

Particularidades e semelhanças da análise de espectro singular como um método de análise de séries temporais e processamento de sinal

Nina Golyandina

Resumo

A Análise do Espectro Singular (SSA), a partir da segunda metade do século XX, vem sendo um método de análise de séries temporais em rápido desenvolvimento. Uma vez que pode ser chamado de componente principal análise para séries temporais, SSA será definitivamente um método padrão na análise de séries temporais e processamento de sinal no futuro. Além disso, os problemas resolvidos pela SSA são consideravelmente mais amplos do que para a análise de componentes principais. Em particular, os problemas de estimativa de frequência, a previsão e a imputação de valores em falta podem ser resolvidas no âmbito do SSA. a ideia de SSA veio de diferentes comunidades científicas, como a de pesquisadores no tempo análise de série (decomposição de Karhunen-Loève), processamento de sinal (aproximação de baixa classificação e estimação de frequência) e análise multivariada de dados (análise de componentes principais). Também, dependendo da área de aplicação, diferentes pontos de vista sobre os mesmos algoritmos, escolha de parâmetros e metodologia como um todo são considerados. Assim, o objetivo do artigo é descrever e comparar diferentes pontos de vista sobre SSA e suas modificações e extensões para dar pessoas de diferentes comunidades científicas a possibilidade de estar ciente de aspectos potencialmente novos do método.

Conteúdo

1. Introdução	3
1.1 Referências.	3
1.2 Esboço do algoritmo.	4
1.3 Motivação.	4
1.4 Estrutura.	4
1.5 Estrutura detalhada.	5
1.5.1 Uma revisão geral do SSA (Seção 2).	5
1.5.2 SSA e problemas diferentes (Seção 3).	6
1.5.3 Implementação do SSA (Seção 4).	6
2 Uma revisão geral da SSA	6
2.1 Séries temporais e imagens digitais: problemas comuns.	6
2.1.1 Decomposição.	6
2.1.2 Outros problemas de imagens/séries temporais.	8
2.2 Análise de espectro singular.	8
2.2.1 Uma ideia de SSA: criar amostras de estrutura.	8
2.2.2 Uma ideia de SSA: encontrar uma estrutura comum usando o SVD.	9
2.2.3 Algoritmo SSA básico.	9

2.2.4 Comentários ao SSA Básico.	10
2.2.5 Uma vista da transformada de Karhunen-Loève	11
2.2.6 Uma visão de processos estacionários.	11
2.2.7 Uma visão de sistemas dinâmicos.	12
2.2.8 Uma visão da aproximação estruturada de baixo nível (SLRA)	12
2.3 Decomposição.	12
2.3.1 Separabilidade.	13
2.3.2 Como identificar os componentes SVD	14
2.3.3 Exemplo de identificação e decomposição	14
2.3.4 Exemplo de problemas com separabilidade	17
2.4 Filtragem.	20
2.4.1 Exemplo	20
2.5 Modelagem.	22
2.5.1 Abordagem baseada em subespaço.	23
2.5.2 Extração de sinal via projeções.	23
2.5.3 Exemplo de modelagem	24
2.6 Escolha dos parâmetros	24
2.7 Estudos teóricos	25
2.8 Esquema geral de decomposições SSA.	25
2.9 Extensões multivariadas/multidimensionais	26
2.9.1 SSA Multivariado.	26
2.9.2 SSA bidimensional.	28
2.9.3 SSA moldado.	29
2.9.4 Complexo SSA	29
2.10 Modificações da etapa SVD	30
2.10.1 Uso de informações a priori.	30
2.10.2 Decomposições refinadas de sinais.	30
2.10.3 Tensor SSA	31
3 SSA e diferentes problemas	32
3.1 SSA e não linearidade. O SSA é um método linear?	32
3.2 SSA e processos autorregressivos	33
3.3 SSA e estimativa de parâmetros.	34
3.4 SSA e aproximação estruturada de baixo nível (SLRA)	35
3.5 SSA e regressão linear (LS-estimador de tendência linear)	36
3.6 SSA e filtragem.	37
3.7 SSA e ICA.	37
3.8 SSA e EMD, DFT, DWT.	38
3.9 SSA: método e modelagem sem modelo	39
3.10 SSA: previsão e preenchimento de lacunas	39
3.11 SSA e detecção de sinal (Monte Carlo SSA)	41
3.12 SSA e valores atípicos.	42
3.13 SSA e informações a priori/a posteriori	43
3.14 SSA: identificação automática e processamento em lote	44
3.15 SSA e aprendizado de máquina	45

4 Implementação do Software SSA	46
4.1 e implementação rápida .	46
4.2 Exemplo de cálculos em Rssa .	46
5. Conclusão	47
6 Reconhecimento	47
Referências	47

1. Introdução

1.1 Referências

A origem da análise de espectro singular (SSA) é geralmente referida aos artigos (Broomhead & King, 1986a) e (Fraedrich, 1986); embora, o algoritmo de SSA pode ser encontrado, por exemplo, em (Colebrook, 1978). A SSA tornou-se amplamente conhecida na climatologia após a publicação de (Vautard & Ghil, 1989; Vautard, Yiou e Ghil, 1992). Após vários anos, o livro (Elsner & Tsonis, 1996) as informações básicas sobre SSA existentes até aquele momento. Em paralelo, SSA (chamado 'Caterpillar') foi criado na Rússia; os resultados foram publicados em (Danilov & Zhigljavsky, 1997) (em russo).

A história do método 'Caterpillar' começa em (Belonin et al., 1971), onde OM Kalinin é indicado como o autor das ideias subjacentes ao método (é difícil encontrar o acesso a este Reveja; portanto, nos referimos ao livro (Belonin, Golubeva, & Skublov, 1982, Capítulo 3, Seção 8), onde esta revisão é citada juntamente com o algoritmo da primeira etapa do SSA). Outra fonte da filial russa foi o jornal (Buchstaber, 1994).

Um avanço na teoria da SSA foi feito no livro fundamental (Goliandina, Nekrutkin, & Zhigljavsky, 2001), onde a teoria é apresentada juntamente com exemplos. O próximo livro é (Goliandina & Zhigljavsky, 2013) na série Briefs in Statistics; contém uma breve descrição e algumas atualizações de 2001, incluindo a descrição do SSA como um conjunto de filtros. A partir de 2013, uma grande salto foi realizado, quando SSA tornou-se um método para análise de objetos de diferentes dimensões e formas. Além disso, o pacote R Rssa (Korobeynikov, Shlemov, Usevich e Golyandina, 2017) foi desenvolvido com uma implementação muito rápida de SSA para diferentes tipos de objetos. O proposto abordagem estruturada para SSA, suas extensões multivariadas (MSSA e 2D-SSA) juntamente com algoritmos e descrição da implementação em Rssa estão contidos no livro recente (Goliandina, Korobeynikov, & Zhigljavsky, 2018).

Três monografias mencionadas de Golyandina e coautores cobrem uma gama muito ampla de problemas resolvidos pela SSA; no entanto, eles apenas discutem brevemente as aplicações práticas do SSA para processos. Ao mesmo tempo, as aplicações de SSA para séries temporais estacionárias foram desenvolvidas por a equipe da UCLA (a partir de (Yiou, Sornette, & Ghil, 2000)), principalmente para dados climáticos. Algumas aplicações práticas, em particular, em economia e biomedicina, são consideradas no obras de H.Hassani, S.Sanei e seus coautores (ver, por exemplo, o livro (Sanei & Hassani, 2015) e a revisão (Hassani & Thomakos, 2010)). Um ramo separado está relacionado a problemas do mundo real em geofísica, onde devem ser extraídos traços em forma de linhas retas; um processamento preliminar é realizado pela transformada discreta de Fourier das linhas da imagem e, em seguida, o Complex SSA é aplicado aos coeficientes de Fourier (Trickett, 2003; Oropeza, 2010). Esses ramos parecem estar se desenvolvendo um tanto independente; portanto, seria muito útil enriquecer uns aos outros.

1.2 Esboço do algoritmo

O algoritmo SSA consiste em dois estágios. A primeira etapa é chamada de Decomposição, onde o objeto estudado (por exemplo, uma série temporal) é transformado em uma matriz de trajetória (uma matriz de Hankel) e então a decomposição de valor singular é aplicada à matriz de trajetória para obter uma decomposição em uma matriz elementar de posto um componentes. A segunda etapa, que é chamada de Reconstrução, cria componentes de matrizes agrupadas de maneira inteligente e transforma a decomposição da matriz agrupada de volta em uma decomposição do objeto inicial pela chamada média diagonal.

Como a ideia de considerar as subséries de uma série temporal como observações diferentes e, em seguida, aplicar análise de componentes principais (PCA) ou transformada de Karhunen-Loève (KLT) à amostra obtida é simples, o estágio de decomposição de SSA pode ser encontrado em muitos artigos. ; é difícil detectar qual foi o primeiro papel. Por exemplo, os artigos mencionados acima (Belonin et al., 1971; Broomhead & King, 1986a; Fraedrich, 1986; Vautard & Ghil, 1989) contêm apenas a descrição do estágio de decomposição. Também podemos citar (Basilevsky & Hum, 1979) e (Efimov & Galaktionov, 1983) como referências relacionadas à primeira etapa da ASS. A 'média diagonal' do segundo estágio é usada em (Colebrook, 1978; Tufts, Kumaresan, & KIRSTEINS, 1982; Cadzow, 1988; Ghil & Vautard, 1991; Buchstaber, 1994). Hoje em dia, a fase de Reconstrução é considerada uma parte essencial da SSA.

Outra origem do SSA remonta às propriedades das matrizes de Hankel (Gantmacher, 1959). Algumas vezes, uma origem de SSA é extraída de (de Prony, 1795), onde se considerou a modelagem do sinal na forma de uma soma de séries exponenciais; esta origem está relacionada ao problema de estimação de parâmetros (frequência).

Sugerimos chamar o método 'SSA' se ambos os estágios de Decomposição e Reconstrução estiverem envolvidos. Os métodos baseados apenas no estágio de Decomposição são chamados de métodos baseados em subespaço. Embora muitos métodos baseados em subespaço tenham sido desenvolvidos antes do SSA, esses métodos podem ser chamados de relacionados ao SSA.

1.3 Motivação

Dependendo da área de aplicação, são considerados diferentes pontos de vista sobre os mesmos algoritmos, a escolha dos parâmetros e a metodologia como um todo. O objetivo do presente artigo é descrever e comparar diferentes pontos de vista sobre o SSA e suas modificações e extensões para dar a pessoas de diferentes comunidades científicas a possibilidade de conhecer aspectos potencialmente novos do método.

1.4 Estrutura

A seção 2 contém a descrição da análise de espectro singular a partir de seu algoritmo e ideias básicas. Discutimos brevemente o SSA de diferentes pontos de vista para mostrar que as origens do SSA têm conexões com uma ampla gama de métodos conhecidos. Casos particulares e extensões de SSA são descritos. A ênfase é colocada nas diferenças nas descrições dos métodos relacionados à SSA em vários artigos. A seção 3 contém problemas específicos de análise de séries temporais e sua solução por SSA em comparação com outros métodos. Em várias subseções da Seção 3 tocamos nas mesmas habilidades da SSA que na Seção 2; no entanto, olhamos para essas habilidades de diferentes ângulos. Para minimizar as interseções entre essas seções, fornecemos referências cruzadas. Na Seção 4, descrevemos brevemente as implementações do SSA, pois na era do big data, a implementação efetiva de um método é um ponto chave para seu uso em problemas do mundo real. A seção 5 conclui o artigo.

Este artigo de revisão é apoiado pela monografia (Golyandina et al., 2018), que descreve e organiza os algoritmos de métodos relacionados a SSA e sua implementação no pacote R Rssa (Korobeynikov et al., 2017) com vários exemplos. A monografia contém a descrição

de diferentes aspectos da própria SSA; neste artigo, colocamos ênfase em diferentes pontos de vista externos sobre SSA e sua conexão com outros métodos. Para evitar a repetição de figuras e dar aos leitores a possibilidade conveniente de ver as imagens ilustrativas, colocamos em notas de rodapé os links para os exemplos do site complementar <https://ssa-with-r-book.github.io> ao livro (Goliandina et al., 2018).

1.5 Estrutura detalhada

1.5.1 Uma revisão geral do SSA (Seção 2)

1. Séries temporais e imagens digitais: problemas comuns (Seção 2.1)

2. Análise de espectro singular (Seção 2.2)

- Uma ideia de SSA
- Algoritmo SSA básico
- Uma vista da transformação de Karhunen-Loève
- Uma visão de processos estacionários • Uma visão de sistemas dinâmicos • Uma visão de aproximação estruturada de baixo escalão

3. Decomposição (Seção 2.3)

- Separabilidade
- Como identificar os componentes SVD

4. Filtragem (Seção 2.4)

5. Modelagem (Seção 2.5)

- Abordagem baseada no subespaço • Extração de sinal por meio de projeções

6. Escolha dos parâmetros (Seção 2.6)

7. Estudos teóricos (Seção 2.7)

8. Esquema geral de decomposições SSA (Seção 2.8)

9. Extensões multivariadas/multidimensionais (Seção 2.9)

- SSA multivariado
- SSA bidimensional
- SSA moldado • SSA complexo

10. Modificações da etapa SVD (Seção 2.10)

- Uso de informações a priori
- Decomposições refinadas de sinais
- Tensor SSA

1.5.2 SSA e problemas diferentes (Seção 3)

1. SSA e não linearidade. O SSA é um método linear? (Seção 3.1)
2. SSA e processos autorregressivos (Seção 3.2)
3. SSA e estimativa de parâmetros (Seção 3.3)
4. SSA e aproximação estruturada de baixo escalão (Seção 3.4)
5. SSA e regressão linear (Seção 3.5)
6. SSA e filtragem (Seção 3.6)
7. SSA e análise de componentes independentes (Seção 3.7)
8. SSA e decomposição em modo empírico, transformada discreta de Fourier e trans wavelet discreta formulário (Seção 3.8)
9. SSA: método e modelagem sem modelo (Seção 3.9)
10. SSA: previsão e preenchimento de lacunas (Seção 3.10)
11. SSA e detecção de sinal: Monte Carlo SSA (Seção 3.11)
12. SSA e valores atípicos (Seção 3.12)
13. SSA e informações a priori/a posteriori (Seção 3.13)
14. SSA: identificação automática e processamento em lote (Seção 3.14)
15. SSA e aprendizado de máquina (Seção 3.15)

1.5.3 Implementação do SSA (Seção 4)

1. Software e implementação rápida (Seção 4.1)
2. Exemplo de cálculos no pacote R Rssa (Seção 4.2)

2 Uma revisão geral da SSA

2.1 Séries temporais e imagens digitais: problemas comuns

2.1.1 Decomposição

Observemos $X = (x_1, \dots, x_N)$, onde $X = T + P + N$, T é uma tendência, P contém oscilações regulares e N é ruído. O problema comum é construir uma decomposição $X = T_e + P_e + N_e$, veja a Fig. 1, que permite estimar a tendência T , todo o sinal $S = T + P$, ou componentes periódicos P (P pode consistir em componentes periódicos com diferentes períodos fundamentais). Uma vez que o sinal é estimado e sua estrutura é detectada, diferentes métodos baseados em sinais, como a previsão, podem ser aplicados.

Se a série temporal não contiver um sinal, o problema de filtragem pode ser declarado; este problema é reduzido novamente a construir a decomposição, em composições de baixa e alta frequência entes.

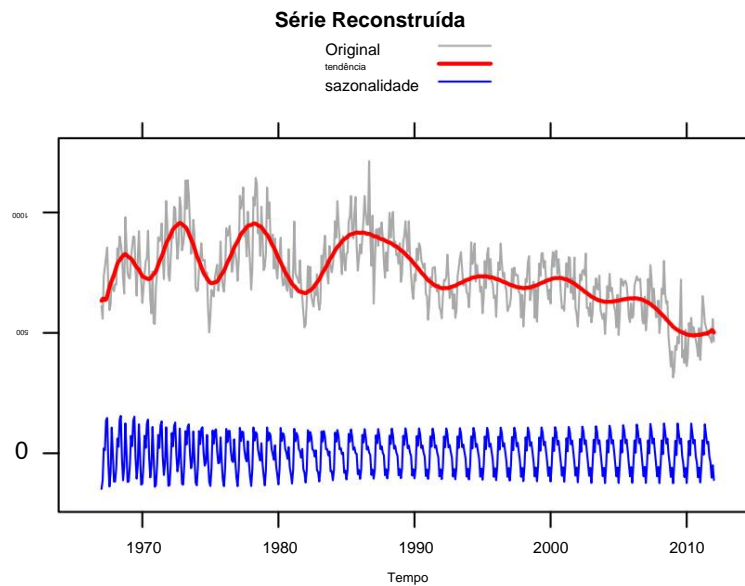


Figura 1: 'MotorVehicle', vendas mensais: Decomposição.

Muitos problemas no processamento de imagens digitais são semelhantes aos problemas apresentados para séries temporais.

Deixar

$$X = \begin{matrix} \ddot{y} & x_{1,1} & \dots & x_{1,N_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ddot{y} & x_{N_1,1} & \dots & x_{N_1,N_2} \end{matrix} \ddot{y}$$

ser uma imagem digital, que é modelada como uma decomposição $X = T + P + N$ em um padrão, regular oscilações (por exemplo, uma textura) e ruído. Em seguida, surge novamente o problema de estimar os componentes de decomposição. Veja a Fig. 2, que demonstra a extração de um padrão (que é obtido após a remoção das oscilações regulares).

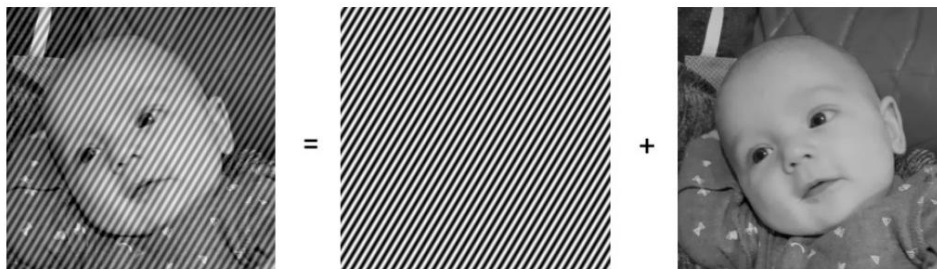


Figura 2: 'Maya': Decomposição.

Observe que 'imagens digitais' é um nome comum para dados 2D, pois uma das dimensões pode seja temporal. O problema de decomposição para dados multidimensionais também é importante em dimensões; essas dimensões podem novamente ser de natureza diferente. Por exemplo, pode-se considerar tanto Dados espaciais 3D e dados 2D com a terceira dimensão temporal como dados 3D; e assim por diante. Vamos chamar dados com n dimensões nD dados.

2.1.2 Outras séries temporais/problemas de imagem

Os resultados da decomposição (em particular, da extração de sinal) permitem resolver muitos problemas para objetos com diferentes dimensões e formas; entre esses problemas estão

- extração de tendência/tendência;
- alisamento/filtragem;
- redução de ruído;
- extração de componentes periódicos (incluindo ajuste sazonal);
- estimativa de frequência;
- construção de modelo e estimação de parâmetros;
- previsão/previsão (do sinal extraído);
- imputação de dados ausentes;
- detecção de ponto de mudança.

Assim, a decomposição serve como ponto de partida para resolver muitos problemas importantes.

2.2 Análise de espectro singular

No artigo, consideraremos a aplicação da análise de espectro singular (SSA) para a maioria dos problemas mencionados acima. O nome 'SSA' pode ser usado tanto em sentido estrito como amplo. Pode-se falar sobre SSA em sentido estrito, significando o algoritmo de decomposição de um objeto em uma soma de componentes identificáveis. SSA em um sentido amplo consiste em métodos que usam os resultados da decomposição SSA. Vamos começar com a descrição do SSA como um método de decomposição.

2.2.1 Uma ideia de SSA: criar amostras de estrutura

Em dados multivariados, existem muitas observações, que são amostradas a partir da mesma distribuição de probabilidade. Em dados como séries temporais ou imagens digitais, temos apenas um objeto e, portanto, precisamos criar muitas amostras da estrutura do objeto para detectá-lo. Isso pode ser feito por um procedimento de movimentação.

Começamos pelas séries temporais. Denote $X = (x_1, \dots, x_N)$ a série temporal de comprimento N e escolha um comprimento de janela L , $1 < L < N$; então considere $K = N - L + 1$ vetores construindo a partir da subsérie móvel de comprimento L : $X_1 = (x_1, \dots, x_L)^T$, $X_2 = (x_2, \dots, x_{L+1})^T, \dots$ (o procedimento parece que uma lagarta está se movendo; esta etapa levou a um dos nomes de método 'Caterpillar').

Para imagens digitais

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N_1,1} & \dots & x_{N_1,N_2} \end{pmatrix} \quad \tilde{y}$$

o tamanho das janelas 2D em movimento é $L_1 \times L_2$; o procedimento de movimentação é realizado em duas direções, da esquerda para a direita e de cima para baixo:

$$X_{k,m}^{(L_1,L_2)} = \begin{pmatrix} x_{k,m} & \dots & x_{k,m+L_2-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k+L_1-1,m} & \dots & x_{k+L_1-1,m+L_2-1} \end{pmatrix} \quad \tilde{y}$$

$k = 1, \dots, K_1$ e $m = 1, \dots, K_2$, onde $K_1 = N_1 - L_1 + 1$, $K_2 = N_2 - L_2 + 1$

2.2.2 Uma ideia de SSA: encontrar uma estrutura comum usando o SVD

Usando o conjunto obtido de subobjetos do objeto dado, devemos encontrar uma estrutura comum. Existe um método estatístico padrão para isso, a análise de componentes principais (PCA), que é aplicada aos dados em forma de matriz. Assim, os subobjetos em movimento são transformados em vetores, que são então empilhados em uma matriz chamada matriz de trajetória.

Observe que o PCA é aplicado a matrizes, cujas linhas e colunas têm natureza diferente, pois se as linhas correspondem a variáveis, as colunas contêm observações. No caso de SSA, as linhas e colunas da matriz de trajetória têm tipicamente a mesma estrutura; para séries temporais, tanto as linhas quanto as colunas são subséries da mesma série temporal. Enquanto o PCA consiste em centralizar ou padronizar as variáveis (as linhas da matriz de dados) e depois aplicar o SVD na matriz transformada, o SSA geralmente omite a centralização/padronização. A versão do SSA que aplica diretamente o SVD à matriz de trajetória é chamada de Basic SSA.

