Machine Translated by Google

Caos, Solitons e Fractais 97 (2017) 44–50

Listas de conteúdo disponíveis em ScienceDirect

Caos, Solitons e Fractais

Ciência Não-linear e Fenômenos Complexos e Não-equilíbrios

página inicial do jornal: www.elsevier.com/locate/chaos

Análise

Previsão de dados de tempo com o uso de movimento browniano fracionário

Valeria Bondarenko[a], ÿ , Victor Bondarenko [b], Kyryl Truskovskyi [b]

a *Ecole Centrale de Nantes, Nantes, França* b

Universidade Técnica Nacional da Ucrânia Universidade Politécnica de Kiev, Kiev, Ucrânia

informações do artigo

Historia do artigo:
Recebido em 23 de novembro de 2016
Revisado em 23 de janeiro de 2017
Aceito em 25 de janeiro de 2017

MSC:
60G22
62M10
91B84

Palavras-chave:
Modelo estocástico
Previsão ideal
Movimento browniano fracionado

resumo

Investigamos a qualidade da previsão do movimento browniano fracionário, e um novo método para estimar o expoente de Hurst é validado. Propõe-se o modelo estocástico da série temporal na forma de movimento browniano fracionário convertido. O método de verificação da adequação do modelo proposto é desenvolvido e a previsão de curto prazo para dados temporários é construída. Os resultados da pesquisa são implementados em ferramentas de software para análise e modelagem de séries temporais.

1. Introdução

Assumimos que uma trajetória observada *x(t),* 0 ÿ *t* ÿ T, é um elemento do conjunto de trajetórias ou um elemento do espaço funcional na construção do modelo matemático estatístico. Se x(·) é assumido como contínuo, então este espaço pode ser considerado um conjunto C(0; T), que são funções contínuas em (0; T). Em outras palavras, *x(t)* = (X(·))(t), (1) onde *X(s)* é uma realização de algum processo aleatório ÿ *(s)* com características conhecidas, é uma conversão reversível em C(0 ; T). , ÿ) é chamado de modelo de dados observados. O processo ÿ *(t)* é básico em (modelo para *x(t).* Para observação discreta x1, . . ., *xn* (série temporal) e em suposição sobre automodelagem ÿ (t),

$$xk = (X(\cdot))\ \frac{k}{n}\ ,\quad k = 1, . . ., n\ ;\qquad : Rn ÿ Rn.$$

Para a trajetória altamente oscilante *x(t),* o processo básico ÿ *(t)* com variação ilimitada é selecionado. Em particular, ÿ *(t)* = ÿ *BH* (t), onde BH(t) é um movimento browniano fracionário (fBm), que foi introduzido pela primeira vez por B. Mandelbrot em [16,17] e é definido como um aleatório gaussiano processo com média zero e função de covariância:

$$R(t, s) = EBH\ (t)BH\ (s) = \frac{1}{2}\,(t2H + s^{2H}\ ÿ\ |t\ ÿ\ s|^{2H}),\ 0 < H < 1.$$

A distribuição de densidade n-dimensional do movimento browniano fracionário tem a seguinte aparência:

$$p(t1, . . ., tn,\ x1, . . ., xn) = c\exp\ ÿ\frac{1}{2}\quad rjkxjxk\ ,\qquad rjk = Rtj\ ,tk\ .$$

O parâmetro *H* ÿ (0; 1) é chamado de expoente de Hurst de fBm, e a transformação ÿ1 consiste em ações que transformam fBm a realização da trajetória observada. O uso do movimento browniano fracionário como processo básico ÿ *(t)* no modelo (1) é justificado pelo não markoviano *BH(t).* Muitas trajetórias de movimento browniano fracionário têm uma dimensão fracionária estatística igual a Hÿ1;

dimensão fracionária de cada trajetória

X(t)

é igual

2 - H.

O movimento browniano fracionário pode ser representado como um estocástico em tegral pelo processo de Wiener

W(t) :

$$BH\ (t) = cH \int_{ÿ}^{0} ((t - s)\ ÿ - (ÿs)\ (\ ÿ)\ dw\ (s) + \int_{0}^{t} ((t\ ÿ\ s)ÿdw(s)\ ,$$

Onde

$$ÿ = H - \frac{1}{2};$$

ÿ Autor correspondente.

E-mail: valeria_bondarenko@yahoo.com (V. Bondarenko).

http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2017.01.013 0960-0779/

CH

é a constante de normalização. A relação foi comprovada em [2] com o uso de representação redutível:

$$BH(t) == dtal \frac{dal\ phay}{pha} W(t) + ÿ(t),$$

Onde

$$\frac{dal\ phay}{fase\ dtal}$$

é a derivada fracionária Riemann–Liouville,

ÿ *(t)*

é um processo com variação limitada. A generalização deste derivada foi proposta em [31]. As solações de equações de auto-oscilação são descritas em [32,33] e Korteweg-de Vries com derivadas fracionárias. A primeira motivação para os estudos deste processo e suas aplicações são consideradas em [3,18,19]. o resultados de estudos das propriedades do movimento browniano fracionário e sua aplicação em modelos de processos naturais e econômicos são abordados em [4,5,13–15,27–29]. Vamos anotar as revisões [20,26]. Estatísticas de pesquisa de movimento browniano fracionário são citadas abaixo.

