t 1, ÿj Bin Yj, t 1, ÿj

e

p YjtjMjt, ÿj, ÿ ¼ (e ÿÿj ÿÿj Yjt Mjt) / (Yjt Mjt !) I Yjt ÿ Mjt :

Dada a independência condicional da série, podemos escrever a função de verossimilhança aumentada como

S J j¼1 Dentro t¼2 p MjtjYj, t 1, ÿj p YjtjMjt, ÿj, ÿ : ð20Þ

Usando priores beta independentes para ÿj's como ÿj Beta aÿj ,bÿj e prioris gama independentes para ÿj's como ÿj Gam aÿj ,bÿj e assumindo independência destes de ÿ, podemos obter as condicionais posteriores completas de todos os parâmetros.

Podemos mostrar que a condicional completa de ÿ pode ser obtida como

ÿ j ÿ, Y, MY pð Þ / J j¼1 Yn t¼2 e ÿÿj ÿYjt Mjt ! e bÿ ÿaÿ 1 ð21Þ

onde M ¼ Mn ,…,Mn 1 J com Mn ¼ Mj1,…,Mjn e ÿ = (ÿ1, …, ÿJ). Segue de (21) que j

ÿ j ÿ, Y, M Gam aÿ þ X J j¼1 Xn t¼2 Yjt Mjt , bÿ þð Þ n 1 X ð J j¼1 ÿj !: ð22Þ

As condicionais completas de ÿj's e ÿj's são dadas por ÿj j Mŋj , Dentro j Beta aÿj þ Xn t¼2 Mjt, bÿj þ Xn t¼2 Yj, t 1 Mjt ! ð23Þ

e

ÿj j ÿ, Mŋ , Dentro j Gam aÿj þ Xn t¼2 Yjt Mjt , bÿj þÿð Þ n 1!: ð24Þ

Finalmente, para as variáveis latentes podemos obter

p MjtjYjt, Yj, t1 , ÿj, ÿj, ÿ / 1 / Yj, t 1 Mjt ! Yjt Mjt ! Mjt! ÿj / ÿÿj 1 ÿj ! Mjt ð25Þ

onde Mjt = 0, 1,…, min (Yj, t 1, Yjt).

Observe que dado ÿ para cada componente j da série temporal vetorial, ÿj, ÿj e Mjt's são amostrados independentemente do outros componentes. Da mesma forma, distribuições de previsão para valores futuros de cada Yjt podem ser obtidas usando o padrão Monte Aproximações de Carlo com base nas amostras posteriores desses parâmetros.

4 | MODELOS DE ESTADO-ESPAÇO PARA DADOS DE CONTAGEM MULTIVARIADOS

4.1 | Trabalho anterior

Trabalhos anteriores sobre modelagem bayesiana de séries temporais de contagens remontam à década de 1980. Entre estes, em especial, os trabalhos de Oeste et ai. (1985) e Harvey e Fernandes (1989) contribuíram para o desenvolvimento de trabalhos recentes sobre modelos de contagem como Aktekin et al. (2018), Berry e West (2019) e Berry et al. (2020). Primeiro damos uma visão geral essas duas abordagens para modelar séries temporais de contagens.

4.2 | Modelos lineares generalizados dinâmicos bayesianos

Oeste et ai. (1985) considerou a versão dinâmica de modelos lineares generalizados de uma perspectiva Bayesiana e introduziu a estrutura de modelo linear generalizado dinâmico (DGLM) para previsão seguindo Harrison e Stevens (1976). Seus abordagem inclui qualquer membro da família exponencial como um modelo de observação para séries temporais e, portanto, inclui binomial e séries temporais de Poisson. Os métodos lineares Bayesianos de Hartigan (1969) desempenham um papel crucial para a variável de estado atualização em seu desenvolvimento.

Em sua configuração, o modelo de observação é Poisson com média ÿt, denotada como Yt j ÿt Pois(ÿt). Usando um link logarítmico função ÿt está relacionada ao vetor covariável Ft como

ÿt ¼ logð Þ¼ ÿt F0 tÿt ð26Þ

com equação de estado

¼t ¼ Gtÿt 1 þwt ð27Þ

onde a distribuição do vetor de erro de estado é parcialmente especificada através de seu primeiro e segundo momentos como wt [0, Wt].

Da mesma forma, no tempo t 1 dado 1 = (Y1, …, Yt 1) distribuição de ÿt 1 é especificada por seus dois primeiros momentos como Dt ÿt 1 jDt ÿt 1 com 1 [mt 1, Ct 1]. Então a equação de estado nos fornece uma distribuição a priori parcialmente especificada para 1 [at, Rt], onde at = Gtmt 1 þWt. e Rt ¼ GtCt 1G0 t

Usando esta informação com a função de ligação logarítmica podemos obter os dois primeiros momentos anteriores de ÿt dados Dt 1 ¼ F0 t at e Var(ÿtjDt 1 Þ ¼ qt ¼ F0 t Rt Ft com E(ÿtjDt 1 Þ ¼ ft ¼ F0

Podemos supor uma anterior gama para ÿt dado Dt ou equivalentemente uma anterior log-gama para ÿt, com parâmetros (ÿt, ÿt) que pode ser avaliada combinando os dois primeiros momentos da distribuição log-gama com ft e qt. Em outras palavras, pode-se usar as identidades

ÿ ÿð Þ t log ÿt ð Þ¼ f t

ÿ0 ð Þ¼ ÿt qt (28)

para resolver ÿt e ÿt, onde ÿ( ) é a função digamma e ÿ° ( ) é sua derivada.