Devido às propriedades de aproximação, o SVD permite extrair o sinal (ou seja, remover ruído). Devido à biortogonalidade do SVD, é possível a separação dos componentes do sinal (por exemplo, componentes de tendência e periódicos) uns dos outros. (Encaminhamos o leitor para (Golyandina et al., 2001, Capítulo 4), onde são reunidas as propriedades do SVD, que são úteis para a compreensão da SSA.)

Para a separação dos componentes do sinal uns dos outros, as propriedades de aproximação não são necessárias. Portanto, outras técnicas (em vez do SVD) podem ser aplicadas após a extração do sinal. Pode-se ver uma analogia com a análise fatorial de dados multivariados, onde as variáveis latentes devem ser extraídas; primeiro, são encontrados vários fatores iniciais (por exemplo, usando PCA) e, em seguida, a rotação dessas variáveis é usada para melhor interpretabilidade. Os fatores rotacionados não possuem propriedades de aproximação.

2.2.3 Algoritmo SSA básico

Aqui apresentamos o algoritmo para decomposição SSA de séries temporais. A forma geral do algoritmo é dada em (Golyandina et al., 2018) e na Seção 2.8.

Seja $X = (x_1, \dots, x_N)$ uma série temporal de comprimento N .

Estágio de decomposição (Parâmetro: comprimento da janela L ; $1 < L < N$)

1. Incorporação

A matriz de trajetória é construída por meio do operador de incorporação T , que mapeia um série temporal em uma matriz $L \times K$ Hankel ($K = N - L + 1$) como segue:

$$T(X) = X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. Decomposição de Valor Singular (SVD)

O SVD é dado por $X = P \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{pmatrix} \bar{U} \bar{V}^T$, onde $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^d$ e $\{\bar{V}_m\}_{m=1}^d$ são ortonormais sistemas de vetores singulares à esquerda e à direita de X , respectivamente; $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_d > 0$ são valores singulares quadrados.

Etapa de reconstrução (Parâmetro: forma de agrupamento $\{1, \dots, d\} = \mathcal{S}_c$ $j=1 \dots l_j$)

1. Agrupamento

onde $X_l = P$ Os componentes SVD são agrupados: $X = X_{l1} + \dots + X_{lc}$, $\tilde{y} \tilde{y}_m^T U_m V_m^T$

2. Média diagonal

Cada matriz X_l é transferida para a matriz de Hankel $X_{e,l}$ mais próxima por hankelização e então $X_{e,l} X_{e,l}^T$
 $= T_{e,l} \tilde{y}_1 (X_{e,l})$
 é transformado em uma série temporal como

Assim, a saída do algoritmo SSA é a decomposição $X = X_{e,l1} + \dots + X_{e,lc}$, que corresponde à estrutura da série temporal original X se um agrupamento adequado foi usado.

2.2.4 Comentários ao SSA Básico

Decomposição de Valor Singular (SVD) O SVD $X = P \sum_{m=1}^d \tilde{y} \tilde{y}_m^T U_m V_m^T$ é o biortogonal

decomposição em uma soma de matrizes de posto um, $d = \text{posto } X$. Pelo teorema de Eckart-Young (Eckart & Young, 1936), fornece a melhor aproximação de posto baixo na norma de Frobenius.

O cálculo do SVD pode ser reduzido para encontrar autovetores $\{U_m\}$ e autovalores da matriz XX^T , que às vezes é chamada de matriz de covariância (equação (5.3)). Encontrar $\{\tilde{y}_m\}$ não é aplicado; $V_m = XU_m / \tilde{y}_m$. A coleção $\{\tilde{y}_m\}$ é chamada de matriz de variância (equação (5.3)).

Se a matriz de trajetória X for considerada como uma matriz de dados (transposta) com K casos e L variáveis, o SVD de X está intimamente relacionado à análise de componentes principais. Se as linhas de X estiverem centralizadas, o SVD corresponde exatamente ao PCA. Portanto, de acordo com a terminologia estatística, V_m e $\tilde{y} \tilde{y}_m^T$ podem ser chamados de escores fatoriais e componentes principais, respectivamente.

Agrupamento Seja $X = X(1) + X(2)$ e, portanto, a seguinte igualdade seja válida para as matrizes de trajetória: $X = X(1) + X(2)$. No caso, quando existe um agrupamento $\{1, \dots, d\} = I_1 \dot{\cup} I_2$ tal que $X(1) = X_{l1}$ e $X(2) = X_{l2}$ (isso é chamado de 'separabilidade', veja a Seção 2.3.1), os autovetores $\{U_m\}_{m \in I_j}$ formam uma base de $\text{colspace}(X(j))$; portanto, U_m para $m \in I_j$ repete o comportamento de $X(j)$ (lembre-se que as colunas de $X(j)$ são subséries de $X(j)$). Assim, podemos dizer que um autovetor U_m representa um componente que produz esse comportamento. Assim, podemos identificar um componente que produz esse comportamento no grupo de tendência; em seguida, identifique as oscilações regulares e reúna-as no grupo de periodicidade, e assim por diante.

O agrupamento elementar, quando cada grupo consiste em um componente SVD (um eigentriplo), produz as chamadas séries temporais reconstruídas elementares. Como o agrupamento e a média diagonal são operações lineares, não importa qual operação é executada primeiro, o agrupamento e depois a média diagonal ou vice-versa. Assim, a inspeção de séries temporais reconstruídas elementares é útil para realizar o agrupamento, uma vez que o agrupamento é simplesmente a soma dessas séries temporais.

Existe um caso particular, quando um sinal ruidoso é observado e o sinal deve ser extraído. Formalmente, este é o caso de dois grupos, sinal e ruído. Como precisamos apenas do grupo de sinal, o agrupamento é reduzido à escolha de um grupo de sinal I . Devido às propriedades de aproximação do SVD, o grupo I corresponde ao sinal geralmente composto por r componentes principais, ou seja, $I = \{1, \dots, r\}$. Assim, a forma de agrupamento se reduz à escolha de r .

2.2.5 Uma vista da transformação de Karhunen-Loève

Para um processo aleatório $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$, a estrutura está contida na função de autocovariância $K(s, t) = E(\tilde{y}(s) \tilde{y}(t))$; e a transformada de Karhunen-Loève (KLT) baseada na decomposição própria de $K(t, s)$ é considerada para expressar essa estrutura na forma de uma decomposição.

Originalmente, a decomposição de Karhunen-Loève de $\tilde{y}(t)$ é a decomposição em uma soma infinita de ruídos brancos \tilde{y}_k , $k = 1, 2, \dots$, função de covariância $\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{y}_k(t) \tilde{y}_k$. Note também que a função de covariância $K(t, s)$ de uma série temporal finita, o KLT de $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$ de fato coincide com o PCA da variável aleatória multivariada $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)^T$.

Assim, a transformada de Karhunen-Loève é a decomposição em uma soma finita de ruídos brancos \tilde{y}_k , $k = 1, \dots, N$, com coeficientes

obtido dos autovetores U_k da matriz variância-covariância de \tilde{y} : $\tilde{y} = \sum_{k=1}^N U_k \tilde{y}_k$. Para uma série temporal (x_1, \dots, x_N) de comprimento N , que pode ser considerada como uma realização da amostra \tilde{y} da série temporal construído centralizada ou, alternativamente, a centralização for aplicada às linhas da matriz de trajetória X , então XX^T pode ser considerado como uma estimativa da matriz de (auto)covariância.

A questão é como construir a versão de amostra de \tilde{y}_k , $k = 1, \dots, N$. No PCA, temos muitas amostras de $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)^T$. Assim, a versão amostral de \tilde{y}_k é o k -ésimo componente principal dos dados multivariados. Para séries temporais, temos apenas uma realização de comprimento N . Construir a matriz de trajetória X é a maneira de criar amostras $K = N \times L + 1$ L -dimensionais. Então $\tilde{y}_m = \sum_{k=1}^N U_k \tilde{y}_k$ pode ser considerado como a versão amostral de \tilde{y}_m , $m = 1, \dots, \min(L, K)$.

Assim, até os pressupostos acima, o KLT empírico corresponde formalmente ao estágio de decomposição do algoritmo SSA (Basilevsky & Hum, 1979). As pessoas, que estudaram a teoria dos processos aleatórios e depois olharam para o algoritmo SSA, às vezes dizem que não é nada novo, apenas o KLT. No entanto, observe que o estágio de reconstrução não está incluído na decomposição KLT. Além disso, o ponto de vista sobre SSA a partir da teoria de processos aleatórios deixa uma marca na metodologia de aplicações de SSA (ver, por exemplo, (Khan & Poskitt, 2013)).

2.2.6 Uma visão de processos estacionários

Pesquisadores que lidam com processos aleatórios estacionários olham para SSA de uma maneira diferente. Para processos (fracamente) estacionários, a função de autocovariância $K(s, t)$ depende de $|t - s|$. Portanto, uma das principais características de um processo aleatório estacionário $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$, é a função de autocovariância variável. Para tempo discreto e uma sequência $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$, isso significa que a matriz de autocovariância $N \times N$ $\{E(\tilde{y}_i - \mu)(\tilde{y}_j - \mu)\}$ é Toeplitz.

No entanto, na prática, não podemos estimar com precisão as covariâncias com grandes defasagens, pois há apenas um par de observações com defasagem $N - 1$, dois pares de observações com defasagem $N - 2$ e assim por diante. No SSA, as autocovariâncias são estimadas até a defasagem L ; então não menores que $K = N - L + 1$ pares de observações podem ser usados para estimar essas autocovariâncias. Como as autocovariâncias são proporcionais às autocorrelações para processos estacionários, não importa qual deles é considerado.

No Basic SSA, a matriz lag-covariance $L \times L$ tem a forma $C = XX^T/K$, que é próxima de uma matriz Toeplitz se a série temporal for estacionária (assumimos que a série temporal é centrada); no entanto, esta não é exatamente uma matriz de Toeplitz. No Toeplitz SSA, a matriz lag-covariance é estimada de forma a obter exatamente uma matriz Toeplitz. A estimativa convencional $C_e = \{c_{ij}\}$ do

matriz de autocovariância é $c_{ij} = \frac{1}{N - |j - i|} \sum_{k=1}^{N - |j - i|} x_k x_{k + |j - i|}$. Tanto no Basic quanto no Toeplitz SSA, o passo de decomposição pode ser expresso como $X = P \Lambda^m P^m(XTP^m)^T$. No Basic SSA, $P_m = U_m$ são os

autovetores de C , enquanto em Toeplitz SSA, P_m são os autovetores de C_e .

Como a intenção do Toeplitz SSA é uma melhor estimativa das autocovariâncias, geralmente são escolhidos comprimentos de janela suficientemente pequenos para obter estimativas estáveis das autocorrelações, que devem ser estimadas para defasagens que não sejam maiores que o comprimento de janela escolhido.

Observe que em (Vautard & Ghil, 1989), a versão Toeplitz é chamada de VG de acordo com os nomes do autor, enquanto a versão básica com a decomposição SVD é chamada de BK, pois foi sugerida em (Broomhead & King, 1986a).

É importante notar que a única forma do passo de decomposição que é invariante em relação à transposição da matriz de trajetória (que corresponde à mudança $L = K$ e $K^0 = L$) é o SVD. Em particular, para Toeplitz SSA as decomposições para L , K e $L K^0 = L$ são diferentes. $^0 = K$,

Parece que essa visão de processos estacionários limita a aplicação do SSA, uma vez que as estimativas de Toeplitz de matrizes de autocorrelação têm sentido apenas para analisar séries temporais estacionárias, enquanto a gama de problemas resolvidos pelo SSA é muito mais ampla. Como a versão VG (Toeplitz) foi proposta para análise de dados climáticos como opção padrão, essa versão ainda é considerada a principal em muitas aplicações; provavelmente, às vezes a versão Toeplitz é usada apenas por hábito. No entanto, deve-se notar que a versão Toeplitz do SSA está ligada à estimativa espectral; nesse caso, esta versão é apropriada.

2.2.7 Uma visão de sistemas dinâmicos

A origem do SSA convencionalmente se refere aos trabalhos dedicados a sistemas dinâmicos (Broomhead & King, 1986a) e (Fraedrich, 1986), onde o problema é baseado no teorema de incorporação de Takens e o método é chamado de análise de sistema singular.

Parece que a conexão entre SSA e o teorema de Takens é principalmente histórica. Portanto, omitimos a descrição dessa abordagem de 'embedologia'. Mais detalhes podem ser encontrados em (Sauer, Yorke, & Casdagli, 1991). Uma discussão sobre a confiabilidade da abordagem Broomhead&King como método para estimar a dimensão embedding pode ser encontrada em (Mees, Rapp, & Jennings, 1987) e nos comentários subsequentes. No entanto, a terminologia em SSA é parcialmente retirada da teoria dos sistemas dinâmicos. A abordagem de sistema dinâmico introduziu o termo 'incorporação' para a primeira etapa do algoritmo SSA; também o termo 'matriz de trajetória' é devido à interpretação de colunas da matriz de trajetória como uma sequência de vetores (uma trajetória) em um espaço multidimensional.

2.2.8 Uma visão da aproximação estruturada de baixa classificação (SLRA)

É bem conhecido que matrizes de Hankel deficientes em posto correspondem a séries temporais de uma certa estrutura, veja, por exemplo, (Gantmacher, 1959). Um caso particular do algoritmo SSA, quando a extração do sinal é de interesse (Seção 2.5.2), praticamente coincide com uma etapa do algoritmo iterativo sugerido em (Cadzow, 1988) e posteriormente denominado como iterações de Cadzow.

A matriz chamada 'trajetória' em SSA, foi chamada de 'matriz aprimorada' no artigo de Cadzow e artigos subsequentes (por exemplo, (Hua, 1992) constrói a matriz aprimorada no caso 2D para estimativa de frequência 2D).

Mais detalhes relacionados ao SLRA podem ser encontrados na Seção 3.4.

2.3 Decomposição

) Aqui consideramos o problema de decomposição de séries temporais em uma soma de componentes identificáveis como tendência, componentes periódicos e ruído. A primeira questão é se o SSA permite encontrar tal decomposição; então, se a resposta for 'sim', o problema é: como identificar o tempo

componentes da série com a ajuda de informações sobre os componentes SVD. Além disso, surge a questão sobre a escolha do comprimento da janela L , que leva a uma melhor decomposição. Começamos com a primeira pergunta.

2.3.1 Separabilidade

A separabilidade (aproximada) dos componentes da série temporal que são de interesse do estudo é necessária para realizar um agrupamento dos componentes SVD para extrair (aproximadamente) esses componentes.

Seja $X = X(1) + X(2)$ uma série temporal observada e $X = X(1) + X(2)$ a igualdade correspondente para suas matrizes de trajetória. A etapa SVD do Basic SSA fornece uma expansão $X = X_1 + \dots + X_d = P_d$. Separabilidade significa que o conjunto de autotipos $\{\lambda_j\}_{j=1}^d$ de $X(1)$ e $X(2)$ não se sobrepõem. Se isso for verdade, o agrupamento que separa as séries temporais $X(1)$ e $X(2)$ existe e é suficiente para identificar os autotipos correspondentes. Quando a decomposição da série é fixa, a original de média diagonal

Existem duas versões de separabilidade relacionadas à não exclusividade do SVD que é causada por vários autovalores. Separabilidade fraca significa que existe uma decomposição SVD da matriz de trajetória X , que permite agrupar seus componentes e, assim, reunir $X(1)$ e $X(2)$.

Separabilidade forte significa que qualquer SVD permite o agrupamento adequado. Na prática, é necessário ter a separabilidade forte, uma vez que o método numérico usado constrói alguma decomposição de valor singular e, portanto, a chance de coincidir com a separativa está desaparecendo na ausência de separabilidade forte.

Proposição 1 Seja L fixo. Duas séries temporais $X(1)$ e $X(2)$ são fracamente separáveis, se seus espaços de trajetória de coluna são ortogonais e o mesmo é válido para seus espaços de trajetória de linha, ou seja, $(X(1))^T X(2) = 0$ e $X(1) X(2)^T = 0$.

Duas séries temporais $X(1)$ e $X(2)$ são fortemente separáveis, se forem fracamente separáveis e os conjuntos de valores singulares de suas matrizes L -trajetórias são disjuntas, isto é, $\lambda_k \neq \lambda_j$ para quaisquer k e j .

Assim, a condição para separabilidade fraca (aproximada) é a ortogonalidade (aproximada) das subséries de comprimento L e a mesma para subséries de comprimento K . Por exemplo (Golyandina et al., 2001, §6.1), a série temporal $x = A_j \cos(2\pi j n / N + \phi_j)$, $n = 1, \dots, N$, $j = 1, 2$, são assintoticamente fracamente separáveis para qualquer $0 < \phi_1 \neq \phi_2 < 0,5$ quando N tende ao infinito. Para separabilidade fraca exata, a condição de que $L j$ e $K j$ são inteiros deve ser satisfeita. Para uma forte separabilidade, precisamos adicionalmente de $A_1 \neq A_2$, pois é fácil descobrir que $\|X(j)\|_2^2 = A_2^2 j L K / 2$ e, portanto, $\|X(j)\|_2 = A_2 \sqrt{j L K / 2}$, $m = 1, 2$, para $j = 1, 2$.

Exemplos de séries temporais aproximadamente separáveis são: tendência e oscilações; variando lentamente componentes e ruído; sinusóides com diferentes períodos; sazonalidade e ruído.

Teoricamente, a separabilidade aproximada é consequência da separabilidade assintótica como $N \rightarrow \infty$. Portanto, a precisão da decomposição depende da taxa de convergência como $N \rightarrow \infty$. Por exemplo, para separabilidade de ondas senoidais, a taxa de convergência é $C / \min(L, K)$, onde $C \sim 1/|j_1 - j_2|$, veja (Golyandina et al., 2001, Exemplo 6.7). Portanto, para separabilidade fraca de ondas senoidais, a escolha $L \sim N/2$ é recomendada. Além disso, ocorre uma pior separabilidade para ondas senoidais com frequências próximas.

Os fragmentos 2.4.1–2.4.31 de (Golyandina et al., 2018) demonstram o problema da falta de separabilidade fraca para um exemplo artificial e a forma de melhorar a separabilidade por meio de um

¹<https://ssa-with-r-book.github.io/01-chapter2-part1.html#fragment-241-noisy-sum-of-three-sinusoids-iterative-ssa>

modificação do SSA chamado SSA Iterative Oblique (Golyandina et al., 2018, Seção 2.4). O fragmento 2.5.12 mostra o problema da falta de separabilidade forte, também para um exemplo artificial. Um exemplo do mundo real, que explica por que precisamos de separabilidade, pode ser encontrado na Seção 2.3.4.

2.3.2 Como identificar os componentes SVD

A etapa mais sofisticada do SSA é a forma de agrupamento de componentes reconstruídos elementares (RCs). Nesta seção vamos demonstrar como isso pode ser feito de forma interativa.

Vamos enumerar as principais abordagens (ver (Golyandina et al., 2001, Seção 1.6) e o exemplo na Seção 2.3.3):

1. Para construir o grupo de tendências, escolha os eigentriplos com autovetores de variação lenta. O mesmo pode ser feito com base em vetores fatoriais ou componentes reconstruídos elementares.
2. Para extrair a periodicidade com período T , encontre pares de componentes semelhantes a seno/coseno com períodos T/k , $k = 1, \dots, [(T-1)/2]$ e um componente dente de serra, que corresponde ao período 2 se T for par. Os pares de seno/coseno mencionados podem ser detectados em gráficos de dispersão 2D de autovetores sequenciais.
3. Para agrupar os componentes, observe a matriz de correlações ponderadas entre os componentes reconstruídos elementares chamada matriz de correlação w . Os componentes elementares reconstruídos com forte correlação w devem ser colocados no mesmo grupo. Em particular, o ruído produz componentes correlacionados; uma onda senoidal com período maior que 2 produz duas séries temporais reconstruídas elementares correlacionadas com w . Observe que o nome 'correlação' pode ser um pouco ambíguo aqui, pois os vetores não são centralizados; ou seja, a medida chamada w -correlação é, de fato, o cosseno do ângulo entre os vetores.

As propriedades enumeradas podem ser formalizadas para obter métodos de identificação automática. As abordagens para a identificação automática são consideradas na Seção 3.14 com mais detalhes.

Uma tarefa especial é a escolha dos componentes relacionados ao sinal. Para extrair o sinal, devemos escolher alguns dos componentes principais r . Se o sinal for usado para, por exemplo, previsão, r pode ser escolhido pela minimização dos erros de previsão para dados históricos.

2.3.3 Exemplo de identificação e decomposição

Vamos demonstrar como identificar visualmente os componentes do SSA e obter a decomposição do SSA, por meio de um exemplo simples. Nos gráficos de dispersão 1D (Fig. 3), pode-se encontrar um componente de variação lenta (ET 1), enquanto nos gráficos de dispersão 2D (Fig. 4) polígonos regulares dizem sobre pares de componentes de onda senoidal (ET 2-3 para $T = 12$, ET 4-5 para $T = 4$, ET 6-7 para $T = 6$, ET 8-9 para $T = 2,4$ e ET 10-11 para $T = 3$). Nestas figuras, $U_i(k)$ denota a k -ésima coordenada do i -ésimo autovetor obtido na etapa SVD de SSA. Os números de autovetores são indicados nas legendas dos gráficos.

A Fig. 5 com as correlações w representadas fornece um palpite para o agrupamento, uma vez que componentes fortemente correlacionados devem ser incluídos no mesmo grupo (a cor preta mostra correlações próximas a 1; a cor branca corresponde a correlações zero).

A decomposição resultante na tendência, a sazonalidade e o ruído é representada na Fig. 6. exemplo é realizado pelo código dos Fragmentos 2.1.1–2.1.33 de (Golyandina et al., 2018).

²<https://ssa-with-r-book.github.io/01-chapter2-part1.html#fragment-251-separation-of-two-sine-waves-com-amplitudes-iguais>

³<https://ssa-with-r-book.github.io/01-chapter2-part1.html#fragments-211-australian-wines-input-e-212-fort-reconstrução>

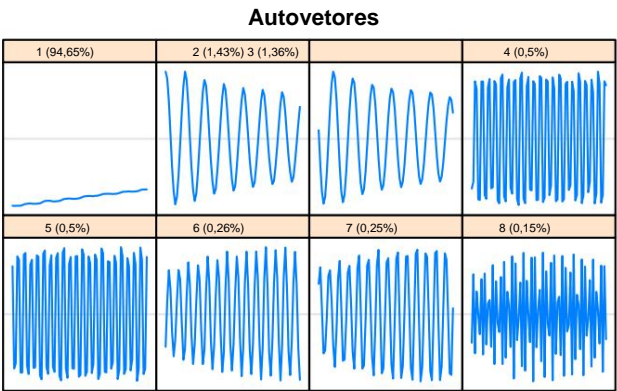


Figura 3: 'Vinhos fortificados', L = 84: Gráficos 1D de autovetores (k, $U_i(k)$), $k = 1, \dots, EU$.

