第 9 章　线性规划与整数规划

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com
微信：sishoukui

在工程技术、经济管理、科学研究、军事作战训练及日常生产生活等众多领域中，人们常常会遇到各种优化问题。例如，在生产经营中，我们总是希望制订最优的生产计划，充分利用已有的人力、物力资源，获得最大的经济效益；在运输问题中，我们总是希望设计最优的运输方案，在完成运输任务的前提下，力求运输成本最小等。针对优化问题的数学建模问题也是数学建模竞赛中一类比较常见的问题，这样的问题常常可以使用数学规划模型进行研究。

数学规划是运筹学的一个重要分支，而线性规划又是数学规划中的一部分主要内容。很多实际问题都可以归结为“线性规划”问题。线性规划（Linear Programming，简记为LP）有比较完善的理论基础和有效的求解方法，在实际问题中有极其广泛的应用。特别是随着计算机技术的飞速发展，线性规划的应用在深度和广度上有了极大的提高。

4.1　线性规划

4.1.1　线性规划模型及概念

1. 引例

我们来看 1 个关于线性规划的引例。

例 9.1　某企业利用两种原材料 A 和 B 生产三种产品 P_1 、 P_2 和 P_3。已知每生产 1 公斤的产品所消耗的原材料 A 、B 的数量（单位：公斤）和花费的加工时间 C（单位：小时），每公斤产品销售后所带来的利润（单位：元）以及每天可用的资源的数量如**表** 9.1 所示，则该企业应该如何制订每天的生产计划，才能使所获利润达到最大？

表 9.1　**企业生产数据表**

资源	产品			可用数量
	P_1	P_2	P_3	
原材料 A	2	4	3	150
原材料 B	3	1	5	160
加工时间 C	7	3	5	200
产品利润	70	50	60	

问题分析： 该问题是在企业的生产经营中经常面临的一个问题：如何制订一个最优的生产计划？因为原材料和加工时间的可用数量是有限的，这也就构成了该问题的约束条件，而解决该问题也就是在满足上述约束条件的前提下，确定三种产品的产量，使得产品销售后所获得的利润达到最大值。

模型假设： 假设该企业的产品不存在积压，即产量等于销量。

符号说明： 设 x_i 表示产品 P_i 每天的产量，$i=1,2,3$。通常称 x_i 为**决策变量**。

模型建立： 该问题的目标是使得总利润 $z=70x_1+50x_2+60x_3$ 达到最大值。通常称该利润函数为**目标函数**。

产品的产量应受到某些条件的限制。首先，两种原材料每天的实际消耗量不能超过可用数量，因此有

$$2x_1+4x_2+3x_3 \le 150,$$
$$3x_1+x_2+5x_3 \le 160.$$

其次，生产两种产品时所花费的加工时间也不能超过该企业每天的最大可用加工时间，

即 $7x_1+3x_2+5x_3 \le 200$ 。最后，三种产品的产量还应该满足非负约束，即 $x_i \ge 0,\ \ i=1,2,3$ 。由限制条件所确定的上述不等式，通常称为**约束条件**。

综上，可以建立该问题的数学模型为

$$\max z = 70x_1 + 50x_2 + 60x_3,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3 \le 150, \\ 3x_1+x_2+5x_3 \le 160, \\ 7x_1+3x_2+5x_3 \le 200, \\ x_i \ge 0,\ \ i=1,2,3. \end{cases} \tag{9.1}$$

这里的s.t.(subject to 的缩写)是“受约束于”的意思。

求解该数学模型，便可得到该企业最优的生产计划制订方案。

2. 建立线性规划模型的一般步骤

由前面的引例可知，规划问题的数学模型由三个要素组成：（1）决策变量，是问题中要确定的未知量，用于表明规划问题中的用数量表示的方案、措施等，可由决策者决定和控制；（2）目标函数，是决策变量的函数，优化目标通常是求该函数的最大值或最小值；（3）约束条件，是决策变量的取值所受到的约束和限制条件，通常用含有决策变量的等式或不等式表示。