Uma vez que os parâmetros anteriores são especificados, a distribuição posterior de ÿt dado Dt = (Yt,Dt 1) pode ser obtido como distribuição log-gama com parâmetros (ÿt + Yt, ÿt + 1) com momentos posteriores E(ÿtjDt) = gt = ÿ(ÿt + Yt) log(ÿt + 1) e pt = ÿ° (ÿt + Yt). O próximo passo é atualizar o vetor de estado ÿt dada a nova observação Yt. No WHM, isso é obtido usando uma abordagem Bayesiana linear que nos fornece uma distribuição posterior parcialmente especificada. Especificamente, eles mostram que ÿt jDt [mt,Ct] onde

ð mt ¼ em þRtFt gt f t Þ = qt

Ct ¼ Rt RtFtF0 t Rt 1 pt = qt ð Þ = qt, (29)

que completa a atualização de (t 1) para t.

A característica atraente da abordagem WHM é a disponibilidade de distribuições de previsão (preditivas) um passo à frente em cada ponto de tempo como resultado do uso de uma gama conjugada anterior para o modelo de observação de Poisson. Pode ser facilmente mostrado que a distribuição de previsão um passo à frente será obtida como um binomial negativo denotado como

Yt jDt 1 NBin ÿt , ÿt ÿt / 1 (30)

4.3 | Modelos de Poisson com evolução gama

Harvey e Fernandes (1989) também consideraram a estrutura do espaço de estados onde o modelo de observação é Poisson, ou seja, Yt j ÿt Pois(ÿt). Embora sua abordagem não fosse totalmente Bayesiana, eles exploraram a conjugação na atualização Bayesiana. Mais especificamente, dado Dt 1 os autores assumem que ÿt 1 jDt 1 Gam(ÿt 1, ÿt 1). Para especificar o prior de ÿt dado Dt 1 para preservar a mesma média, mas para ter uma variância maior, eles assumem uma distribuição gama com parâmetros ÿÿt 1 e ÿÿt 1 onde 0 < ÿ < 1. Eles notaram que tal transição pode ser justificada pelo Markoviano evolução

ÿt ¼ ÿt 1ÿt = ÿ, (31)

onde ÿt jDt 1 Beta(ÿÿt 1, (1 ÿ)ÿt 1) como mostrado por Smith e Miller (1986) seguindo Bather (1965). Em outras palavras, usando uma equação de transição multiplicativa com uma conjugação de termo de erro distribuído beta pode ser preservada no estado modelo espacial.

A distribuição posterior de ÿt pode ser obtida como uma distribuição gama, ou seja, ÿt jDt Gam(ÿt, ÿt), onde

ÿt ¼ ÿÿt 1 þYt

ÿt ¼ ÿÿt 1 þ1 : (32)

Semelhante a West et al. (1985), a distribuição de previsão um passo à frente é dada como um binomial negativo. Usando este fato, Harvey e Fernandes (1989) estimaram ÿ usando métodos baseados em verossimilhança e também consideraram incorporar covariáveis no modelo e apresentou estimativa de máxima verossimilhança.

Extensões deste modelo foram consideradas por Aktekin e Soyer (2011) que usaram covariáveis para capturar efeitos na modelagem de call center. Os autores desenvolveram a análise Bayesiana usando métodos MCMC. Um quadro semelhante posteriormente considerado por Gamerman et al. (2013).

Harvey e Fernandes (1989) estenderam a estratégia para o tempo de contagem binomial, binomial negativo e multinomial série, mas ao contrário do caso de Poisson a transição proposta de posterior para anterior não pode ser justificada pelo cálculo de probabilidade nesses casos. Uma extensão multivariada desse framework foi considerada por Ord et al. (1993).

Cargnoni et ai. (1997) considerou a modelagem Bayesiana de dados de séries temporais multinomiais usando uma estrutura de espaço de estado e desenvolveu inferência Bayesiana usando métodos MCMC. Seu modelo é um exemplo da classe de modelos dinâmicos condicionalmente gaussianos.

4.4 | DGLMs de fator latente

Modelos dinâmicos de fatores latentes têm desempenhado um papel importante na modelagem Bayesiana de séries temporais e espaciais. dados. Conforme apontado por Lavine et al. (2020) esta classe de modelos foi considerada em configurações não gaussianas incluindo análise de séries temporais de contagens multivariadas. Um dos primeiros usos de fatores latentes no espaço de estados a modelagem se deve a Lopes et al. (2011) que consideraram modelagem multivariada de contagens de Poisson espaço-tempo. Trabalhos recentes nesta área como Berry e West (2019) e Berry et al. (2020) mostraram que fatores latentes podem ser usado na ligação de vários DGLMs de séries de contagem na implementação da estratégia de modelagem “desacoplar/reacoplar”; veja, por exemplo, West (2020).

Considere a série temporal de contagem J Poisson Yjt com taxa ÿjt denotada como Yjt j ÿjt Poi(ÿjt) para j = 1, …, J. SeguindoLavine et ai. (2020) para cada série consideramos um modelo de fator latente dinâmico ÿj onde ÿjt está relacionado ao vetor preditor Fjt por um função de link de log como

$$ÿjt ¼ log ÿjt ¼ F0 jtÿjt: \quad ð33Þ$$

A equação de estado para ÿjt é especificada como

$$ÿjt ¼ Gjtÿj,t 1 þwjt \quad 34Þ$$

onde Gjt é uma matriz de evolução conhecida e a distribuição do vetor de erro de estado é parcialmente especificada através de seu primeiro e segundo momentos como wjt [0,Wjt]. Assim, cada série Yjt segue um DGLM no sentido de West et al. (1985) como anteriormente discutido.

O vetor preditor Fjt consiste em preditores específicos da série fjt e vetor latente comum ÿt como F'jt = (f'jt, ÿ't). Assim, o vetor de estado é definido como ÿ'jt = (ÿ'jt, ÿ'jt) permitindo a possibilidade de que cada série possa ser afetada de forma diferente pelo fator latente comum ÿt. Isso é alcançado pelo vetor de coeficiente ÿjt que é indexado por j além de sendo dinâmico. Conforme apontado por West (2020), cada série temporal Yjt segue um DGLM independentemente das outras séries, isto é, dados Fjt's, Yjt's são independentes um do outro. Em outras palavras, dados os Fjt's, as séries individuais são “desacopladas”.