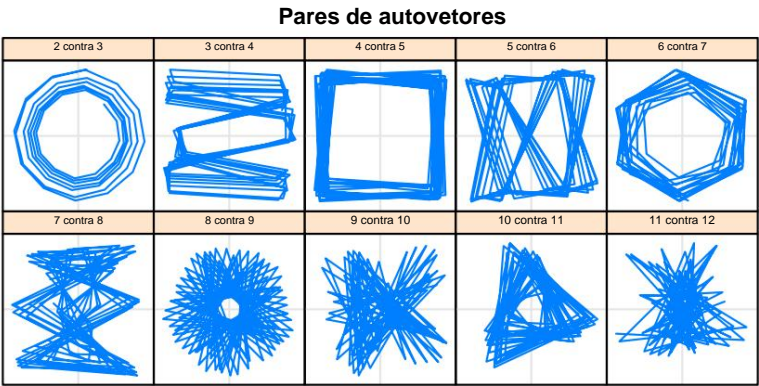


Figura 4: 'Vinhos fortificados', L = 84: Gráficos de dispersão 2D de autovetores ($U_i(k)$, $U_{i+1}(k)$), $k = 1, \dots, EU$.

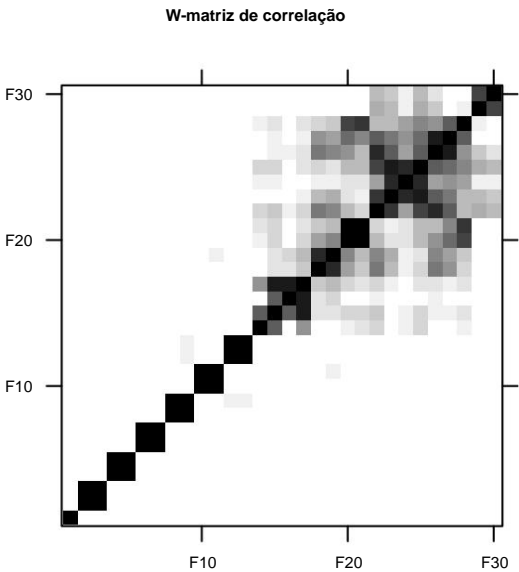


Figura 5: 'Vinhos fortificados', L = 84: w-correlações entre RCs elementares.

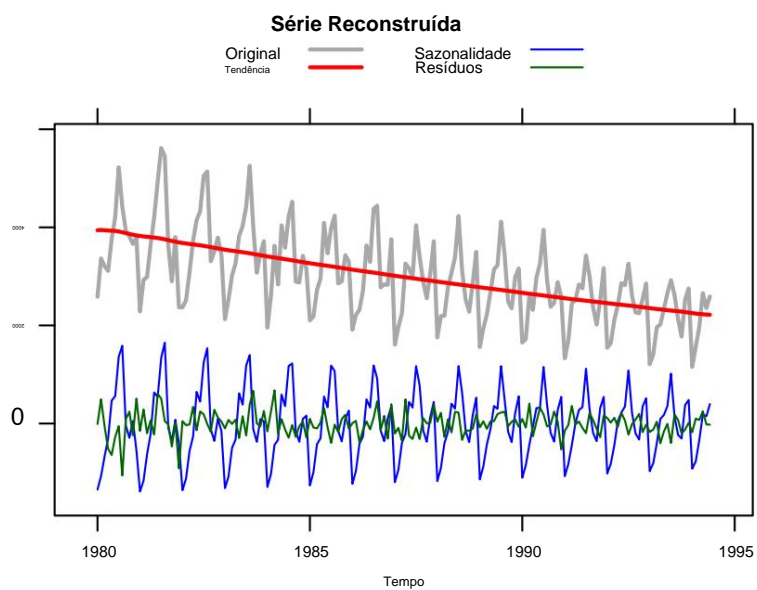


Figura 6: 'Vinhos fortificados', $L = 84$: decomposição para os grupos ET1, ET2-11 e ET12-84.

2.3.4 Exemplo de problemas com separabilidade

Na Seção 2.3.3, consideramos um exemplo com tendência simples e componentes periódicos. Esse exemplo corresponde a uma boa separabilidade entre as componentes de tendência, sazonal e de ruído. No entanto, para tendências de forma complexa que são comuns na análise de séries temporais, há uma grande chance de que os componentes de tendência da decomposição SSA possam ser misturados com componentes sazonais. Abaixo, consideramos uma série temporal curta e demonstramos o problema da falta de separabilidade.

Analise os primeiros cinco anos da série temporal 'MotorVehicle' (Fig. 1). A primeira decomposição é realizada pelo Basic SSA com $L = 24$. A Figura 7 mostra 11 séries reconstruídas elementares, ou seja, as séries temporais, que são obtidas com o agrupamento $\{1, \dots, d\} = S_d i=1\{i\}$. Essas séries temporais são úteis para o procedimento de agrupamento, uma vez que a reconstrução por autotriplos de um grupo l é apenas a soma dos componentes reconstruídos elementares com números de l .

Pode-se ver que a tendência está contida em RC 1 de variação lenta e parcialmente em RC 2, 8 e 9; as últimas séries temporais reconstruídas elementares contêm uma mistura de tendência e sazonalidade. Isso significa que a reconstrução da tendência com ET1 é insuficiente, enquanto que com, digamos, ET1,2 conterá sazonalidade (veja a Figura 8).

Assim, se não houver separabilidade da tendência do residual, é impossível extrair uma tendência precisa. Este exemplo explica porque é muito importante tentar a separabilidade por meios diferentes, como a escolha do comprimento da janela, SSA sequencial, modificações aninhadas de SSA Básico (por exemplo, SSA Oblíqua Iterativa, SSA com derivadas; consulte a Seção 2.10.2).

Vamos aplicar SSA com derivativos ao grupo dos 11 ETs líderes. SSA com derivativos altera os componentes escolhidos (mas não altera sua soma) de forma a alterar sua contribuição e separá-los no caso de falta de separabilidade forte; a ordem dos componentes pode ser alterada e os componentes de tendência são normalmente os últimos no grupo escolhido.

É claramente visto na Figura 9 que os componentes de tendência são RC 9–11. A Figura 10 mostra a tendência exata extraída.

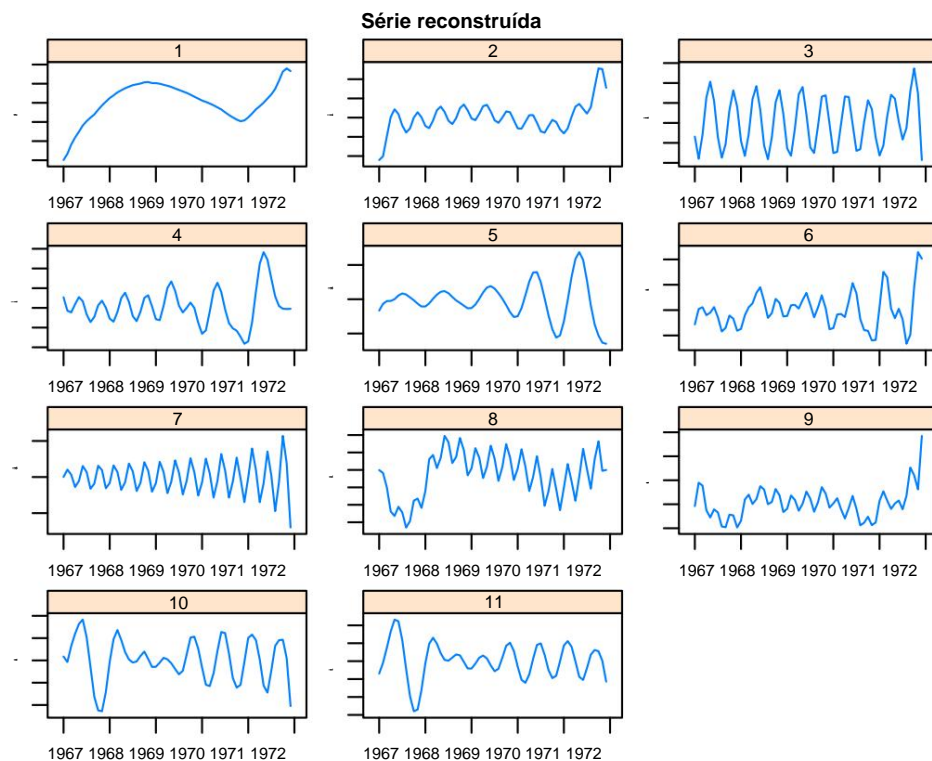


Figura 7: 'Veículo Automotor' (5 anos), SSA com $L = 24$: CRs elementares; má separabilidade.

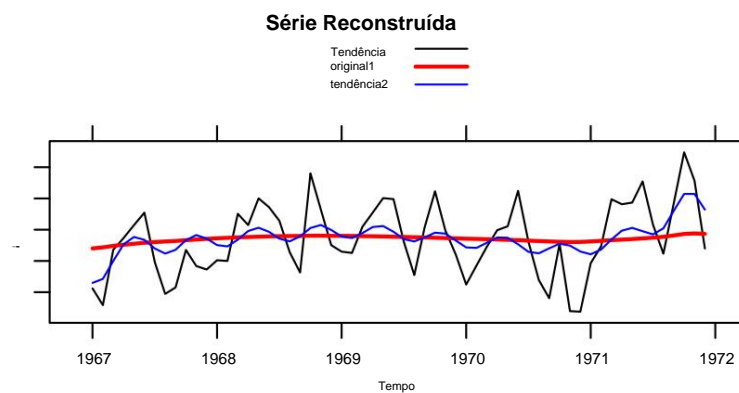


Figura 8: 'MotorVehicle' (5 anos), SSA com $L = 24$: duas reconstruções de tendência, ET1 e ET1-2; má separabilidade.

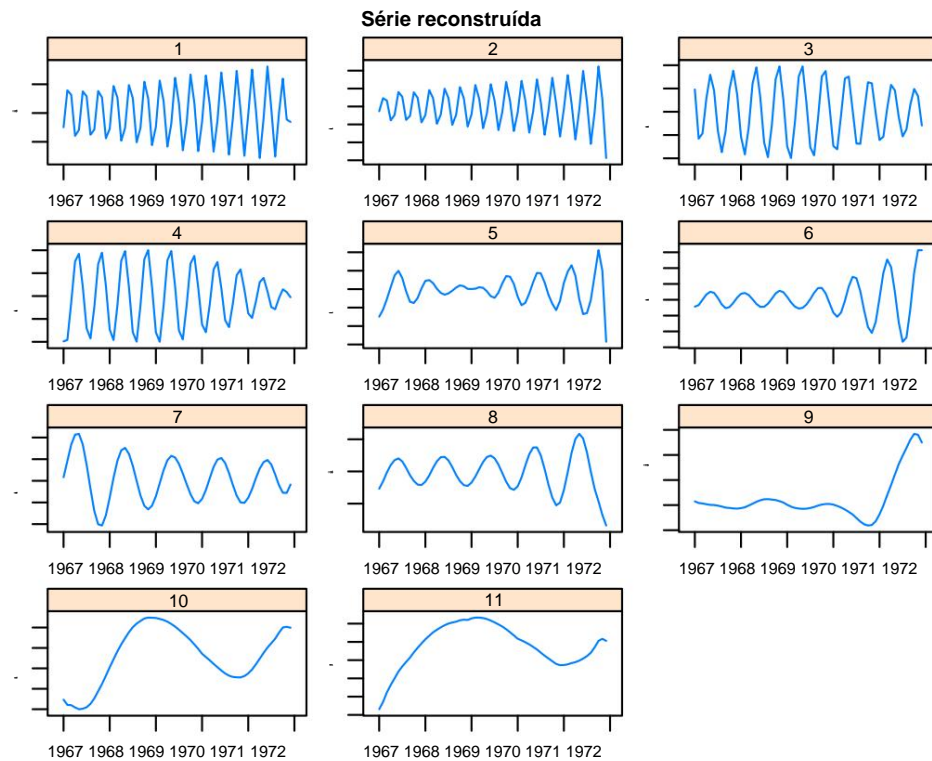


Figura 9: 'Veículo Automotor' (5 anos), DerivSSA com $L = 24$: CRs elementares; boa separabilidade.

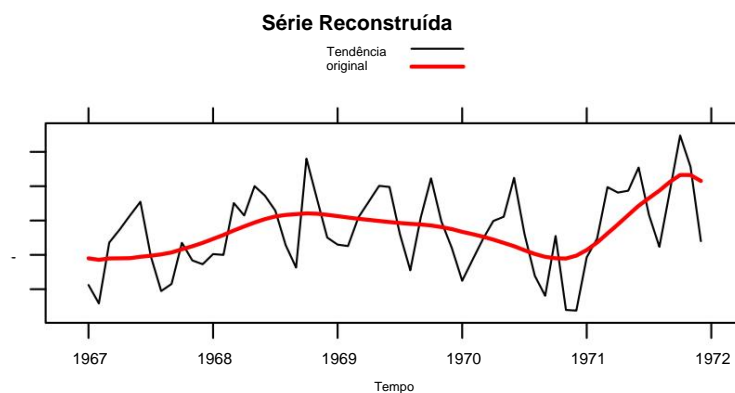


Figura 10: 'MotorVehicle' (5 anos), DerivSSA com $L = 24$: reconstrução de tendência, ET9-11; boa separabilidade.

2.4 Filtragem

Sabe-se que os componentes das séries temporais reconstruídas pelo SSA podem ser considerados como resultado de filtros lineares aplicados à série temporal original (Hansen & Jensen, 1998; Harris & Yan, 2010; Bozzo, Carniel, & Fasino, 2010) e (Golyandina & Zhigljavsky, 2013, Seção 3.9). Certamente, os coeficientes desses filtros têm dependência não linear da série temporal. Portanto, esses filtros são chamados de adaptativos. Essa abordagem é mais natural se L for pequeno, já que uma parte maior dos pontos de cada série temporal reconstruída é obtida pelo mesmo filtro linear (ver Seção 3.6 para detalhes).

2.4.1 Exemplo

O exemplo a seguir mostra que o SSA pode ser considerado do ponto de vista da decomposição em componentes com diferentes faixas de frequência, ou seja, não necessariamente como uma decomposição em tendência, componentes periódicos e ruído. A Fig. 11 mostra a decomposição, que foi obtida agrupando os componentes de acordo com sua faixa de frequência. A Fig. 12 com os periodogramas dos componentes representados juntos confirma isso. Este exemplo é realizado pelo código do Fragmento 2.8.14 (Golyandina et al., 2018).

⁴ <https://ssa-with-r-book.github.io/02-chapter2-part2.html#fragment-281-tree-rings-frequency-decomposition>

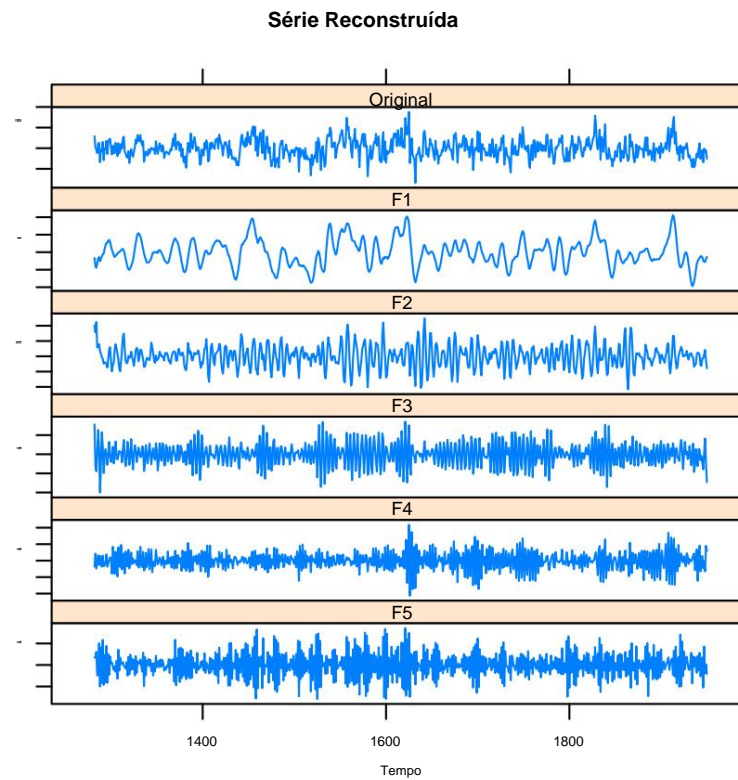


Figura 11: 'Anéis de árvore': Decomposição de frequência.

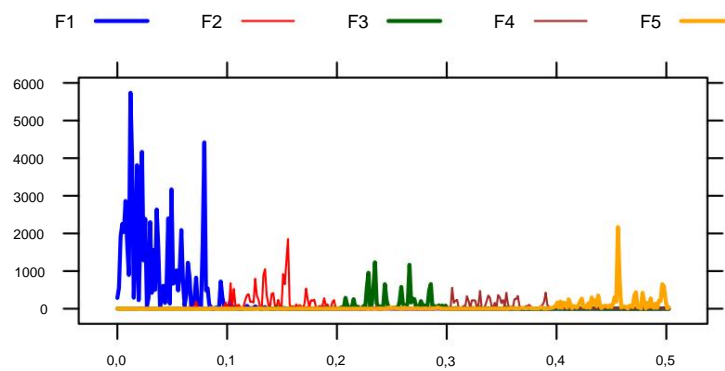


Figura 12: 'Anéis de árvore': Periodogramas das séries temporais reconstituídas.

2.5 Modelagem

Mencionamos que o SSA combina abordagens não paramétricas (sem modelo) e paramétricas; certamente, o último é possível se um modelo paramétrico for estabelecido. Considere o seguinte modelo de sinais que é usado no SSA. Seja $S = (s_1, \dots, s_N)$ uma série (esse modelo precisa comprimento de parâmetro de série temporal $N \geq L + 1$). Considere a matriz de trajetória:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_K \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_L & s_{L+1} & \dots & s_N \end{pmatrix}.$$

Seja r o posto de S .

As diferentes formas do modelo são:

- S é uma matriz de Hankel de posto baixo de posto $r < \min(L, K)$; o modelo pode ser parametrizado por uma base de $\text{colspace}(S)$ ou de sua completação ortogonal. Essas séries temporais são chamadas de séries temporais de posto finito.
- A série temporal é governada por uma relação de recorrência linear (LRR)

$$s_n = \sum_{k=1}^r a_k s_{n-k}, \quad a_0 = 1, \quad n = r+1, \dots \quad (2)$$

Essa série temporal é chamada de série temporal governada por um LRR.

- A série temporal tem uma forma paramétrica explícita de uma soma finita:

$$s_n = \sum_j p_j(n) \exp(\gamma_j n) \sin(2\gamma_j n + \phi_j), \quad (3)$$

onde $p_j(n)$ é um polinômio em n ; $\exp(\gamma_j n) = \gamma_j^n$ para $\gamma_j = e^{i\phi_j}$.

O primeiro modelo é mais geral; no entanto, sob algumas condições não restritivas (por exemplo, se a série temporal tiver comprimento infinito), esses três modelos são equivalentes, veja por exemplo (Hall, 1998, Teorema 3.1.1) e (Golyandina et al., 2001, Seção 5.2).

Vamos descrever como o LRR mínimo (o LRR irreduzível de ordem o mais baixo possível), que governa a série temporal, determina sua forma paramétrica explícita. Uma forma mais conveniente de (3) é a seguinte:

$$s_n = \sum_{m=1}^p \sum_{l=0}^{k_m} x_{ml} \gamma_l^{n-1} \quad (4)$$

(4) onde cada γ_l coincide com $\gamma_j = e^{i2\pi f_j}$ para algum j . Assim, γ_l e x_{ml} são parâmetros complexos (γ_l em (3)).

O polinômio $P_r(\mu) = \mu^r - \sum_{k=1}^r a_k \mu^{r-k}$ é chamado de polinômio característico do LRR (2). As raízes do polinômio característico são chamadas de raízes características do LRR correspondente. As raízes do polinômio característico do LRR mínimo que governa a série temporal determinam os valores dos parâmetros μ_m e k_m em (4) como segue. Seja uma série temporal $S = (s_1, \dots, s_N)$ satisfazer o LRR (2). Considere o polinômio característico do LRR (2) e denote suas diferentes raízes (complexas) por μ_1, \dots, μ_p , onde $p \leq r$. Todas essas raízes são diferentes de zero como $a_0 = 1$ com k_m sendo a multiplicidade da raiz μ_m ($1 \leq m \leq p$, $k_1 + \dots + k_p = r$). Remetemos para um resumo estendido à Seção 3.3 e (Golyandina et al., 2018, Seção 2.1.2.2).

2.5.1 Abordagem baseada em subespaço

A questão é como encontrar a estrutura (a base do colspace(S), os coeficientes do LRR, os parâmetros de s_n) de um sinal S. Dentro do SSA, a resposta é a seguinte. Vamos aplicar SSA e obter a decomposição da matriz de trajetória $S = \sum_{m=1}^r \tilde{y}_m \tilde{U}_m V_m^T$.

Então

- Os vetores U_m , $m = 1, \dots, r$, formam uma base do subespaço de sinal colspace(S).
- A base U_m , $m = 1, \dots, r$, fornece os coeficientes a_k no LRR $s_n = \sum_{k=1}^L a_k s_{n-k}$, o vetor U_m com o último elemento $n = r + 1, \dots$. Denote \tilde{y}_m a última coordenada de U_m , $U_m \tilde{y}_m R = \tilde{y}_m$ os elementos do vetor \tilde{y}_m na 2ª coordenada de R removida, e \tilde{y}_m

$$R = (a_1 \tilde{y}_1, \dots, a_1 \tilde{y}_r)^T = \frac{1}{1 - \tilde{y}_m^2} \sum_{m=1}^r \tilde{y}_m U_m \quad (5)$$

são os coeficientes da norma mínima que governa LRR: $s_n = \sum_{k=1}^L a_k s_{n-k}$ (ver discussão da norma mínima LRR em (Golyandina & Zhigljavsky, 2013, Seção 3.2.3)). Se $L = r + 1$, (5) produz o LRR mínimo, que é único. Como os LRRs estão diretamente relacionados à previsão, consulte também a Seção 3.10.

