Конечое исчисление: Руководство для решения плохих сумм.

David Gleich*

Октябрь 2021

Содержание

1 Как посчитать $\sum_{x=1}^{n} x^2$?

Одна из задач, которую мы научимся решать, это как механически (т.е не думая слишком много) посчитать сумму

$$\sum_{x=1}^{n} x^2. \tag{1}$$

*Перевод и редактировние статьи: Роговский Владимир

Несмотря на то, что многие уже знают ответ на этот вопрос, наши поиски приведут к техникам, позволяющим легко посчитать плохие суммы, например

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}(x+y)^2 \tag{2}$$

и

$$\sum_{x=0}^{n} x2^x \tag{3}$$

Поскольку мы будем использовать $\sum_{x=1}^{n} x^2$ как пример, сначала посмотрим на первые несколько значений этой функции.

n	1	2	3	4	5	6
$\sum_{x=1}^{n} x^2$	1	5	14	30	55	91

Сообразительный читатель, наверное, уже понял, что мы как-то сделаем связь с матанализом. Поэтому давайте посмотрим, что будет если мы просто “притворимся”, что это был интеграл из матанализа. Заменив $\sum$ на $\int$, мы получаем

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 \stackrel{?}{=} \int_1^n x^2 dx$$

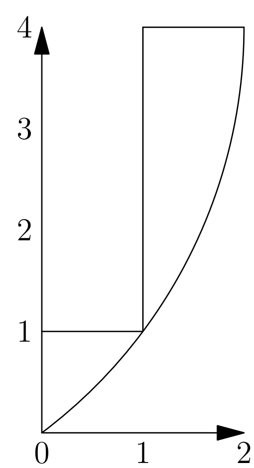
Используя матанализ, мы сразу считаем интеграл

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 \stackrel{?}{=} \frac{n^3}{3} - \frac{1}{3},$$

К сожалению, подставляя $n = 2$, видно, что это неверно.

$$\sum_{x=1}^{2} x^2 \stackrel{?}{=} \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \neq 5.$$

Графически, мы видим, что пошло не так.



Нам нужна площадь под ступенчатой линией, а не площадь под кривой. Иронично, что мы можем легко посчитать площадь под кривой, используя матанализ, но есть проблемы с определением более простой площади под ступенчатой линией. Вкратце, наша цель - найти конечный аналог матанализа, чтобы конечная сумма

$$\sum_{x=1}^{2} x^2$$

была не сложнее, чем "бесконечная"сумма

$$\int_1^2 x^2 dx.$$

Кроме конечного исчисления, другой способ посчитать значение $\sum_{x=1}^{n} x^2$, это подсмотреть в книжке или попытаться угадать ответ. Посмотрев на 21 страницу “CRC Standart Mathematical Tables and Formuale”, мы найдём

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Не думаю, что я бы смог такое угадать.

2 Вычислительная стоимость метода Гаусса

Теперь немного отклонимся от темы. Сейчас я бы хотел показать, как наш пример суммы встречается на практике. Не в уравнении, которое появилось из ниоткуда, а во время вычислительного анализа метода Гаусса - фундаментального алгоритма в линейной алгебре. Метод Гаусса получает матрицу A размером $m * m$ и расчитывает нижнюю треугольную матрицу L и верхнюю треугольную матрицу U, чтобы $A = LU$.

Алгоритм 1 Метод Гаусса

Ввод: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
  $U = A, L = I$
  для $k = 1$ до $m - 1$ сделать
    для $j = k + 1$ до m сделать
    $l_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$
    $u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - l_{jk}u_{k,k:m}$
   закончить
  закончить