A dependência entre as séries individuais é alcançada através do vetor latente comum ÿt. O fator latente ÿt segue um modelo, ÿ0, que nos permite “reacoplar” a série no sentido de West (2020). No tempo t 1 dado Dt 1 o 0 o modelo externo ÿ0 é especificado via p ÿtjDt 0 1 Assume- . Normalmente, o modelo ÿ0 para ÿt é um DLM ou DGLM com seus próprios preditores. se que podemos gerar amostras a partir de p ÿtjDt Da mesma forma, Dt 0 1 .

1 denota os dados de contagem disponíveis associados ao j-ésimo j componente no tempo t 1 e Dt j 1 ¼ Dt 1 j ,Yjt .

No tempo t 1, para cada série j a distribuição do vetor de estado ÿj,t 1 é parcialmente descrita por seus dois primeiros momentos como ÿj,t 1 jDt 1 j mj,t 1,Cj,t 1 .

A análise bayesiana do fator latente DGLM para contagens consiste nas etapas de previsão e atualização, conforme discutido em Berry e Oeste (2019). No tempo t 1, dadas amostras ÿð Þs t ,s ¼ 1,…,S, da distribuição p ÿtjDt 0 1 ,ÿð Þs , para cada ÿj, S par análises de alelo DGLM podem ser realizadas para obter a densidade p j 1 t . Observe que p YjtjDt j 1 , ÿð Þs t é um binômio negativo YjtjDt como na Equação (30) da configuração WHM. Como resultado, para cada série j,S amostras Yð Þs jt ,s = 1, …, S, são obtidos de a densidade preditiva p YjtjDt j 1 ,ÿt .

Note que a densidade preditiva depende de ÿt através da função de ligação ÿjt ¼ F0 jtÿjt que é usada para ajustar uma distribuição gama logarítmica a ÿjt com parâmetros (ÿjt, ÿjt). Como discutido anteriormente, isso é feito combinando os dois primeiros momentos de F0 jtÿjt com momentos da densidade de log gama como mostrado na Equação (28). Em outras palavras, para cada realização ÿð Þs t , uma par ÿð Þs jt , ÿ ð Þs jt é obtido dando-nos uma distribuição binomial negativa como

$$Y_{jt}|D_{t-1}, ÿð Þs \sim NBin\left(ÿð Þs_{jt}, \frac{ÿð Þs_{jt}}{ÿð Þs_{jt} þ1}\right)! \quad ð35Þ$$

Como as séries individuais são desacopladas em ÿt, a etapa de previsão é realizada independentemente para cada série. As distribuições preditivas k passo à frente também podem ser obtidas de maneira semelhante, conforme discutido em Berry e West (2019).

Uma vez que Yjt é obtido no tempo t para cada realização de ÿð Þs t como implícito por ÿð Þs jt , ÿð Þs jt , a distribuição posterior de ÿjt é atualizado para uma distribuição log-gama com média g ð Þs jt e pð Þs jt . A atualização linear de Bayes é usada para obter vetores médios e matrizes de variância de ÿjt jDt j,ÿð Þs t para s = 1, …, As aproximações de S. Monte Carlo são usadas para marginalizá-las sobre ÿð Þs t para obter os momentos posteriores E ÿjtjDt j e V ÿjtjDt j . Como resultado, os momentos posteriores de ÿjt's também são dependentes em Dt 1 0 ; veja Berry e West (2019) para uma discussão mais detalhada.

A atualização de ÿt é feita externamente usando o modelo ÿ0. Conforme apontado por Berry et al. (2020), ÿt pode afetar tanto Yjt quanto outras séries. Por exemplo, em suas aplicações de marketing, Yjt's podem representar vendas diárias de produtos j = 1, …, J e modelo ÿ0 descreve o tráfego diário de clientes na loja. Neste contexto, ÿt pode representar fatores sazonais que afetam todos os Series.

Uma versão flexível dos DGLMs de fator latente é o modelo de mistura de contagem dinâmica (DCMM) de Berry e West (2019). Como observado pelos autores DCMMs combinam Bernoulli e Poisson DGLMs para casos em que zero resultados precisam ser tratados separadamente. Isto é conseguido definindo uma série temporal binária Zjt = I (Yjt> 0) onde I ( ) é a função indicadora. o DCMM ÿj consiste em dois componentes tais que Zjt é um Bernoulli denotado como Zjt j ÿjt Ber(ÿjt) e

$$Y_{jt} ¼ \begin{cases} 0, & \text{se } Z_{jt} ¼ 0 \\ 1þX_{jt} & \text{se } Z_{jt} ¼ 1, \end{cases} \quad 36Þ$$

onde Xjt j ÿjt Pois(ÿjt), ou seja, uma variável aleatória de Poisson deslocada para todos os períodos de tempo t. No modelo ÿj, parâmetros ÿjt e ÿjt estão relacionados aos preditores F0jt e F+jt via links logit e log, respectivamente. Como em nossa configuração anterior, os preditores consistirão em componentes específicos da série, bem como fatores latentes comuns.

Outra classe de modelos com fatores latentes, onde a estratégia de modelagem de desacoplamento/acoplamento pode ser considerada, são os os modelos dinâmicos de fluxo de rede (DNFMs) de Chen et al. (2018) e Chen et al. (2019). Trabalhos Bayesianos anteriores sobre modelos de fluxo de trabalho em rede consideravam a previsão de fluxo de tráfego; ver Tebaldi et ai. (2002) e Anacleto et al. (2013). O recente trabalho em DNFMs focados em “dados em contextos de Internet e redes sociais” em larga escala.

4.5 | Modelos de ambiente aleatórios

Para uma série temporal multivariada de contagens do componente J, Yt = Y1t, Y2t, …, YJt, Aktekin et al. (2018) assumem que esses J séries são expostas ao mesmo ambiente externo semelhante às condições operacionais comuns para os componentes de um como considerado por Lindley e Singpurwalla (1986) na análise de confiabilidade. Por exemplo, na análise de uma série temporal de marketing, como vendas de produtos, várias séries são afetadas pelas mesmas oscilações econômicas do mercado.

