第 4 章　非线性方程数值解

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com
微信：sishoukui

方程求解一直是数学中的核心问题之一。然而，即使是对于形如

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

这样的代数方程，当 $n \ge 5$ 时也没有统一的求根公式。

在实际应用中，方程的数值解往往就可以满足工程及计算的需要了。这里介绍 2 种较为常用的方程数值解法：二分法、牛顿迭代法。读者需要了解这些方法的使用条件。

4.1　二分法求根

若 $f(x) \in C[a,b]$（$[a,b]$ 区间上的连续函数），且 $f(a)f(b) < 0$，则由介值定理，存在 $c \in [a,b]$，使得 $f(c)=0$。这时，可以使用二分法对方程进行求根。

（1）令 $a_0 = a$， $b_0 = b$， $n = 0$。

（2）令 $c_n = (a_n + b_n)/2$。

（3）若 $|f(c)| < \varepsilon$，则算法停止，输出 c_n。

（4）若 $f(a_n)f(c_n) < 0$，则 $a_{n+1} \leftarrow a_n$， $b_{n+1} \leftarrow c_n$；否则， $a_{n+1} \leftarrow c_n$， $b_{n+1} \leftarrow b_n$。

（5） $n \leftarrow n+1$，转至（2）。

采用二分法对方程求根时，第 n 次迭代对应的区间长度为 $(b-a)/2^n$，收敛速度是较快的。

例 4.1　求方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内实根的近似值，使误差不超过 10^{-4}。

记 $f(x)=x^5+5x+1$，做出函数 $f(x)$ 的图形如图 4.1 所示，可知函数在区间 $(-1,0)$ 有一个零点。利用上述的算法，迭代 14 次，求得方程的近似根 $\xi=-0.1999$。

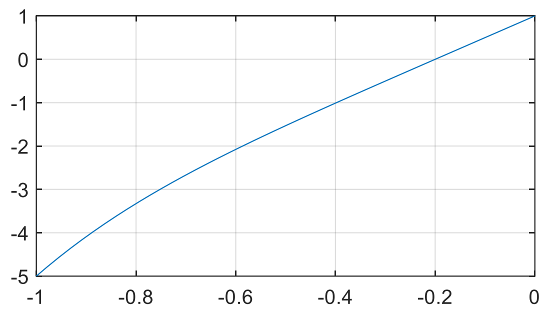

图 4.1　确定方程的有根区间

画图及计算的 Matlab 程序如下：

```
clc, clear, close all
y=@(x)x.^5+5*x+1;
fplot(y,[-1,0]), grid on   %画函数图形并加网格线
a=-1; b=0; ya=y(a); yb=y(b); d=0.0001;
n=0;                       %迭代次数的初始值
while b-a>=d
    x=(a+b)/2; yx=y(x);
    if yx==0
        break
```

```
    elseif ya*yx<0
        b=x; yb=yx;
    else
        a=x; ya=yx;
    end
    n=n+1;
end
x, yx, n                        %显示根的近似值，对应函数值及迭代次数
```

4.2 牛顿迭代法求根

若 $f(x)\in C^2[a,b]$（$[a,b]$区间上的二阶连续可微函数），$f(a)f(b)<0$，且 $f'(x)$在$[a,b]$上不变号，则方程 $f(x)=0$在$[a,b]$内必然存在某个根 x^*。设 x_0 是 x^* 附近的点，则根据泰勒展开式有

$$0=f(x^*)=f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)+\frac{f''(\xi_0)}{2}(x^*-x_0)^2 . \tag{4.1}$$

令 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，那么

$$x^*-x_1=x^*-x_0+\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\overset{(4.1)}{=\!=}\frac{-f(x_0)-\dfrac{f''(\xi_0)}{2}(x^*-x_0)^2}{f'(x_0)}+\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$=-\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}(x^*-x_0)^2 ,$$

即

$$\frac{x^*-x_1}{(x^*-x_0)^2}=-\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} .$$

同样，对每个 i，若令

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} , \tag{4.2}$$

则有

$$\frac{x^*-x_{i+1}}{(x^*-x_i)^2}=-\frac{f''(\xi_i)}{2f'(x_i)} .$$

若存在 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|\Big/\min\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$，则

$$\frac{\left|x^*-x_{i+1}\right|}{\left|x^*-x_i\right|}\le\frac{M}{2}\left|x^*-x_i\right| ,$$

这说明该序列能够以较快的速度收敛于 x^*。该方法称为牛顿迭代法。

例 4.2（续例 4.1）求方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内实根的近似值，使误差不超过10^{-4}。

迭代 3 次即求得实根的近似值为 -0.1999。

```
clc, clear
y=@(x)x.^5+5*x+1;   dy=@(x)5*x.^4+5;   %定义函数及导数的匿名函数
x0=-1; x1=x0-y(x0)/dy(x0); n=0;
```

```
while abs(x0-x1)>=0.0001
    x0=x1; x1=x0-y(x0)/dy(x0); n=n+1;
end
x1, yx1=y(x1), n              %显示根的近似值，对应函数值及迭代次数
```

4.3 一般迭代法求根

迭代法是一种逐次逼近法，这种方法使用迭代公式反复校正根的近似值，使之逐步精确化，直至满足精度要求的结果。

迭代法的求根过程分成两步，第一步先提供根的某个猜测值，即所谓迭代初值，然后将迭代初值逐步加工成满足精度要求的根。

迭代法的设计思想是把方程 $f(x)=0$ 作等价变换，得到 $x=\varphi(x)$。把根的某个猜测值 x_0 代入迭代函数 $x=\varphi(x)$，得