Тут я не буду выводить метод Гаусса, но просто дам алгоритм и буду анализировать его вычислительную стоимость. Вычислительная стоимость алгоритма - это количество сложений, вычитаний, умножений и делений, выполненных в алгоритме. Чтобы анализировать эту стоимость, мы посмотрим сколько работы выполнено на каждом шаге внешнего цикла. В случае, когда $k = 1$, тогда j принимает значения от 2 до m. Во внутреннем цикле, мы совершаем 1 деление, m умножений и m вычитаний. Поскольку этот цикл выполняется $m - 1$ раз, то

$$2m(m-1) + (m-1) = 2m^2 - 1 \leq 2m^2$$

работы выполнено на первом шаге. На втором j принимает значения от 3 до m. Во внутреннем цикле, мы совершаем 1 деление, $m - 1$ умножение и $m - 1$ вычитание, и в итоге

$$2(m-2)(m-1) + (m-2) \leq 2(m-1)^2.$$

Это продолжается также для оставшихся шагов. Значит, общее количество шагов для метода Гаусса меньше, чем

$$2m^2 + 2(m-1)^2 + 2(m-2)^2 + \cdots + 1 = \sum_{x=1}^{m} 2x^2 = 2\sum_{x=1}^{m} x^2.$$

Поскольку мы подсмотрели значение этой суммы ранее, мы знаем, что метод Гаусса использует менее

$$2\sum_{x=1}^{n} x^2 = 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{2}{3}m^3 + m^2 + \frac{1}{3}$$

сложений,вычитаний,умножений и делений. Теперь давайте начнём определять, как мы сами можем посчитать $\sum_{x=1}^{n} x^2$.

3 Конечное исчисление

До того, как мы начнём выводить конечное исчисление, мне наверное нужно сначала объяснить, что это. По аналогии с матанализом, мы ищем “закрытую форму” для суммы вида

$$\sum_{x=a}^{b} f(x)$$

Под закрытой формой, мы подразумеваем какой-то набор фундмаментальных операций, например, сложение, умножение, возведение в степень и даже факториал. В матанализе, нам нужно считать площадь под графиком функции, а в конечном исчислении - площадь под последовательностью. Мы называем это конечным исчислением, потому что каждая сумма состоит из конечного (а не бесконечного) количества членов. Один способ думать о конечном исчислении - это матанализ на множестве целых чисел, а не действительных. В матанализе мы используем производную и первообразную вместе с фундаментальной теоремой матанализа, чтобы записать закрытую форму выражения

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Наша первая цель в конечном исчислении это получении фундаментальной теоремы конечного исчисления похожей формы.

3.1 Дискретная производная

До того, как мы можем надеяться получить фундаметнальную теорему конечного исчисления, наша первая цель - это получить понятие "производной". Вспомним из матанализа, что

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Поскольку мы работаем над целыми числами, самое близкое, что мы можем получить к 0 это 1 (если же не доходить до самого 0). Тогда, дискретная производная - это

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Определение (Дискретная производная). *Дискретная производная от $f(x)$ определена как*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Что мы можем делать с нашей новой производной? Из матанализа мы знаем, что легко взять производную от степенных функций $f(x) = x^m$.

$$\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}.$$

Надеемся, что мы найдем настолько же простую производную и для конечных степеней.

$$\Delta x^m = (x+1)^m - x^m \stackrel{?}{=} mx^{m-1}.$$

Быстрая проверка показывает, что

$$\Delta x = (x+1) - x = 1,$$

К сожалению, эта простая формула не работает для x^2.

$$\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \neq 2x.$$

Наша производная для x^2 отличается только на 1. Есть ли какой-то лёгкий способ решить эту проблему? Если мы перепишем нашу предыдущую производную как

$$\Delta(x^2) - 1 = 2x,$$

мы подошли ближе к ответу. Теперь, мы вносим -1 в нашу производную, замечая, что $\Delta(x^2 - x) = 2x + 1 - 1 = 2x$. Мы можем переписать $x^2 - x$ как $x(x-1)$. Значит мы получили, что

$$\Delta(x(x-1)) = 2x.$$

Я оставлю читателю проверить, что

$$\Delta(x(x-1)(x-2)) = 3x(x-1).$$

Кажется, что мы нашли новый тип степеней для наших дискретных производных! Такие степени известны как "убывающие степени."

Определение (Убывающая степень). *Выражение x в убывающей m записывается $x^{\underline{m}}$.* Значение

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-(m-1)).$$

Используя убывающие степени, мы докажем, что они являются аналогами обычных степеней в конечном исчислении.

Теорема 3.1 *Дискретная производная убывающей степени - это показатель, умноженный на следущую убывающую степень. То есть,*

$$\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}.$$

Доказательство. Доказательство - это просто алгебра.