Para explicar tal dependência, os autores assumem que

$$Y_{jt}|ÿ_j,ÿ_t \sim Pois(ÿ_jÿ_t), \text{ for } j ¼ 1,…,J \text{ e } t ¼ 1,…,T, \quad ð37Þ$$

onde ÿj é a taxa específica da série j e ÿt é o ambiente comum modulando ÿj.

Seguindo Harvey e Fernandes (1989), uma evolução markoviana, como em (31), é assumida para ÿt, ou seja,

$$\text{ÿt ¼ ÿt,} \frac{\text{ÿt 1}}{\text{c}} \qquad \text{ð38Þ}$$

onde, (ÿtjDt , ÿ1, …, ÿJ) Beta[ÿÿt 1, (1 ÿ)ÿt 1], com ÿt 1> 0, 0 < ÿ < 1 e Dt = {Dt O modelo de observação (37), , Y1, t 1, …, YJ, t 1}.

é uma função tanto do ambiente dinâmico ÿt quanto dos parâmetros estáticos,

ÿjs. Por exemplo, no caso em que Yjt representa as unidades de vendas da marca j no tempo t, ÿj representa os efeitos da taxa específica da marca e ÿt para o efeito do ambiente econômico comum ao qual todas as marcas estão expostas no momento t. Quando ÿt> 1, diz-se que o ambiente é mais favorável do que o normal, o que leva a uma taxa de Poisson geral mais alta. Tendo a evolução do estado como (38) também implica uma densidade beta escalonada para ÿt onde (ÿtj ÿt 1 , Dt , ÿ) é definido sobre 0; ÿt 1/c e o vetor de parâmetros estáticos é definido como ÿ = {ÿ1, …, ÿJ}.

No acima, assumimos que para o componente j, dados ÿt 's e ÿj, Yjt's são condicionalmente independentes ao longo do tempo. Pelagem Além disso, assumimos que no instante t, dados ÿt e ÿj 's, Yjt é condicionalmente independente um do outro.

Condicionado aos parâmetros estáticos, é possível obter uma filtragem analiticamente tratável dos estados. No tempo 0, antes de observar qualquer dado de contagem, assumimos que (ÿ0jD0) Gam(ÿ0, ÿ0), então pode-se mostrar que

$$\text{ÿtjDt ð Þ, ÿ Gam ÿt, ÿt ð Þ,} \qquad \text{ð39Þ}$$

Onde

$$\text{ÿt ¼ ÿÿt 1} \ \text{valeu}_{j¼1}^{J} \ \text{Yjt,} \qquad \text{40Þ}$$

$$\text{ÿt ¼ ÿÿt 1} \ \text{valeu}_{j¼1}^{J} \ \text{ÿj:} \qquad \text{ð41Þ}$$

Assim, todas as contagens de séries individuais, bem como todos os efeitos individuais, são usados na atualização do ambiente aleatório comum que desempenha o papel de "reacoplamento" no sentido de Berry e West (2019).

4.5.1 | Modelo para contagens multivariadas

Uma característica importante do modelo proposto por Aktekin et al. (2018) é a disponibilidade da distribuição marginal de Yjt condicional em ÿj's para j = 1, …, J que é um binômio negativo dado por

$$\text{Yjtjÿ, Dt}^{1} \quad \text{NBin ÿÿt 1, ÿÿt} \frac{\text{ÿj}}{\text{1 þÿj}} \qquad \text{ð42Þ}$$

Conforme apontado pelos autores, a disponibilidade de (42) em formato fechado é importante não apenas para fins de previsão em tempo real mas também porque nos ajuda a estimar o fator de desconto ÿ.

Usando a independência condicional de Yjt's, a distribuição multivariada de Yt, condicional a ÿj's, pode ser obtido como

$$\text{p Ytjÿ,Dt}^{1} \ ¼ \ \frac{\text{ÿ ÿÿt 1 þP j Yjt ÿj}}{\text{ÿ ÿÿt 1Þ Q j ÿ Yjt þ1}} \ \text{S}_j \ \frac{\text{ÿj ! Yjt}}{\text{ÿÿt 1 þP j}} \ \frac{\text{ÿÿt 1}}{\text{ÿÿt 1 þP j ÿj ! ÿÿt 1}} \text{,} \qquad \text{ð43Þ}$$

que é uma versão dinâmica de uma distribuição binomial negativa multivariada. O caso bivariado de (43) com J = 2 é um versão dinâmica da distribuição binomial negativa de Arbous e Kerrich (1951) que a utilizaram para modelar o número de acidentes.

As distribuições condicionais de Yjts também serão do tipo binomial negativa onde as contagens bivariadas são positivamente correlacionadas tado com a correlação dada por

$$\text{Cor Yit, Yjtjÿ, Dt} \quad 1 \; ¼ \; \frac{\text{ÿiÿj}}{\text{s} \; \text{ð ÿi þÿÿt 1 Þ ÿj þÿÿt 1}} \qquad \text{44Þ}$$

4.5.2 | Análise Bayesiana do modelo multivariado

Aktekin et ai. (2018) discutem a inferência Bayesiana para o modelo multivariado e desenvolvem detalhes de um amostrador de Gibbs. Elas também apresentam um filtro de partículas como uma alternativa atrativa para o aprendizado sequencial Bayesiano; ver Soyer (2018b).