建立线性规划模型通常需要以下三个步骤：

第一步：分析问题，找出决策变量。

第二步：根据问题所给条件，找出决策变量必须满足的一组线性等式或者不等式约束，即为约束条件。

第三步：根据问题的目标，构造关于决策变量的一个线性函数，即为目标函数。

有了决策变量、约束条件和目标函数这三个要素之后，一个线性规划模型就建立起来了。

3.线性规划模型的形式

线性规划模型的一般形式为

$$\max(\text{或}\min)\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\text{或}=,\ \ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\text{或}=,\ \ge) b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\text{或}=,\ \ge) b_m, \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0. \end{cases} \tag{9. 2}$$

或简写为

$$\max(\text{或}\min)\ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\text{或}=,\ \ge) b_i,\ \ i=1,2,\cdots,m, \\ x_j \ge 0,\ \ j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

其向量表示形式为

$$\max(\text{或}\min)\ \ z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_jx_j \le (\text{或}=,\ \ge) \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \ge 0. \end{cases}$$

其矩阵表示形式为

$$\max(\text{或}\min)\ z=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}A\boldsymbol{x}\le(\text{或}=,\ \ge)\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x}\ge 0.\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,\cdots,c_n]^T$ 为目标函数的系数向量，又称为价值向量；$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$ 称为决策向量；$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为约束方程组的系数矩阵，而 $\boldsymbol{P}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^T$， $j=1,2,\cdots,n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，又称为约束方程组的系数向量；$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$ 称为约束方程组的常数向量。

4. 线性规划问题的解的概念

一般线性规划问题的（数学）标准型为

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{9.3}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,2,\cdots,m,\\ x_j\ge 0\quad j=1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{9.4}$$

其中 $b_i\ge 0$， $i=1,2,\cdots,m$。

可行解　满足约束条件(9.4)的解 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$，称为线性规划问题的可行解，而使目标函数(9.3)达到最大值的可行解叫最优解。

可行域　所有可行解构成的集合称为问题的可行域，记为 Ω。

5.灵敏度分析

灵敏度分析是指对系统因周围条件变化显示出来的敏感程度的分析。

在线性规划问题中，我们都设定 a_{ij},b_i,c_j 是常数，但在许多实际问题中，这些系数往往是估计值或预测值，经常有少许的变动。

例如在模型(9.2)中，如果市场条件发生变化，c_j 值就会随之变化；生产工艺条件发生改变，会引起 b_i 变化；a_{ij} 也会由于种种原因产生改变。

因此提出这样两个问题：

（1）如果参数 a_{ij},b_i,c_j 中的一个或者几个发生了变化，现行最优方案会有什么变化？

（2）将这些参数的变化限制在什么范围内，原最优解仍是最优的？

当然，有一套关于“优化后分析”的理论方法，可以进行灵敏度分析。具体参见有关的运筹学教科书。

但在实际应用中，给定参变量一个步长使其重复求解线性规划问题，以观察最优解的变化情况，这不失为一种可用的数值方法，特别是使用计算机求解时。

对于数学规划模型，一定要做灵敏度分析。

9.1.2　线性规划模型应用举例

例 9.2　某厂月底安排某一产品在下个月共 4 周的生产计划。估计每件产品在第一周与第二周的生产成本为 150 元，后两周的生产成本为 170 元。各周产品需求量分别为 700 件、800 件、1000 件和 1200 件。工厂每周至多生产产品 900 件，在第二周和第 3 周可以加班生产，加班生产时每周可增产 300 件，但生产成本每件需增加 30 元，过剩的产品的存储费为每件每周 15 元。问：（1）如何安排生产计划，使总成本最小？（2）若加班生产的产量为固定值 200 件，则又该如何安排生产计划，使总成本最小？

解　（1）该产品 4 周总需求量为 3700 件，正常生产总产量最多是 3600 件，所以需要加班生产。第二周、第三周加班生产的产量最多可以增加 300 件，但加班生产的成本增大。另外，过剩的产品需要支付存储费，因此要统筹安排。

设 $x_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 周正常生产的产品数量，$a_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 周每件产品的生产成本，$b_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 周产品的需求量，$y_j(j=2,3)$ 表示第二周、第三周加班生产的数量，$c_i(i=2,3)$ 表示第二周、第三周加班时每件产品的生产成本，e 表示每件产品每周的存储费。

