第 8 章　差分方程

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com
微信：sishoukui

8.1　差分方程的基本概念

定义 8.1　设函数 $y=y(x)$，当自变量从 x 变化到 $x+1$，函数的增量

$$y(x+1)-y(x)$$

称为函数 $y(x)$ 在点 x 的一阶差分，记为 Δy_x。记 $y_x=y(x)$，则

$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x .$$

把 Δy_x 的一阶差分

$$\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=y_{x+2}-y_{x+1}-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$$

称为函数 $y(x)$ 在点 x 的二阶差分，记为 $\Delta^2 y_x$。

一般地，把 $\Delta^{n-1}y_x$ 的一阶差分称为函数 $y(x)$ 在点 x 的 n 阶差分，记为 $\Delta^n y_x$，且

$$\Delta^n y_x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k y_{x+n-k} . \tag{8.1}$$

例 8.1　求函数 $y=x^\alpha$ 的一阶差分 Δy。

解　$\Delta(x^\alpha)=(x+1)^\alpha-x^\alpha$，特别当 α 是正整数时，$\Delta(x^\alpha)=\sum_{k=1}^{\alpha}C_\alpha^k x^{\alpha-k}$。

例 8.2　求 $\Delta^n(x^2)$。

解　$\Delta(x^2)=(x+1)^2-x^2=2x+1$，

$\Delta^2(x^2)=\Delta(2x+1)=[2(x+1)+1]-(2x+1)=2$，

$\Delta^3(x^2)=2-2=0$，$\cdots$，$\Delta^n(x^2)=0(n\ge 3)$.

例 8.3　设 $y=x(x-1)\cdots(x-n)$，求 Δy。

解
$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+1)x(x-1)\cdots(x+1-n)-x(x-1)\cdots(x-n)\\&=x(x-1)\cdots(x+1-n)[(x+1)-(x-n)]\\&=(n+1)x(x-1)\cdots(x+1-n) .\end{aligned}$$

定理 8.1（差分的性质）　设 c 为任意常数，则

（1）$\Delta(cy_x)=c\Delta y_x$；

（2）$\Delta(y_x+z_x)=\Delta y_x+\Delta z_x$；

（3）$\Delta(y_x\cdot z_x)=y_{x+1}\Delta z_x+z_x\Delta y_x=y_x\Delta z_x+z_{x+1}\Delta y_x$；

（4）$\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right)=\dfrac{z_x\Delta y_x-y_x\Delta z_x}{z_x z_{x+1}}=\dfrac{z_{x+1}\Delta y_x-y_{x+1}\Delta z_x}{z_x z_{x+1}}$.

定义 8.2　含有自变量、未知函数以及未知函数的差分的等式称为差分方程，其一般形式为

$$F(x,y_x,\Delta y_x,\cdots,\Delta^n y_x)=0(\text{或}F(x,y_x,y_{x+1},\cdots,y_{x+n})=0) . \tag{8.2}$$

差分方程中出现的未知函数的最高阶差分的阶数（或未知函数的最大下标与最小下标之差）称为差分方程的阶。

定义 8.3　若 n 阶差分方程

$$F(x,y_x,\Delta y_x,\cdots,\Delta^n y_x)=0(\text{或}F(x,y_x,y_{x+1},\cdots,y_{x+n})=0)$$

关于未知函数 y_x 以及 $\Delta y_x,\cdots,\Delta^n y_x(\text{或}y_x,y_{x+1},\cdots,y_{x+n})$ 这 $n+1$ 个变元都是一次的，则称它关于未知函数 y_x 为 n 阶线性差分方程，标准形式为

$$\Delta^n y_x+a_1(x)\Delta^{n-1}y_x+\cdots+a_n(x)y_x=f(x) , \tag{8.3}$$

或

$$y_{x+n}+a_1(x)y_{x+n-1}+\cdots+a_n(x)y_x=f(x)\,, \tag{8.4}$$

其中$a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$与$f(x)$为已知函数。否则称它关于未知函数y_x为n阶非线性差分方程。