- A base U_m , $m = 1, \dots, r$, determinaram os valores de \tilde{y}_j e \tilde{y}_j em (3). Considere o sinal na forma de valor complexo $s_n = \sum_{k=1}^L a_k s_{n-k}$ (simplificamos a forma excludente \tilde{y}_m em \tilde{y}_m e \tilde{y}_m em \tilde{y}_m). Aplicando a equação (3) de (Barkhuijsen, de Beer, & van Ormondt, 1987)). Denote $U_r = [U_1 : \dots : U_r]$ e seja U_r a matriz com a última linha removida e U_r a matriz com a primeira linha removida. Então μ_k pode ser encontrado como os autovalores da matriz $U_r^\dagger U_r$, onde \dagger denota pseudo-inversão. Consulte a Seção 3.3 para obter mais detalhes sobre a estimativa de parâmetros.

Isso é chamado de abordagem baseada em subespaço. Pode ser estendido para os casos 2D, 3D, ...; certamente, a teoria nD para $n > 1$ é muito mais complicada do que para o caso unidimensional.

Abordagem baseada em subespaço em problemas do mundo real Em problemas do mundo real observamos $X = S + R$, onde S é o componente estruturado de interesse (por exemplo, um sinal), R é um resíduo (por exemplo, ruído). Suponha que tenhamos uma separabilidade aproximada de S e R. Então

1. Aplique SSA e obtenha o conjunto de U_m , $m = 1, \dots, r$.
2. Identifique os componentes SVD com números $G = \{i_1, \dots, i_r\}$, que estão relacionados a S; isso é possível devido à separabilidade assumida.
3. Tome o conjunto $\{U_i\}_{i \in G}$ como uma estimativa da base do subespaço do sinal. As mesmas fórmulas da abordagem baseada em subespaço, que são usadas no caso sem ruído, são aplicadas a $\{U_i\}_{i \in G}$ para obter estimativas dos coeficientes LRR e dos parâmetros das séries temporais.

2.5.2 Extração de sinal via projeções

Considere um caso particular de $X = S + N$, $X = (x_1, \dots, x_N)$, onde S é um sinal de posto r, N é ruído, e defina os parâmetros: o comprimento da janela L e o posto de sinal r.

Introduza duas projeções na norma de Frobenius: $\tilde{Y} : R^{L \times K}$ e $\tilde{H} : R^{L \times K}$, onde \tilde{H} é o conjunto de \tilde{Y} e \tilde{H} , onde \tilde{H} é o conjunto das matrizes de Hankel. definido em (1).

Esquema de SSA para extração de sinal:

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K & x_2 & x_3 & \dots \\ x_{K+1} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \tilde{y} & x_L & x_{L+1} & \dots & x_N & & \end{bmatrix} \quad \text{SVD: } (\tilde{U}, \tilde{\Sigma}, \tilde{V}) = \text{SVD}(X), \tilde{Y} = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T \\
 \tilde{Y} &= \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T \\
 \tilde{L} &= \text{span}(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_r) \\
 &\text{é o espaço do sinal;} \\
 \tilde{Y} &\text{ é o projetor em } \tilde{L}; \\
 \tilde{S} &= \text{Pr}_{m=1}^r \tilde{U}_m (\tilde{X}^T \tilde{U}_m)^T = \tilde{Y} \tilde{Y}^T \tilde{X}.
 \end{aligned}$$

Assim, uma forma concisa do algoritmo SSA para a extração de sinal é

$$\tilde{e} = \tilde{T} \tilde{Y} \tilde{H} \tilde{Y}^T \tilde{X}.$$

2.5.3 Exemplo de modelagem

A Figura 6 mostra a decomposição da série temporal 'Vinhos Fortificados', que foi construída sem o uso de um modelo. No entanto, esta decomposição ajuda a detectar o modelo e estimar seus parâmetros. O modelo é uma soma de produtos de polinômios, exponenciais e ondas senoidais. O método baseado em subespaço permite construir o modelo paramétrico do sinal de posto r .

A abordagem baseada em subespaço nos dá a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{sen} &= C_1 0,99679n + C_2 0,99409n \text{ sen}(2\tilde{y}n/12 + \tilde{y}_2) + \\
 &+ C_3 1,00036n \text{ sen}(2\tilde{y}n/4 + \tilde{y}_3) + C_4 1,00435n \text{ sen}(2\tilde{y}n/5,97 + \tilde{y}_4) + \\
 &+ C_5 1,00175n \text{ sen}(2\tilde{y}n/2,39 + \tilde{y}_5) + C_6 0,98878n \text{ sen}(2\tilde{y}n/3,02 + \tilde{y}_6).
 \end{aligned}$$

Os coeficientes C_i e as fases \tilde{y}_i podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados lineares (LS). Os detalhes estão descritos na Seção 3.3; o código R para a estimativa de parâmetros pode ser encontrado nos Fragmentos 3.5.95 e 3.5.116 de (Goliandina et al., 2018).

2.6 Escolha de parâmetros

) Os dois parâmetros do SSA são o comprimento da janela L e a forma de agrupamento. Não há recomendações estritas para sua escolha. Além disso, essas recomendações diferem para diferentes problemas e diferentes suposições sobre a estrutura da série temporal.

Por exemplo, se o sinal for de ordem finita, então $L \approx N/2$ é recomendado (as simulações fornecem a recomendação $L \approx 0,4N$ (Goliandina, 2010)).

Se o sinal não for de posto finito ou tiver uma estrutura complexa (um posto grande e sua trajetória tem um número de condição grande), então um comprimento de janela menor é recomendado.

⁵ <https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-359-fort-estimation-of-parameters-by-basic-ssa>

⁶ <https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-3511-fort-estimation-of-parametric-real-value-form>

Se o período de um componente periódico da série temporal for conhecido, recomenda-se tomar o comprimento da janela divisível pelo período fundamental.

Para análise de processos estacionários, a recomendação pode ser especial. Em particular, o comprimento da janela deve permitir uma boa estimativa da matriz de autocovariância. Isso significa que L deve ser pequeno o suficiente.

A formalização da forma de agrupamento é difícil. Uma abordagem é baseada na noção de separabilidade (por exemplo, em correlações w como medida de separabilidade) e na inspeção visual de autotriplos (Seção 2.3.2). Outra abordagem pode ser usada no caso de sinais de posto finito. Em seguida, os métodos de detecção de classificação podem ser aplicados (veja uma breve discussão no parágrafo 'Identificação de sinal' da Seção 3.14).

2.7 Estudos teóricos

) A seguir, abordamos várias abordagens teóricas da SSA. Em primeiro lugar, deve-se mencionar a teoria da separabilidade, onde as condições de separabilidade são formuladas e comprovadas. Lembre-se de que a separabilidade (aproximada) dos componentes da série temporal significa a capacidade do método de construir a decomposição em componentes identificáveis; em particular, a tendência deve ser separável do resíduo a ser extraído pela SSA (ver Seção 2.3.4). Esta teoria foi desenvolvida em (Golyandina et al., 2001) e subsequentemente diferentes modificações do SSA foram propostas para melhorar a separabilidade (ver Seção 2.10.2).

No entanto, é necessária uma técnica avançada para obter resultados teóricos sobre a precisão da reconstrução. Uma abordagem possível para isso é usar a técnica de perturbação. Vamos observar um sinal perturbado $X = (x_1, \dots, x_N) = S + \tilde{y}$, onde S é o sinal original e \tilde{y} é o ruído. O sinal S é assumido como N (Seção 2.3.4). O ruído \tilde{y} é expandido como $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \dots + \tilde{y}_N$ (Seção 2.3.4).

A maioria dos resultados teóricos assume N pequeno; portanto, estuda-se o erro de primeira ordem (ver, por exemplo, Richard, & David, 2008; Vlassieva & Golyandina, 2009; Hassani, Xu, & Zhigljavsky, 2011); esta técnica é de fato a linearização do erro na vizinhança de S . Por simplicidade, o comportamento do erro de primeira ordem (como $\tilde{y} \rightarrow 0$) é frequentemente considerado como $N \tilde{y}$. Esta técnica permite obter resultados que, em parte, ajudam a compreender o comportamento do erro. No entanto, esta técnica ainda é insuficiente, uma vez que SSA funciona para qualquer nível de ruído (ou seja, para qualquer valor de \tilde{y}) como $N \tilde{y}$. Na série de artigos (Nekrutkin, 2010; Ivanova & Nekrutkin, 2019; Nekrutkin & Vasilinetc, 2017), é dado um passo à frente no estudo de perturbações sem a suposição sobre a pequenez de \tilde{y} ; os resultados obtidos estão relacionados ao caso de perturbação não aleatória e, portanto, à separabilidade dos componentes do sinal.

Também vale a pena notar a abordagem teórica para o caso de uma série temporal fixa pequena L e estacionária, onde XX^T/K tende para a matriz de autocovariância $L \times L$ enquanto N (e $K = N - L + 1$) tende ao infinito (ver, por exemplo, (Van Huffel, 1993)). Observe que a escolha do L pequeno é inadequada do ponto de vista da separabilidade.

Outra vertente da teoria é dedicada a métodos relacionados a SSA em termos de modelo paramétrico, aproximações de baixo escalão e métodos baseados em subespaço (Seção 2.5).

2.8 Esquema geral de decomposições SSA

Referimo-nos a (Golyandina et al., 2018, Seção 1.1) para discussão do esquema geral de modificações e variações do SSA em detalhes. Uma forma geral dos algoritmos da família SSA para a decomposição de objetos pode ser apresentada da seguinte forma. Uma ampla gama de objetos, de séries temporais a formas nD , pode ser considerada como entrada.

Entrada: Um objeto (por exemplo, uma série temporal).

1. Incorporação. O objeto de entrada é transformado em uma matriz de trajetória estruturada a partir de um conjunto H por um operador de incorporação T (por exemplo, H é o conjunto de matrizes de Hankel).
2. Decomposição. A matriz de trajetória é decomposta em uma soma de matrizes elementares de um posto (por exemplo, pelo SVD).
3. Agrupamento. As matrizes elementares são agrupadas de forma adequada; as trizes são obtidas pela soma das matrizes elementares pelos grupos.
4. Retorne à decomposição do objeto. As matrizes agrupadas são transformadas na forma do objeto de entrada (por exemplo, de matrizes para séries temporais) projetando para H (por exemplo, por hankelização) e realizando T .

Saída: Decomposição do objeto de entrada na soma de objetos identificáveis (por exemplo, de uma tendência, oscilações e ruídos).

O algoritmo SSA na forma geral é facilmente estendido para analisar objetos de diferentes dimensões pela mudança do operador de incorporação T . Além disso, as modificações da etapa de decomposição não dependem da forma/dimensão do objeto decomposto, uma vez que são localizadas na etapa de decomposição, enquanto que a especificidade da forma/dimensão é localizada por meio do operador de incorporação T na primeira e últimos passos.

2.9 Extensões multivariadas/multidimensionais

Extensões multivariadas/multidimensionais diferem pela etapa de incorporação do esquema SSA; isto é, por definição do operador de incorporação T . Vamos listar diferentes versões da etapa de incorporação:

- SSA para séries temporais (1D-SSA): $T(X)$ é uma matriz de Hankel;
- MSSA para sistemas de séries temporais: $T(X)$ é uma matriz de Hankel empilhada;
- 2D-SSA para imagens digitais: $T(X)$ é uma matriz Hankel-bloco-Hankel;
- Shaped SSA para qualquer objeto moldado: $T(X)$ é uma matriz quase-Hankel;
- M Shaped 3D-SSA para várias imagens 3D de algumas formas fornece um quase-Hankel empilhado matriz de trajetória;

Shaped nD-SSA ($n > 1$) pode ser considerado como uma extensão n-dimensional geral de SSA para objetos moldados.

2.9.1 SSA Multivariado

Decomposição, previsão, imputação de dados ausentes e outros métodos baseados em subespaço são executados da mesma maneira que para 1D-SSA, veja exemplos de (Goliandina et al., 2018, Capítulo 4)⁷.

No âmbito do SSA, não podemos falar em causalidade, pois o método MSSA é invariante em relação aos deslocamentos no tempo da série temporal. No entanto, podemos dizer sobre o suporte de uma série em relação a outra série. O suporte da segunda série temporal

⁷<https://ssa-with-r-book.github.io/04-chapter4.html>

em relação à primeira série temporal significa que a segunda série temporal melhora a precisão da estimativa ou previsão do sinal em comparação com o uso apenas da primeira série. Se as séries temporais tiverem uma grande porção de estrutura comum, seu processamento simultâneo é melhor do que o processamento separado de cada série temporal. A estrutura comum dentro da estrutura SSA significa subespaços de sinal semelhantes. A precisão da extração do sinal depende da relação sinal-ruído. Mesmo que duas séries temporais tenham sinais da mesma estrutura, um grande nível de ruído na segunda série temporal pode fazer com que essa série não seja compatível.

É importante ressaltar que no MSSA existem muitas notações diferentes, às vezes controversas. Em 1D-SSA, não é importante o que chamamos de vetores singulares à esquerda ou à direita, autovetores ou vetores fatoriais/ componentes principais, uma vez que a matriz L -trajetória transposta coincide com a matriz K -trajetória para $K = N - L + 1$. Normalmente, os vetores mais longos são chamados de vetores fatoriais (componentes principais). Outra abordagem é fixar a dimensão de incorporação L (que é igual ao comprimento da janela L) e chamar os vetores singulares corretos de vetores/componentes principais. Então, aumentar o comprimento da série temporal N aumentará o comprimento K dos vetores fatoriais. Como geralmente $L \ll K$, ambas as abordagens fornecem a mesma terminologia.

No entanto, para MSSA, este não é o caso. No MSSA, a matriz de trajetória é construída a partir das matrizes de trajetória empilhadas das séries temporais da coleção considerada. O empilhamento pode ser vertical ou horizontal. No caso de empilhamento horizontal,

$$TMSSA(X^{(1)}, \dots, X^{(s)}) = [X^{(1)} : \dots : X^{(s)}],$$

onde $X^{(i)}$ é a matriz de trajetória (e, portanto, de Hankel) da i -ésima série temporal. Portanto, os vetores singulares à esquerda correspondem a subséries temporais de comprimento L , enquanto os vetores singulares à direita consistem em subséries empilhadas de diferentes séries temporais da coleção. Assim, em contraste com 1D-SSA, os vetores singulares esquerdo e direito têm estrutura diferente.

O empilhamento vertical não é algo diferente; troca de vetores singulares esquerdo e direito (após trocar L e $K = N - L + 1$); portanto, a forma de empilhamento influencia não mais do que terminologia, escolha de parâmetros e possivelmente custos computacionais.

Originalmente, um pequeno comprimento de janela L foi aplicado a cada uma das séries temporais com o empilhamento vertical de matrizes de trajetória (Weare & Nasstrom, 1982), onde $L = 3$ (linhas da matriz X foram reordenadas em comparação com o algoritmo MSSA convencional com o empilhamento vertical); portanto, o comprimento K de vetores singulares retos é grande. Os vetores singulares à esquerda de comprimento L_s foram chamados de EEOFs (funções ortogonais empíricas estendidas). Os vetores singulares certos produzem vetores fatoriais e componentes principais; os últimos são iguais aos vetores fatoriais multiplicados por valores singulares. Tanto os vetores fatoriais quanto os componentes principais têm comprimento próximo ao comprimento das próprias séries temporais; portanto, eles podem ser usados em vez de séries temporais em investigações posteriores.

Em (Weare & Nasstrom, 1982), cada série temporal corresponde a um ponto do espaço em uma superfície 2D, ou seja, s é grande. Cada EEOF é dividido em três partes correspondentes a três defasagens (o número de defasamentos é igual a $L = 3$) e então cada parte é representada como uma superfície. Na Seção 2.9.3 discutimos como descrever o algoritmo de (Weare & Nasstrom, 1982) como Shaped 3D SSA; parece que esta descrição é mais natural. Observe que o algoritmo de (Weare & Nasstrom, 1982) (e todos os algoritmos que resultam em EEOFs) corresponde ao estágio de Decomposição e não contém o estágio de Reconstrução.

O empilhamento vertical também foi utilizado no papel (Broomhead & King, 1986b), que costuma ser considerado um dos primeiros papéis com a descrição de MSSA (seu estágio de decomposição). Embora as matrizes de trajetória originais tenham sido empilhadas horizontalmente nesse artigo, os autores consideraram autovetores de XTX , não de XXT ; ou seja, a decomposição em valor singular da matriz XT foi de fato considerada, não do próprio X . Para fazer a diferença entre a horizontal e a

variante vertical mais compreensível, observemos o seguinte: para construir o SVD da matriz de trajetória para duas séries temporais $X(1)$ e $X(2)$ com matrizes de trajetória $X(1)$ e $X(2)$, respectivamente, na horizontal caso, calcula-se os autovetores da matriz $X(1) X(1)^T$ no caso vertical encontra-se os autovetores da matriz $X(2) X(2)^T$, enquanto que

$$\begin{matrix} X(1) X(1)^T & X(1) X(2)^T \\ X(2) X(1)^T & X(2) X(2)^T \end{matrix}.$$

Em (Golyandina, Korobeynikov, Shlemov, & Usevich, 2015) e (Golyandina et al., 2018), o empilhamento horizontal é considerado para fixar o número de linhas (ou seja, para fixar a dimensão do espaço coluna da matriz de trajetória). No caso de empilhamento horizontal, aumentar os comprimentos das séries temporais leva à adição de colunas à matriz de trajetória. Além disso, os comprimentos de diferentes séries temporais podem diferir; isso não influencia a dimensão da coluna.

A consideração acima de que os empilhamentos horizontal e vertical produzem apenas formas diferentes do mesmo método é válida para Basic (M)SSA, onde o SVD da matriz de trajetória é considerado. Em particular, a forma de empilhamento em MSSA, que foi sugerida em (Broomhead & King, 1986b), não importa. Para Toeplitz (M)SSA, este não é o caso. Seja C_i a matriz de autocovariância (Toeplitz) da i -ésima série temporal, C_{ij} a matriz de covariância cruzada da i -ésima série temporal, $C_{ii} = C_i$. Então, para o empilhamento horizontal, a decomposição é construída com base nos autovetores de $\sum_{i=1}^s C_{ii}$.

$$\sum_{i=1}^s C_{ii}.$$

A decomposição é construída com base nos autovetores de

$$\begin{matrix} C_{11} & \dots & C_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \dots & C_{ss} \end{matrix}.$$

Na investigação climática, a versão Toeplitz do MSSA com empilhamento vertical é convencional (Plaut & Vautard, 1994). No entanto, não encontramos artigos onde foi realizada a comparação das versões vertical e horizontal do Toeplitz MSSA.

2.9.2 SSA bidimensional

Para imagens digitais dadas por um array 2D $X = X_{N1, N2} = (x_{ij})_{i=1, j=1}^{N1, N2}$ de tamanho $N1 \times N2$, um tamanho de janela 2D $L1 \times L2$ deve ser escolhido. A matriz de trajetória consiste em janelas 2D em movimento vetorizadas. Esta matriz de trajetória pode ser escrita na forma de uma matriz de Hankel-bloco-Hankel:

$$X = T2D\text{-SSA}(X) = \begin{matrix} \ddots & H_1 & H_2 & & H_3 & \dots & H_{K2} & H_4 & \ddots \\ & H_2 & H_3 & & \dots & & H_{K2+1} & & \\ & H_3 & H_4 & & \ddots & & \ddots & & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & & \\ \dots & H_{L2} & H_{L2+1} & \dots & \dots & \dots & H_{N2} & \dots & \end{matrix}, \quad (6)$$

onde cada H_j é a matriz de trajetória $L1 \times K1$ (Hankel) construída a partir de $X_{:,j}$ (a j -ésima coluna da matriz 2D X).

A estimativa de frequências por 2D-ESPRIT é o uso mais frequente dessa matriz de trajetória

(Sahnoun, Usevich, & Comon, 2017), ver Fragmentos 5.3.18 e 5.3.29 de (Goliandina et al., 2018). Além disso, 2D-SSA é usado para problemas de suavização e redução de ruído, consulte Fragmentos 5.4.2–5.4.6

¹⁰.

2.9.3 SSA em forma

Em (Goliandina et al., 2015), é sugerida uma abordagem geral para análise de espectro singular. Shaped SSA é a versão universal do SSA, que é aplicável a formas e dimensões arbitrárias dos objetos. A janela móvel também pode ter uma forma arbitrária. Por exemplo, tanto a imagem digital quanto a janela móvel podem ter formato circular; ou seja, eles não precisam ser retangulares como em 2D-SSA. Shaped SSA permite considerar diferentes versões dos algoritmos SSA de forma unificada: SSA para objetos com dados ausentes, 1D-SSA, MSSA, 2D-SSA e suas versões circulares entre outros. Veja Fragment 2.6.211 para o caso 1D, Fragments 5.2.2–5.2.312 para o exemplo com uma imagem em forma e uma janela em forma circular; e finalmente o Fragmento 5.4.613 para a decomposição dos dados dados em um cilindro (Goliandina et al., 2018).

Há uma limitação dessa abordagem, pois os pontos dentro da janela e as localizações da janela dentro do objeto devem ser ordenados linearmente. Sendo ordenadas linearmente, as janelas moldadas são transformadas em vetores de coluna e esses vetores são empilhados na matriz de trajetória de acordo com as localizações ordenadas das janelas moldadas. Muitos objetos podem ser considerados como ordenados linearmente.

A técnica padrão é considerar o objeto como um subconjunto de uma caixa multidimensional da mesma dimensão do objeto, com ordenação natural. Por exemplo, um pedaço da esfera (após sua projeção no plano) pode ser circunscrito por um retângulo; no entanto, não há projeção planar contínua de toda a esfera. Portanto, no momento atual, o SSA para dados fornecidos em toda a esfera não é elaborado.

2.9.4 Complexo SSA

O SSA complexo é o SSA básico aplicado a séries temporais de valor complexo. A única diferença no algoritmo é a mudança de transposição para transposição conjugada. O algoritmo do Complex SSA foi explicitamente formulado em (Keppenne & Lall, 1996); embora o SSA tenha sido aplicado a séries temporais complexas muito antes, sem considerar a diferença entre dados de valor real e dados de valor complexo (ver, por exemplo, (Tufts et al., 1982)).

De um modo geral, Complex SSA não é um método para analisar séries temporais multivariadas; ai no entanto, pode ser considerado como um método especial para a análise de duas séries temporais.