第一周过剩的产品数量为 x_1-700，第二周过剩的产品数量为 $x_1+x_2+y_2-1500$，第三周过剩的产品数量为 $x_1+x_2+x_3+y_2+y_3-2500$，第四周没有过剩的产品。

总成本

$$z=\sum_{i=1}^{4}a_ix_i+\sum_{j=2}^{3}c_jy_j+e(x_1-700)+e(x_1+x_2+y_2-1500)+e(x_1+x_2+x_3+y_2+y_3-2500).$$

建立如下的线性规划模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{4}a_ix_i+\sum_{j=2}^{3}c_jy_j+e(x_1-700)+e(x_1+x_2+y_2-1500)+e(x_1+x_2+x_3+y_2+y_3-2500),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\ge 700,\\ x_1+x_2+y_2\ge 1500,\\ x_1+x_2+x_3+y_1+y_2\ge 2500,\\ \sum_{i=1}^{4}x_i+\sum_{j=2}^{3}y_j=3700,\\ 0\le x_i\le 900,\quad i=1,2,3,4,\\ 0\le y_j\le 30,\quad j=2,3.\end{cases}$$

利用 Matlab 软件求得最优解为 $x_1=x_2=x_3=x_4=900$，$y_2=100$，$y_3=0$。总成本为 607500 元。说明每周都要生成 900 件产品，第二周还要加班生产 100 件，才能满足需求，且总成本最小。

```
clc, clear
a=[150,150,170,170]; b=[700,800,1000,1200];
c=[180,200]; e=15;
p=optimproblem;
x=optimvar('x',4,'LowerBound',0,'UpperBound',900); %列向量
y=optimvar('y',2,'LowerBound',0,'UpperBound',300); %列向量
p.Objective=a*x+c*y+e*(x(1)-700)+e*(x(1)+x(2)+y(1)-1500)+...
    +e*(sum(x(1:3))+sum(y)-2500);
p.Constraints.con1=[x(1)>=700; x(1)+x(2)+y(1)>=1500
    sum(x(1:3))+sum(y)>=2500];
p.Constraints.con2=sum(x)+sum(y)==sum(b);
[s,f]=solve(p)
xx=s.x, yy=s.y     %显示决策变量的取值
```

（2）由于第二周、第三周加班生产的数量有限制，可以选择加班生产，也可以不选择加班生产。当选择了加班生产，产量就可增加 200 件，所以可以引入 $0-1$ 变量来表示，建立混合整数规划模型。

设 $x_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 周正常生产的产品数量，用 $0-1$ 变量 y_j 表示第二周、第三周是否有加班生产，即

$$y_j=\begin{cases}1,&\text{第}j\text{周加班生产},\\0,&\text{第}j\text{周不加班生产},\end{cases}\quad j=2,3.$$

其他常量符号同问题（1），类似地，建立如下的混合 $0-1$ 整数规划模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{4}a_ix_i+\sum_{j=2}^{3}200c_jy_j+e(x_1-700)+e(x_1+x_2+200y_2-1500)+$$
$$e(x_1+x_2+x_3+200y_2+200y_3-2500).$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_1 \ge 700, \\
x_1 + x_2 + 200y_2 \ge 1500, \\
x_1 + x_2 + x_3 + 200y_1 + 200y_2 \ge 2500, \\
\sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{j=2}^{3} 200y_j = 3700, \\
0 \le x_i \le 900, \quad i = 1,2,3,4, \\
y_j = 0\text{或}1, \quad j = 2,3.
\end{cases}
$$