定义 8.4（差分方程的通解） 满足差分方程的函数称为差分方程的解。若n阶差分方程的解中含有n个相互独立的任意常数，则称这样的解为差分方程的通解。

定义 8.5（差分方程的特解） 若给出自变量取某值时的若干个附加条件以确定通解中的任意常数，则称这样的条件为定解条件。通常，一阶差分方程的定解条件为$y_x\big|_{x=x_0}=y_0$；二阶差分方程的定解条件为$y_x\big|_{x=x_0}=y_0$，$\Delta y_x\big|_{x=x_0}=\Delta y_0$（或$y_{x+1}\big|_{x=x_0}=y_1$）。不含有任意常数的解称为差分方程的特解。

8.2 n阶线性差分方程

在n阶线性差分方程的标准形式(8.4)中，当$f(x)=0$时，方程(8.4)成为

$$y_{x+n}+a_1(x)y_{x+n-1}+\cdots+a_n(x)y_x=0\,, \tag{8.5}$$

称为n阶齐次线性差分方程。

当$f(x)\neq 0$时，称方程(8.4)为n阶非齐次线性差分方程。

定理 8.2 n阶齐次线性差分方程(8.5)一定存在n个线性无关的解。

定理 8.3（n阶齐次线性差分方程通解的结构） 设$y_x^{(1)},y_x^{(2)},\cdots,y_x^{(n)}$是$n$阶齐次线性差分方程(8.5)的$n$个线性无关的解，则方程(8.5)的通解为

$$y_x=\sum_{k=1}^{n}c_k y_x^{(k)}\,, \tag{8.6}$$

其中，$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意n个常数。

定理 8.4（n阶非齐次线性差分方程通解的结构） 设$y_x^{(1)},y_x^{(2)},\cdots,y_x^{(n)}$是齐次线性差分方程(8.5)的$n$个线性无关的解，$\tilde{y}_x$是方程(8.4)的一个特解，则方程(8.4)的通解为

$$y_x=\tilde{y}_x+\sum_{k=1}^{n}c_k y_x^{(k)}\,, \tag{8.7}$$

其中，$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意n个常数。

将上述理论用于n阶常系数线性差分方程

$$y_{x+n}+a_1 y_{x+n-1}+\cdots+a_n y_x=f(x)\,, \tag{8.8}$$

和对应的常系数齐次线性差分方程

$$y_{x+n}+a_1 y_{x+n-1}+\cdots+a_n y_x=0\,, \tag{8.9}$$

其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是常数，且$a_n\neq 0$，$f(x)$是已知函数。

类似于求常系数齐次线性微分方程的n个线性无关的解。现用“待定系数法”寻求方程(8.9)的形如$y=\lambda^x$的特解，其中λ是待定常数。将$y=\lambda^x$代入方程(8.9)，得

$$(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n)\lambda^x=0\,.$$

因此$y=\lambda^x$是方程(8.9)的解当且仅当λ适合代数方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0\,. \tag{8.10}$$

代数方程(8.10)称为差分方程(8.9)的特征方程，而方程(8.10)的根称为特征根。

定理 8.5 n阶常系数齐次线性差分方程(8.9)的特征方程(8.10)在复数域$\mathbb{C}$中共有k个互不相同的根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，且相应的重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$ $(n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$，则函数组

$$\lambda_1^x,x\lambda_1^x,\cdots,x^{n_1-1}\lambda_1^x;\cdots,\lambda_k^x,x\lambda_k^x,\cdots,x^{n_k-1}\lambda_k^x$$

是n阶常系数齐次线性差分方程(8.9)的n个线性无关的解。

习惯上，对于实系数的差分方程(8.9)的n个线性无关的解要求其是实值的。

定理 8.6 当实系数代数方程(8.10)有$2k$个互不相同的复根$\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1=r_1e^{i\theta_1}$，$\bar{\lambda}_1=\alpha_1-i\beta_1=r_1e^{-i\theta_1}$，$\cdots$，$\lambda_k=\alpha_k+i\beta_k=r_ke^{i\theta_k}$，$\bar{\lambda}_k=\alpha_k-i\beta_k=r_ke^{-i\theta_k}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$的重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$，有$s$个互不相同的实根$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$，其重数分别为$m_1,m_2,\cdots,m_s$，则函数组