Vamos escolher o modelo de movimento browniano fracionário para ob série temporal veiculada x1, . . ., *xn:*

$$xk = ((ÿ\ BH)) \frac{k}{n}, \qquad (2)$$

e a transformação é definida. Vamos calcular o expoente de Hurst de séries temporais observadas como *H* do processo básico *BH(t).* Observe que este valor depende da transformação Os critérios de adequação de a representação (2) é mostrada em [3]. Das considerações empíricas segue-se que o modelo (2) é adequado para descrever os dados em tempo aleatório e a prioridade não é satisfatória para a aproximação de sequências caóticas determinísticas. Via de regra, o determinismo e componentes estocásticos podem estar presentes nos dados observados.

No presente trabalho, um novo método de estimação dos parâmetros ÿ e *H* é justificado, e a qualidade da previsão é investigada para o realização observada do movimento browniano fracionário $xk = ÿ\ BH \frac{k}{n}$. Para a série em tempo real, é proposto um modelo que utiliza o movimento browniano fracionário como processo básico. Os critérios de adequação deste modelo são desenvolvidos e a previsão de curto prazo é construído.

2. Estatísticas de movimento browniano fracionário

2.1. Estimativa de parâmetros

Vamos considerar os incrementos $ÿk = ÿ\ BH \frac{k}{n}\ ÿ\ BH \frac{kÿ1}{n}$, que formam a sequência estacionária gaussiana com média zero e a matriz de correlação $V = \frac{ÿ^2}{n2H}$S, e elementos *sjk* da matriz que veja a seguir:

$$s\,jk = ÿ\ ÿj, ÿk = 2 \frac{1}{-} |k\ ÿ\ j + 1|^{2H} + |k\ ÿ\ j\ ÿ\ 1|^{2H}\ ÿ\ 2|k\ ÿ\ j|^{2H}. \qquad (3)$$

Em particular, o coeficiente de correlação entre vizinhos em incrementos é

$$ÿ\ (ÿk, ÿk + 1)\ ÿ\ ÿ1 = 22H\ ÿ\ 1 - 1.$$

Os teoremas do limite para a sequência ÿ1, . . ., *ÿn* foram provados pela primeira vez por Peltier [30]: para estatísticas

$$Rjn = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} j\,|ÿk|,\ j\ ÿ\ N, \qquad En(j) = ERjn = njH \frac{ÿ\ j}{—}\ \frac{2^{\frac{j}{2}}\ \frac{j+1}{2}}{ÿÿ},$$

com probabilidade $1\ ÿ\ 1 \frac{Rjn}{Em(j)}$ ÿ ÿ.

A partir da última equação, as estimativas de consistência dos parâmetros *H* e ÿ seguem:

$$Han = \frac{\ln \frac{2}{Pi} \frac{ÿ}{R1n}}{\ln n}, \text{ com ÿ conhecido,}$$

$$ÿ\hat{}1n = nH \frac{\overline{Pi}}{2} rR1n = 1{,}25nHR1n, \text{ com H.} \qquad (4)$$

Vamos propor um novo método de estimação de browniano fracionário movimento, por dados observados x1, . . ., *xn,* dois parâmetros desconhecidos *ÿ,* H.

Vamos assumir:

y1, . . ., *yn* são os incrementos ; *yk = xk* ÿ xkÿ1 ,

$$Q(H) = \frac{0{,}8}{R1n} \frac{\overline{S - 1y, y}}{n},$$

onde a matriz *S* ÿ *SH* é definida por (3), *y* é um vetor de incrementos.

Demonstração. Estatística

$$H\hat{} = \arg\min |\ Q(H) - 1\ | \qquad (5)$$

é um estimador consistente do parâmetro H.

Prova. ÿ é o vetor gaussiano canônico com as seguintes características:

$$Eÿ = 0, \quad E(ÿ, u)(ÿ, ÿ) = (u, ÿ), \quad \dim ÿ = n.$$

Então, **y** = *V* 2 $\overset{1}{ÿ}$, portanto

$$n = E(ÿ, ÿ) = E\ V\ \mathbf{ÿ1y, y} = E\ S\ ÿ\ 1y, \mathbf{y}\ \frac{n2H}{14h\_}.$$

E consequentemente a estatística

$$ÿ\hat{}^2_{2n} = (n)^{2Hÿ1}\ S\ ÿ\ 1y, \mathbf{y},$$

e aqui estatística $(n)^{2Hÿ1}$ Sÿ1y, *y* é uma estimativa imparcial do parâmetro ÿ 2. A dispersão da estimativa

$$ÿ\hat{}_{2n} = \overline{n2Hÿ1\ Sÿ1y, \mathbf{e}}. \qquad (6)$$

é calculado usando a fórmula de integração por partes ([6, p. 206]).

De (4) e (6), segue que

$$\frac{ÿ\hat{}2n}{ÿ\hat{}1n} = \frac{0{,}8}{R1n} \frac{\overline{S - 1y, \mathbf{y}}}{n} = Q(H),$$

e consistência das estimativas significa que limn *Q(H)* = 1, onde *H* é um expoente de Hurst do movimento browniano fracionário observado.

A implementação do algoritmo correspondente é escolha tal valor do argumento *H* em *Q(H),* onde |Q(H) ÿ 1| ÿ min.