利用 Matlab 软件，求得最优解为 $x_1 = 800$，$x_2 = x_3 = x_4 = 900$，$y_2 = 1$，$y_3 = 0$。总成本为 609000 元。第一周正常生产 800 件，第二、三、四周各正常生产 900 件，第二周加班生产 200 件。

```
clc, clear
a=[150,150,170,170]; b=[700,800,1000,1200];
c=[180,200]; e=15;
p=optimproblem;
x=optimvar('x',4,'LowerBound',0,'UpperBound',900); %列向量
y=optimvar('y',2,'Type','integer','LowerBound',0,'UpperBound',1);
p.Objective=a*x+200*c*y+e*(x(1)-700)+e*(x(1)+x(2)+...
    200*y(1)-1500)+e*(sum(x(1:3))+200*sum(y)-2500);
p.Constraints.con1=[x(1)>=700; x(1)+x(2)+200*y(1)>=1500
    sum(x(1:3))+200*sum(y)>=2500];
p.Constraints.con2=sum(x)+200*sum(y)==sum(b);
[s,f]=solve(p)
xx=s.x, yy=s.y
```

9.2 整数规划

在人们的生产实践中，经常会遇到以下类似的问题：汽车企业在制订生产计划时，要求所生产的不同类型的汽车数量必须为整数；用人单位在招聘员工时，要求所招聘的不同技术水平的员工数量必须为整数等。我们把要求一部分或全部决策变量必须取整数值的规划问题称为整数规划（Integer Programming，简记为 IP）。

9.2.1 整数线性规划模型

从决策变量的取值范围来看，整数规划通常可以分为以下几种类型：

1. 纯整数规划：全部决策变量都必须取整数值的整数规划模型；

2. 混合整数规划：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数规划模型；

3. 0-1 整数规划：决策变量只能取 0 或 1 的整数规划。

特别，如果一个线性规划模型中的部分或全部决策变量取整数值，则称该线性规划模型为整数线性规划模型。

整数线性规划模型的一般形式为

$$
\max(\text{或}\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{或}=，\ge) b_i,\ i = 1,2,\cdots,m, \\
x_j \ge 0,\ j = 1,2,\cdots,n, \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \text{中部分或全部取整数.}
\end{cases} \tag{9.5}
$$

我们来看几个关于整数线性规划的例题。

例 9.3 背包问题

一个旅行者外出旅行，携带一背包，装一些最有用的东西，共有 n 件物品供选择。已知

每件物品的“使用价值” c_j 和重量 a_j，要求

（1）最多携带物品的重量为 b kg；

（2）每件物品要么不带，要么只能整件携带。

问携带哪些物品使总使用价值最大？

问题分析 这是决策问题中比较经典的 $0-1$ 规划问题。可选方案很多，决策方案是带什么？选择的方式是要么带，要么不带，是一个二值逻辑问题。

模型建立

引进 $0-1$ 变量

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{携带第}i\text{种物品},\\ 0, & \text{不携带第}i\text{种物品},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

目标函数 使用价值最大，即

$$\max\ z=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i\ .$$

约束条件：

（1）重量限制：最多只能携带 b kg，即 $\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\le b$ 。

（2）携带方式限制：要么不带，要么整件携带，即 $x_i=0\text{或}1,\ i=1,2,\cdots,n$ 。

则数学模型可以描述为

$$\max\ z=\sum_{i}^{n}c_i x_i\ , \tag{9.6}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i x_i\le b,\\ x_i=0\text{或}1,\quad i=1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{9.7}$$

例 9.4 指派问题

某单位有 n 项任务，正好需 n 个人去完成，由于每项任务的性质和每个人的能力和专长的不同，假设分配每个人仅完成一项任务。设 c_{ij} 表示分配第 i 个人去完成第 j 项任务的费用（时间等），问应如何指派，完成任务的总费用最小？

引进 $0-1$ 变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若指派第}i\text{个人完成第}j\text{项任务},\\ 0, & \text{若不指派第}i\text{个人完成第}j\text{项任务},\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

目标函数 总费用最小：

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\ .$$

约束条件

（1）每个人只能安排 1 项任务：$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots,n$ ；

（2）每项任务只能指派 1 个人完成：$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,n$ ；

（3） $0-1$ 条件：$x_{ij}=0\text{或}1,\quad i,j=1,2,\cdots,n$ 。

综上所述，建立如下 $0-1$ 整数规划模型：

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\ , \tag{9.8}$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, & i=1,2,\cdots,n,\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, & j=1,2,\cdots,n,\\ x_{ij}=0\text{或}1, & i,j=1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{9.9}
$$