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{m}} &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\
&= (x+1)x(x-1)\dots(x-m+2) - x(x-1)\dots(x-m+2)(x-m+1) \\
&= (x+1-x+m-1)x(x-1)\dots(x-m+2) \\
&= mx^{\underline{m-1}}.
\end{aligned}$$

□

Теперь докажем ещё пару полезных теорем.

Теорема 3.2 *Дискретная производная суммы двух функций - это сумма дискретных производных этих функций.*

$$\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

Доказательство. Доказательство прямо из определения.

$$\Delta(f(x) + g(x)) = f(x+1) + g(x+1) - f(x) - g(x).$$

Переставляя члены, мы получаем

$$\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

□

Теорема 3.3 *Дискретная производная постоянной, умноженной на функцию, - это постоянная, умноженная на дискретную производную функции.*

$$\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x).$$

Доказательство. Просто выносим постоянную из определения дискретной производной. □

3.2 Неопределённая сумма и дискретная первообразная.

Немного понимая, что делает наша дискретная производная, перейдём к дискретному интегрированию. Сначала введём обозначения.

Определение (Дискретная первообразная.) *Функция $f(x)$ со свойством $\Delta f(x) = g(x)$ называется первообразной функции g. Мы обозначаем класс таких функций, как неопределённая сумма $g(x)$,*

$$\sum g(x)\delta x = f(x) + C,$$

где C - это произвольная постоянная. $\sum g(x)\delta x$ также называется неопределённой суммой $g(x)$. Дискретная первообразная соответствует первообразной или неопределённому интегралу из матанализа.

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

$$\sum g(x)\delta x = f(x) + C$$

Пока что мы просто ввели определения. Мы еще не посчитали ни одной первообразной. Но мы можем легко это сделать. Вспомним, что

$$\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}.$$

Используя этот факт, вместе с Теоремами 3.2,3.3, позволяет нам показать, что

$$\sum x^{\underline{m}}\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + C.$$

Теперь, давайте поработаем над фундаментальной теоремой конечного исчисления. Сначала, нам нужно дать определение дискретому определённому интегралу или определённой сумме.

Определение (Дискретный определённый интеграл). *Пусть,* $\Delta f(x) = g(x)$. *Тогда*

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(b) - f(a).$$

С дискретным определённым интегралом теорему, которую мы хотели бы получить (по аналогии с матанализом), это

$$\sum_a^b g(x)\delta x \stackrel{?}{=} \sum_{x=a}^b g(x).$$

К сожалению, быстрая подстановка показывает, что это неверно.

$$\sum_1^5 x\delta x = \frac{5^{\underline{2}}}{2} - \frac{1^{\underline{2}}}{2} = \frac{(5)(4)}{2} = 10$$

Но $\sum_{x=1}^{5} x = 15$, значит теорема не верна. Но мы очень близки. Заметим, что

$$\sum_{1}^{5} x\delta x = 10 = \sum_{x=1}^{4} x.$$

Эта новая формула даёт нам фундаментальную теорему конечного исчисления.

Теорема 3.4. *Фундаментальная теорема конечного исчисления - это*

$$\sum_{a}^{b} g(x)\delta x = \sum_{x=a}^{b-1} g(x).$$

Доказательство. Опять же, доказательство это просто алгебра. Пусть, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} \sum_{x=a}^{b-1} g(x) &= \sum_{x=a}^{b-1} f(x+1) - f(x) \\ &= f(a+1) - f(a) + f(a+2) - f(a+1) + \dots \\ &\quad f(b) - f(b-1) \\ &= f(b) - f(a), \end{aligned}$$

и $f(b) - f(a) = \sum_{a}^{b} g(x)\delta x$ по определению. □

3.3 Полезные теоремы конечного исчисления

Теперь, когда у нас есть наша фундаментальная теорема, этот раздел - это просто набор теорем, чтобы сделать конечгое исчисление полезным. Одна из самых полезных функций в матанализе - $f(x) = e^x$. У этой специальной функции есть свойства

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

и

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Наша первая теорема это то, что есть аналогичная функция в конечном исчислении - функция, являющаяся своей же производной. Чтобы найти её, давайте “округлим” e. Если мы это правильно сделаем, то аналогом e должно быть 2 или 3, да? Давайте посмотрим, какая подходит.

$$\Delta(2^x) = 2^{x+1} - 2^x = 2 * 2^x - 2^x = (2-1)2^x = 2^x.$$

$$\Delta(3^x) = 3^{x+1} - 3^x = 3 * 3^x - 3^x = (3-1)3^x = 2 * 3^x.$$

Значит, e соответствует число 2.