A eficiência do algoritmo é confirmada por ex numérico experimento. Os valores estatísticos são mostrados na Tabela 1.

$$qq\,j = \frac{0{,}8}{R1n} \frac{\overline{S^{-1}_{j}\ zk, zk}}{n},$$

onde *zk* é um vetor gerado de incrementos fBm com o expoente Hurst *Hk, Sj* é a matriz de correlação normalizada, correspondente a o índice fBm com o expoente de Hurst *Hj.* Para cada *Hk,* os valores *qkj* são calculado com a seleção do parâmetro *Hj* com passo *Hj* = 0,1.

A geração *zk* é realizada com os seguintes parâmetros:

n = 200 *n* = 1000 *Hk* = 0,1; 0,3; 0,7; 0,9.

A análise dos dados na Tabela 1 mostra que, para cada *Hk* (no fixo linha),

$$|\ qk - 1\ |\ ÿ \min, \text{ se } Hj = Hk, \text{ então } H\hat{k} = Hj.$$

tabela 1

Eficiência do método de avaliação.

Hk	*Hj* 0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1 n = 200	1.004	0,95 0,93 0,95		0,91	1,11 1,21 1,10		1,45 2,03	
n = 1.000 1.002 0,3 n		0,93 1,07 0,98		0,91	1,22 1,07 **1,08**		1,47 2,06	
= 200 1,29 n = 1.000 1,28 = 0,7		1,07 0,99 2,25		0,95	1,17 0,94 **0,92**		1,38 1,92	
200 4,06 n = 1.000		1,52 3,19 1,79		0,94	0,98		1,40 1,94	
7,04				1,18			1,09 1,44	
				1,22			1,08 1,43	
0,9 n = 200	7,67	3,88 2,26		1,43	0,72	0,74	0,75 0,97	
n = 1000 9,10		4.13	2,24	1,40	0,77	0,78	0,83	1,07

Nota: Nas obras de J.-F. Coeurjolly [10-12], complementado por o trabalho [1], outro método de estimar o expoente de Hurst é justificado , embutido no Package *dvfBm* (https://cran.r-project.org/web/pacotes/dvfBm/dvfBm.pdf). Vamos denotar por $\hat{H}1$ uma estimativa do método proposto neste artigo e por $\hat{H}2$ uma estimativa por J.-F. Coeurjolly. A comparação dessas estimativas mostra que seu desvio não é superior a 5%.

2.2. Previsão de movimento browniano fracionário

Vamos observar a trajetória de um processo aleatório $x(t)$, 0 ÿ t ÿ T. O valor aleatório $\hat{X}(T + ÿ)$ é chamado de previsão ótima do processo no ponto T + ÿ, se

$$E\,\hat{X}(T+ÿ) - X(T+ÿ)^2 = \min_X E\,(ÿ - X(T+ÿ))^2 .$$

A previsão ótima é definida pela fórmula de condicional quer dizer:

$$\hat{X}(T+ÿ) = E(X(T+ÿ)|X(t)), \qquad 0 ÿ t ÿ T). \tag{7}$$

Em alguns casos, (7) assume uma expressão explícita. Vamos considerar Vetor aleatório gaussiano ÿ = (ÿ1, ..., ÿn), ÿ = (ÿ, ÿ) ;, dimÿ = m, dimÿ = n - m, ÿ ÿ ÿ (0; S), ÿ ÿ ÿ (0; A), ÿ ÿ ÿ (0; D), então o operador de correlação do vetor ÿ é uma matriz de bloco

$$S = \begin{matrix} AB \\ CD \end{matrix},$$

onde os elementos da matriz representam a correlação cruzada das coordenadas ÿ e ÿ. Se ÿ for observado e ÿ for vetor estimado, então a previsão ótima coincide com a estimativa linear, e a Eq. (7) assume a seguinte forma:

$$\hat{ÿ} = E\,(ÿ \mid ÿ) = CA\,ÿ\,1º ,$$

ou na forma de coordenadas:

$$X_{m+j} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} s_{m+j,k} a_{ki} ÿi , \ j = 1, \ldots , n - m . \tag{8}$$

Para extrapolação de uma etapa, $m = n$ ÿ 1, B é um vetor, convector $C = B^T$, $D = Eÿ_n^2$ e o erro quadrado médio da previsão ÿ é definido pela seguinte fórmula:

$$ÿ2 = E\,\hat{ÿ}_n - ÿ_n{}^2 = D ÿ Aÿ1B, B ,$$

e ÿDÿ0,5 é um erro.

Podemos construir a previsão de fBm para seus incrementos

$$ÿk = yk = BH \frac{k}{n} ÿ BH \frac{k-1}{n} ,$$

bem como para os valores do movimento browniano fracionário: $ÿk = BH\,\frac{k}{n}$.

No primeiro caso, os elementos da matriz S são definidos por (3), e a fórmula (8) assume a seguinte forma:

$$\hat{y}_{m+j} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{(m+jÿk+1)\,2H+(m+jÿkÿ1)2H}{2} ÿ(m+jÿk)2H\ fluxo,$$
$$j = 1, \ldots, r , \quad r = m ÿ n \quad . \tag{9}$$

Os elementos sjk da matriz de correlação S na extrapolação da os valores do movimento browniano fracionário são definidos pelo seguinte equação:

$$s_{jk} = 0{,}5j^{2H} + k2H ÿ (k ÿ j)^{2H} . \tag{10}$$

O experimento numérico foi realizado com o simulador dados para determinar a qualidade da previsão. A previsão foi construída em 8 etapas pela amostra de aprendizagem.