$x_1=\varphi(x_0)$， $x_2=\varphi(x_1)$， $\cdots$，

一般地， $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，得到序列 $\{x_k\}$，若 $\{x_k\}$ 收敛就必收敛到 $f(x)=0$ 的根。

如何选取 $\varphi(x)$ 才能保证迭代收敛，我们有如下结论。

（压缩映像原理）如果 $\varphi(x)$ 满足下列条件

（1）当 $x\in[a,b]$， $\varphi(x)\in[a,b]$；

（2）对任意 $x\in[a,b]$，存在 $0<L<1$，使

$$|\varphi'(x)|\le L<1;$$

则方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的根 x^*，且对任意初值 $x_0\in[a,b]$ 时，迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 收敛于 x^*，且有下列误差估计

$$\left|x^*-x_k\right|=\frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|,$$

$$\left|x^*-x_k\right|=\frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right|.$$

例 4.3 用一般迭代法求 $f(x)=x^3-\sin x-12x+1$ 的一个根，误差 $\varepsilon=10^{-6}$。

解 $f(x)$ 的图形如图 4.2 所示，从图中可以看出 $f(x)$ 有三个实根。

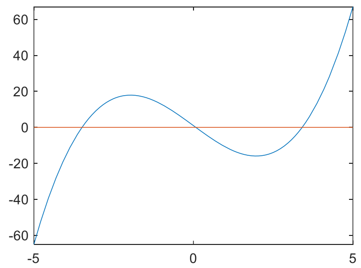

图 4.2 $f(x)$ 的图形

将原方程化成等价方程 $x=\sqrt[3]{\sin x+12x-1}$。取迭代序列

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{\sin x_n+12x_n-1},$$

其中初值分别取 $x_0=-3.5, 0.5, 3.5$，最终的迭代结果求得的根都是 3.4101。

```
clc, clear
f=@(x)x.^3-sin(x)-12*x+1;        %定义匿名函数
fplot(f,[-5,5]), hold on, plot([-5,5],[0,0])
x1=iterate(-3.5)     %取初值-3.5 进行迭代
x2=iterate(0.5)      %取初值 0.5 进行迭代
```

```
x3=iterate(3.5)      %取初值 3.5 进行迭代

function x1=iterate(x0);
g=@(x)(sin(x)+12*x-1).^(1/3);
x1=g(x0);
while abs(x0-x1)>=1e-6
    x0=x1; x1=g(x0);
end
end
```

4.4 Matlab 工具箱求非线性方程（组）的命令

Matlab 工具箱的 fzero 命令求一元函数在给定点附近的一个零点，roots 命令求一元多项式函数的所有零点。fsolve 求非线性方程组的数值解。

例 4.4　对于函数 $f(x)=x^3-2x-5$。

（1）求 $f(x)$ 在 1 附近的零点。（2）求 $f(x)$ 的所有零点。

解　（1）求得 1 附近的零点为 2.0946。

（2）$f(x)$ 的所有零点为 2.0946，$-1.0473\pm 1.1359i$。

```
clc, clear
f=@(x)x.^3-2*x-5;          %定义匿名函数
x1=fzero(f,1)              %求 1 附近的一个零点
x2=roots([1,0,-2,-5])      %求多项式函数的所有零点
```

例 4.5　求非线性方程组

$$\begin{cases} e^{-(x_1+x_2)}=x_2(1+x_1^2), \\ x_1\cos x_2+x_2\sin x_1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

的一组数值解。

求得的数值解为 $x_1=0.3813$，$x_2=0.3998$。

```
clc, clear
%定义方程组对应的向量函数的匿名函数
f=@(z)[exp(-z(1)-z(2))-z(2)*(1+z(1)^2)
    z(1)*cos(z(2))+z(2)*sin(z(1))-0.5];
x=fsolve(f,rand(1,2))
```

例 4.6　已知 $f(x)=\left(|x+1|-|x-1|\right)/2+\sin x$，$g(x)=\left(|x+3|-|x-3|\right)/2+\cos x$，求下列方程组的数值解。

$$\begin{cases} 2x_1=3f(y_1)+4g(y_2)-1, \\ 3x_2=2f(y_1)+6g(y_2)-2, \\ y_1=f(x_1)+3g(x_2)-3, \\ 5y_2=4f(x_1)+6g(x_2)-1. \end{cases}$$

解　求得 $x_1=-0.8588$，$x_2=0.3022$，$x_3=-0.8451$，$x_4=0.0156$。

```
clc, clear
```

```
f=@(t)(abs(t+1)-abs(t-1))/2+sin(t);
g=@(t)(abs(t+3)-abs(t-3))/2+cos(t);
H=@(x)[2*x(1)-3*f(x(3))-4*g(x(4))+1
     3*x(2)-2*f(x(3))-6*g(x(4))+2
     x(3)-f(x(1))-3*g(x(2))+3
     5*x(4)-4*f(x(1))-6*g(x(2))+1];
x=fsolve(H,rand(1,4))
```

习题 4

4.1　用二分法求 $f(x)=x^{600}-12.41x^{180}+11.41$ 在区间 $(1.0001,1.01)$ 上的一个零点。

4.2　用牛顿法求 $f(x)=x^3+x^2+x-1$ 在 0.5 附近的零点，要求误差不超过 10^{-6} 。

4.3　用一般迭代法求 $f(x)=x^3-\cos x-10x+1$ 的一个根，误差 $\varepsilon=10^{-6}$ 。

4.4　求如下非线性方程组的解。

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=e^{-x_1}, \\ -x_1+2x_2=e^{-x_2}. \end{cases}$$