第 10 章　非线性规划

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com
微信：sishoukui

在数学规划模型中，若目标函数或约束条件中至少有一个为非线性的，则称这类模型为非线性规划问题。非线性规划的一般形式如下：

$$\begin{aligned} &\min\ f(\boldsymbol{x}),\\ &\text{s.t.}\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})\le 0, & i=1,2,\cdots,m,\\ h_j(\boldsymbol{x})=0, & j=1,2,\cdots,l, \end{cases} \end{aligned} \tag{10.1}$$

其中，$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in\mathbb{R}^n$ 为 n 维决策向量，$f(\boldsymbol{x})$ 为目标函数，$g_i(\boldsymbol{x})$ 和 $h_j(\boldsymbol{x})$ 为约束函数。令集合

$$S=\{\boldsymbol{x}\,|\,g_i(\boldsymbol{x})\le 0,h_j(\boldsymbol{x})=0,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,l\},$$

则称 S 为可行域，优化问题(10.1)可表示为 $\min\limits_{x\in S} f(\boldsymbol{x})$。特殊地，当 $S=\mathbb{R}^n$ 时，上述优化问题称为无约束优化问题。

10.1　无约束优化问题的 Matlab 求解

求解无约束优化问题常用的 Matlab 函数有 fminunc，其调用格式如下：

[x,fval,exitflag]=fminunc(fun,x0)

其中 fun 为目标函数，x0 为初始值，x 为最优解，fval 为最优值，exitflag 为算法终止标志，若 exitflag>1,则输出的结果为局部最优解；若 exitflag≤0，则输出的结果不可靠。

例 10.1　求二元函数 $f(\boldsymbol{x})=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$ 的最小值，其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T$。

解　目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度向量

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} -400(x_2-x_1^2)x_1-2(1-x_1)\\ 200(x_2-x_1^2)\end{bmatrix}.$$

不使用目标函数的梯度信息时，求得的最小点为 $x_1=1$，$x_2=1$，求得的最小值为 2.3007×10^{-11}；使用目标函数的梯度信息时，求得的最小点为 $x_1=1$，$x_2=1$，求得的最小值为 1.9432×10^{-11}。

```
%程序文件 ex10_1_1
clc, clear
tic       %第一次计时开始
[x1,f1,flag1]=fminunc(@rosenbrockwithgrad,[1,2])
toc, tic  %第一次计时结束，并重新开始第二次计时
options = optimoptions('fminunc','Algorithm','trust-region',...
    'SpecifyObjectiveGradient',true);
[x2,f2,flag2]=fminunc(@rosenbrockwithgrad,[1,2],options)
toc       %第二次计时结束

function [f,g] = rosenbrockwithgrad(x)
f = 100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;  %定义目标函数
if nargout > 1                          %需要目标函数的梯度
    g = [-400*(x(2)-x(1)^2)*x(1) - 2*(1-x(1));
        200*(x(2)-x(1)^2)];
```

```
end
end
```

基于问题结构的Matlab求解程序如下：

```
%程序文件ex10_1_2
clc, clear
options = optimoptions('fminunc','Algorithm','trust-region',...
    'SpecifyObjectiveGradient',true);
p.options = options;
p.x0 = [-1,2];
p.objective = @rosenbrockwithgrad;
p.solver = 'fminunc';
[x,fval] = fminunc(p)

function [f,g] = rosenbrockwithgrad(x)
f = 100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;  %定义目标函数
if nargout > 1                     %需要目标函数的梯度
    g = [-400*(x(2)-x(1)^2)*x(1) - 2*(1-x(1));
        200*(x(2)-x(1)^2)];
end
end
```

求得的最小点为$x_1=1$，$x_2=1$，最小值为1.9885×10^{-17}。

10.2　约束优化问题的Matlab求解

将非线性规划(10.1)的约束按线性和非线性分开表示，则它可表示如下的标准型：

$$\min f(\boldsymbol{x}),$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} c(\boldsymbol{x})\le 0,\\ ceq(\boldsymbol{x})=0,\\ \boldsymbol{Ax}\le\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{Aeq}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{beq},\\ \boldsymbol{lb}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{ub}.\end{cases} \tag{10.2}$$