Os resultados da previsão $\{yk\}$ pela fórmula (9) não são satisfatórios tório : o erro absoluto $ÿj = \frac{\hat{y}m+jÿym+j}{aa+j}$, j = 1, ... , 8, igual a 0,8–1.2 e não depende do tamanho da amostra de aprendizado.

O cálculo dos valores de previsão $\hat{x}m+j$ pela fórmula (8) com a matriz definida pela Eq. (10) leva ao seguinte resultado esperado. A previsão do processo antipersistente (H < 0,5) não é satisfatória, o erro de previsão não depende do tamanho da amostra de aprendizado. A qualidade da previsão melhora com o aumento de m para o processo persistente. Dados apropriados são fornecidos na Tabela 2, que mostra os valores do erro relativo $ÿj = \frac{\hat{x}m+jÿxm+j}{xm+j}$, j = 1, ... , 8, para H = 0,3, H = 0,7, H = 0,9, m = 100, m = 500, m = 1000.

3. Teoremas de limite e aplicações

Seja $B(t)$, 0 ÿ t ÿ 1 um movimento browniano fracionário com Hurst expoente H. Vamos considerar os incrementos normalizados

$$ÿk = nHB\,\frac{k}{n} ÿ B\,\frac{k-1}{n} \quad ÿ ÿ (0; 1) .$$

Na série de artigos [8,9,21–25], alguns teoremas de limite para o funções desses incrementos foram comprovadas. Vamos denotar

$$ÿk = nHB\,\frac{k}{n} = \sum_{j=1}^{kÿ1} ÿj .$$

Há uma convergência quadrática média:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ÿÿÿ_k^3\, ÿ \quad ÿ3_2, \quad H ÿ 0; \frac{1}{2} ,$$
$$\frac{1}{n1+H} \quad A'^2_k X_k^3 \ ÿ 3º, H ÿ 0; \quad \frac{1}{2} , \tag{11}$$

Onde

$$ÿ ÿ ÿ 0; \frac{1}{2H+2} ;$$

mesa 2

Os valores de erro relativo.

H	1	2	3	4	5	6	7	8
0,3 m = 100 0,67 0,71 m = 500 0,25 0,16 m			0,45	0,07 2,32 0,17		1,49	1,58 0,11	
= 1000 0,04 0,12 0,08 m = 100 0,02			0,06	1,68 0,01 0,10 0,27		0,61	0,71 0,69	
0,015 0,012 m = 1000 0,008 0,015			0,16	0,29 0,003 0,021 0,017		0,04	0,18 0,17	
			0,17	0,006		0,35	0,50 0,58	
			0,009			0,001	0,005 0,007	
			0,031			0,001	0,021	0,017
0,9 m = 100	0,02	0,07	0,10	0,18	0,21	0,24	0,26	0,31
m = 500 0,001 m = 1000		0,001	0,001	0,001	0,01	0,01	0,01	0,01
0,001		0,01	0,02	0,04	0,05	0,05	0,07	0,07

Nota: Os dados de previsão para H = 0,9, m = 1000 podem conter alguns erros devido ao mau condicionamento da matriz *SH:* determinante desta matriz é uma função decrescente de m e H para H > 0,5. Então, para m = 500, $detS0.9$ ÿ 10ÿ190.

$$\frac{1}{n2H}\sum_{k=1}^{n} ÿÿÿ_k^{3}\ ÿ\ \frac{3}{2}B2(1),\quad H\ ÿ\ \frac{1}{2};1 .$$

Essas relações limite permitem verificar a hipótese estatística T = {a série temporal investigada x1, . . ., xn

é uma implementação de fBm}.

O algoritmo de verificação é o seguinte (com H conhecido)

Vamos considerar os incrementos $yk = xk$ ÿ xkÿ1, estatísticas R1n(y) = $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|yk|$, e estime ˆÿ pela fórmula (4).

Vamos normalizar os incrementos e assumir:

$$zk = ÿˆ^{ÿ1}\ nHyk = yk\ \frac{0,8}{R1n}.$$

Assumimos que a hipótese T é válida:

$$zk = ÿk = nH\ B\ \frac{k}{n}\ ÿ\ B\ \frac{k-1}{n}. \tag{12}$$

Suponha $vk = \sum_{j=1}^{kÿ1} z_j$ e calcular as estatísticas

$$Um = \frac{1}{n}\ vkz_k^3,\quad H\ ÿ\ 0; 2;\frac{1}{}$$

$$Bn = \frac{1}{n1+H}\ v_k^2 z_k^3,\quad H\ ÿ\ 0; \frac{1}{2}; \tag{13}$$

$$Dn = \frac{1}{n2H}\ vkz_k^3,\quad H\ ÿ\ \frac{1}{2};1 .$$

Se a hipótese T for verdadeira, então há convergência:

$$An\ ÿ\ ÿ1,5 ;\ Bn\ ÿ\ 3ÿ ;\ Dn\ ÿ\ \frac{3}{2}B2(1) .$$

A decisão sobre a hipótese T é tomada comparando os valores reais da estatística com seus valores teóricos limitantes. Vamos determine o desvio do valor limite ÿ = |An + 1,5| por estatística $An;$ as funções de distribuição limite para estatísticas $Bn, Dn:$

$$F1(x) = P\{3ÿ < x\} = \frac{x}{3d},\ F2(x) = 2\ \frac{2}{3x-1},\ x > 0 ,$$

onde é a função de Laplace, d = (2H + 2) ÿ0,5.