Теорема 3.5. *Функция 2^x удовлетворяет*

$$\Delta(2^x) = 2^x$$

и

$$\sum 2^X \delta x = 2^x + C.$$

Давайте посчитаем общую производную для экспоненты.

$$\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x.$$

Поскольку, c - это постоянная в этом выражении, мы можем сразу посчитать и первообразную.

$$\sum c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1} + C.$$

Одна из важных теорем матанализа - это формула для $\frac{d}{dx}(u(x)v(x))$. Давайте найдём соответсвующую формулу в конечном исчислении.

$$\begin{aligned}
\Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\
&= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) + u(x+1) - u(x)v(x) \\
&= v(x+1)\delta u(x+1) + u(x)\delta v(x).
\end{aligned}$$

Теперь мы можем использовать эту производную, чтобы написать формулу дискретного интегрирования по частям.

Теорема 3.6.

$$\sum u(x)\Delta v(x)\delta x = u(x)v(x) - \sum v(x+1)\Delta u(x)\delta x.$$

Доказательство. Если мы возьмём первообразную обеих частей у

$$\Delta(u(x)v(x)) = u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x),$$

мы получим

$$u(x)v(x) = \sum u(x)\Delta v(x)\delta x + \sum v(x+1)\Delta u(x)\delta x.$$

Переставляя члены, мы получаем теорему. □

Есть ещё три факта, на которых я бы хотел закончить. Во-первых, давайте посмотрим на производную и первообразную некоторых комбинаторних функций.Во-вторых, работают ли наши формулы для убывающих степеней и их производных и для отрицательных степеней? И в-третьих, что насчёт $x^{\underline{-1}}$? Биномиальные коэффиценты часто появляются в комбинаторике. Давайте посчитаем $\Delta\binom{x}{k}$. Если мы используем хорошо известную формулу $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, мы можем легко показать, что

$$\Delta\binom{x}{k} = \binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}.$$

Мы можем это так переписать:

$$\sum \binom{x}{k}\delta x = \binom{x}{k+1} + C.$$

Поскольку убывающая степень только определена для положительных показателей, вам, возможно, было интересно про отрицательные убывающие степени. Давайте теперь с ними разберёмся. Мы можем вывести определение, посмотрев на закономерность в убывающих степеней.

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2) \\ x^{\underline{2}} &= x(x-1) \\ x^{\underline{1}} &= x \\ x^{\underline{0}} &= 1 \end{aligned}$$

Чтобы перейти с $x^{\underline{3}}$ на $x^{\underline{2}}$, мы делим на $x-2$. Чтобы перейти с $x^{\underline{2}}$ на $x^{\underline{1}}$, мы делим на $x-1$. Продолжая эту закономерность, мы получаем

$$\begin{aligned} x^{\underline{-1}} &= x^{\underline{0}}/(x+1) = \frac{1}{x+1} \\ x^{\underline{-2}} &= x^{\underline{-1}}/(x+2) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

Определение (Отрицательная убывающая степень).

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$$

Давайте проверим наше правило для производных убывающих степеней.

$$\begin{aligned} \Delta(x^{\underline{-m}}) &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\dots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)} \\ &= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)} \\ &= -mx^{\underline{-m-1}} \end{aligned}$$

Удивительно, но наша формула работает! Из этого факта мы получаем, что наша формула для дискретной первообразной работает и для отрицательных степеней. Ну, она работает, если $m \neq -1$. В этом случае мы бы получили $\sum x^{\underline{-1}} = \frac{x^{\underline{0}}}{0}$, а это проблема. Вспомним из матанализа, что нам нужна была функция $ln(x)$ для интеграции $\frac{1}{x}$. Нет лёгкого способа интуитивно получить правильную функцию.