其中，$c(\boldsymbol{x})$和$ceq(\boldsymbol{x})$为非线性向量函数。可以用Matlab函数fmincon求解(10.2)，其基本调用格式为

```
[x,fval,exitflag] = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
```

其中，fun表示目标函数$f(\boldsymbol{x})$，x0是预先给定的决策向量的初始值，矩阵A,列向量b对应着线性不等式约束$\boldsymbol{Ax}\le\boldsymbol{b}$，矩阵Aeq,列向量beq对应着线性不等式约束$\boldsymbol{Aeq}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{beq}$，nonlcon表示非线性约束$c(\boldsymbol{x}),ceq(\boldsymbol{x})$的函数。

例 10.2　求解优化问题

$$\max f(\boldsymbol{x})=2x_1+3x_1^2+3x_2+x_2^2+x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_1^2+x_2+2x_2^2+x_3\le 10,\\ x_1+x_1^2+x_2+x_2^2-x_3\le 50,\\ 2x_1+x_1^2+2x_2+x_3\le 40,\\ x_1+2x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0.\end{cases}$$

解　（1）利用如下的Matlab程序：

```
%程序文件ex10_2_1
```

```
clc, clear
A=-[1,2,0]; b=-1;
lb=[0;-inf;-inf]; x0=rand(3,1);
f=@(x)-2*x(1)-3*x(1)^2-3*x(2)-x(2)^2-x(3); %定义目标函数的匿名函数
[x,fval,flag]=fmincon(f,x0,A,b,[],[],lb,[],@fun)

function [c,ceq]=fun(x);     %定义非线性约束函数
c=[x(1)+2*x(1)^2+x(2)+2*x(2)^2+x(3)-10
    x(1)+x(1)^2+x(2)+x(2)^2-x(3)-50
    2*x(1)+x(1)^2+2*x(2)+x(3)-40];
ceq=x(1)^2+x(3)-2;
end
```

求得最优解为

$$x_1=2.3333,\quad x_2=0.1667,\quad x_3=-3.4444,$$

目标函数的最优值 18.0833。

（2）基于问题结构的 fmincon 求解程序如下：

```
%程序文件 ex10_2_2
clc, clear
options = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp');
problem.options = options;
problem.solver = 'fmincon';
problem.objective = @(x)-2*x(1)-3*x(1)^2-3*x(2)-x(2)^2-x(3);
problem.x0 = rand(3,1);
problem.Aineq=[-1,-2,0];
problem.bineq=-1;
problem.nonlcon=@fun;
problem.lb=[0;-inf;-inf];
[x,fval]=fmincon(problem)

function [c,ceq]=fun(x);     %定义非线性约束函数
c=[x(1)+2*x(1)^2+x(2)+2*x(2)^2+x(3)-10
    x(1)+x(1)^2+x(2)+x(2)^2-x(3)-50
    2*x(1)+x(1)^2+2*x(2)+x(3)-40];
ceq=x(1)^2+x(3)-2;
end
```

求解结果与（1）相同。

（3）基于优化问题的 Matlab 求解程序如下：

```
%程序文件 ex10_2_3
clc, clear
p=optimproblem('ObjectiveSense','max');
x=optimvar('x',3,1)
p.Objective = fcn2optimexpr(@(x)-2*x(1)-3*x(1)^2-3*x(2)-x(2)^2-x(3),x);
x0.x = -100*rand(3,1);
p.Constraints.con1=[x(1)+2*x(1)^2+x(2)+2*x(2)^2+x(3)<=10
    x(1)+x(1)^2+x(2)+x(2)^2-x(3)<=50
    2*x(1)+x(1)^2+2*x(2)+x(3)<=40
    1-x(1)-2*x(2)<=0; -x(1)<=0];
p.Constraints.con2=x(1)^2+x(3)==2;
opt=optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','active-set');
[s,f,flag,out]=solve(p,x0,'Options',opt)
```