A hipótese T é aceita, se

$$ÿ < ÿ0 ,\ |Bn| < ÿ1 ,\ H < 0,5;\ 0 < Dn < ÿ2 ,\ H > 0,5 , \tag{14}$$

onde ÿ1, ÿ2 são quantis de distribuições de F1, F2, correspondentes ao nível de significância selecionado ÿ = 0,1. Então,

$$ÿ1 = \frac{4,95}{ÿ2H+2},\ ÿ2 = 4,08 .$$

A taxa de convergência das estatísticas ao limite foi testada por experimento numérico para o primeiro exemplo ("caso ideal"):

$$zk = ÿˆ^{ÿ1}\ nH\ (X(k)\ ÿ\ X(k\ ÿ\ 1))\ ;\ X(t) = ÿBH\ (\ t\ ) ,$$

Tabela 3

Valores das estatísticas de controle.

H		A	Bn	Dn	ÿ1
0,1	n = 200 ÿ1,30 0,84 n = 1000 ÿ1,32				3,34
	2,63 0,2 n = 200 ÿ1,21 0,81				3,34
					3,20
	n = 1000 ÿ1,35 1,74 n = 200 ÿ2,00				3,20
0,3	0,37 n = 1000 ÿ1,10 0,50				3.07
					3.07
0,4 n = 200		ÿ0,55 1,26			2,96
	n = 1000 ÿ2,51		0,83		2,96
0,6 n = 200 n =				1,75	
	1000			1,03	
0,7 n = 200 n =				1,23	
	1000			0,67	
0,8 n = 200				1,05	
	n = 1000			0,52	
0,9 n = 200				0,48	
	n = 1000			0,04	

onde os valores do movimento browniano fracionado foram obtidos por simulação. Os valores das estatísticas de controle An, Bn, Dn são mostrados na Tabela 3.

Da Tabela 3, segue que

$$|Bn| < = ÿB ,\ ÿ2H + 2H > \frac{4,95}{0,5}\quad H < 0,5;\ 0 < Dn < 4,08 = ÿD ,$$

,

e o desvio $ÿ, H$ < 0,5, é uma função crescente de H (para H = 0,4, ÿ ÿ 1).

O segundo exemplo é uma sequência caótica logística determinística xk+1 = $4xk(1$ ÿ xk), k = 1, . . ., 1049. Por procedimento 0,15. As estatísticas de controle são as seguintes:

An = 0,6 > 0, |Bn| = 1,9 > $ÿB$ = 0,08. A hipótese T é rejeitada.

O terceiro exemplo. Suponha que os valores observados sejam uma mistura aditiva do se determinístico caótico e aleatório sequências:

$$xk = uk + avk,$$

onde uk são os valores de um sistema dinâmico, vk são os valores de um processo aleatório.

As sequências {uk}, {vk} são normalizadas pela energia, portanto $\frac{1}{n}\ u_k^2 = \frac{1}{n}\ v_k^2$ = 1. Então, o valor a determina a parcela estocástica nos dados observados.

No exemplo, $uk = 4ukÿ1$ 1 ÿ ukÿ1 , vk = ÿ BH $\frac{k}{n}$.

A sequência estocástica vk é gerada com Hf Bm = 0,1–0,9.

A Tabela 4 mostra a estimativa de Hˆ da mistura e os valores das estatísticas de controle.

Os dados da tabela mostram a "agressividade" do componente caótico em relação ao estocástico para $HfBm$ ÿ 0,2. As desigualdades (14) são não satisfeito para esses valores de fBm e caráter da mistura

Tabela 4

Estatísticas de controle da mistura (a = 1, a = 2, n = 2000).

H		H An		Bn	Dn	ÿ1
0,1	a = 1	0,6	ÿ1,94 ÿ0,07 ÿ0,43 2,77			
	a = 2	0,1	ÿ1,60 ÿ0,40 ÿ697 3,34			
0,2	a = 1	0,15	ÿ5,35 ÿ15,3 ÿ1095 3,26			
	a = 2	0,15	ÿ3,19 ÿ6,17 ÿ652			3,26
0,3	a = 1	0,6 ÿ2,54 ÿ0,12 ÿ0,56 0,2 ÿ5,0 ÿ9,20 ÿ477				2,77
	a = 2	0,15 ÿ4,50ÿ47,38 ÿ920,9ÿ45ÿ05,30ÿ10,03,15				3.19
0,4	a = 1					3,26
	a = 2					3,26
0,6	a = 1					2,77
	a = 2				ÿ813	3,26
0,7	a = 1	0,6	ÿ1,35 ÿ0,03 ÿ0,30			2,77
	a = 2	0,1	ÿ1,08	0,47	ÿ470	3,34
0,8	a = 1	0,6	ÿ1,37 ÿ0,03 ÿ0,30 ÿ0,68 ÿ0,01			2,77
	a = 2	0,6	ÿ0,15 ÿ1,45 ÿ0,03 ÿ0,32 ÿ1,91			2,77
0,9	a = 1	0,6	ÿ0,07 ÿ0,42			2,77
	a = 2	0,6				2,77

determina a sequência logística. O desvio das estatísticas de os valores limite são os mesmos para o browniano fracionário "puro" movimento (Tabela 3) (para Hf Bm = 0,1).

Conclusão: Persistência ($\hat{H}$ > 0,5) das séries temporais investigadas (Dn < ÿ2) significa que tem natureza estocástica; antipersistente ($\hat{H}$ = 0,1-0,2, An ÿ A, |Bn| < ÿ1) admite a existência da componente caótica.