A maioria das aplicações do Complex SSA está relacionada à chamada filtragem de autoimagem F-xy (Trickett, 2003). Este nome está relacionado à análise de imagens digitais em geofísica; primeiro, a transformada discreta de Fourier (DFT) é aplicada a cada linha da matriz da imagem, depois as séries de valor complexo são construídas a partir dos resultados das DFTs para cada frequência e, finalmente, as séries construídas são analisadas pelo Complex SSA. Observe que os autores dos artigos dedicados ao ruído de autoimagem F-xy

⁸<https://ssa-with-r-book.github.io/05-chapter5.html#fragment-531-mars-parameter-estimation-with-2d-esprito>

⁹<https://ssa-with-r-book.github.io/05-chapter5.html#fragment-532-mars-parameter-estimation-with-shaped-2d-esprit>

¹⁰<https://ssa-with-r-book.github.io/05-chapter5.html#fragment-542-brecon-beacons-decomposition> ¹¹<https://ssa-with-r-book.github.io/01-chapter2-part1.html#fragment-262-incomplete-decomposition-para-uma-série-com-a-gap>

¹²<https://ssa-with-r-book.github.io/05-chapter5.html#fragments-521-auxiliary-plot-of-2d-image-and-522-mars-mask-specification-and-decomposition>

¹³<https://ssa-with-r-book.github.io/05-chapter5.html#fragments-546-kruppel-analysis-of-data-given-em-um-cilindro>

supressão geralmente omite a palavra 'Complex' em Complex SSA. A especificidade das imagens geofísicas estudadas é que elas são ruidosas e contêm linhas (traços); com a ajuda da DFT, essas linhas são transformadas em uma soma de exponenciais complexas, que têm classificação 1 no Complex SSA. Portanto, as linhas podem ser separadas do ruído muito bem.

2.10 Modificações da etapa SVD

Quase independentemente das extensões da etapa de incorporação do algoritmo SSA (Seção 2.9), diferentes modificações da etapa de decomposição podem ser consideradas em uma forma comum $X = X_1 + \dots + X_r$, onde as matrizes X_i são algumas matrizes de posto um.

No Basic SSA, a expansão SVD em matrizes de primeira linha é considerada. Se não houver informações adicionais sobre a série temporal, o SVD é ótimo. Assim, possíveis modificações da etapa de decomposição estão relacionadas a diferentes suposições sobre a série temporal.

2.10.1 Uso de informações a priori

As seguintes decomposições foram propostas levando em consideração as informações sobre a estrutura das séries temporais:

- SSA com projeção é usado se o modelo do sinal for parcialmente conhecido; por exemplo, se for assumido que o sinal tem uma tendência linear, consulte a Seção 3.5. Referimo-nos a (Golyandina & Shlemov, 2017) para detalhes, onde é descrita a abordagem geral com projeções preliminares. SSA com centralização (Golyandina et al., 2001, Seção 1.7.1) é um caso particular de SSA com projeção, pois a centralização de um vetor pode ser considerada como a projeção para o subespaço percorrido pelo vetor de uns. A versão do SSA, onde as linhas da matriz de trajetória são centralizadas, veio do PCA; entretanto, tal centralização não é natural para séries temporais, pois as linhas e colunas são subséries da série temporal original e, portanto, possuem a mesma estrutura. A centralização dupla (linha e coluna) é muito mais natural para matrizes de trajetória. É mostrado em (Golyandina & Shlemov, 2017) que SSA com dupla centralização ajuda a extrair tendências lineares na presença de componentes periódicos (ver Fragmento 2.8.714).
- Toeplitz SSA é usado se a série temporal for estacionária (consulte a Seção 2.2.6). Nas aplicações relacionadas a séries temporais estacionárias, o Toeplitz SSA é considerado como uma versão principal. Os detalhes estão descritos na Seção 3.13.

2.10.2 Decomposições refinadas de sinais

Outra razão para modificar a etapa SVD está relacionada à melhoria da separabilidade. As duas propriedades principais do SVD (a biortogonalidade e a otimalidade) permitem que o Basic SSA decomponha uma série temporal em componentes identificáveis. A otimalidade (referimo-nos às propriedades de aproximação do SVD) oferece a possibilidade de separar os sinais do ruído. A biortogonalidade ajuda a separar os componentes das séries temporais se forem (aproximadamente) ortogonais. Acontece que muitos componentes de séries temporais, como tendências e ondas senoidais com diferentes frequências, são assintoticamente ortogonais (separáveis), pois o comprimento da série temporal tende ao infinito; no entanto, precisamos da separabilidade para séries temporais de comprimento finito. Além disso, o problema da falta de separabilidade forte (o problema de autovalores iguais no SVD) não pode ser resolvido nem mesmo assintoticamente.

¹⁴<https://ssa-with-r-book.github.io/02-chapter2-part2.html#fragment-287-hotels-ssa-with-projection>
-detecção de tendência linear

Existem muitos métodos para decomposição de matrizes, que não são necessariamente biortogonais. No entanto, a maioria dos métodos para uma decomposição em matrizes de posto um, que não são biortogonais, simultaneamente abandonam a propriedade de aproximação. Portanto, a melhoria da separabilidade é realizada em duas etapas. Primeiramente, o espaço de trajetória do sinal é estimado por meio do agrupamento dos componentes da matriz elementar do sinal na etapa SVD do Basic SSA. Em seguida, a matriz agrupada de sinais é decomposta por uma expansão refinada (chamamos esse tipo de expansão refinada de decomposições aninhadas).

Os exemplos de modificações SSA com decomposições aninhadas são:

- SSA com derivativos. Essa modificação pode ajudar se os componentes do sinal forem misturados devido a contribuições iguais de componentes (ou seja, no caso em que ocorre a separabilidade fraca, mas não há separabilidade forte) (Golyandina & Shlemov, 2015). A aplicação de SSA com derivativos é demonstrada no Fragmento 2.8.615 para o caso 1D. O fragmento 5.2.516 mostra que a mesma abordagem funciona no caso 2D.
- SSA oblíqua iterada. Esta versão ajuda a resolver o problema da ausência de ortogonalidade (sem separabilidade) (Golyandina & Shlemov, 2015); ver, por exemplo, Fragmento 2.8.217.

Uma abordagem, que usa rotações adicionais de componentes mistos, também é considerada em (Groth & Ghil, 2011), onde SSA multicanal com rotações fatoriais é sugerida para resolver o problema da falta de separabilidade forte em MSSA. Lembre-se de que esse problema é causado por autovalores iguais na decomposição SVD da matriz de trajetória. No artigo (Groth & Ghil, 2011), o problema de autovalores iguais é chamado de degeneração de autovalores (esta é a noção, que às vezes é usada em PCA para a explicação de autovetores instáveis para autovalores próximos). A formulação do problema estudado em termos de separabilidade forte pode ajudar a obter novos insights.

2.10.3 Tensor SSA

O esquema geral de SSA (Seção 2.8) pode ser estendido considerando o operador de incorporação T que mapeia o conjunto de objetos para o conjunto de tensores de ordem n e a decomposição da matriz na etapa seguinte, decomposição.

A desvantagem é que as decomposições tensoriais geralmente não são únicas e seu cálculo numérico é demorado. Às vezes, as decomposições de tensores podem ser reduzidas a decomposições de matrizes mais simples. Por exemplo, o SVD da matriz de trajetória em 2D-SSA é de fato o produto de Kronecker SVD de um tensor de quarta ordem (Golyandina & Usevich, 2010).

Novos algoritmos podem ser obtidos por decomposições tensoriais que não são reduzidas a matrizes. Por exemplo, há uma versão do SSA em que o operador de incorporação transfere o objeto inicial para um array 3D em vez de uma matriz (um array 2D); então a decomposição tensorial (PARAFAC) é realizada, ver, por exemplo, (Kouchaki, Sanei, Arbon, & Dijk, 2015; Yang et al., 2017). Observe que a ideia do uso de decomposições de tensores surgiu muito mais cedo na estrutura de aproximação baseada em subespaço e de baixa classificação (Papy, De Lathauwer, & Van Huffel, 2005); ver também (Sidiropoulos et al., 2017).

¹⁵<https://ssa-with-r-book.github.io/02-chapter2-part2.html#fragment-286-us-unemployment-improvement-by-derivssa>

¹⁶<https://ssa-with-r-book.github.io/05-chapter5.html#fragments-524-mars-identification-and-525>

-mars-melhoria-por-derivssa

¹⁷<https://ssa-with-r-book.github.io/02-chapter2-part2.html#fragment-282-fort-basic-ssa-and-iterative-ssa-tendências>

3 SSA e problemas diferentes

3.1 SSA e não linearidade. O SSA é um método linear?

Na literatura, uma crítica ao SSA soa como 'SSA é um método linear'.

Vamos explicar o que isso significa. Primeiro, observe que o algoritmo é não linear. Os componentes, que podem ser extraídos pelo SSA, geralmente não são lineares. No entanto, a classe de séries temporais, que produzem matrizes de trajetória deficientes em posto, consiste em séries temporais governadas por relações de recorrência linear homogêneas (LRRs) na forma $x_n = \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i}$. LRRs estão intimamente relacionados com bks lineares $(k)(t) = 0$, onde k é um operador diferencial de ordem k . A resposta de SSA para a crítica de que o SSA não é linear é que o SSA é um método linear aplicado para resolver equações diferenciais lineares.

Na teoria dos sistemas dinâmicos, os métodos, que estão relacionados às equações diferenciais lineares, são chamados de lineares. Por exemplo, seja $s(t) + b s'(t) = 0$, $t \in [0, \infty)$, ser uma LDE de ordem 1; considere (i) $\Delta t = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots$ como a discretização de t e a aproximação de diferenças finitas $s'(t) \approx \frac{s(t+1) - s(t)}{\Delta t}$ então obtemos $s_i + b(s_{i+1} - s_i) = 0$ ou, o mesmo, $s_{i+1} = (1 - b/s_i) s_i$. A resposta à crítica LRR de ordem 1.

linearidade SSA é a seguinte.

Primeiro, a classe de soluções de LDEs é ampla o suficiente, pois contém quaisquer somas finitas de produtos de polinômios, exponenciais e ondas senoidais. Então, para lidar com sinais governados por LRRs (por exemplo, para extrair sinais de séries temporais ruidosas), um grande comprimento de janela (otimamente, na faixa de $N/3$ a $N/2$, onde N é o comprimento da série temporal) é recomendado; entretanto, janelas menores permitem levar em consideração apenas aproximações locais de postos finitos. Por exemplo, uma senóide modulada com amplitude de variação lenta é bem aproximada por uma senóide com a mesma frequência em intervalos de tempo de tamanho igual a vários períodos. Portanto, SSA com um pequeno comprimento de janela igual a vários períodos produz resultados razoáveis para este exemplo. Pode-se argumentar que para extração por SSA, o componente de série temporal de interesse deve ser governado localmente pelo mesmo LRR em cada segmento local. Assim, pequenos comprimentos de janela permitem lidar com a não linearidade do modelo em alguns casos comuns, como harmônicos modulados e tendências.

Uma característica muito importante do SSA é que o método não usa a forma paramétrica explícita (3) da série temporal. Por exemplo, para prever o valor de uma série exponencial $s_n = A e^{\gamma n}$, uma abordagem é estimar A e γ e então realizar a previsão pela fórmula explícita.

No entanto, uma abordagem mais flexível é estimar os coeficientes da LRR governante e realizar a previsão pela LRR estimada. Assim, muitos métodos da família SSA tentam evitar a estimação de parâmetros em (3) para tornar o método mais robusto em relação aos desvios do modelo.

Enquanto uma variação lenta da amplitude do sinal senoidal é admissível, uma variação de frequência não é apropriada para SSA aplicada a toda a série temporal (exceto no caso de variação da frequência em torno de um valor principal; isso é chamado de 'ruído de fase'). No caso de mudança de frequência, métodos como EMD + HHT (Huang & Wu, 2008) podem ser utilizados para a extração de oscilações com mudança de frequência; no entanto, eles só funcionam bem se o ruído for pequeno o suficiente.

SSA local A abordagem padrão para analisar sinais com uma estrutura variável é considerar a movimentação de subséries (segmentos) da série temporal original. Na estrutura do SSA, este procedimento é chamado de rastreamento de subespaço (ver, por exemplo, (Badeau, Richard, & David, 2003)). Nos artigos sobre rastreamento de subespaço, o foco principal está na construção de algoritmos rápidos. O outro uso do rastreamento de subespaço é a detecção de ponto de mudança (Moskvina & Zhigljavsky, 2003), (Golyandina et al., 2001, Capítulo 3), veja o exemplo no Fragmento 3.5.1218.

Para a estimativa de componentes de séries temporais, como tendências e sinais, é usado o SSA aplicado a subséries móveis (ver, por exemplo, (Leles, Sansao, Mozelli, & Guimarães, 2018)). O principal problema aqui é

[18https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-3512-sunspots-subspace-tracking](https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-3512-sunspots-subspace-tracking)

como combinar diferentes decomposições locais em uma decomposição global. Em (Leles et al., 2018), as partes centrais das reconstruções do sinal local são usadas e depois empilhadas. A ideia de utilizar apenas a parte central é promissora, uma vez que a reconstrução dos pontos finais é menos precisa. No entanto, a questão é por que não utilizar apenas um ponto central (por analogia com o método LOESS (Cleveland, 1979)); certamente, isso pode ser feito se o custo computacional for aceitável.

Como resultado do SSA local, obtemos uma estimativa de sinal ou apenas uma suavização. O problema é como prever o sinal extraído, uma vez que suas estimativas locais podem ter diferentes estruturas em diferentes intervalos de tempo. Nas versões locais do SSA, não obtemos um modelo não linear comum; temos vários modelos lineares empilhados. No entanto, muitos métodos locais não paramétricos, incluindo, por exemplo, LOESS tem essa desvantagem.

SSA como filtro linear Outra razão para chamar o SSA de método linear é sua conexão com filtros lineares (consulte a Seção 2.4 para referências). No entanto, deve-se notar que os coeficientes dos filtros lineares SSA são produzidos pela série temporal de forma não linear.

3.2 SSA e processos autorregressivos

É importante observar que o modelo básico de sinais em SSA e o modelo de processos autorregressivos (AR) são semelhantes apenas à primeira vista. O fato é que os modelos são totalmente diferentes.

Para SSA, o modelo de sinal é $s_n = \sum_{i=1}^r a_i s_{n-i}$ e a série observada é um sinal ruidoso, que tem a forma $x_n = s_n + \epsilon_n$, onde ϵ_n é tipicamente ruído (uma oscilação não regular; por exemplo, uma realização de um processo aleatório estacionário).

Para processos autoregressivos, temos inovações de ruído em cada etapa: $x_n = \sum_{i=1}^r a_i x_{n-i} + \epsilon_n$. Sob algumas condições nos coeficientes, tais inovações produzem x_n , $n = 1, 2, \dots$, é um processo estocástico estacionário, enquanto a série com termos $s_n = \sum_{i=1}^r a_i s_{n-i}$ é um sinal determinístico não necessariamente estacionário. Os coeficientes $\{a_i\}_{i=1}^r$ no modelo SSA podem ser arbitrários.

Tanto na análise AR como na SSA, os polinômios característicos são construídos com base nos coeficientes a_i . Em termos de SSA, estações/monótonas e raízes de polinômios característicos de Séries 2.9.1. As raízes de polinômios característicos, com módulos unitários correspondem a um componente determinístico estacionário como ondas senoidais ou amortecidas (ver, por exemplo, (Golyandina et al., 2001, Exemplo 5.10)).

Para o modelo AR, o polinômio característico AR é recíproco ao do SSA (os coeficientes são tomados em ordem inversa); portanto, suas raízes são inversas às raízes do polinômio característico em SSA com os mesmos coeficientes a_i . A estacionariedade no modelo AR $i = 1, \dots, r$, corresponde a raízes com módulos menores que 1. Por exemplo, a estacionariedade (um exemplo é o movimento browniano $x_n = x_{n-1} + \epsilon_n$ e seu polinômio característico $\mu \cdot y^{-1}$; o mesmo polinômio característico corresponde a um sinal constante em SSA).

No contexto de SSA usado para extração de sinal, AR é considerado principalmente como um modelo de ruído (veja, por exemplo, uma discussão de Monte Carlo SSA na Seção 3.11).

Existe uma forma comum para previsões de sinais governados por LRRs e para previsões condicionais médias de processos AR. Ambos são realizados pelo LRR com coeficientes estimados. A diferença está na abordagem para estimar esses coeficientes. Observe que os valores de previsão no modelo AR estão sempre convergindo para zero (ou o valor médio).

Observemos que em (Keppenne & Ghil, 1992) foi proposto um híbrido de SSA e AR: o modelo AR foi usado para prever os principais componentes reconstruídos elementares obtidos pelo

Versão Toeplitz (VG) do SSA. Nesse artigo, o método de previsão proposto foi aplicado a dados climáticos, que foram modelados como processos aleatórios estacionários.

Há mais uma conexão entre SSA e AR. Para processos autorregressivos, SSA pode ser aplicado a uma estimativa da função de autocovariância $C(l)$ para encontrar os coeficientes autorregressivos, uma vez que a série $C(l)$ é governada pelo LRR com os mesmos coeficientes: $C(l) = \text{Pr aiC}(l - i)$ (as equações de Yule-Walker).

3.3 SSA e estimativa de parâmetros

Nesta seção, consideramos o problema de estimação de parâmetros no modelo descrito na Seção 2.5.

Deixe o sinal ter a forma paramétrica explícita de uma soma finita

$$s_n = \sum_j A_j \exp(i\gamma_j n) \sin(2\gamma_j n + \gamma_j) \quad (7)$$

e a série temporal observada ser $x_n = s_n + r_n$. Aqui simplificamos o modelo geral (3), onde um multiplicador polinomial pode ser apresentado em cada soma. A forma de valor complexo de (7) é

$$s_n = \sum_{m=1}^n c_m \mu_m^n \quad (8)$$

$\mu_m = \gamma_m e^{i2\gamma_m}$. Aqui $\gamma_m = \text{Arg}(\mu_m)/(2)$, $\gamma_m = |\mu_m|$. Lembre-se de que μ_m são as raízes do polinômio característico do LRR mínimo que governa o sinal. Se s_n são reais, então cada raiz complexa μ_m deve ter seu conjugado complexo $\mu_k = \mu_m^*$. Portanto, $c_m \mu_m^n$ pode ser tornado real por coeficientes adequados de c_m e c_k .

Um modelo de sinal mais geral é dado pela classificação do sinal: classificação $S = r$, onde r é conhecido antecipadamente ou é estimado. Neste modelo, consideramos $s_n = A_1 \cos(2\gamma_1 n + \gamma_1) + A_2 \sin(2\gamma_2 n + \gamma_2)$ enquanto para a representação explícita (7), são dois modelos paramétricos diferentes.

A dependência dos parâmetros γ_j (γ_j) e γ_j é não linear; a dependência de A_j e γ_j pode ser considerada linear, pois $A \cos(2\gamma_j n + \gamma_j) = C_1 \cos(2\gamma_j n) + C_2 \sin(2\gamma_j n)$ para alguns C_1 e C_2 dependendo de A e γ_j .

Os limites inferiores de Cramér-Rao (CRLB) para a variância das estimativas dos parâmetros são conhecidos (ver, por exemplo, (Stoica & Moses, 2005; Bodeau, David, & Richard, 2008)). Para o caso de senóides não amortecidas, o CRLB para a estimativa da frequência tem ordem $1/N^3$, enquanto o CRLB para a estimativa da

A abordagem comum para estimação de parâmetros é o método não linear dos mínimos quadrados, que implica a forma paramétrica explícita:

$$\sum_{n=1}^N (x_n - s_n(\{\gamma_j, \gamma_j, A_j, \gamma_j\}))^2 \rightarrow \min_{\{\gamma_j, \gamma_j, A_j, \gamma_j\}}$$

É um problema de otimização muito complicado e demorado, pois a função objetivo possui muitos mínimos locais, o problema é não linear e, portanto, necessita de métodos iterativos para solução.

A segunda abordagem é chamada baseada em subespaço (Seção 2.5.1). Consideremos a forma de valor complexo (8). Os parâmetros não lineares μ_m são estimados por um dos métodos baseados em subespaço (por exemplo ESPRIT), que são baseados em U_1, \dots, U_r obtido no estágio de Decomposição de SSA (Seção 2.2.3).

Os parâmetros lineares podem ser encontrados pelo método convencional dos mínimos quadrados lineares. Considere a matriz de Vandermonde gerada por μ_m , $m = 1, 2, \dots, M$,

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1 & 1 & 2 & \dots & \text{Mulheres} \\ \mu_2^2 & \mu_2 & 1 & 2 & \dots & \text{Mulheres} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_M^2 & \mu_M & 1 & 2 & \dots & \text{Mulheres} \end{bmatrix}$$

a forma $S = (s_1, \dots, s_M)$, estimado (o sinal S é estimado como \hat{S} em $\hat{S} = \hat{C} \hat{T} \hat{M} \hat{F}$), chegamos à igualdade aproximada $\hat{S} \approx \hat{C} \hat{T} \hat{M} \hat{F}$; então a estimativa \hat{C}_b pode ser encontrada pelo método LS.

Pode-se ver que a abordagem descrita é muito simples e tudo o que devemos saber sobre o sinal é sua classificação. Como métodos para a estimativa de frequência, os algoritmos baseados em subespaço são chamados de alta resolução, pois fornecem as estimativas de frequência com a variância da mesma ordem $1/N^3$ que o CRLB; veja (Badeau, Richard, & David, 2008) para o caso não amortecido: para $s_n = C e^{j2\pi f n}$ a estimativa de f tem variância $D \hat{f} \approx 1/N^3$ se o comprimento da janela L for proporcional ao comprimento da série temporal N .

3.4 SSA e aproximação estruturada de baixo nível (SLRA)

Vamos aplicar SSA ao problema de extrair um sinal de posto finito de uma série temporal ruidosa. O algoritmo de SSA pode ser escrito de forma compacta por meio de operadores de projeção (ver Seção 2.5.2): $\hat{S} = T \hat{Y} \hat{H} \hat{Y}^T X$.

No entanto, na prática, a estimativa \hat{S} geralmente não é de classificação finita. O problema de encontrar a estimativa \hat{S} de posto r pode ser resolvido por diferentes métodos. Existe um subconjunto de métodos, chamado SLRA, que apresenta o problema de aproximação da matriz de trajetória da série temporal por uma matriz de Hankel de baixo posto: $\min_{\hat{S}} \|X - \hat{S}\|_F^2$. O método mais famoso é chamado de iterações Cadzow e foi introduzido em (Cadzow, 1988). Este método consiste em projeções alternadas e pode ser expresso como $\hat{S} = T \hat{Y}^T (\hat{Y} \hat{H} \hat{Y}^T)^m T X$. Assim, SSA como um método para extração de sinal pode ser considerado como a primeira iteração das iterações Cadzow. Observe que as iterações do Cadzow foram sugeridas em paralelo com o SSA.