例 9.5　旅行商问题（又称货郎担问题）

有一推销员，从城市 v_1 出发，要遍访城市 $v_2,v_3,\cdots,v_n$ 各一次，最后返回 v_1。已知从 v_i 到 v_j 的旅费为 c_{ij}，问他应按怎样的次序访问这些城市，使得总旅费最少？

问题分析

旅行商问题是一个经典的图论问题，可以归结为一个成本最低的行走路线安排问题。这一问题的应用非常广泛，如城市交通网络建设等，其困难在于模型与算法的准确性和高效性，至今仍是图论研究领域的热点问题之一。

首先，推销员要访问到每一个城市，而且访问次数只能有一次，不能重复访问；任意一对城市之间可以连通，其费用已知，费用可以理解为距离、时间或乘坐交通工具的费用等；其次每访问一个城市，则这个城市既是本次访问的终点，又是下一次访问的起点；访问完所有城市后，最后应回到出发点。这一问题可用图论中的赋权有向图的结构形式来描述。这里我们用纯粹的 0-1 整数规划来构建其模型。

模型建立

决策变量：对每一对城市 v_i,v_j，定义一个变量 x_{ij} 来表示是否要从 v_i 出发访问 v_j，令

$$
x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果推销员决定从}v_i\text{直接进入}v_j,\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}
$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$。

目标函数：若推销员决定从 v_i 直接进入 v_j，则由已知，其旅行费用为 $c_{ij}x_{ij}$，于是总旅费可以表达为

$$
z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ ,
$$

其中，若 $i=j$，则规定 $c_{ii}=M$，M 为事先选定的充分大实数，$i,j=1,2,\cdots,n$。

约束 ：

（1）每个城市恰好进入一次：

$$
\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n\,. \tag{9.10}
$$

（2）每个城市离开一次：

$$
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n\,. \tag{9.11}
$$

（3）为防止在遍历过程中，出现子回路，附加一个强制性约束：

$$
u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1,\quad i=1,\cdots,n,\ j=2,\cdots,n\ , \tag{9.12}
$$

其中 $u_1=0,\quad 1\le u_i\le n-1,\quad i=2,3,\cdots,n$。

综上所述，建立旅行商问题的如下 $0-1$ 整数规划模型：

$$
\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ , \tag{9.13}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1,2,\cdots,n, \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=1,2,\cdots,n, \\
u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1, \quad i=1,\cdots,n,\ j=2,\cdots,n, \\
u_1=0, \quad 1\le u_i\le n-1, \quad i=2,3,\cdots,n, \\
x_{ij}=0\text{或}1, \quad i,j=1,2,\cdots,n.
\end{cases} \tag{9.14}
$$

若仅考虑前两个约束条件(9.10)和(9.11)，则是类似于指派问题的模型，对于旅行商问题模型只是必要条件，并不充分。例如图 9.1 的情形，6 个城市的旅行路线若为 $v_1\to v_2\to v_3\to v_1$ 和 $v_4\to v_5\to v_6\to v_4$，则该路线虽然满足前两个约束，但不构成整体巡回路线，它含有两个子回路，为此需要增加“不含子回路”的约束条件，这就要求增加变量 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$，及对应的约束条件(9.12)。

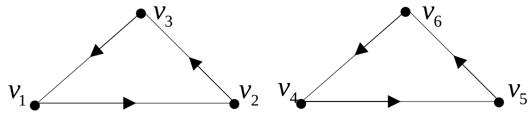

图 9.1　子回路情形

下面证明：

(1)任何含子回路的路线都必然不满足约束条件(9.12)（不管 u_i 如何取值）；

(2)全部不含子回路的整体巡回路线都可以满足约束条件(9.12)（只要 u_i 取适当值）。

证明　用反证法证明（1)，假设存在子回路，则至少有两个子回路。那么至少有一个子回路中不含起点 v_1，例如子回路 $v_4\to v_5\to v_6\to v_4$，式(9.12)用于该子回路，必有

$$u_4-u_5+n\le n-1，\ u_5-u_6+n\le n-1，\ u_6-u_4+n\le n-1，$$

把这三个不等式加起来得到 $0\le -3$，这不可能，故假设不能成立。而对整体巡回，因为约束(9.12)式中 $j\ge 2$，不包含起点 v_1，故不会发生矛盾。