$$r_1^x\cos(\theta_1 x), r_1^x\sin(\theta_1 x), \cdots, x^{n_1-1}r_1^x\cos(\theta_1 x), x^{n_1-1}r_1^x\sin(\theta_1 x),$$

$$\vdots$$

$$r_k^x\cos(\theta_k x), r_k^x\sin(\theta_k x), \cdots, x^{n_k-1}r_k^x\cos(\theta_k x), x^{n_k-1}r_k^x\sin(\theta_k x),$$

$$\mu_1^x, \cdots, x^{m_1-1}\mu_1^x; \cdots; \mu_s^x, \cdots, x^{m_s-1}\mu_s^x$$

是差分方程(8.9)的 n 个线性无关的解，其中，$2(n_1+n_2+\cdots+n_k)+m_1+m_2+\cdots+m_s=n$。

对于以下两类特殊形式的 $f(x)$，我们可以用“待定系数法”来求差分方程(8.8)的一个特解。

（1）若方程(8.8)的非齐次项 $f(x)=P_m(x)\mu^x$，其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式，则方程(8.8)具有如下形式的特解

$$\tilde{y}_x = x^k Q_m(x)\mu^x,$$

其中 k 是 μ 作为方程(8.10)的特征根的重数，μ 不是特征根时 $k=0$，m 次多项式 $Q_m(x)$ 的系数待定。

（2）若方程(8.8)的非齐次项 $f(x)=[P_m(x)\cos\theta x+Q_n(x)\sin\theta x]\mu^x$，其中 $P_m(x), Q_n(x)$ 分别是 x 的 m 次和 n 次多项式，则方程(8.8)的特解形式为

$$\tilde{y}_x = x^k[R_l(x)\cos\theta x+T_l(x)\sin\theta x]\mu^x,$$

其中，k 是 $\mu e^{i\theta}$ 作为方程(8.10)的特征根的重数，当 $\mu e^{i\theta}$ 不是特征根时 $k=0$；$l=\max\{m,n\}$，l 次多项式 $R_l(x)$ 和 $T_l(x)$ 的系数待定。

例 8.4　斐波那契（Fibonacci）数列的通项。

斐波那契在 13 世纪初提出，一对兔子出生一个月后开始繁殖，每个月出生一对新生兔子，假定兔子只繁殖，没有死亡，问第 k 个月月初会有多少对兔子？

解　以对为单位，每个月繁殖兔子对数构成一个数列，这便是著名的斐波那契数列：1，1，2，3，5，8，…，此数列 F_k 满足条件

$$F_1=1,\quad F_2=1,\quad F_{k+2}=F_{k+1}+F_k\,(k=1,2,\cdots). \tag{8.11}$$

式(8.11)中差分方程的特征方程为

$$\lambda^2-\lambda-1=0,$$

特征根 $\lambda_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是互异的。所以，通解为

$$F_k=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

利用初值条件 $F_1=F_2=1$，得到方程组

$$\begin{cases} c_1\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1, \\ c_1\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=1, \end{cases}$$

由此方程组解得 $c_1=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$c_2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。最后，将这些常数值代入方程通解的表达式，得差分方程的解是

$$F_k=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right],\quad k=1,2,\cdots.$$

```
clc, clear, syms k positive, syms c1 c2
a = sym([1,-1,-1]);  %符号多项式
r = roots(a)
fk = c1*r(1)^k + c2*r(2)^k  %写出差分方程的通解
eq1 = subs(fk,1)-1; eq2 = subs(fk,2)-1;
[c10,c20] = solve(eq1, eq2)
c10=simplify(c10), c20=simplify(c20)
```

例 8.5 $a_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{5-3\cos x}dx(n\in\mathbb{N})$，证明 $3a_{n+2}-10a_{n+1}+3a_n=0$，并推出 $a_n=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$。