4. Os dados reais: Aproximação e previsão

Construção do modelo (2) para série em tempo real x0 = 0, x1, . . ., xn, $\bar{x}$ = 0 é escolher a transformação e verificar a adequação do modelo por critério (14). A transformação ÿ1 é definido no vetor de incrementos

$$y = (y1,... , in) , yk = xk - xk ÿ 1 , \qquad \tilde{y} = (\tilde{y}1, . . ., \tilde{y}n) = ÿ1(y) ,$$

onde $\tilde{y}k$ são os incrementos do movimento browniano fracionário. o O procedimento de construção do modelo é chamado de "algoritmo de aproximação da série temporal s0 = 0, s1, . . ., sn por movimento fracionário Browniano", que consiste no seguinte:

1. Conversão primária ÿ em dados iniciais s0 = 0, s1, . . ., sn, que está liderando a nova sequência x0 = 0, x1, . . ., xn, $\bar{x}$ = 0 (xk = ÿ(sk)), e cálculo dos incrementos yk = xk ÿ xkÿ1. Em particular, a transformação ÿ pode conter um logaritmo e remover aproximação da tendência (Sk > 0, xk = log Sk ÿ Mk).
2. Seleção do operador -1, que está convertendo os incrementos $\tilde{y}k$ na nova sequência ($\tilde{y}$1, . . ., $\tilde{y}n$):

$$\tilde{y}k = ÿB \_ \frac{k}{n} ÿ B \frac{k - 1}{n} , \qquad (15)$$

e construção da nova série temporal uk = $\sum_{j=1}^{k} yj.$

3. Estimativa do expoente H por (5), onde y = {$\tilde{y}k$}.
4. Investigação da adequação do modelo proposto ou verificação da hipótese estatística (15). A adequação é verificada por métodos descritos na Seção 3, que são reduzidos ao cálculo de estatísticas de controle (13):

$$zk = \frac{0,8}{R1n(\tilde{y})}kkk ,$$

e comparação dessas estatísticas com os valores-limite. o a hipótese (15) é aceita se as relações (14) forem válidas.

5. Previsão para r etapas para a série temporal convertida u1, . . ., un, baseado neste modelo:

$$\hat{u}m+j = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} sm+j, ks\ kiui , j = 1 ,. . ., r , \qquad (8A)$$

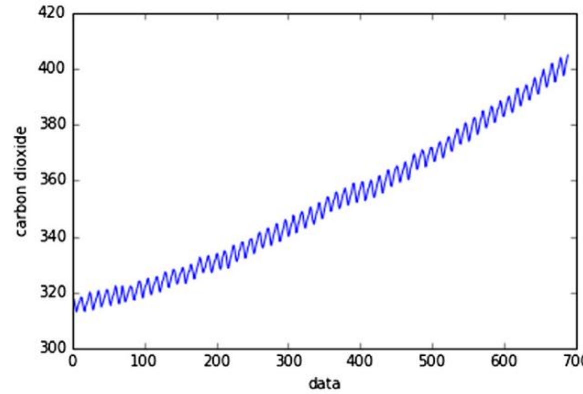

Fig. 1. Concentração de dióxido de carbono.

onde m é o tamanho da amostra de aprendizagem e os elementos sjk da matriz de correlação S são definidos pela igualdade (10). o transição reversa para a previsão $\hat{s}$m+1, . . ., $\hat{s}m+r$ dos dados iniciais é realizado pelo seguinte procedimento:

5a. Cálculo do vetor de incrementos:

$$v1 = \tilde{u}m+1 ÿ um,$$
$$v2 = \tilde{u}m+2 ÿ \tilde{u}m+1,$$
$$. . .$$
$$vr = \tilde{u}m + r - \tilde{u}m + r ÿ 1,$$

e sua conversão em um novo vetor:

$$w = (w1, . . ., wr) , \qquad w = (v).$$

5b. Construção da previsão de uma série temporal auxiliar:

$$\tilde{x}m+j = xm + \sum_{k=1}^{j} wk, j = 1, . . .,r,$$

e série temporal inicial

$$sm+1, . . ., sm + r = ÿ1\ \hat{x}m+1, . . ., \hat{x}m+r .$$

É necessário investigar a sequência {y1, . . ., yn} para o realização Seleção 2.

Em [7], o seguinte método foi proposto para construir um transformação unidimensional ÿ1 para a amostra {y1, . . ., yn}, n ÿ 200–1000. Vamos considerar a curtose:

$$d(y) = \frac{R2\ 1n(y)}{R2n(y)} .$$

Se dn for significativamente diferente de vamos $\frac{2}{Pi}$ substituir a série temporal {y1, . . ., yn} com a nova sequência {$\tilde{y}$1, . . ., $\tilde{y}n$} pelo seguinte Fórmula:

$$\tilde{y}k = sgnyk|yk|^{\frac{1}{ÿ}} , yk = sgnyk|\tilde{y}k|^{ÿ} , \quad ÿ > 0 , \qquad (16)$$

onde o parâmetro ÿ é definido a partir da seguinte equação:

$$d = \frac{1}{ÿÿ} \frac{2\ ÿ + \frac{1}{2}}{+ \_\ \frac{1}{2}} ; d(y) = \frac{R2\ 1n(y)}{R2n(y)}\ ÿ\ \frac{2}{Pi} .$$

Assim, a aproximação proposta leva ao seguinte modelo da série temporal original:

$$xk = \sum_{j=1}^{k} sgnyj\ \tilde{y}j^{ÿ} .$$

Vamos considerar dois exemplos de dados reais:

1. Dióxido de carbono (http://climate.nasa.gov/vital-signs/dióxido de carbono/) de 1.03.1958 a 1.06.2016, 693 pontos de dados (Fig. 1).