Outra abordagem é usar uma parametrização particular do conjunto \mathcal{D}_r de séries temporais de rank não maior que r . Então o problema de aproximação de baixo posto é considerado como o problema dos mínimos quadrados

$$\min_{\hat{S} \in \mathcal{D}_r} \|X - \hat{S}\|_F^2 \quad (9)$$

e pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados ponderados (WLS). Se o ruído for gaussiano, então, pela escolha dos pesos correspondentes, as estimativas LS ponderadas coincidem com as estimativas de máxima verossimilhança (MLE) e, portanto, são assintoticamente as melhores.

O problema (9) ainda é chamado de método estruturado de aproximação de baixo escalão (ver (Markovsky, 2019)), onde a estrutura de Hankel de matrizes de trajetória é considerada. No entanto, o problema (9) não depende do comprimento da janela, que determina as dimensões da matriz de trajetória. Portanto, de fato, esse não é o problema da aproximação de matrizes de baixo posto (Zvonarev & Golyandina, 2018).

Tanto o SSA quanto o Hankel SLRA podem ser usados para extração de sinal, previsão e estimativa de frequência, uma vez que ambos os métodos fornecem estimativas do subespaço do sinal e do próprio sinal. Comparando as abordagens, podemos dizer que

- SSA é rápido, SLRA é demorado;
- SLRA pode fornecer estimativas de parâmetros mais precisas em comparação com SSA;
- para um sinal que apenas aproximadamente (ou localmente) satisfaça o modelo, SLRA não funciona; SSA funciona;
- o resultado do SLRA permite procedimentos mais simples para estimativa e previsão de parâmetros.

Assim, o SLRA é aplicado principalmente no processamento de sinais para problemas de engenharia, onde os sinais são exatamente de ordem finita. No caso geral de séries temporais do mundo real, a presença de componentes de séries temporais que são exatamente de ordem finita é um caso raro; portanto, o SSA é adequado em uma extensão muito maior. Por exemplo, tendências de variação lenta podem ser aproximadas por séries temporais de classificação finita, mas geralmente não são exatamente de classificação finita. Além disso, as modulações de amplitude de componentes periódicos não são exatamente de classificação finita para dados do mundo real. No entanto, isso não cria uma barreira para o SSA extraí-los. No entanto, um exemplo razoável de iterações Cadzow para extração de uma tendência exponencial pode ser encontrado no Fragmento 3.5.819.

3.5 SSA e regressão linear (LS-estimador de tendência linear)

Como discutimos anteriormente, o SSA pode extrair tendências, ou seja, componentes de séries temporais de variação lenta, uma vez que podem ser aproximados por séries temporais de classificação finita.

Idealmente (mas não necessariamente), as tendências devem ser séries de pequena classificação r . Série linear com termos $s_n = a_n + b$, $a_0 = 0$, $n = 1, \dots, N$, pertencem à classe das séries temporais, que são regidas por LRRs, e têm posto 2. No entanto, as funções lineares não são naturais para SSA (enquanto as séries exponenciais são muito naturais). A razão é que a raiz característica de uma série linear é 1 de multiplicidade 2 e a fórmula de recorrência linear mínima é $s_{n+2} = 2s_{n+1} - s_n$ (portanto, o polinômio característico é $\lambda^2 - 2\lambda + 1$). A presença de raízes transformadas em multiplicidade múltipla é duas vezes diferente. Quando se trata de séries exponenciais, os coeficientes das LRRs são multiplicados por uma constante. Quando se trata de séries exponenciais com taxas exponenciais pequenas ou uma senoide com período grande.

Há uma modificação do SSA, que foi chamada (Golyandina et al., 2001, Seção 1.7.1) SSA com dupla centralização. Nesse livro, é demonstrada a correspondência entre SSA com dupla centralização e a extração de tendências lineares. Como mostra (Golyandina & Shlemov, 2017), SSA com dupla centralização é um caso particular de SSA com projeção, onde são produzidas projeções das linhas e colunas da matriz de trajetória para determinados subespaços, subtraídas da matriz de trajetória, e então é realizada a expansão SVD da matriz residual. SSA com projeção é posicionado como SSA com o uso de algumas informações fornecidas antecipadamente. No momento, analisa-se apenas o uso de SSA com projeção para extração de tendências polinomiais.

A abordagem mais comum para estimar tendências lineares é o método de regressão linear, onde a solução de mínimos quadrados é usada. Vamos resumir os resultados da comparação entre SSA com dupla centralização e regressão linear. Certamente, se a série temporal consiste em uma tendência linear, o método dos mínimos quadrados fornece uma estimativa da tendência exata. No entanto, se o resíduo incluir, por exemplo, uma componente periódica, a tendência exata não é encontrada numericamente em (Golyandina & Shlemov, 2017) que para o caso $x_n = a_n + b + \sin(2\pi\gamma n + \bar{\gamma}) + \epsilon_n$ onde

ϵ_n é o ruído branco, o método LS aplicado à tendência, que foi obtido por SSA com dupla centralização, geralmente supera a estimativa LS convencional aplicada à série temporal original (ou seja, supera a regressão linear ordinária).

¹⁹<https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-358-fort-cadzow-iterations>

3.6 SSA e filtragem

Filtros lineares de resposta de impulso finito (FIR) são definidos como $f_n(X\tilde{y}) = \sum_{j=0}^{n-1} x_{\tilde{y}-j}$, onde $X = (x_1, \dots, x_N)$ é a série temporal de entrada. A principal característica dos filtros FIR é a resposta em frequência $A(\tilde{y})$, que tem uma explicação simples: se $x_n = \cos(2\tilde{y}n)$, então $f_n(X\tilde{y}) = A(\tilde{y}) \cos(2\tilde{y}n + \tilde{y}(\tilde{y}))$.

O SSA pode ser considerado como um conjunto de filtros adaptativos (consulte a Seção 2.4 para referências). Para o comprimento da janela L , cada componente reconstruído elementar para os pontos com números de L a $N - L + 1$ é obtido por um filtro FIR linear aplicado à série temporal original $X = (x_1, \dots, x_N)$. Se o comprimento da janela for pequeno, quase todos os pontos da saída SSA podem ser considerados como resultado da filtragem por um filtro FIR adaptativo. Se L for grande, este não é o caso. Na verdade, cada ponto da série reconstruída é uma combinação linear de valores da série original. No entanto, para cada ponto com número de $[1, L]$ e $[N - L + 1, N]$ temos diferentes combinações lineares.

O seguinte resultado é válido: seja SSA aplicado com $L \leq (N + 1)/2$ e $U = U_m$ ser o m -ésimo autovetor no SVD da matriz de trajetória X ; $m = 1, \dots, D$. Então a m -ésima série temporal reconstruída elementar tem a forma

$$\text{veloço}(m) = \sum_{j=\tilde{y}(L-1)}^{\tilde{y}} X_{\tilde{y}-j} \sum_{k=1}^{\tilde{y}} \frac{1}{L} \cos(k\tilde{y}j) x_{n\tilde{y}j}, \quad L - \tilde{y} \leq n \leq N - \tilde{y} + 1. \quad (10)$$

Este filtro é chamado de filtro de ponto médio. É mostrado em (Golyandina & Zhigljavsky, 2013, Seção 3.9) que a resposta em frequência $A(\tilde{y})$ do filtro de ponto médio é determinada pelo periodograma de U . Isso explica por que podemos realizar a etapa de agrupamento com base nas características de frequência de os autovetores U_m , $m = 1, \dots, D$.

Observe que se U consistisse em números iguais, obteríamos o filtro de Bartlett (triângulo). O autovetor líder tem componentes vetoriais próximos a uma constante se a série temporal for positiva e L for suficientemente pequeno (o mesmo sinal dos componentes do autovetor segue do teorema de Perron-Frobenius).

A outra propriedade útil é a seguinte. A largura de banda do filtro tende a ser mais estreita à medida que L (junto com N) aumenta. Ou seja, aumentando o comprimento da janela L podemos obter uma decomposição mais refinada. Lembre-se de que discutimos o comportamento de RCs em $[L, N - L + 1]$.

O chamado filtro do último ponto desempenha um papel importante no SSA, pois é utilizado para reconstrução do último ponto e, portanto, relacionado à previsão da série temporal. Não é realmente um filtro, pois é usado para reconstruir um ponto:

$$\text{veloço}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} U_{\tilde{y}-i} x_{N-i}.$$

No entanto, é o único filtro de reconstrução que é causal (ver (Golyandina & Zhigljavsky, 2013, Seção 3.9.5) para discussões).

Como regra, os filtros causais levam a um atraso. Por exemplo, a média móvel causal com a largura da janela W tem atraso $W/2$. O atraso no SSA depende da qualidade da separabilidade. Se o componente da série temporal de interesse for exatamente separável, o atraso será zero. Esta é uma vantagem importante do SSA sobre a média móvel. Essa vantagem é consequência das propriedades adaptativas do SSA.

3.7 SSA e ICA

A análise de componentes independentes (ICA) é introduzida para processos aleatórios e a palavra 'independente' está relacionada ao uso da independência estocástica em vez da não correlação no PCA que é

com base na ortogonalidade no SVD. No SSA, a maioria dos sinais não aleatórios são considerados. Portanto, o uso direto da abordagem ICA no algoritmo SSA não é apropriado. No ICA, diferentes medidas de independência estocástica são consideradas. Uma vez que a medida de independência é fixada, os componentes independentes são encontrados resolvendo o problema de maximização correspondente. A etapa de decomposição no SSA pode ser modificada de tal maneira que o problema de otimização ICA seja resolvido em vez do SVD e, assim, a separabilidade dos componentes do sinal possa ser melhorada.

Pelas razões explicadas na Seção 2.10.2, ICA é usado em SSA para uma decomposição aninhada.

O SSA com a versão SOBI-AMUSE do ICA é descrito em (Goliandina & Lomtev, 2016). Observe que esta versão é muito semelhante à modificação do SSA chamada SSA com derivativos (Golyandina & Shlemov, 2015), que foi criada com uma abordagem completamente diferente. A versão do SSA com maximização da entropia é descrita em (Goliandina & Zhigljavsky, 2013, Seção 2.5.4).

Outra conexão entre SSA e ICA está relacionada a aplicações para separação cega de sinais e é considerada em (Pietilä, El-Segai, Vigário, & Pesonen, 2006). Nessa aplicação, o Basic SSA é utilizado para pré-processamento, ou seja, para remoção de ruído e redução de dimensão; então o ICA é aplicado para a extração de componentes independentes de sua mistura de maneira convencional. Isso é semelhante ao uso do PCA antes do ICA para análise de dados multidimensionais (Kato, Yen-Wei Chen, & Gang Xu, 2006).

3.8 SSA e EMD, DFT, DWT

EMD A decomposição em modo empírico (EMD) (Huang & Wu, 2008) é frequentemente comparada com a SSA, uma vez que ambas são técnicas livres de modelo. Parece que o EMD é um método sem propriedades de aproximação explícitas, enquanto o SSA tem propriedades de separabilidade e aproximação. Os primeiros componentes extraídos pelo EMD são altamente oscilantes e o último componente é referido a uma tendência; para SSA, é o oposto, pois o sinal e a tendência normalmente correspondem aos componentes principais da decomposição; esta é uma vantagem do SSA como método de decomposição.

A vantagem do EMD é sua capacidade de extrair componentes periódicos com modulações complexas de amplitude e frequência. É provável que a combinação de SSA e EMD possa ampliar a gama de problemas do mundo real que estão sendo resolvidos.

DFT A transformada discreta de Fourier (DFT) difere da SSA pelo uso de uma base fixa consistindo de senos-cos-senos com frequências de uma grade equidistante contra a construção de uma base adaptativa em SSA. Em (Bozzo et al., 2010) a relação entre SSA e DFT é discutida. Observe que SSA de fato coincide com DFT na versão circular de SSA (ver terminologia em (Shlemov & Golyandina, 2014)), onde os dados são considerados dados em um círculo no caso 1D ou em um toro no caso 2D.

Do ponto de vista da estimativa de frequência (ver Seção 3.3), SSA e os métodos baseados em subespaço relacionados permitem estimar frequências com uma resolução melhor que $1/N$, onde N é o comprimento da série temporal (ver, por exemplo, (Santamaria, Pantaleón, & Ibanez, 2000) e (Stoica & Soderstrom, 1991) para comparações de DFT, ESPRIT e MUSIC). O método MUSIC permite construir pseudo-espectros semelhantes aos periodogramas, mas sem limitação nas frequências definidas. Comparando os modelos de séries temporais adequados aos métodos, pode-se dizer que uma soma de senoides puras corresponde a DFT, enquanto uma soma de senoides moduladas exponencialmente corresponde a SSA.

Outra aplicação da DFT é a estimação da densidade espectral por meio da suavização dos periodogramas. SSA pode ser usado para estimar a densidade espectral, veja, por exemplo, (Golyandina et al., 2001, Seção 6.4.3), onde os resultados de (Grenander & Szegő, 1984) em termos de SSA são discutidos. Se a densidade espectral for monotônica, diferentes autovetores geralmente correspondem a diferentes frequências; caso contrário, os autovetores são misturados, ou seja, podem incluir diferentes

frequências com contribuições comparáveis. Esta é uma explicação porque a maioria dos autovetores produzidos pelo ruído branco (que tem uma densidade espectral constante) são oscilantes irregularmente. E, vice-versa, os autovetores gerados pelo ruído vermelho (o processo autorregressivo de ordem um com coeficiente positivo) correspondem a frequências distintas.

Em (Yiou, Baert, & Loutre, 1996), discute-se a aplicação do SSA para estimação espectral em climatologia.

DWT Transformada wavelet discreta é a decomposição baseada em uma base fixa de espaço-tempo. Isso traz vantagens e desvantagens em comparação com o SSA. Ver discussão em (Yiou et al., 2000).

3.9 SSA: método e modelagem sem modelo

Na Seção 2.5 discutimos o modelo de séries temporais que se adequa ao SSA. Estas são séries temporais de posto finito ou, quase a mesma classe, séries temporais governadas por relações de recorrência linear. A última classe é ligeiramente mais estreita; embora seja muito mais compreensível na prática.

SSA é um método multifuncional, que pode ser livre de modelo ou usado para modelagem (este é uma característica distinta do SSA). Brevemente:

1. Como método exploratório, o SSA é uma técnica livre de modelos, que pode realizar a decomposição de séries temporais e a filtragem de frequência sem suposições dadas antecipadamente.
2. Se o sinal é governado por um LRR, o SSA permite obter a forma explícita do sinal e estimar os parâmetros; ou seja, o SSA é capaz de realizar a modelagem paramétrica.
3. Se o sinal satisfizer um LRR apenas aproximadamente (ou localmente), a previsão e a imputação de dados perdidos podem ser realizadas no âmbito do SSA sem construir o modelo paramétrico explícito; ou seja, SSA é um método adaptável. Esta é uma das principais vantagens do SSA, que amplia consideravelmente a gama de aplicações.

3.10 SSA: previsão e preenchimento de lacunas

Nesta seção, juntamos a previsão e o preenchimento de lacunas (imputação de dados ausentes), pois a previsão pode ser considerada como um caso particular de preenchimento de lacunas com lacunas artificiais no local dos dados previstos. Por outro lado, o preenchimento de lacunas pode ser considerado como previsão de dados internos.

Descoberta de parâmetros via validação cruzada Em geral, se um algoritmo possui parâmetros, sua escolha pode ser realizada com o auxílio do procedimento de validação cruzada, que consiste em construir a previsão sobre os dados de treinamento e depois calcular os erros nos dados de teste ; os parâmetros são escolhidos para minimizar o erro de validação cruzada.

Para a previsão, uma previsão móvel é realizada para a validação cruzada, onde os conjuntos de teste passam após os conjuntos de treinamento. Para preenchimento de lacunas, lacunas artificiais, localizadas em posições arbitrárias, são consideradas como dados de teste. Em geral, erros de imputação dos dados de teste podem ser considerados para a escolha dos parâmetros de previsão; no entanto, a precisão da previsão pode diferir significativamente da precisão da imputação, uma vez que para a imputação temos dados de ambos os lados, enquanto a previsão usa dados de apenas um lado e, portanto, é menos estável. É uma distinção importante, pois estamos procurando uma compensação entre precisão e estabilidade, que pode ser diferente para previsão e interpolação.

Previsão SSA Normalmente, o modelo de série temporal, que é uma soma de um sinal de classificação finita e ruído, é considerado para previsão. No entanto, a previsão dos componentes do sinal (por exemplo, uma tendência) também é possível. Além disso, o sinal ou seus componentes não devem ser exatamente de classificação finita.

Vários métodos de previsão baseados em subespaço são sugeridos em (Golyandina et al., 2001; Golyandina & Zhigljavsky, 2013): recorrentes, vetoriais e simultâneos. As duas primeiras versões da previsão SSA são usadas com mais frequência. Se o sinal é exatamente de posto finito, todos os três métodos dão o mesmo resultado.

Após a etapa de decomposição do algoritmo SSA ter sido realizada, os componentes elementares da série temporal podem ser identificados e agrupados. Cada grupo consistindo de componentes de sinal induz um subespaço gerado pelos autovetores do grupo correspondente; então a abordagem do subespaço (ver Seção 2.5.1) é aplicada a cada grupo separadamente. Os métodos baseados em subespaço são rápidos e funcionam bem para previsão em muitos casos, quando o SSA é apropriado. É conveniente que não se escolha antecipadamente o número de componentes elementares.

Vamos comentar a previsão recorrente do SSA. A previsão recorrente é realizada por um LRR especial (o LRR min-norm, cujo vetor de coeficientes tem uma norma mínima), que governa aproximadamente o sinal (ou o componente de sinal escolhido). Este algoritmo é conhecido como algoritmo de previsão linear (Kumaresan & Tufts, 1982), onde o LRR mínimo-norm é usado para previsão.

Vamos explicar a especialidade do LRR min-norm. Existem muitos LRRs, que governam o \hat{y}_T ; para vários vetores mesma série temporal, ou seja, $\hat{y}_T = P \hat{y}_{T-1} + B \hat{y}_{T-2}$, coeficientes $B = (b_1, \dots, b_i(s_{T-1} + \hat{y}_{T-1})) = k B_k 2 \hat{y}_{T-2}$ de no entanto, esses LRRs têm propriedades de supressão diferentes: $D \hat{y}_T = D P \hat{y}_{T-1}$ onde $\hat{y}_T = \hat{y}_k, k = 1, \dots, N$, são ruído branco, $\hat{y}_T^2 = D \hat{y}_k$. Se $\hat{y} = L \hat{y}_1$ for fixo, o SSA de previsão LRR (5) tem a norma mínima do vetor de coeficientes e, portanto, tem as melhores propriedades de supressão.

Exemplos de previsão são mostrados no Fragmento 3.2.120.

Imputação de dados perdidos baseada em subespaço A abordagem baseada em subespaço, que é usada para previsão, também pode ser considerada para imputação de valores perdidos (Golyandina & Osipov, 2007).

Geralmente, se um algoritmo de previsão funciona bem para a série temporal estudada, o mesmo algoritmo pode ser aplicado para preencher uma lacuna por previsão para frente da esquerda, por previsão para trás pela direita e depois por uma combinação dos resultados.

Os métodos baseados em subespaço funcionam bem se o subespaço do sinal puder ser estimado com precisão suficiente. Em termos de SSA, isso significa a necessidade de separabilidade aproximada do sinal, que queremos analisar, do resíduo.

Para preenchimento de lacunas, a versão em forma de SSA (consulte a Seção 2.9.3) é usada para obter a decomposição de SSA. O SSA moldado que é aplicado a séries temporais com intervalos limita a escolha do comprimento da janela, uma vez que um número suficiente de janelas do comprimento escolhido deve estar localizado nos locais sem intervalos e, portanto, a separabilidade que precisa de um grande comprimento de janela pode ser pior. Portanto, os métodos baseados em subespaço para preenchimento de lacunas são adequados apenas para um pequeno número de lacunas; geralmente, para vários conjuntos de valores ausentes localizados de forma compacta para permitir estimar o subespaço (Fragmento 3.3.121).

Preenchimento iterativo de lacunas Em (Kondrashov & Ghil, 2006), a abordagem de (Beckers & Rixen, 2003) foi aplicada a séries temporais. A abordagem sugerida em (Beckers & Rixen, 2003) é muito geral e pode ser aplicada aos dados de diferentes formas. O algoritmo é iterativo e tem dois parâmetros (para SSA), o comprimento da janela L e o posto r . Na primeira etapa, os dados ausentes são preenchidos por alguns

20<https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-321-forecasting-of-co2> 21<https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-331-subspace-based-gap-filling>

números; por exemplo, pelo valor médio. Em seguida, SSA(L,r) é aplicado à série temporal obtida, que não possui dados faltantes, para o cálculo da série reconstruída. Em seguida, os valores das posições, que inicialmente não estavam faltando, são alterados para os valores originais; SSA(L,r) é aplicado à série temporal obtida e assim por diante. Assim, repetimos iterações. A validação cruzada, onde lacunas artificiais servem como conjunto de teste, pode ser usada para escolher L e r.

O método iterativo é demorado; no entanto, esta é uma abordagem universal para imputação de dados perdidos, uma vez que é aplicável para locais de lacunas arbitrárias (consulte os Fragmentos 3.3.2 e 3.3.322). Para previsão, o método iterativo baseado em subespaço não é estável, pois utiliza os dados originais, que 'seguram' a imputação apenas da esquerda.

Previsão de AR e SSA Referimo-nos à Seção 3.2 para discussão de características comuns e exclusivas da previsão de AR e SSA.

Para o modelo de sinal que consiste em tendência e sazonalidade, o Seasonal ARIMA pode ser competitivo com o SSA. Existem exemplos do mundo real em que o ARIMA fornece melhor precisão; e vice versa; ver, por exemplo, (Hassani, Heravi, & Zhigljavsky, 2009; De Klerk, 2015a). Uma das vantagens do ARIMA é a capacidade de selecionar automaticamente a ordem do modelo ARIMA usando critérios de informação como o critério de informação Akaike (AIC) ou o critério de informação Bayesiano (BIC). O número r de componentes de sinal pode ser escolhido em SSA também com base na abordagem AIC/BIC; entretanto, como foi discutido no parágrafo dedicado à extração de sinal na Seção 3.14, essa abordagem tem muitas limitações. Observe que o modelo Sazonal ARIMA requer conhecer o período do componente da série temporal periódica, enquanto o SSA não. Além disso, observações de alguns períodos podem ser suficientes para SSA e definitivamente insuficientes para ARIMA sazonal. O fragmento 3.5.1823 contém um exemplo de comparação de SSA, Seasonal ARIMA e ETS.