Теорема 3.7. *Пусть,*

$$H_x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x}$$

для целых x. Функция H_x это первообразная от $\frac{1}{X}$.

Доказательство.

$$\Delta H_x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1}$$

□

4 Делаем конечное исчисление полезным: Стирлинг и его числа.

Если вы дочитали до этого места, то наверное думаете: “Хорошо, ты показал все эти хорошие факты про конечное исчисление. Но ты так и не показал, как решить

$$\sum_{x=1}^{n} x^2$$

как ты обещал в самом начале.” Теперь этим и займёмся.

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\sum f(x)\delta x$
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	$\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}$
$x^{\underline{-1}}$	$-x^{\underline{-2}}$	H_x
2^x	2^x	2^x
c^x	$(c-1)c^x$	$\frac{c^x}{c-1}$
$\binom{x}{m}$	$\binom{x}{m-1}$	$\binom{x}{m+1}$
$u(x)+v(x)$	$\Delta u(x)+\Delta v(x)$	$\sum u(x)\delta x+\sum v(x)\delta x$
$u(x)v(x)$	$u(x)\Delta v(x)+v(x+1)\Delta u(x)$	
$u(x)\Delta v(x)$		$u(x)v(x)-\sum v(x+1)\Delta u(x)\delta x$

Таблица 1: Тут множество полезных теорем о конечном исчислении. Они сделают расчёты плохих сумм лёгкими(или хотя бы выносимыми). Все из дискретных первообразных написаны без константы ради краткости.

Чтобы работать с обычными степенями, нужно сначала найти способ перейти между x^m и $x^{\underline{m}}$, чтобы мы могли использовать наши теоремы интеграции. Давайте посмотрим на все превращения, которые можем сделать сами.

$$x^0 = x^{\underline{0}}$$
$$x^1 = x^{\underline{1}}$$
$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$
$$x^3 = ???$$

Мы видим, что первые несколько степеней легко преобразовать, но более высокие степени не настолько очевидны. Давайте поработаем с

$$x^3 = ax^{\underline{3}} + bx^{\underline{2}} + c^{\underline{1}}$$

чтобы получить формулу для a,b и c.

$$\begin{aligned}
ax^{\underline{3}} + bx^{\underline{2}} + cx^{\underline{1}} &= ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx \\
&= ax^3 - 3ax^2 + 2ax + bx^2 - bx + cx \\
&= ax^3 + (b-3a)x^2 + (2a-b+c)x
\end{aligned}$$

Если мы хотим $ax^{\underline{3}} + bx^{\underline{2}} + cx^{\underline{1}} = x^3$, то нам нужно $a = 1$, $b - 3a = 0$, $2a - b + c = 0$. Или иначе $a = 1$, $b = 3$ и $c = 1$. Значит, мы имеем

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

Это много работы просто для x^3. Я не буду пытаться это сделать для x^4, но если вы хотите, то можете попробовать. Вместо этого, остальную часть этого раздела я посвящу одной теореме.

Теорема 4.1. *Мы можем переходить между степенями и убывающими степенями, используя эту формулу.*

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{\underline{k}},$$

где $\left\{ {m \atop k} \right\}$ *- число Стирлинга второго рода.*

Ладно, эту теорему сложно сразу переварить. До того, как мы начнём её доказывать, давайте разберём её на части. Теорема гласит, что мы можем переходить между степенями и убывающими степенями, если мы можем посчитать эти числа Стирлинга (до них мы скоро дойдём). Значит, если мы хотим выразить x^4 через убывающие степени, эта теорема говорит нам ответ:

$$x^4 = \left\{ {4 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} + \left\{ {4 \atop 1} \right\} x^{\underline{1}} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} x^{\underline{2}} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} x^{\underline{3}} + \left\{ {4 \atop 4} \right\} x^{\underline{4}}.$$

Теперь, давайте про эти числа Стирлинга.

4.1 Числа Стирлинга (Второго рода)

Если вы их раньше не видели, вам, наверное, стало интересно про эти числа Стирлинга. Для начала, я дам их определение.