Prioridades gama independentes são assumidas para ÿjs como ÿj Gamma(aj, bj), forj = 1, …, a menção do amostrador de Gibbs requer J. Dados dados Dt no tempo t, imple sorteios de condicionais completos p(ÿ1, …, ÿtj ÿ1 , …, ÿJ,Dt) ep(ÿ1, …, ÿJj ÿ1, …, ÿt,Dt).
Os empates do primeiro podem ser obtidos usando a filtragem direta e a amostragem inversa de Fruhwirth Schnatter (1994). Como a densidade da junta p(ÿ1, …, ÿtj ÿ,Dt) pode ser fatorada como

$$\text{p ÿtjÿ,Dt ð Þp ÿt 1jÿt ,ÿ,Dt} \quad 1 \quad \text{p ÿ1jÿ2, ÿ, D1 ,}$$

com cada p(ÿt 1j ÿt, ÿ,Dt 1) é uma densidade gama truncada com ÿÿt<ÿt 1, isso pode ser obtido de maneira direta.

Desenhar a partir de p(ÿ1, …, ÿJj ÿ1, …, ÿt,Dt) também é simples, pois ÿj's são condicionalmente independentes dados ÿ1, …, ÿt e Dt e os condicionais marginais são densidades gama como

$$\text{ÿjjÿ1,…, ÿt, Dt Gam ajt, bjt ,} \qquad \text{ð45Þ}$$

Onde

$$\text{ajt ¼ aj þ} \; \text{X}_{\text{r¼1}}^{\text{t}} \; \text{Yjr,} \qquad \text{ð46Þ}$$

$$\text{bjt ¼ bj þ} \; \text{X}_{\text{r¼1}}^{\text{t}} \; \text{ÿr:} \qquad \text{47Þ}$$

Conforme apontado por Aktekin et al. (2018), os métodos MCMC não são adequados para aprendizado sequencial e previsão uma vez que as cadeias precisam ser reiniciadas cada vez que um novo vetor de dados é observado. Assim, os autores apresentaram um filtro de partículas (PF) como alternativa. Ao fazer isso, para atualização sequencial de parâmetros de ambiente dinâmico e ÿj's estáticos, adotaram o método de aprendizado de partículas (PL) de Carvalho et al. (2010).

A abordagem PL consiste em etapas de reamostragem, propagação, atualização e amostragem. A estrutura da multivariada modelo de Aktekin et al. (2018) fornece formulários adequados para os pesos de reamostragem e a densidade de propagação necessária nas duas primeiras etapas da abordagem PL. Mais especificamente, os pesos na primeira etapa envolvem o cálculo da densidade de distribuição binomial negativa hipergeométrica confluente multivariada e a segunda etapa envolve a retirada de amostras de uma densidade beta hipergeométrica em escala univariada, ambas as quais podem ser feitas facilmente. A disponibilidade de distribuições condicionais para ÿt 's e ÿj's fornece estatísticas condicionais suficientes e permite que os autores completem as duas últimas etapas em uma forma eficiente. Além disso, como a verossimilhança marginal do parâmetro de desconto ÿ está disponível como uma distribuição binomial negativa multivariada, a atualização sequencial de ÿ também pode ser incluída na abordagem PL. Os detalhes do O algoritmo PL e outras questões computacionais são discutidas em Aktekin et al. (2018).

4.5.3 | Uma extensão do modelo de ambiente aleatório

Aktekin e Soyer (2011) consideraram uma extensão do Harvey e Fernandes (1989) para capturar dentro do dia e entre correlações de dias para chegadas a um call center. Pode-se usar uma ideia semelhante para desenvolver uma extensão do modelo multivariado proposto por Aktekin et al. (2018). Podemos supor que as correlações temporais podem ser representadas dentro de cada componente assumindo ÿj's que variam no tempo. Como antes, temos Yjt Pois(ÿjtÿt) para j = 1, 2, …, J são condicionalmente independentes ao longo das séries, bem como ao longo do tempo.

Para o termo de ambiente aleatório ÿt temos o modelo de evolução gama

ÿt ¼ ÿt 1ÿt = ÿ

onde ÿt j ÿt, Dt Beta(ÿÿt, (1 ÿ)ÿt) e ÿt = (ÿ1t, ÿ2t, …, ÿJt).
1

Começando com anterior (ÿ0jD0) Gam(ÿ0, ÿ0), semelhante a (39), podemos mostrar que ÿt j ÿt, Dt Gam(ÿt, ÿt) onde

ÿt ¼ ÿÿt 1 þPJ j¼1Yjt e ÿt ¼ ÿÿt 1 þPJ j¼1ÿjt.

Para os componentes individuais, para j = 1, 2, …, J temos J modelos independentes

ÿjt ¼ ÿj,t 1ÿjt=ÿj ð48Þ

onde ÿjt j ÿt, Dj, t Beta(ÿjajt, (1 ÿj)ajt), e ÿt = (ÿ1, …, ÿt). Observe que Dj, t jésima componente no tempo 1 = (Yj1, …, Yj , t 1) é a história do
1
(t 1), e ajt é uma quantidade conhecida no tempo (t 1).

Assumindo que ÿj0 jD0 Gam(aj0, bj0) podemos mostrar que

ÿjt j ÿt, Djt Gam ajt, bjt

para j = 1, …, J, onde

porta ¼ ÿjaj, t 1 þYjt ebjt ¼ ÿjbj, t 1 þÿt: ð49Þ

Dados os resultados acima, um amostrador de Gibbs pode ser facilmente implementado para desenvolver inferência Bayesiana para este modelo. Além disso, os formulários conjugados de disponibilidade e as estatísticas suficientes associadas podem ser explorados para desenvolver métodos PL para análise Bayesiana sequencial. Notamos que um desafio neste modelo é estimar os fatores de desconto ÿ e ÿ1, …, ÿJ. Usando alguns dos resultados recentes fornecidos por Irie et al. (2019) para atualização dos termos de desconto pode ser considerado para aprender sobre os termos de desconto.

5 | OBSERVAÇÕES FINAIS

Neste artigo de revisão, apresentamos uma visão geral das estratégias de modelagem bayesiana para séries temporais multivariadas de conta. Ao fazê-lo, destacamos os avanços recentes na modelagem Bayesiana e cálculos para tempo multivariado Series. Alguns desses avanços recentes se basearam em trabalhos anteriores, como distribuições condicionais invariantes de Bather (1965), métodos Bayesianos lineares de Hartigan (1969), DLMs de Harrison e Stevens (1976), DGLMs de West et ai. (1985) e abordagem de filtragem de partículas de Gordon et al. (1993). Em nossa revisão, tentamos fazer com que esses conexões e forneceu a literatura relacionada.