3.11 SSA e detecção de sinal (Monte Carlo SSA)

O problema de detecção de sinal é muito importante na prática. Se o ruído for forte, é fácil encontrar sinais espúrios, pois o ruído (sendo considerado um processo estacionário) contém todas as frequências. A contribuição média de cada frequência é determinada pela densidade espectral do ruído. Em particular, isso implica que se a densidade espectral for maior para baixas frequências, a probabilidade de tendências espúrias ou ondas senoidais espúrias com baixas frequências aumenta. Este é exatamente o caso do chamado ruído vermelho (AR(1) com coeficiente positivo).

Como observamos uma realização de uma série temporal, a contribuição de cada frequência da grade $\{k/N, k = 0, \dots, [N/2]\}$ (consideramos os valores do periodograma, que correspondem a essas frequências, como suas contribuições) é aleatório com variância, que não tende a zero como N tende ao infinito. Além disso, tem uma distribuição exponencial, ou seja, grandes valores são prováveis.

A questão da existência de um sinal em ruído pode ser reduzida à construção de um critério para testar a hipótese nula de que a série temporal é um ruído puro; o critério deve ser poderoso contra a alternativa de que um sinal está presente. Existem muitos critérios para diferentes modelos de ruído. A maioria deles está relacionada ao modelo de ruído branco.

No quadro da SSA, o ruído vermelho é o outro foco de atenção. Uma das razões é que o SSA era principalmente popular em climatologia, onde as séries temporais climáticas são convencionalmente modeladas como ruído vermelho. Além disso, as propriedades do ruído vermelho são adequadas para SSA, uma vez que o ruído vermelho tem uma função espectral monotônica (consulte a Seção 3.8 para uma breve discussão).

[22https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-332-iterative-gap-filling-one-gap](https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-332-iterative-gap-filling-one-gap) [23https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-3518-sweetwhite-comparison-of-ssa-arima-e-ets](https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-3518-sweetwhite-comparison-of-ssa-arima-e-ets)

O método para detecção de um sinal em ruído vermelho foi denominado Monte Carlo SSA (Allen & Smith, 1996; Allen & Robertson, 1996; Palus & Novotná, 2004; Jemwa & Aldrich, 2006; Greco et al., 2011; Groth & Ghil, 2015; Garnot, Groth, & Ghil, 2018), pois utiliza simulações. Parece que o nome do método não reflete seu propósito como método de teste de hipóteses; no entanto, esse é o nome pelo qual essa abordagem é conhecida.

A abordagem usada em Monte Carlo SSA é direta. Primeiramente, deve-se escolher uma característica dos dados que reflita a diferença entre as hipóteses nula e alternativa; em seguida, os dados substituídos são simulados de acordo com a hipótese nula para construir a distribuição da característica escolhida. Finalmente, verifica-se se a característica escolhida dos dados do mundo real, que pode ser chamada de estatística de teste, está fora dos $(1 - \gamma)/2$ - e $(1 + \gamma)/2$ -quantis da distribuição construída. Se isso for verdade, a hipótese nula é rejeitada no nível de significância $1 - \gamma$. No caso de Monte Carlo SSA, esta característica é a norma ao quadrado da projeção da matriz de trajetória em um vetor escolhido que se refere a uma dada frequência. A relação com SSA está na escolha do vetor de projeção como um dos autovetores da matriz de trajetória; então a estatística de teste é igual ao autovalor correspondente.

Certamente, existem problemas adicionais, que devem ser resolvidos aplicando o esquema descrito. Por exemplo, os parâmetros do processo AR(1) que satisfazem a hipótese nula são desconhecidos e devem ser estimados. Para a detecção do sinal, não basta escolher apenas uma característica (um vetor de projeção correspondente a uma frequência se falarmos de Monte Carlo SSA), pois um provável sinal contém frequências previamente desconhecidas. Assim, surge o problema dos testes múltiplos. Referimo-nos a (Golyandina, 2019) para a descrição de uma abordagem estatística mais rigorosa para a construção do teste Monte Carlo SSA, onde o problema de testes múltiplos é resolvido e uma abordagem para controlar o erro tipo I e estimar o poder do teste é sugerida.

3.12 SSA e valores atípicos

O problema de robustez a outliers é essencial para qualquer método. Vamos considerar como esse problema pode ser resolvido no SSA. Lembre-se que para extração de sinal, o SSA Básico pode ser expresso por meio de duas projeções: $eS = T \tilde{Y} \tilde{Y}^H T^H X$ (Seção 2.5.2). No Basic SSA, ambas as projeções são realizadas na norma de Frobenius (que pode ser chamada de norma em L2). A norma de Frobenius ao quadrado é igual à soma das entradas da matriz/vetor ao quadrado.

Existem duas modificações do SSA, em que as projeções são realizadas em outra norma.

Projeções ponderadas A primeira abordagem é usar uma norma ponderada com pesos diferentes dos pontos da série temporal, onde os pontos suspeitos de serem discrepantes têm pesos menores.

Nesta abordagem, as projeções são realizadas na norma de Frobenius ponderada. Os pesos são escolhidos por um procedimento iterativo como o usado na suavização não paramétrica LOWESS (Cleveland, 1979) ou no método dos mínimos quadrados (IRLS) (Holland & Welsch, 1977), onde os pesos são escolhidos dependendo do resíduo valores de uma forma específica.

Nesta abordagem, o algoritmo de SSA com pesos deve ser implementado. SSA com pesos especiais, onde o SVD ordinário é alterado para o SSA oblíquo, pode ser implementado com aproximadamente o mesmo custo computacional do SSA Básico (Zvonarev & Golyandina, 2017). No entanto, pesos arbitrários de diferentes pontos da série temporal não são o caso. O SVD com pesos arbitrários não tem solução de forma fechada e, portanto, precisa de uma solução numérica iterativa. Assim, o algoritmo de SSA com projeções ponderadas, que auxilia na remoção de outliers, contém dois loops: o loop interno (para calcular o SVD ponderado) e o loop externo (para recalcular pesos com base nos resíduos); portanto, o algoritmo é muito demorado. Essa abordagem é descrita em (Trickett, Burroughs, & Milton, 2012; Chen & Sacchi, 2014), onde os autores consideram a

projeção ponderada para o conjunto de matrizes de baixo posto; no entanto, parece que eles consideram a projeção não ponderada para o conjunto de matrizes de Hankel (comparar com (Zvonarev & Golyandina, 2017, Prop.2)).

Projeções L1 A segunda abordagem também é frequentemente usada em problemas de aproximação. Para melhorar a robustez, as projeções são construídas na norma L1. A ideia de usar a aproximação da matriz de norma L1 em vez da norma L2 (ou seja, em vez do SVD comum se falarmos de SSA) é muito popular na análise de dados. Novamente, L1-SVD não tem solução de forma fechada e, portanto, algoritmos iterativos demorados devem ser aplicados. Existem muitos artigos dedicados a aproximações de baixa classificação L1. É mostrado em (Markopoulos, Karystinos, & Pados, 2014) que a solução ótima no caso de valor real tem o custo computacional de ordem $O(Ndk+1)$, onde d é o posto da matriz de dados e k é o número de componentes desejáveis. Portanto, soluções subótimas são consideradas para diminuir o custo (ver, por exemplo, (Kundu, Markopoulos, & Pados, 2014)).

A projeção L1 no conjunto de matrizes de Hankel é realizada pela mudança da média diagonal para tomar medianas em vez de médias. O algoritmo com o uso da norma L1 é considerado em (Kalantari, Yarmohammadi, & Hassani, 2016). No entanto, o problema de sua implementação com um custo computacional razoável ainda não está resolvido.

As considerações anteriores estavam relacionadas a modificações, que seriam robustas a outliers. Outro problema é detectar outliers. Uma abordagem comum para detecção de valores discrepantes é usar um método de detecção de ponto de mudança; então os outliers são removidos e os dados podem ser analisados por um método padrão não modificado. A detecção de outliers pode ser realizada por métodos baseados em subespaço com a ajuda de análise de espectro singular, veja (Golyandina et al., 2001, Capítulo 3.6.1), ou por métodos estatísticos padrão na etapa SVD (que é semelhante ao PCA), ver, por exemplo, (De Klerk, 2015b).

3.13 SSA e informações a priori/a posteriori

Vamos considerar quais informações sobre a série temporal podem ajudar a modificar o algoritmo SSA para estimativas mais precisas ou para analisar os resultados do algoritmo. Observe que a regra geral é válida: se a informação a priori usada estiver errada, o algoritmo modificado pode produzir resultados totalmente errados.

A suposição a priori mais utilizada é a estacionariedade da série temporal; então o Toeplitz SSA é usado (Seção 2.2.6). No Fragmento 2.2.224 é demonstrada a comparação do Toeplitz SSA com o Basic SSA na dependência da taxa exponencial (a taxa igual a 0 corresponde à estacionariedade).

Outra possível suposição a priori é que a tendência é polinomial. Especialmente para a tendência linear, é teoricamente comprovado e empiricamente confirmado que SSA com projeção pode melhorar consideravelmente a extração de tendência, veja a Seção 3.5 para detalhes.

A segunda abordagem pode ser chamada de posterior (Holmström & Launonen, 2013; Launonen & Holmström, 2017) ou bootstrap. Com base na abordagem bootstrap, os intervalos de confiança bootstrap podem ser construídos para qualquer característica, que é estimada pelo SSA; por exemplo, para o próprio sinal ou para os parâmetros do sinal. A abordagem bootstrap inclui a estimativa dos parâmetros de sinal e ruído com base na decomposição SSA. Em seguida, a simulação de uma amostra consistindo do sinal estimado mais o ruído simulado permite construir intervalos de confiança e predição.

Observe que a mesma abordagem é usada em Monte Carlo SSA (que na verdade é Bootstrap SSA) para testar hipóteses, consulte a Seção 3.11, e na previsão de SSA para construir os intervalos de confiança de bootstrap (Golyandina et al., 2018, Seção 3.2.1.5).

²⁴<https://ssa-with-r-book.github.io/01-chapter2-part1.html#fragment-222-simulation-comparison-of-toeplitz-e-basic-ssa>

A abordagem posterior utilizada em (Holmström & Launonen, 2013; Launonen & Holmström, 2017) para a detecção de componentes de tendência/periódicos testa a estabilidade dos componentes de decomposição para distinguir entre o sinal e o ruído.

3.14 SSA: identificação automática e processamento em lote

Vamos descrever abordagens para a identificação automática de eigentriplos em SSA para seu agrupamento e, em seguida, extrair os componentes de tendência e séries temporais periódicas.

Identificação de tendência Os métodos propostos para a identificação automática dos componentes de tendência são bastante naturais, pois a tendência pode ser descrita de forma não paramétrica como um componente de baixa frequência da série temporal.

Em (Vautard et al., 1992), foram sugeridos diferentes métodos para a detecção de componentes de tendência no SVD da matriz de trajetória; em particular, o número de zeros ou o coeficiente de correlação tau de Kendall foram considerados para a detecção de autovetores de tendência na etapa de agrupamento do algoritmo SSA. O número de zeros mostra (de forma indireta) se um componente é de baixa frequência.

A correlação tau de Kendall reflete se um componente está aumentando ou diminuindo.

Em (Alexandrov, 2009) e (Golyandina & Zhigljavsky, 2013, Seção 2.4.5.2), os componentes de baixa frequência são extraídos de forma direta pela análise dos periodogramas dos componentes. Mais precisamente, autovetores ou vetores fatoriais (ou séries temporais reconstruídas elementares) retirados da decomposição SSA são considerados. Em seguida, uma faixa de frequência $[0, \gamma_0]$ e um limiar são escolhidos. Se a contribuição das frequências de uma determinada faixa de frequência for maior que o limite, o componente é referido como o de tendência. Este algoritmo simples funciona muito bem se os componentes de tendência forem separados do residual. Se a tendência não tem uma forma complexa, geralmente a tendência é bem separada, veja o Fragmento 2.8.925. Uma abordagem ligeiramente diferente é descrita em (Watson, 2016).

Identificação de periodicidade A abordagem baseada em periodogramas de componentes pode ser estendida para a detecção de harmônicos (ondas senoidais). Uma característica específica da extração de harmônicos é que uma onda senoidal produz dois componentes na decomposição SSA para qualquer frequência em $(0, 0.5)$ e apenas um componente para a frequência 0.5. O algoritmo de reconhecimento de componentes de onda senoidal pareada com base nos periodogramas do componente foi sugerido em (Vautard et al., 1992) e estudado para aplicação em harmônicos modulados exponencialmente em (Alexandrov & Golyandina, 2005).

Considerando que a tendência é geralmente bem separada do residual, pares de componentes produzidos por diferentes harmônicos podem se misturar se as amplitudes dos harmônicos forem próximas. Duas modificações de SSA, SSA oblíqua iterativa e SSA com derivadas (consulte a Seção 2.10.2) podem ser aplicadas para melhorar a separabilidade antes do uso de algoritmos de identificação.

Agrupamento Acima, descrevemos diferentes abordagens para a identificação de tendências e a identificação de componentes periódicos. Uma abordagem comum para o agrupamento automático é aplicar um algoritmo de agrupamento à matriz de correlações ponderadas entre as séries temporais reconstruídas elementares.

Se os componentes da série temporal estiverem bem separados, essa abordagem funcionará bem, consulte o Fragmento 2.7.126. No entanto, esta forma de agrupamento falha se os grupos estiverem mal separados.

25<https://ssa-with-r-book.github.io/02-chapter2-part2.html#fragment-289-paynsa-automatically-tendencia-identificada>

26<https://ssa-with-r-book.github.io/01-chapter2-part1.html#fragment-271-white-dwarf-auto-grouping-por-agrupamento>

Uso da identificação automática A identificação automática e o processamento em lote têm seus próprios parâmetros, que podem ser escolhidos de acordo com a estrutura assumida dos componentes da série temporal de interesse. Portanto, essas técnicas funcionam no caso de análise de uma coleção de séries temporais semelhantes. Geralmente, para a escolha dos parâmetros do procedimento de identificação, uma análise preliminar de várias séries temporais deve ser realizada de forma interativa.

Observe que um método de identificação automática, que calcula algumas características dos componentes de decomposição e as compara com um limiar, pode fornecer uma estimativa útil para o agrupamento interativo com base nos valores das características consideradas.

Identificação do sinal Uma forma completamente diferente de identificação dos componentes do sinal é baseada na abordagem que utiliza um modelo paramétrico. Se o sinal é assumido como de posto finito r e é dominado, ou seja, os r componentes principais correspondem ao sinal na posição de decomposição SSA, então o modelo (que é determinado pelo posto do sinal) pode ser escolhido por critérios de informação como AIC ou BIC (o BIC é recomendado). Os critérios de informação precisam encontrar o MLE dos parâmetros do modelo, visto que, via de regra, uma estimativa LS do sinal é construída dentro de métodos de aproximação de baixo rank (Seção 3.4). A estimativa WLS com pesos apropriados, que coincide com a MLE se os resíduos são gaussianos, é considerada em (Zvonarev & Golyandina, 2018), onde é proposto um algoritmo rápido para a estimativa WLS; em particular, discute-se a diferença com a abordagem de (Usevich & Markovsky, 2014).

Considere o caso simples do ruído gaussiano branco, onde a estimativa LS ordinária e a MLE são as mesmas. Denote $eS(d)$ a estimativa LS do sinal de comprimento N assumindo o modelo paramétrico de série temporal de posto d . O número de parâmetros é $2d$. Defina $RSS(d) = KeS(d) - Sk$ Então, por definição, ².

$$AIC(d) = N \ln(RSS(d)/N) + 4d,$$

$$BIC(d) = N \ln(RSS(d)/N) + 2d \ln N.$$

Os valores de AIC/BIC podem ser utilizados para a escolha do posto r de forma convencional: a estimativa de r é o ponto mínimo do critério de informação considerado.

Os critérios de informação 'como estão' podem ser usados na declaração SLRA do problema, veja a Seção 3.4, se o sinal for de classificação finita e pudermos construir seu MLE. Na prática, os sinais são aproximados apenas por séries temporais de classificação finita. Mesmo que o sinal seja de posto finito, a estimativa de sinal dada por SSA geralmente não é de posto finito e não é a estimativa de LS. Assim, o uso de critérios de informação para a estimativa de rank é questionável em sua aplicação a problemas do mundo real.

A outra abordagem geral aplicada à escolha automática do posto r é a validação cruzada, que é discutida brevemente na Seção 3.10. Essa abordagem é demorada e pode ser aplicada apenas a séries temporais longas; além disso, o objetivo desta abordagem é encontrar r para melhor previsão/preenchimento de lacunas, não para estimativa de classificação de sinal. No entanto, esta técnica é apropriada sob suposições muito mais fracas sobre o sinal e o ruído; portanto, é aplicável na prática. O código R para a escolha da classificação do sinal r por validação cruzada pode ser encontrado nos Fragmentos 3.5.13–3.5.1527 .

3.15 SSA e aprendizado de máquina

Como mencionamos, SSA pode ser chamado de análise de componentes principais (PCA) para séries temporais. Portanto, o uso de SSA em muitos casos é semelhante ao uso de PCA (SVD) para dados multivariados. Em (Golyandina et al., 2018, Seção 1.7.3) pode-se encontrar uma breve revisão de artigos, onde SSA juntamente com alguns outros métodos (SVM, SVR e NN entre outros) são usados em aprendizado de máquina.

²⁷<https://ssa-with-r-book.github.io/03-chapter3.html#fragment-3513-functions-for-the-search-of-optimal-parâmetros>

4 Implementação do SSA

4.1 Software e implementação rápida

No momento, existem muitas implementações diferentes do SSA. Vamos enumerar vários deles:

1. o software interativo de uso geral 'Caterpillar'-SSA (<http://gistatgroup.com>, Vencer docas);
2. o software interativo voltado principalmente para aplicações climáticas, SSA-MTM Toolkit for Spectral Analysis e sua extensão comercial kSpectra Toolkit (<http://www.atmos.ucla.edu/tcd/ssa> , Unix, Mac);
3. o software estatístico comercial SAS, que inclui o SSA em sua extensão econométrica SAS/ETSr;
4. o pacote R Rssa, uma implementação multiplataforma de muitos métodos relacionados ao SSA (<http://cran.r-project.org/web/packages/Rssa>).

Algoritmos eficazes rápidos são implementados no pacote Rssa, onde o custo computacional (em flops) é reduzido de $O(N^3)$ para $O(kN \log N + k^2 N)$ e o consumo de memória é reduzido de $O(N^2)$ para $O(N)$; aqui N é o comprimento da série temporal, k é o número de autotripos calculados, o comprimento da janela L é considerado proporcional a N . Resumidamente, a abordagem é baseada no algoritmo de Lanczos e no cálculo da multiplicação vetorial através da Transformada Rápida de Fourier aplicada para o cálculo de convoluções (Korobeynikov, 2010; Golyandina et al., 2015).

Observe que a implementação Rssa da decomposição SSA não leva em consideração se os dados foram atualizados (se novos dados foram anexados à série temporal). Portanto, a aplicação do SSA aos dados atualizados dobra o custo computacional. Existem diferentes abordagens para atualizar o SVD. No entanto, ainda é uma questão sem resposta se um algoritmo para atualizar o SSA pode ser mais rápido do que a implementação atual do SSA.

Observemos finalmente que o raciocínio sobre o custo computacional dos métodos relacionados ao SSA, que são relatados na literatura, pode ser irrelevante; por exemplo, as fontes podem usar apenas as informações conhecidas na data de publicação. Vamos dar alguns exemplos. Em muitos artigos, o SSA é considerado um método muito demorado devido à expansão SVD utilizada; em particular, em alguns trabalhos anteriores, o método ESPRIT é chamado de demorado (com custo computacional $O(N^3)$ já que o comprimento da série temporal tende ao infinito). No entanto, a implementação do método em Rssa é muito mais rápida.

Outro exemplo é a previsão vetorial SSA. Em (Golyandina et al., 2001), este método é considerado muito demorado em comparação com a previsão recorrente SSA. Em Rssa, a implementação da previsão vetorial SSA (Golyandina et al., 2015) é ainda mais rápida que a recorrente. Por outro lado, isso não significa que a previsão recorrente não possa ser feita mais rapidamente nas próximas implementações.

Mais um exemplo está relacionado a questões matemáticas. Em SSA e principalmente em MSSA, o entendimento de que para a matriz de trajetória original e para a transposta as decomposições SVD são de fato as mesmas pode ajudar a diminuir consideravelmente o custo computacional pela escolha do caso, que é menos demorado para o algoritmo numérico usado.

4.2 Exemplo de cálculos em Rssa

Vamos demonstrar o quão rápido são os cálculos em Rssa. Para o comprimento da série temporal $N = 1000000$ e o comprimento da janela $L = 500000$, a reconstrução de um sinal de onda senoidal com base em dois componentes principais é executada em poucos segundos:

```

> biblioteca("Rss")
> N <- 1.000.000

> sinal <- sin((1:N)*2*pi/10) > ts <- sinal +
10*rnorm(1:N) > system.time(s <- ssa(ts, L = N/
2, svd.method = "auto", neig = 2)) decorrido 1,34
      do utilizador      sistema
      1.19            0,16

> system.time(rec <- reconstruir(s, grupos = lista(sig = 1:2))) decorrido 0,67
      do utilizador      sistema
      0,55            0,13

> max(abs(sinal - rec$sig)) [1] 0,0515102

```

5. Conclusão

Como os leitores podem ver, mesmo uma breve descrição dos temas relacionados à SSA compõe um artigo muito grande. Portanto, é difícil concluir este artigo de revisão com uma conclusão concisa. Resumindo, queremos expressar a esperança de que o artigo possa ajudar pesquisadores de várias áreas científicas a obter novos insights e aplicar com sucesso a SSA em seus estudos, juntamente com outros métodos padrão.

6 Reconhecimento

Agradeço aos meus coautores dos artigos e monografias dedicados à SSA pelo trabalho conjunto e discussões frutíferas, que me deram a possibilidade de olhar a SSA de diferentes pontos de vista. Meus agradecimentos especiais a Vladimir Nekrutkin pela revisão fornecida da literatura da SSA dos últimos anos.