(2)对于整体巡回路线，只要 u_i 取适当值，都可以满足该约束条件：①对于总巡回上的边，$x_{ij}=1$，u_i 取整数：起点编号 $u_1=0$，第 1 个到达顶点的编号 $u_2=1$，每到达一个顶点，编号加 1，则必有 $u_i-u_j=-1$，约束(9.12)变成 $-1+n\le n-1$，必然成立。②对于非总巡回上的边，因为 $x_{ij}=0$，约束条件(9.12)变成：$u_i-u_j\le n-1$，肯定成立。

综上所述，约束条件(9.12)只限制子回路，不影响其他约束条件，于是旅行商问题模型转化为一个整数线性规划模型。

9.2.2　整数线性规划模型的求解

例 9.6　某电视机公司目前在广东和辽宁各有一家整机厂，另有 5 个销售中心—东北区、华北区、华东区、中南区、西北区，产品销往全国。产品从工厂运到销售中心，再从各中心运往零售店。西北区销售中心是最近新建的，以便于公司进一步开拓西北市场，并为进入东欧市场做准备。为了扩大市场份额，公司决定新建一个每周生产能力为 25000 台的整机厂。经过考察 ，已初步选定 3 个地点：安徽、陕西和湖北。有关每个工厂的单位分配费用和单位生产成本、市场需求和生产能力由**表** 9.2、**表** 9.3 给出。拟定中的工厂每周 25000 台彩电的能力是根据各销售中心预测的平均值确定的。分配费用中包括运费、装卸费、库存费用和销售费用。要决策的问题是：在现有两个工厂和五家销售中心的条件下，新厂建在哪个地区建厂成本最低？

表 9.2　某电视机公司的单位分配费用和需求量

销售中心	单位分配费用/元					总需求量/件
	广东厂	辽宁厂	湖北长	安徽厂	陕西厂	
东北区	420	320	460	440	480	10000
中南区	360	440	370	300	450	15000
华北区	410	420	300	370	430	16000
华东区	380	480	420	380	460	19000
西北区	500	490	430	450	270	12000

表 9.3　某电视机公司的产能与生产成本

	广东厂	辽宁厂	湖北长	安徽厂	陕西厂
产能/件	27000	20000	25000	25000	25000
生产成本/元	2700	2680	2640	2690	2620

解　用$i=1,2,\cdots,5$分别表示东北区、中南区、华北区、华东区和西北区，$j=1,2,\cdots,5$分别表示广东厂、辽宁厂、湖北长、安徽厂和陕西厂，c_{ij}表示第j产地的产品运往第i个销售中心的单位分配费用，x_{ij}表示第j产地的产品运往第i个销售中心的数量，a_i表示第i个销售中心的产品需求量，b_j表示第j产地的产能，e_j表示第j产地的单位生产成本。引入0−1变量

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{工厂建在}j\text{处},\\ 0, & \text{工厂没有建在}j\text{处},\end{cases}\quad j=3,4,5.$$

建立如下的0−1混合整数规划模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{2}e_jb_j+\sum_{j=3}^{5}e_jb_jy_j\ ,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{5}x_{ij}=b_j, & j=1,2,\\ \sum\limits_{i=1}^{5}x_{ij}=b_jy_j, & j=1,2,3,\\ \sum\limits_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i, & i=1,2,\cdots,5,\\ \sum\limits_{j=3}^{5}y_j=1,\\ y=0\text{或}1, & j=3,4,5,\\ x_{ij}\ge 0, & i,j=1,2,\cdots,5.\end{cases}$$