A implementação de estratégias recentes de modelagem Bayesiana para séries temporais multivariadas de contagens e inferência associada requer o uso de algoritmos eficientes. Por exemplo, Lavine et ai. (2020) discutem questões computacionais em dinâmica para modelos de fatores latentes. Implementação de métodos PF e PL são discutidos em Lopes e Tsay (2011) e Lopes et ai. (2012).

Os processos INAR multivariados são uma área onde as estratégias e inferências de modelagem bayesiana não foram consideradas. Neste artigo, apresentamos um processo Bayesiano INAR para séries temporais multivariadas de contagens. Nossa proposta estrutura é baseada em uma generalização do trabalho recente de Marques et al. (2020). Extensão da abordagem proposta para processos INAR dinâmicos está atualmente sob investigação.

CONFLITO DE INTERESSES

Os autores declararam não haver conflitos de interesse para este artigo.

CONTRIBUIÇÕES DO AUTOR

Refik Soyer: Investigação; metodologia; administração de projetos; rascunho original escrito. Di Zhang: Investigação; metodologia; Recursos; rascunho original escrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Compartilhamento de dados não aplicável a este artigo, pois nenhum conjunto de dados foi gerado ou analisado durante o estudo atual.

ORCID

Refik Soyer https://orcid.org/0000-0002-7854-7837

ARTIGOS DE FIOS RELACIONADOS

Filtragem de Kalman e Análise Bayesiana Sequencial

LEITURA ADICIONAL

Meinhold, RJ, & Singpurwalla, ND (1983). Entendendo o filtro de Kalman. Estatístico americano, 37, 123-127.

Pitt, M., & Shephard, N. (1999). Filtragem por simulação: Filtros de partículas auxiliares. Journal of the American Statistical Association, 94, 590-599.

Soyer, R., & Sung, M. (2013). Modelos probit dinâmicos bayesianos para análise de dados longitudinais. Estatística Computacional e Análise de Dados, 68, 388-398.

REFERÊNCIAS

Aktekin, T., Polson, NG, & Soyer, R. (2018). Análise Bayesiana Sequencial de Dados Multivariados de Contagem de Poisson. Jornal de Análise Bayesiana, 13, 385-409.

Aktekin, T., Polson, NG, & Soyer, R. (2020). Uma família de modelos multivariados de séries temporais não gaussianas. Journal of Time Series Analysis, 41, 691-721.

Aktekin, T., & Soyer, R. (2011). Modelagem de Call Center: Uma Abordagem Bayesiana do Espaço de Estados. Logística de Pesquisa Naval, 58, 28–42.

Aktekin, T., Soyer, R., & Xu, F. (2013). Avaliação do risco de inadimplência de hipotecas por meio de modelos de espaço de estados bayesianos. Anais de Estatística Aplicada, 7, 1450-1473.

Al-Osh, MA, & Alzaid, AA (1987). Processo autorregressivo de valor inteiro de primeira ordem (INAR(1)). Journal of Time Series Analysis, 8, 261-275.

Al-Wahsh, H., & Hussein, A. (2020). Um modelo de Poisson autorregressivo bivariado e sua aplicação em atendimentos de emergência por asma. Estatísticas em Medicina, 39, 3184-3194.

Anacleto, O., Queen, CM, & Albers, CJ (2013). Previsão multivariada de fluxos de tráfego rodoviário na presença de heterocedasticidade e mea erros de certeza. Jornal da Royal Statistical Society (Série C: Estatísticas Aplicadas), 62, 251–270.

Arbous, AG, & Kerrich, J. (1951). Estatísticas de acidentes e o conceito de propensão a acidentes. Biometria, 7, 340-432.

Arnold, BC, Castillo, E., & Sarabia, JM (2001). Distribuições especificadas condicionalmente: Uma introdução. Ciência Estatística, 16, 249-274.

Bather, JA (1965). Distribuições condicionais invariáveis. Annals of Mathematical Statistics, 36, 829-846.

Berry, LR, Helman, P., & West, M. (2020). Previsão probabilística de séries temporais de vendas de transações de consumo heterogêneas. Internacional Journal of Forecasting, 36, 552-569.

Berry, LR, & West, M. (2019). Previsão Bayesiana de muitas séries temporais com valor de contagem. Journal of Business and Economic Statistics, 38, 872-887.

Brijs, T., Karlis, D., Swinnen, G., Vanhoof, K., Wets, G., & Manchanda, P. (2004). Um modelo multivariado de mistura de Poisson para aplicação em marketing cátions. Estatística Neerlandica, 58, 322-348.

Campbell, JT (1932). A função de correlação de Poisson. Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, 4, 18-26.

Cargnoni, C., Mueller, P., & West, M. (1997). Previsão bayesiana de séries temporais multinomiais através de modelos dinâmicos condicionalmente gaussianos. Journal of the American Statistical Association, 92, 640-647.

Carter, CK, & Kohn, R. (1994). Na amostragem de Gibbs para modelos de espaço de estado. Biometrika, 81, 541-553.

Carvalho, C., Johannes, MS, Lopes, HF, & Polson, NG (2010). Aprendizagem e suavização de partículas. Ciência Estatística, 25, 88-106.

Chen, X., Banks, D., & West, M. (2019). Modelagem dinâmica bayesiana e monitoramento de fluxos de rede. Network Science, 7, 292-318.

Chen, X., Irie, K., Banks, D., Haslinger, R., Thomas, J., & West, M. (2018). Modelagem Bayesiana escalável, monitoramento e análise de dinâmicas dados de fluxo de rede. Journal of the American Statistical Association, 113, 519-533.