Referências

- Alexandrov, T. (2009). Um método de extração de tendências usando análise de espectro singular. *RevStat*, 7 (1), 1–22.
- Alexandrov, T., & Golyandina, N. (2005). Extração automática e previsão de componentes cíclicos de séries temporais no âmbito do SSA. In *Proceedings of the 5th St. Petersburg workshop on Simulation* (pp. 45–50). Universidade Estadual de São Petersburgo.
- Allen, MR, & Robertson, AW (1996). Distinguindo oscilações moduladas de coloridas ruído em conjuntos de dados multivariados. *Clim Dynam*, 12 (11), 775-784.
- Allen, MR, & Smith, LA (1996). Monte Carlo SSA: Detectando oscilações irregulares no presença de ruído colorido. *J. Clim.*, 9 (12), 3373-3404.
- Badeau, R., David, B., & Richard, G. (2008). Limites de Cramér-Rao para múltiplos pólos e coeficientes de quase polinômios em ruído colorido. *Trans. IEEE Processamento de sinal*, 56 (8-1), 3458-3467. doi: 10.1109/TSP.2008.921719
- Badeau, R., Richard, G., & David, B. (2003, abril). Algoritmo ESPRIT adaptativo baseado no rastreador de subespaço PAST. Em 2003 IEEE conferência internacional sobre acústica, fala e processamento de sinais, 2003. anais. (icassp'03). (Vol. 6, p. VI-229). doi: 10.1109/ICASSP.2003.1201660
- Badeau, R., Richard, G., & David, B. (2008). Desempenho do ESPRIT para estimativa de misturas de exponenciais complexos modulados por polinômios. *IEEE Trans on Signal Process.*, 56 (2), 492–504.

- Barkhuijsen, H., de Beer, R., & van Ormondt, D. (1987). Algoritmo aprimorado para não iterativo ajuste de modelo no domínio do tempo para sinais de ressonância magnética exponencialmente amortecidos. *J. Magno. Res.*, 73 , 553-557.
- Basilevsky, A., & Hum, DPJ (1979). Análise de Karhunen-Loève de séries temporais históricas com aplicação aos nascimentos em plantações na Jamaica. *Geléia. Estado. Assoc.*, 74, 284-290.
- Beckers, J., & Rixen, M. (2003). Cálculos de EOF e preenchimento de dados de oceanografia incompleta conjuntos de dados. *Atmos. Oceano. Technol.*, 20 1839-1856.
- Belonin, MD, Golubeva, VA, & Skublov, GT (1982). Análise de fator x geologia [fator análise em geologia]. Moscou: Nedra. Recuperado de <http://www.geokniga.org/books/4531> (Em russo)
- Belonin, MD, Tatarinov, IV, Kalinin, OM, Shimanskij, VK, Beskrovnaya, OV, V., GV, & Pohitonova, T. E. (1971). Faktornyj analiz v neftyanoy geologia: Obzor [análise fatorial em geologia do petroleum: Revisão] (A. Margolin, Ed.). Moscou, VIEMS. (Em russo)
- Bozzo, E., Carniel, R., & Fasino, D. (2010, 08). Relação entre análise de espectro singular e Análise de Fourier: Teoria e aplicação ao monitoramento da atividade vulcânica. *Computar. Matemática. Appl.*, 60 (3), 812-820.
- Broomhead, D., & King, G. (1986a). Extrair dinâmicas qualitativas de dados experimentais. *Física D*, 20 , 217-236.
- Broomhead, D., & King, G. (1986b). Sobre a análise qualitativa da dinâmica experimental sistemas. Em S. Sarkar (Ed.), *Fenômenos não lineares e caos* (pp. 113-144). Bristol: Adam Hilger.
- Buchstaber, V. (1994). Análise de séries temporais e Grassmannians. Em S. Gindikin (Ed.), *Aplicado problemas de transformada de radônio* (Vol. 162, pp. 1-17). Providência: AMS.
- Cadzow, JA (1988). Aprimoramento de sinal: um algoritmo de mapeamento de propriedades compostas. *Trans. IEEE Acústico*, 36 (1), 49-62.
- Chen, K., & Sacchi, MD (2014). Filtragem robusta de classificação reduzida para atenuação de ruído sísmico errática Filtragem robusta de classificação reduzida. *Geofísica*, 80 (1), V1. doi: 10.1190/geo2014-0116.1
- Cleveland, WS (1979). Robusta regressão localmente pesada e diagramas de dispersão suavizados. *Journal of the American Statistical Association*, 74 (368), 829-836. doi: 10.1080/01621459.1979.10481038
- Colebrook, JM (1978). Registros contínuos de plâncton — zooplâncton e meio ambiente, nordeste Atlântico e Mar do Norte, 1948-1975. *Oceano. Act.*, 1 , 9-23.
- Danilov, D., & Zhigljavsky, A. (Eds.). (1997). Principal componente vremennyh ryadov: método 'Gusenica' [principais componentes de séries temporais: o método 'Caterpillar']. Imprensa da Universidade de São Petersburgo. Recuperado de <http://www.gistatgroup.com/gus/book1/index.html> (Dentro Russo)
- De Klerk, J. (2015a). Uma comparação de métodos de previsão de análise de espectro singular para prever Dados de chegadas turísticas da África do Sul. *Estudos em Economia e Econometria*, 39 (2), 21-40.
- De Klerk, J. (2015b). Detecção de valores discrepantes de séries temporais usando a matriz de trajetória no espectro singular análise com mapas de outliers e ROBPCA [Artigo de Revista]. *Jornal Estatístico da África do Sul*, 49 (1), 61-76.
- de Prony, G. (1795). Ensaio experimental e analítico sobre as leis da dilatabilidade dos fluidos. elásticos e sobre os da força expansiva do vapor de água e vapor de álcool em temperaturas diferentes. *J de l'Ecole Polytechnique*, 1 (2), 24-76.
- Eckart, C., & Young, G. (1936). A aproximação de uma matriz por outra de classificação inferior. *Psychometrika*, 1 (3), 211-218. doi: 10.1007/BF02288367
- Efimov, V., & Galaktionov, Y. (1983). Sobre possibilidade de previsão de variabilidade cíclica para abundância de mamíferos. *Journal of General Biology*, 44 (3), 343-352. (em russo)

- Elsner, JB, & Tsonis, AA (1996). *Análise de Espectro Singular: Uma nova ferramenta em séries temporais análise*. Pleno.
- Fraedrich, K. (1986). Estimativa das dimensões dos atratores do tempo e do clima. *J. Atmos. Sci.*, 43, 419-432.
- Gantmacher, FR (1959). *A teoria das matrizes*. Chelsea Publishing Company, Nova York 68.
- Garnot, VSF, Groth, A., & Ghil, M. (2018). Modos econômicos climáticos acoplados no Sahel variabilidade interanual. *Economia Ecológica*, 153.07.006 , 111 - 123. doi: 10.1016/j.ecolecon.2018
- Ghil, M., & Vautard, R. (1991). Oscilações interdecadais e a tendência de aquecimento na temperatura global série temporal. *Natureza*, 350 , 324-327.
- Golyandina, N. (2010). Sobre a escolha de parâmetros em análise de espectro singular e afins métodos baseados em subespaço. *Estado. Interface*, 3 (3), 259–279.
- Golyandina, N. (2019). Abordagem estatística para detecção de sinais por Monte Carlo singular análise de espectro: Testes múltiplos. arXiv:1903.01485 . Recuperado de <https://arxiv.org/abs/1903.01485>
- Golyandina, N., Korobeynikov, A., Shlemov, A., & Usevich, K. (2015). Multivariado e 2D extensões de análise de espectro singular com o pacote Rssa. *J Stat Softw*, 67 (2), 1–78.
- Golyandina, N., Korobeynikov, A., & Zhigljavsky, A. (2018). *Análise de espectro singular com R*. Springer-Verlag Berlim Heidelberg.
- Golyandina, N., & Lomtev, M. (2016). Melhoria da separabilidade de séries temporais em análise de espectro singular usando o método de análise de componentes independentes. *Vestnik São Petersburgo Universidade. Matemática*, 49 (1), 9-17.
- Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. (2001). *Análise da estrutura de séries temporais: SSA e técnicas relacionadas*. Chapman&Hall/CRC.
- Golyandina, N., & Osipov, E. (2007). O método “Caterpillar”-SSA para análise de séries temporais com valores ausentes. *J. Stat. Plano. Inferência*, 137 (8), 2642-2653.
- Golyandina, N., & Shlemov, A. (2015). Variações de análise de espectro singular para separabilidade melhoria: Decomposições não ortogonais de séries temporais. *Interface Stat*, 8 (3), 277–294.
- Golyandina, N., & Shlemov, A. (2017). Análise de espectro singular semi-não paramétrica com projeção. *Interface de status*, 10 (1), 47–57.
- Golyandina, N., & Usevich, K. (2010). Extensão 2D da análise de espectro singular: algoritmo e elementos da teoria. Em V. Olshevsky & E. Tyrtyshnikov (Eds.), *Métodos de matriz: Teoria, algoritmos e aplicativos* (p. 449-473). Publicação Científica Mundial.
- Golyandina, N., & Zhigljavsky, A. (2013). *Análise de Espectro Singular para séries temporais*. Springer.
- Greco, G., Rosa, R., Beskin, G., Karpov, S., Romano, L., Guarnieri, A., . . . Bedogni, R. (2011). Evidências de componentes determinísticos na aparente aleatoriedade dos GRBs: pistas de um caos dinâmico. *Relatórios científicos*, 1 , 91.
- Grenander, U., & Szegő, G. (1984). *Formulários Toeplitz e suas aplicações*. Nova York: Chelsea.
- Groth, A., & Ghil, M. (2011, set). Análise multivariada de espectro singular e o caminho para a fase sincronização. *Física Rev. E*, 84, 036206. doi: 10.1103/PhysRevE.84.036206
- Groth, A., & Ghil, M. (2015). Análise de espectro singular de Monte Carlo (SSA) revisitada: Detectando clusters de osciladores em conjuntos de dados multivariados. *Journal of Climate*, 28 (19), 7873-7893. doi: 10.1175 / JCLI-D-15-0100.1
- Hall, MJ (1998). *Teoria combinatória*. Wiley, Nova York.
- Hansen, PC, & Jensen, SH (1998, junho). Representações de filtro FIR de ruído de classificação reduzida redução. *Trans. IEEE Signal Process.*, 46, 1737-1741.
- Harris, T., & Yan, H. (2010). Filtragem e interpretações de frequência de análise de espectro singular. *Física D*, 239 , 1958-1967.

- Hassani, H., Heravi, S., & Zhigljavsky, A. (2009). Previsão da produção industrial europeia com análise de espectro singular. *Int. J. Previsão.*, 25 (1), 103–118.
- Hassani, H., & Thomakos, D. (2010). Uma revisão sobre análise de espectro singular para economia e série temporal financeira. *Interface de status*, 3 (3), 377–397.
- Hassani, H., Xu, Z., & Zhigljavsky, A. (2011). Análise do espectro singular com base na teoria da perturbação. *Análise não linear: Aplicações do mundo real*, 12 (5), 2752 - 2766. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.03.020
- Holland, PW, & Welsch, RE (1977). Regressão robusta usando mínimos quadrados ponderados iterativamente. *Comunicações em Estatística - Teoria e Métodos*, 6 (9), 813-827. doi: 10.1080/ 03610927708827533
- Holmström, L., & Launonen, I. (2013, outubro). Análise de espectro singular posterior. *Estado. Anal. Dados Min.*, 6 (5), 387-402. doi: 10.1002 / sam.11195
- Hua, Y. (1992). Estimativa de frequências bidimensionais por realce de matriz e lápis de matriz. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, 40 (9), 2267–2280.
- Huang, NE, & Wu, Z. (2008). Uma revisão sobre a transformada de Hilbert-Huang: Método e suas aplicações aos estudos geofísicos. *Comentários de Geofísica*, 46 (2). doi: 10.1029/2007RG000228
- Ivanova, E., & Nekrutkin, V. (2019). Duas abordagens assintóticas para o sinal exponencial e ruído harmônico na análise do espectro singular. *Estado. Interface*, 12 (1), 49–59.
- Jemwa, GT, & Aldrich, C. (2006). Classificação da dinâmica do processo com análise de espectro singular de Monte Carlo. *Computers & Chemical Engineering*, 30 (5), 816 - 831. doi: 10.1016/ j.compchemeng.2005.12.005
- Kalantari, M., Yarmohammadi, M., & Hassani, H. (2016). Análise de espectro singular com base na norma L1. *Cartas de Flutuação e Ruído*, 15 (01), 1650009.
- Kato, M., Yen-Wei Chen e Gang Xu. (2006, abril). Rastreamento articulado da mão pela abordagem PCA-ICA. Em 7ª conferência internacional sobre reconhecimento automático de rosto e gestos (fgr06) (p. 329-334). doi: 10.1109/ FGR.2006.21
- Keppenne, C., & Ghil, M. (1992). Filtragem adaptativa e previsão do índice de oscilação sul. *Jornal de Pesquisa Geofísica: Atmosferas*, 97 (D18), 20449-20454.
- Keppenne, C., & Lall, U. (1996). Análise de espectro singular complexo e splines de regressão adaptativa multivariada aplicados à previsão da oscilação sul. Em *Exp. força de longa duração. touro.*
- Khan, MAR, & Poskitt, DS (2013). Uma nota sobre a seleção do comprimento da janela na análise de espectro singular. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 55 (2), 87-108. doi: 10.1111/anzs.12027
- Kondrashov, D., & Ghil, M. (2006). Preenchimento espaço-temporal de pontos perdidos em dados geofísicos conjuntos. *Processo não linear, Geophys.*, 13 (2), 151-159.
- Korobeynikov, A. (2010). Implementação eficiente de computação e espaço do SSA. *Estado. Interface*, 3 (3), 357-368.
- Korobeynikov, A., Shlemov, A., Usevich, K., & Golyandina, N. (2017). *Rssa: Uma coleção de métodos para análise de espectro singular [manual de software de computador]*. Recuperado de [http:// CRAN.R-project.org/ package=Rssa](http://CRAN.R-project.org/package=Rssa) (Pacote R versão 1.0)
- Kouchaki, S., Sanei, S., Arbon, EL, & Dijk, D. (2015, janeiro). Análise de espectro singular baseada em tensor para pontuação automática do EEG do sono. *Transações IEEE em Sistemas Neurais e Engenharia de Reabilitação*, 23 (1), 1-9. doi: 10.1109/TNSRE.2014.2329557
- Kumaresan, R., & Tufts, D. (1982). Estimativa dos parâmetros de senóides amortecidas exponencialmente e modelagem de pólo-zero em ruído. *IEEE Trans Acoust*, 30 (6), 833–840.
- Kundu, S., Markopoulos, PP, & Pados, DA (2014, maio). Cálculo rápido do componente principal L1 de dados de valor real. Em 2014 ieee conferência internacional sobre acústica, fala e

- processamento de sinal (icassp) (p. 8028-8032). doi: 10.1109/ICASSP.2014.6855164
- Launonen, I., & Holmström, L. (2017, agosto). Análise multivariada do espectro singular posterior. *Statistical Methods & Applications*, 26 (3), 361-382. doi: 10.1007/s10260-016-0371-x
- Leles, MCR, Sansao, JPH, Mozelli, LA, & Guimarães, HN (2018). Um novo algoritmo no quadro de análise de espectro singular: The Overlap-SSA (ov-SSA). *SoftwareX*. doi: <https://doi.org/10.1016/j.softx.2017.11.001>
- Markopoulos, PP, Karystinos, GN, & Pados, DA (2014, out). Algoritmos ótimos para L1-processamento de sinal subespacial. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62 (19), 5046-5058. doi: 10.1109/TSP.2014.2338077
- Markovsky, I. (2019). Aproximação de baixo escalão: Algoritmos, implementação, aplicações (comunicações e engenharia de controle) (2ª ed.). Springer.
- Mees, AI, Rapp, PE, & Jennings, LS (1987, julho). Decomposição e incorporação de valor singular dimensão. *Física Rev. A*, 36 , 340-346. doi: 10.1103 / PhysRevA.36.340
- Moskvina, V., & Zhigljavsky, A. (2003). Um algoritmo baseado em análise de espectro singular para detecção de ponto de mudança. *Commun Stat Simul Comput*, 32 (2), 319–352.
- Nekrutkin, V. (2010). Expansões de perturbação de subespaços de sinal para sinais longos. *Estado. Interface*, 3 , 297-319.
- Nekrutkin, V., & Vasilinet, I. (2017). Extração assintótica de subespaços de sinal comuns de sinais perturbados. *Estatísticas e sua Interface*, 10 (1), 27–32.
- Oropeza, V. (2010). O método de análise de espectro singular e sua aplicação a dados sísmicos denoising e reconstrução. Dissertação de Mestrado na Universidade de Alberta.
- Palus, M., & Novotná, D. (2004, dezembro). Análise Aprimorada do Sistema Singular Monte Carlo e detecção do período de 7,8 anos modos oscilatórios no índice NAO mensal e temperatura registros. *Processos não lineares em geofísica*, 11 (5/6), 721-729.
- Papy, JM, De Lathauwer, L., & Van Huffel, S. (2005). Ajuste de dados exponenciais usando álgebra multilinear: o caso de canal único e multicanal. *Álgebra Linear Numérica com Aplicações*, 12 (8), 809-826.
- Pietilä, A., El-Segaier, M., Vigário, R., & Pesonen, E. (2006). Separação de fonte cega de coração sopros de gravações cardíacas. Em J. Rosca & et al (Eds.), *Análise de componentes independentes e separação de sinal cego* (Vol. 3889, pp. 470-477). Springer Berlim/Heidelberg.
- Plaut, G., & Vautard, R. (1994). Feições de oscilações de baixa frequência e regimes climáticos no hemisfério norte. *J Atmospheric Sci*, 51 , 210-236.
- Roy, R., & Kailath, T. (1989). ESPRIT: estimativa de parâmetros de sinal via invariância rotacional técnicas. *Trans. IEEE Acoust.*, 37 Sahnoun, , 984-995.
- S., Usevich, K., & Comon, P. (2017). ESPRIT multidimensional para amortecimento e sinais não amortecidos: Algoritmo, cálculos e análise de perturbação. *Trans. IEEE Sinal Processamento*, 65 (22), 5897-5910.
- Sanei, S., & Hassani, H. (2015). Análise de espectro singular de sinais biomédicos. *Imprensa CRC*.
- Santamaria, I., Pantaleon, C., & Ibanez, J. (2000). Um estudo comparativo de frequência de alta precisão métodos de estimativa. *Sistemas Mecânicos e Processamento de Sinais*, 14 (5), 819 - 834. doi: 10.1006 / mssp.2000.1321
- Sauer, Y., Yorke, J., & Casdagli, M. (1991). Embedologia. *J Stat Phys*, 65 Shlemov, A., & , 579-616.
- Golyandina, N. (2014). Extensões em forma de Análise de Espectro Singular. Em 21º simpósio internacional sobre teoria matemática de redes e sistemas, 7 a 11 de julho de 2014. groningen, Holanda (pp. 1813-1820).
- Sidiropoulos, ND, De Lathauwer, L., Fu, X., Huang, K., Papalexakis, EE, & Faloutsos, C. (2017, Julho). Decomposição de tensores para processamento de sinais e aprendizado de máquina. *Transações IEEE em Processamento de Sinais*, 65 (13), 3551-3582. doi: 10.1109/TSP.2017.2690524

- Stoica, P., & Moses, RL (2005). Análise espectral de sinais. Alto Rio Sela.
- Stoica, P., & Soderstrom, T. (1991, agosto). Análise estatística de MÚSICA e estimativas de rotação subespacial de frequências senoidais. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39 (8), 1836-1847. doi: 10.1109/78.91154
- Trickett, S. (2003). Supressão de ruído de autoimagem F-xy. *Geofísica*, 68 (2), 751-759.
- Trickett, S., Burroughs, L., & Milton, A. (2012). Filtragem robusta de redução de classificação para ruído errático (Rep. Téc.). doi: 10.1190/segam2012-0129.1
- Tufts, DW, Kumaresan, R., & Kirsteins, I. (1982, Junho). Estimativa de sinal adaptativo de dados por decomposição de valor singular de uma matriz de dados. *Proc. IEEE*, 70 (6), 684-685.
- Usevich, K., & Markovsky, I. (2014). Projeção variável para aproximação de baixo nível estruturada afim em 2-normas ponderadas. *Jornal de Matemática Computacional e Aplicada*, 272 430–448.
- Van Huffel, S. (1993). Resolução aprimorada com base na estimativa de variação mínima e modelagem de dados exponencial. *Signal Processing*, 33 (3), 333-355. doi: 10.1016/0165-1684(93)90130-3
- Vautard, R., & Ghil, M. (1989). Análise de espectro singular em dinâmica não linear, com aplicações em séries temporais paleoclimáticas. *Physica D*, 35 395-424.
- Vautard, R., Yiou, P., & Ghil, M. (1992). Análise de Espectro Singular: Um kit de ferramentas para curtas e barulhentas sinais caóticos. *Física D*, 58 , 95-126.
- Vlassieva, E., & Golyandina, N. (2009). Erros SSA de primeira ordem para séries temporais longas: exemplos de modelos de sinais ruidosos simples. In *Proceedings of the 6th st.petersburg workshop on simulation vol.1*, 28 de junho a 4 de julho de 2009, st. Petersburg (pp. 314-319). Universidade Estadual de São Petersburg.
- Watson, PJ (2016). Identificando as análises de séries temporais com melhor desempenho para pesquisa do nível do mar. Em I. Rojas & H. Pomares (Eds.), *Análise e previsão de séries temporais: Contribuições selecionadas da conferência itise* (pp. 261–278). Cham: Springer International Publishing.
- Weare, BC, & Nasstrom, JS (1982). Exemplos de função ortogonal empírica estendida análises. *Mon Weather Rev*, 110 (6), 481–485.
- Yang, D., Yi, C., Xu, Z., Zhang, Y., Ge, M., & Liu, C. (2017). Análise aprimorada de espectro singular baseada em tensor com base no algoritmo de separação de fonte cega de canal único e sua aplicação ao diagnóstico de falhas. *Ciências Aplicadas*, 7 (4), 1-15.
- Yiou, P., Baert, E., & Loutre, M. (1996). Análise espectral de dados climáticos. *Sobreviver Geophys*, 17 , 619-663.
- Yiou, P., Sornette, D., & Ghil, M. (2000). Wavelets adaptáveis a dados e análise de espectro singular multiescala. *Physica D: Fenômenos não lineares*, 142 (3), 254–290. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00045-2](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00045-2)
- Zvonarev, N., & Golyandina, N. (2017). Algoritmos iterativos para finito ponderado e não ponderado rank aproximações de séries temporais. *Interface de status*, 10 (1), 5–18.
- Zvonarev, N., & Golyandina, N. (2018). Método de Gauss-Newthton modificado na estimação de sinal de baixa classificação. arXiv:1803.01419 . Recuperado de <https://arxiv.org/abs/1803.01419>