上述程序求解结果较差，我们这里就不给出了。

10.3　非线性规划举例

例 10.3（供应与选址）建筑工地的位置（用平面坐标a,b表示，距离单位：km）及水泥日用量c（单位：t）由表 10.1 给出。拟建两个料场向各工地运送水泥，两个料场日储量各为 20t,问料场建在何处，使总的吨公里数最小。

表 10.1　**建筑工地的位置及水泥日用量表**

	1	2	3	4	5	6
a/km	1.25	8.75	0.5	3.75	3	7.25
b/km	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
c/t	3	5	4	7	6	11

解　记工地的位置为$(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,6)$，水泥日用量为$c_i$；拟建料场位置为$(x_j,y_j)(j=1,2)$，日储量为$e_j$，从料场$j$向工地$i$的运送量为$z_{ij}$。

建立如下的非线性规划模型：

$$\min \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{2} z_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{2} z_{ij}=c_i, & i=1,2,\cdots,6,\\ \sum_{i=1}^{6} z_{ij}\le e_j, & j=1,2,\\ z_{ij}\ge 0, & i=1,2,\cdots,6;\ j=1,2.\end{cases}$$

利用 Matlab 软件，求得拟建料场的坐标为(7.25, 7.75)，(3.2653, 5.1920)。由两个料场向 6 个工地运料方案如表 10.2 所列，总的吨千米数为 71.9352。

表 10.2　**两个料场向** 6 **个工地运料方案**

	1	2	3	4	5	6
料场 1	0	5	0	0	0	11
料场 2	3	0	4	7	6	0

```
clc, clear, d0 = load('data10_3.txt');
prob = optimproblem;
x = optimvar('x', 2, 'LowerBound', 0);
y = optimvar('y', 2, 'LowerBound', 0);
z = optimvar('z', 6, 2, 'LowerBound',0);
a = d0(1,:); b = d0(2,:); c = d0(3,:);
prob.Objective = fcn2optimexpr(@fun10_3,x,y,z,a,b);
prob.Constraints.con1 = sum(z,2)==c';
prob.Constraints.con2 = sum(z)<=20;
x0.x = 10*rand(2,1); x0.y = 10*rand(2,1);
x0.z = 10*rand(6,2);
opt=optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp');
[sol,fval,flag,output] = solve(prob,x0,'Options',opt)
xx=sol.x, yy=sol.y, zz=sol.z  %显示决策向量的值

function obj = fun10_3(x,y,z,a,b);
obj = 0;
for i = 1:6
```

```
    for j =1:2
        obj = obj + z(i,j)*sqrt((x(j)-a(i))^2+(y(j)-b(i))^2);
    end
end
end
```

习题 10

10.1　求二元函数 $f(\boldsymbol{x})=3x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1+5x_2$ 的最小值。

10.2　使用 Matlab 求解下列优化问题。

$$\min e^{x_1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_1x_2-x_1-x_2+1.5\le 0, \\ -x_1x_2-10\le 0. \end{cases}$$

10.3　某炼油厂将 4 种不同含硫量的液体原料（分别记为甲、乙、丙、丁）混合生产两种产品（分别记为 A，B）。按照生产工艺的要求，原料甲、乙、丁必须首先倒入混合池中混合，混合后的液体再分别与原料丙混合生产 A，B，且要求每种产品中甲、乙、丙、丁每种原料的含量不能低于 10%。已知原料甲、乙、丙、丁的含硫量（单位：%）分别为 3，1，2，1，进货价格（单位：千元）6，8，7，5；产品 A，B 的含硫量分别不超过 2.5，1.5，售价（单位：千元）分别为 9，15。根据市场信息，原料甲、乙的供应没有限制，原料丙、丁的供应量最多为 250t、100t，产品 A，B 的市场最大需求量分别为 300t、500t，问应该怎样安排生产？