证 $$3a_{n+2}-10a_{n+1}+3a_n=\int_0^{\pi}\frac{3\cos(n+2)x-10\cos(n+1)x+3\cos nx}{5-3\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{6\cos(n+1)x\cos x-10\cos(n+1)x}{5-3\cos x}dx$$
$$=-2\int_0^{\pi}\cos(n+1)xdx=-\frac{2}{n+1}\sin(n+1)x\Big|_0^{\pi}=0.$$

因为差分方程 $3a_{n+2}-10a_{n+1}+3a_n=0$ 的特征方程为
$$3\lambda^2-10\lambda+3=0,$$
所以特征根为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=\frac{1}{3}$，故差分方程 $3a_{n+2}-10a_{n+1}+3a_n=0$ 的通解为
$$a_n=c_1 3^n+c_2\frac{1}{3^n},\quad c_1,c_2\text{为任意常数}.$$
因为
$$a_0=\int_0^{\pi}\frac{1}{5-3\cos x}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+4t^2}dt=\frac{1}{2}\arctan 2t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

$$a_1=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{5-3\cos x}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{1-t^2}{(1+4t^2)(1+t^2)}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{5}{1+4t^2}-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\left(\frac{5}{6}\arctan 2t-\frac{2}{3}\arctan t\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{12}.$$

由 $a_0=\frac{\pi}{4}$，$a_1=\frac{\pi}{12}$，得
$$c_1+c_2=\frac{\pi}{4},\quad 3c_1+\frac{c_2}{3}=\frac{\pi}{12},\quad \text{即 } c_1=0,\quad c_2=\frac{\pi}{4},$$
故
$$a_n=\frac{\pi}{4}\frac{1}{3^n}.$$

```
clc, clear
syms n positive integer, syms x c1 c2
yxn=cos(n*x)/(5-3*cos(x));
yxn1=subs(yxn,n,n+1);          %把 n 替换为 n+1
yxn2=subs(yxn,n,n+2);          %把 n 替换为 n+2
I=int(3*yxn2-10*yxn1+3*yxn,x,0,pi)
```

```
I=simplify(I)
p=sym([3,-10,3]);                %定义符号多项式
r=roots(p)                       %求特征根
I0=int(subs(yxn,n,0),0,pi)     %求 a0 的值
I1=int(subs(yxn,n,1),0,pi)     %求 a1 的值
fn = c1*r(1)^n + c2*r(2)^n     %写出差分方程的通解
eq1 = c1+c2-I0; eq2 = subs(fn,1)-I1;
[c10,c20] = solve(eq1, eq2)   %求解代数方程组
```

8.3　差分方程的应用

例 8.6　设某人从银行贷款 A 元，月息为 r，n 个月连本带息还完，如果等额还款，问他每月需还多少元？

解　设他每月需还款 x 元，记 A_t 为第 t 月末的贷款余额，则

$$A_{t+1}=(1+r)A_t-x,\quad A_0=A.$$

这是一阶常系数非齐次线性差分方程，对应的齐次线性差分方程 $A_{t+1}-(1+r)A_t=0$ 的通解为

$$A_t=c(1+r)^r,\quad c\text{为任意常数}.$$

因为 $f(t)=-x\cdot 1^t$，$\mu=1$ 不是特征根，故设 $A_{t+1}-(1+r)A_t=-x$ 的一个特解为

$$\tilde{A}_t=a,$$

代入 $A_{t+1}-(1+r)A_t=-x$，得 $\tilde{A}_t=\dfrac{x}{r}$，故原方程的通解为

$$A_t=c(1+r)^t+\frac{x}{r},\quad c\text{为任意常数}.$$

由 $A_0=A$，得 $c=A-\dfrac{x}{r}$，于是

$$A_t=\left(A-\frac{x}{r}\right)(1+r)^t+\frac{x}{r}.$$

最后，由 $A_n=0$，得

$$x=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

习题 8

8.1　某家庭现在起每月从收入中拿出一部分资金存入银行，作为子女的教育基金，计划 20 年后开始每月从该基金中支取 1000 元，直到 10 年后子女大学毕业用完全部基金，假设存款月利率为 0.5%，为实现这一目标，该家庭每月应在银行存入多少钱？20 年内共筹措到多少钱？