ガンマ関数とベータ関数について

@Tdrj2716

2020 年 4 月 5 日

自分の LaTeX の練習も兼ね, 有名な関数であるガンマ関数とベータ関数についてまとめました. それぞれ階乗とコンビネーションを正の実数で一般化したものに相当します（実際にはガンマ関数は実部が正の複素数で定義されます）が, その事実がどのようにして導出できるのかをここでは扱います.

1　ガンマ関数

1.1　定義

正の実数 x について, 次の積分で定義される関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

をガンマ関数と呼ぶ. グラフは図 1 のようになる.

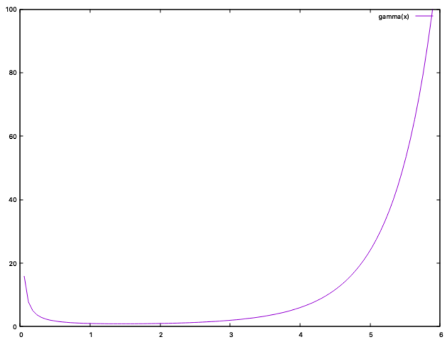

図 1　ガンマ関数

1.2 性質：階乗の一般化

任意の正整数 n に対し, 次の式が成り立つ.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

(証明)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} dt = \lim_{x\to\infty} [-\mathrm{e}^{-t}]_0^x = 1 = 0!$$

また, 任意の正整数 n に対して

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt = [-t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty (n-1)t^{n-2}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= \lim_{x\to\infty}[-t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}]_0^x + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= 0 + (n-1)\Gamma(n-1)\end{aligned}$$

よって, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\Gamma(1) = n!$

2 ベータ関数

2.1 定義

2.2 x, y が自然数であるとき

2.3 ガンマ関数との関係

参考文献

[1] 高校数学の美しい物語, ガンマ関数（階乗の一般化）の定義と性質
https://mathtrain.jp/gamma

[2] 高校数学の美しい物語, ベータ関数の積分公式
https://mathtrain.jp/beta

[3] 倭算数理研究所, ガンマ関数とベータ関数のよくある関係
https://wasan.hatenablog.com/entry/20110623/1308805478#%E3%82%AC%E3%83%B3%E3%83%9E%E9%96%A2%E6%95%B0%E3%81%A8%E3%83%99%E3%83%BC%E3%82%BF%E9%96%A2%E6%95%B0%E3%81%AE%E9%96%A2%E4%BF%82%E5%BC%8F