利用 Matlab 软件，求得最优解为

$x_{21}=15000$，$x_{41}=12000$，$x_{12}=10000$，$x_{32}=10000$，$x_{35}=6000$，$x_{45}=7000$，$x_{55}=12000$，其他$x_{ij}=0$；$y_3=y_4=0$，$y_5=1$。即工厂建在陕西的成本最低，最低成本为2.1840×10^8。

```
clc, clear
d1=load('data9_6_1.txt'); d2=load('data9_6_2.txt');
c=d1(:,[1:5]); a=d1(:,6);
b=d2(1,:)'; e=d2(2,:)';
p=optimproblem;
x=optimvar('x',5,5,'LowerBound',0);
y=optimvar('y',5,'Type','integer','LowerBound',0,'UpperBound',1);
p.Objective=sum(sum(c.*x))+(b.*e)'*y;
p.Constraints.con1=[sum(x)'==y.*b
```

```
    sum(x,2)==a; sum(y(1:2))==2; sum(y(3:5))==1];
[s,f]=solve(p)
xx=s.x, yy=s.y
```

习题 9

9.1　某车间有甲、乙两天机床，可用于加工三种工件。假定这两台车床的可用台时数分别为 800 和 900，三种工件的数量分别为 400、600 和 500，且已知用两种不同车床加工单位数量不同工件所需的台时数和加工费用如表 9.4 所示。问怎样分配车床的加工任务，才能既满足加工工件的要求，又使加工费用最低？

表 9.4　两种机床加工三种工件的相关数据

车床类型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件 1	工件 2	工件 3	工件 1	工件 2	工件 3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	800
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	1000

9.2　已知某物资有8个配送中心可以供货，有15个部队用户需要该物资，配送中心和部队用户之间单位物资的运费，15个部队用户的物资需求量和8个配送中心的物资储备量数据见表9.5。

表 9.5　配送中心和部队用户之间单位物资的运费和物资需求量、储备量数据

部队用户	单位物资的运费								需求量
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	390.6	618.5	553	442	113.1	5.2	1217.7	1011	3000
2	370.8	636	440	401.8	25.6	113.1	1172.4	894.5	3100
3	876.3	1098.6	497.6	779.8	903	1003.3	907.2	40.1	2900
4	745.4	1037	305.9	725.7	445.7	531.4	1376.4	768.1	3100
5	144.5	354.6	624.7	238	290.7	269.4	993.2	974	3100
6	200.2	242	691.5	173.4	560	589.7	661.8	855.7	3400
7	235	205.5	801.5	326.6	477	433.6	966.4	1112	3500
8	517	541.5	338.4	219	249.5	335	937.3	701.8	3200
9	542	321	1104	576	896.8	878.4	728.3	1243	3000
10	665	827	427	523.2	725.2	813.8	692.2	284	3100
11	799	855.1	916.5	709.3	1057	1115.5	300	617	3300
12	852.2	798	1083	714.6	1177.4	1216.8	40.8	898.2	3200
13	602	614	820	517.7	899.6	952.7	272.4	727	3300
14	903	1092.5	612.5	790	932.4	1034.9	777	152.3	2900
15	600.7	710	522	448	726.6	811.8	563	426.8	3100
储备量	18600	19600	17100	18900	17000	19100	20500	17200	

（1）根据题目给定的数据，求最小运费调用计划。

（2）若每个配送中心，可以对某个用户配送物资，也可以不对某个用户配送物资；若配送物资的话，配送量要大于等于 1000 且小于等于 2000，求此时的费用最小调用计划。

9.3　n 个工件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 要在一台机器上加工，加工时间分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，要求的交货日期分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，具体信息如表 9.6 所示。试求一种加工排序，使得误工总时间最少。

表 9.6　加工信息表

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
t_i	10	6	3	1	4	8	7	6
d_i	35	20	11	8	6	25	28	9

9.4　为提高校园安全性，某大学的保安部门决定在校园内部的几个位置安装紧急报警电话。保安部门希望在校园的每条主要道路上都至少有一部电话的情形下，使得安装的总电

话数目最小。图 9.2 给出了校园的主要道路图。

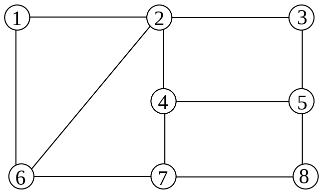

图 9.2　**校园主要道路图**