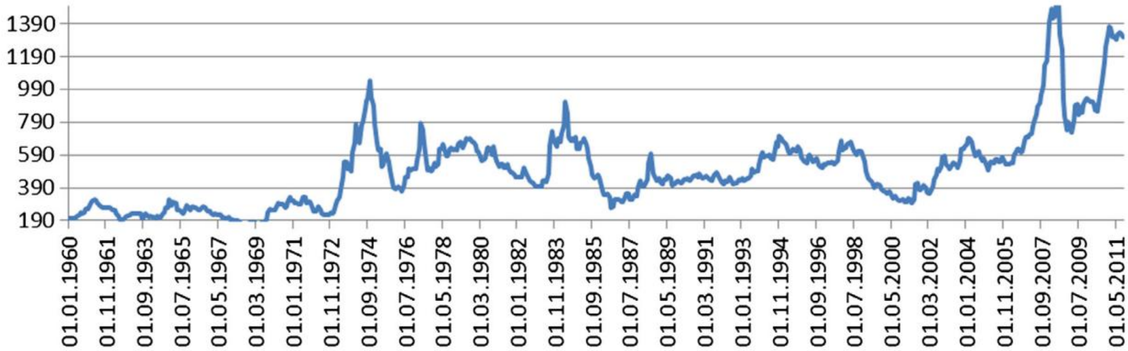

Fig. 2. Os preços do óleo de soja, ($/mt).

Tabela 5
Características dos dados reais.

Exemplo de tendência média logarítmica *d(y)*			ÿ	H	*A*	*Bn*	*Dn*	ÿ1
carbono	0,0037	0,74	0,75 0,75 26 1,37 0,65			ÿ5,3 1,0 0,14		2,66
Óleo	0,022	0,50			0,04	0,01		2,72

Tabela 6
Valores do erro de previsão ÿm+k.

m	*k* = 1	*k* = 2	*k* = 3	*k* = 4
200 Dióxido de carbono 0,003		0,004 0,002		0,003
Óleo 0,09 0,07 400 Dióxido de carbono 0,0006			0,09	0,09
0,002 0,005 Óleo 0,009 0,012 600 Dióxido de carbono 0,001 0,006 0,01				0,005
Óleo 0,04 0,04			0,09	0,04
				0,01
	0,02			0,06

2. Os preços do óleo de soja (LAMETA, Departamento de Economia, Universidade de Montpellier) de 01.01.1960 a 01.09.2011, 610 Os pontos de dados. (Fig. 1)

O algoritmo inicial de transformação ÿ é o seguinte: os valores log *sk* são divididos em janelas de tempo (uma aproximação linear da tendência é construída em cada janela).

A pesquisa inicial sobre incrementos estacionários consiste em calcular o coeficiente de correlação p̂1 para três janelas de tempo pelo seguinte fórmula:

$$\hat{p}_1 = \frac{y_j y_{j+1}}{y_j^2} .$$

Para o primeiro exemplo: p̂1 = 0,24–0,25. Para o segundo exemplo: p̂1 = 0,63–0,65.

Os incrementos formam uma sequência estacionária, uma vez que os valores de p̂1 não depende do número da janela.

Os resultados do cálculo são mostrados na Tabela 5.

A previsão de dados reais foi realizada para o tamanho do aprendizado amostra *r* = 4, *m* = 200; 400; 600. A transição para a previsão de os dados iniciais são determinados pela seguinte fórmula:

$$\hat{s}_{m+j} = \exp \hat{x}_{m+j} + M_{k+j} .$$

Os valores de erro de previsão são mostrados na Tabela 6.

A Tabela 6 confirma a qualidade satisfatória da previsão.

Conclusões

O modelo proposto de série em tempo real com movimento browniano fracionário como processo básico é eficaz, se os incrementos do os dados observados têm a propriedade de estacionaridade. Exemplos considerados de natureza física e financeira permitem uma aproximação por um processo persistente, o que é confirmado pela verificação da adequação de modelo. A previsão de curto prazo construída é satisfatória.