Chib, S., & Greenberg, E. (1995). Entendendo o algoritmo Metropolis-Hastings. Estatístico americano, 49, 327-335.

Cox, DR (1981). Análise estatística de séries temporais: Alguns desenvolvimentos recentes. Revista Escandinava de Estatística, 8, 93–115.

Davis, R., Holan, S., Lund, R., & Ravishanker, N. (2016). Manual de séries temporais de valores discretos. Chapman e Hall/CRC.

Davis, RA, Dunsmuir, WTM, & Street, SB (2003). Modelos orientados por observação para contagens de Poisson. Biometrika, 90, 777-790.

Diebolt, J., & Robert, CP (1994). Estimativa de distribuições finitas de misturas através de amostragem Bayesiana. Jornal da Royal Statistical Soci ety, Série B, 56, 363-375.

Fruhwirth-Schnatter, S. (1994). Aumento de dados e modelos lineares dinâmicos. Journal of Time Series Analysis, 15, 183–202.

Gamerman, D. (1998). Cadeia de Markov Monte Carlo para modelos lineares generalizados dinâmicos. Biometrika, 85, 215-227.

Gamerman, D., Dos-Santos, TR, & Franco, GC (2013). Uma família não gaussiana de modelos de espaço de estados com probabilidade marginal exata. Journal of Time Series Analysis, 34, 625-645.

Gelfand, AE, & Smith, AFM (1990). Abordagens baseadas em amostragem para calcular densidades marginais. Jornal da estatística americana Associação, 85, 398-409.

Gordon, N., Salmond, D., & Smith, AFM (1993). Nova abordagem para estimação de estado Bayesiano não-linear/não-Gaussiano. Processos IEE F, 140, 107-113.

Harrison, PJ, & Stevens, CF (1976). Previsão Bayesiana (com discussão). Jornal da Royal Statistical Society, Série B, 38, 205-247.

Hartigan, JA (1969). Métodos Bayesianos Lineares. Jornal da Royal Statistical Society, Série B, 31, 446-454.

Harvey, AC, & Fernandes, C. (1989). Modelos de séries temporais para contagem ou observações qualitativas. Jornal de Estatísticas Econômicas e Empresariais, 7, 407-417.

Hu, S. (2012). Modelagem dinâmica de séries temporais de valores discretos com aplicações (tese de doutorado). Departamento de Estatística, Universidade de Con necticut, UMI 3533942, ProQuest.

Hu, S., Ravishanker, N., Ivan, JN, & Mooradian, J. (2013). Modelagem temporal de contagens de acidentes rodoviários para motoristas seniores e não seniores. Análise e Prevenção de Acidentes, 50, 1003–1013.

Inouye, DI, Young, E., Allen, GI, & Ravikumar, P. (2017). Uma revisão de distribuições multivariadas para dados de contagem derivados do Poisson distribuição. Revisões interdisciplinares de Wiley: Estatísticas Computacionais, 9(3). https://doi.org/10.1002/wics.1398

Irie, K., Glynn, C., & Aktekin, T. (2019). Previsão de demanda sequencial de dados de contagem de rajadas (em revisão).

Karlis, D. (2016). Modelos para séries temporais de contagem multivariada. Em R. Davis, S. Holan, R. Lund, & N. Ravishanker (Eds.), Handbook of discreto séries temporais valorizadas (pp. 407–424). Imprensa CRC.

Karlis, D., & Meligkotsidou, L. (2005). Regressão multivariada de Poisson com estrutura de covariância. Estatística e Computação, 15, 255-265.

Karlis, D., & Meligkotsidou, L. (2007). Misturas finitas de regressão multivariada de Poisson com aplicação. Jornal de Planejamento Estatístico e Inferência, 137, 1942-1960.

Karlis, D., & Ntzoufras, I. (2003). Análise de dados esportivos usando modelos bivariados de Poisson. Stat, 52, 381-393.

Karlis, D., & Ntzoufras, I. (2006). Análise Bayesiana das diferenças de dados de contagem. Estatísticas em Medicina, 25, 1885-1905.

Karlis, D., & Tsiamyrtzis, P. (2008). Modelagem Bayesiana Exata para Dados Bivariados de Poisson e Extensões. Estatística e Computação, 18, 27-40.

Koopman, SJ, & Lit, R. (2015). Um modelo dinâmico bivariado de Poisson para analisar e prever resultados de partidas na Premier inglesa liga. Jornal da Royal Statistical Society Série A, 178, 167-186.

Latour, A. (1997). O processo multivariado GINAR(p). Advances in Applied Probability, 29, 228–248.

Lavine, I., Cron, A., & West, M. (2020). Computação Bayesiana em modelos dinâmicos de fatores latentes (Relatório técnico). Departamento de Estatística Science, Duke University, ArXiv:2007.04956v1.

Lindley, DV, & Singpurwalla, ND (1986). Distribuições multivariadas para as durações de vida dos componentes de um sistema que compartilham um meio Ambiente. Journal of Applied Probability, 23, 418–431.

Lopes, HF, Gamerman, D., & Salazar, E. (2011). Modelos generalizados de fatores dinâmicos espaciais. Estatística Computacional e Análise de Dados, 55, 1319-1330.

Lopes, HF, Polson, NG, & Carvalho, CM (2012). Estatísticas Bayesianas com um sorriso: uma perspectiva de reamostragem-amostragem. Revista Brasileira de Probabilidades e Estatística, 26, 358–371.

Lopes, HF, & Tsay, RS (2011). Filtros de partículas e inferência Bayesiana em econometria financeira. Journal of Forecasting, 30, 168–209.

Mahamunulu, DM (1967). Uma nota sobre regressão na distribuição multivariada de Poisson. Journal of the American Statistical Association, 62, 251-258.

Marques, PCF, Graziadei, H., & Lopes, HF (2020). Generalizações Bayesianas do modelo autoregressivo de valor inteiro. Diário de Estatísticas Aplicadas, 1–21. https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1812544

Marshall, AW, & Olkin, I. (1988). Famílias de distribuições multivariadas. Journal of the American Statistical Association, 83, 834-841.