Referências

[1] Achard S, Coeurjolly JF. Variações discretas do browniano fracionário no presença de outliers e um ruído aditivo. Stat Surv (IMS) 2009;4:117–47.
[2] Alos E, Mazet O, Nualart D. Cálculo estocástico em relação ao movimento browniano fracionário com parâmetro Hurst. Stoch Process Your Appl 2000;86:121–39.
[3] Beran J. Estatísticas para processos de memória longa/ Beran J.. Chapman e Hall; 1995. pág. 315.
[4] Bezborodov V., Mishura Y., Persio LD. Precificação de opções com estocástico fracionário volatilidade e função de payoff descontínuo do crescimento polinomial. 2016. ArXiv: 16.07.07392[matemática.PR].
[5] Biagini F, Hu Y, Øksendal B, Zhang T. Cálculo estocástico para movimento fracionário de Brown e aplicações. In: Probabilidade e suas aplicações. Springer; 2008. pág. 326.
[6] Bogachev VI. Medidas gaussianas. In: Levantamentos e monografias matemáticas, volume 62. Sociedade Americana de Matemática.; 1998. pág. 433.
[7] Bondarenko VV. Aproximação de séries temporais por função de potência do movimento browniano fracionário. J Autom Inf Sci. 2013;45(6):82–6.
[8] Breton JC, Nourdin I. Limites de erro na aproximação não normal de suas variações de potência de ácaro do movimento browniano fracionário. Electro Commu Probab. 2008;13:482–93.
[9] Breton JC, Nourdin I, Peccati G. Intervalos de confiança exatos para o parâmetro hurst de um movimento browniano fracionário. Electron J Stat 2009;3:416–25.
[10] Coeurjolly JF. Simulação e identificação do movimento browniano fracionário: um estudo bibliográfico e comparativo / Coeurjolly J.-F.. J Stat Softw 2000;5(7):1–52.
[11] Coeurjolly JF. Estimando os parâmetros de um movimento browniano fracionário por variações discretas de seus caminhos de amostra / J.-F. Coeurjolly. Processo Estocástico de Inferência Estatística. 2001;4(2):199–227.
[12] Coeurjolly JF. Estimativa do expoente de Hurst de processos gaussianos localmente auto-similares usando quantis amostrais / Coeurjolly J.-F.. Ann Stat 2008;36(3):1404–34.
[13] Hu Y, Nualart D. Estimativa de parâmetros para fracionário Ornstein–Uhlenbeck pro cessões. Stat Probab Lett 2010;80:1030–8.
[14] Kubilius K, Mishura Y, Ralchenko K, Seleznjev O. Consistência do estimador de parâmetro de deriva para o processo Ornstein–Uhlenbeck fracionário discretizado com índice de Hurst *h* ÿ 0, $\frac{1}{2}$. Electron J Stat 2015; 9:1799-825.
[15] Lei P, Nualart D. Uma decomposição do movimento browniano bifracional e algumas aplicações. Stat Probab Lett 2009;79(5):619–24.
[16] Mandelbrot BB. Uma classe de processos estocásticos homotéticos a si mesmo: aplicação à lei climatológica de HE hurst. CR Acad Sci Paris 1965;240:3274-7.
[17] Mandelbrot BB, van Ness JW. Movimentos brownianos fracionários, ruídos fracionários e aplicações. SLAM Rev 1968;10(4):422–37.
[18] Mandelbrot BB. Fractais: forma, acaso e dimensão. São Francisco: Freeman; 1977.
[19] Mandelbrot BB. A geometria fractal da natureza / B. Mandelbrot. Homem livre e Co, São Francisco 1982;89(2):460.
[20] Mishura Y. Cálculo estocástico para movimento browniano fracionário e processos relacionados / Mishura Y. In: Mishura Y, editor. Notas de aula em matemática, vol. 1929; 2008. pág. 392. Springer-Verlag
[21] Nourdin I. Comportamento assintótico de variações quadráticas e cúbicas ponderadas de movimento browniano fracionário/Nourdin I.. Ann Probab 2008;36(6):2159–75.
[22] Nourdin I, Réveillac A. Comportamento assintótico de variações quadráticas ponderadas do movimento browniano fracionário: O caso crítico *h* = Ann Probab $\frac{1}{4}$. 2009;37(6):2200–30.

[23] Nourdin I. Convergência não central de integrais múltiplas / I. Nourd. Ana Probab 2009a;37(4):1412–26.

[24] Nourdin I. Fórmula de densidade e desigualdades de concentração com Malliavin cal culus / I. Nourdin, FG viens. Electron J Probab 2009b;14:2287-300.

[25] Nourdin I. Teoremas do limite central e não central para variações de potência ponderada do movimento browniano fracionário / I. Nourdin, D. Nualart, C Tudor. Ann Inst H Poincaré Probab Statist 2010; 46 (4): 1055–79.

[26] Nourdin I. Aspectos selecionados do movimento browniano fracionário. Bocconi e Springer Series-Verlag Italia; 2012. pág. 122.

[27] Nourdin I, Zintout R. Variação cruzada de integral jovem em relação a Movimentos brownianos fracionários de memória longa. Probab Math Stat 2016;36(Fasc. 35):35-46.

[28] Nualart D. Movimento browniano fracionário: cálculo estocástico e aplicações. In: Congresso Internacional de Matemáticos; 2006. pág. 1541-62.

[29] Nualart D, Saussereau B. Malliavin cálculo para equações diferenciais estocásticas impulsionadas por um movimento browniano fracionário. Estoque processa sua aplicação 2009;119(2):391–409.

[30] Peltier RF. Um novo método para estimar o parâmetro de movimento fracionário de Brown / Peltier RF, Levy Vehel J.. Rapport de recherché de l'INRIA 1994;27:2396.

[31] Yang XJ, Srivastava HM, Machado JAT. Uma nova derivada fracionária sem núcleo singular: aplicação à modelagem do fluxo de calor em regime permanente. Therm Sci 2016a;20:753–6.

[32] Yang XJ, Srivastava HM. Uma solução de perturbação assintótica para um oscilador linear de vibrações amortecidas livres em meio fractal descrito por fracionamento local derivados. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2015;29:499–504.

[33] Yang XJ, Machado JAT, Baleanu D, Cattani C. Sobre soluções exatas de ondas viajantes para a equação fracionária local de Korteweg-de Vries. Caos 2016b;26(8):084312.