McKenzie, E. (1985). Alguns modelos simples para séries temporais variáveis discretas. Boletim de Recursos Hídricos, 21, 645–650.

McKenzie, E. (1988). Alguns modelos ARMA para sequências dependentes de contagens de Poisson. Advances in Applied Probability, 20, 822–835.

Neal, P., & Subba Rao, T. (2007). MCMC para processos ARMA de valor inteiro. Journal of Time Series Analysis, 28, 92-110.

Ord, K., Fernandes, C., & Harvey, AC (1993). Modelos de séries temporais para séries multivariadas de dados de contagem. Desenvolvimentos na Análise de Séries Temporais: Em Honra de Maurice B. Priestley, T. Subba Rao (pp. 295-309).

Pedeli, X., & Karlis, D. (2011). Um modelo bivariado INAR(1) com aplicação. Modelagem Estatística, 11, 325-349.

Pedeli, X., & Karlis, D. (2013). Sobre a estimação do processo bivariado de Poisson INAR. Comunicações em Estatística—Simulação e Computação ção, 42, 514-533.

Pedeli, X., & Karlis, D. (2020). Um modelo de série temporal de valor inteiro para vigilância multivariada. Estatísticas em Medicina, 39, 940-954.

Ravishanker, N., Serhiyenko, V., & Willig, MR (2014). Modelos dinâmicos hierárquicos para séries temporais multivariadas de contagens. Estatísticas e Sua Interface, 7, 559-570.

Ravishanker, N., Venkatesan, R., & Hu, S. (2016). Modelos dinâmicos para séries temporais de contagens com um aplicativo de marketing. Em RA Davis, SH Holan, R. Lund, & N. Ravishanker (Eds.), Manual de séries temporais de valor discreto (pp. 423-445). Imprensa CRC.

Schmidt, AM, & Pereira, JBM (2011). Modelagem de séries temporais de contagens em epidemiologia. International Statistical Review, 79, 48-69.

Serhiyenko, V., Ivan, JH, Ravishanker, N., & Islam, S. (2014). Modelagem composicional dinâmica de contagens de atropelamentos em vias urbanas em Connecticut. Análise e Prevenção de Acidentes, 64, 78–85.

Serhiyenko, V., Ravishanker, N., & Venkatesan, R. (2015). Estimação Bayesiana aproximada para modelos de séries temporais de contagem multivariada. Em PK Choudhary, et ai. (Eds.), Análise de dados ordenados, modelagem e métodos de pesquisa em saúde (pp. 155–167). Springer Internacional.

Serhiyenko, V., Ravishanker, N., & Venkatesan, R. (2018). Modelagem multivariada em vários estágios de padrões temporais em contagens de prescrição para drogas concorrentes em uma categoria terapêutica. Modelos Estocásticos Aplicados em Negócios e Indústria, 34, 61–78.

Silva, I., Silva, ME, Pereira, I., & Silva, N. (2005). Processo INAR(1) replicado. Metodologia e Computação em Probabilidade Aplicada, 7, 517-542.

Silva, N., Pereira, I., & Silva, ME (2009). Previsão no modelo INAR(1). Revstat Statistical Journal, 7, 119–134.

Singpurwalla, ND, Polson, NG, & Soyer, R. (2018). Dos mínimos quadrados ao processamento de sinais e filtragem de partículas. Tecnometria, 60, 146-160.

Skellam, JG (1946). A distribuição de frequência da diferença entre duas variáveis de Poisson pertencentes a diferentes populações. Diário da Royal Statistical Society Série A, 109, 296.

Smith, R., & Miller, JE (1986). Um modelo de espaço de estados não gaussiano e aplicação para previsão de registros. Jornal da Estatística Real Sociedade, Série B, 48, 79-88.

Sofronas, G. (2012). Estimação bayesiana para modelo autoregressivo inteiro bivariado (tese de mestrado não publicada). Departamento de Estatística, Ath ens University of Economics, Atenas, Grécia.

Soyer, R. (2018a). Discussão da modelagem multivariada em vários estágios de padrões temporais na contagem de prescrições para computação de medicamentos em um categoria apeutica. Modelos Estocásticos Aplicados para Negócios e Indústria, 34, 79–80.

Soyer, R. (2018b). Filtragem de Kalman e análise Bayesiana sequencial. Wiley Revisões Interdisciplinares: Estatísticas Computacionais, 10(5). https://doi.org/10.1002/wics.1438

Tebaldi, C., West, M., & Karr, AF (2002). Análises estatísticas de fluxos de tráfego em rodovias. Journal of Forecasting, 21, 39-68.

Teicher, H. (1954). Sobre a distribuição multivariada de Poisson. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 37, 1–9.

Tsionas, EG (1999). Análise Bayesiana da distribuição multivariada de Poisson. Comunicações em Estatística - Teoria e Métodos, 28, 431-451.

Weiß, CH (2008). Operações de afinamento para modelar séries temporais de contagens—Uma pesquisa. Advances in Statistical Analysis, 92, 319-341.

Oeste, M. (2020). Previsão Bayesiana de séries temporais multivariadas: Escalabilidade, incerteza de estrutura e decisões. Anais do Instituto de Matemática Estatística, 72, 131.

West, M., & Harrison, PJ (1997). Previsão Bayesiana e modelos dinâmicos (2ª ed.). Springer-Verlag.

West, M., Harrison, PJ, & Migon, HS (1985). Modelos lineares generalizados dinâmicos e previsão Bayesiana. Jornal do Sta americano tistical Association, 80, 73-97.

Como citar este artigo: Soyer, R., & Zhang, D. (2021). Modelagem Bayesiana de séries temporais multivariadas de contagens. Wiley Revisões Interdisciplinares: Estatísticas Computacionais, e1559. https://doi.org/10.1002/wics.1559