Определение (Числа Стирлинга). *Числа Стирлинга второго рода, обозначаются*

$$\left\{ {n \atop k} \right\},$$

это количество способов разбить n различных предметов на k непустых множеств. Наверное, это определение не сильно помогло. Надеюсь, что работа с ними поможет. Сначала давайте попробуем посчитать $\left\{ {1 \atop 1} \right\}$. Это количество способов разбить 1 предмет на 1 непустое множество. Думаю, что очевидно, что есть только один способ это сделать. Значит, $\left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1$. А что насчёт $\left\{ {1 \atop 0} \right\}$, или количество разбить 1 предмет на 0 непустых множеств? Поскольку, каждое множество должно быть непустым, есть 0 способов это сделать, значит $\left\{ {1 \atop 0} \right\} = 0$. Мы можем это обобщить и показать, что

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$$

если $n > 0$. А что насчет $\left\{ {0 \atop 0} \right\}$? Мы хотим разбить 0 предметов на 0 непустых множеств. Не должно ли и это равняться 0? Странно, но нет, $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. Если вам сложно принять этот факт логически, считайте, что это определение. Ещё одни простые числа Стирлинга это $\left\{ {n \atop n} \right\}$. Эти числа являются количеством способов разбить n предметов на n непустых множеств. Поскольку количество предметов равно количеству множеств, в каждом множестве может быть только один предмет, значит $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$. Теперь давайте посмотрим на более сложное число Стирлинга, $\left\{ {3 \atop 2} \right\}$. Пусть наши 3 предмета это $\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit$. Когда мы делим эти 3 масти на 2 непустых множества,мы получаем следующие множества.

$$\{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit\}$$

$$\{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\diamondsuit\}$$

$$\{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit\}$$

Значит, $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$, поскольку есть 3 способа разбить 3 предмета на 2 непустых множества. Но мы всё равно не многое знаем про числа Стирлинга. Давайте докажем теорему, чтобы мы могли считать числа Стирлинга, зная предыдущие.

Теорема 4.2.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

Доказательство. Мы дадим комбинаторное доказательство этому. В этом доказательстве, мы посчитаем количество способов разбить n предметов на k не пустых множеств. Очевидный способ это посчитать - это использовать наше определение чисел Стирлинга. По этому определению, количество способов будет равно $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Теперь давайте это посчитаем другим способом.Давайте выберем фиксированный предмет и назовём его“чудаком”. Тогда мы можем посчитать количество способов разбиения, посмотрев куда идёт чудак. Первый случай, когда чудак сам по себе в множнстве. В этом случае есть $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ разбить оставшиеся предметы. Второй случай, когда чудак с кем-то другим в множнстве. В этом случае, остальные предметы разделены на k множеств. Тогда, общее количество способов разбиения в этом случае - $k * \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. Значит,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

□

4.2 Доказательство теоремы.

Чтобы доказать теорему 4.1, сначала докажем полезную лемму, а потом уже много алгебры.

Лемма *Полезная лемма*

$$x * x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

.

Доказательство.

$$\begin{aligned} x * x^{\underline{k}} &= x * x^{\underline{k}} - k * x^{\underline{k}} + k * x^{\underline{k}} \\ &= (x-k) * x^{\underline{k}} + k * x^{\underline{k}} \\ &= x^{\underline{k+1}} + k * x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

□

Теперь, вспомним теорему 4.1.

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{\underline{k}},$$

Доказательство. Мы докажем это индукцией по n. База индукции, $n = 1$ тривиальна. Предположение индукции это то, что $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$ верно для всех $n \leq r$, Переход. n=r+1

$$\begin{aligned} x^{r+1} &= xx^r \\ &= \sum_{k=0}^{r} \left\{ {r \atop k} \right\} xx^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{r} \left\{ {r \atop k} \right\} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \left\{ {r \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{r} \left\{ {r \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\ &= \left\{ {r \atop r} \right\} x^{\underline{r+1}} + \sum_{k=1}^{r} (\left\{ {r \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \left\{ {r \atop k} \right\} kx^{\underline{k}}) + \left\{ {r \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} \\ &= x^{\underline{r+1}} + \sum_{k=0}^{r} \left\{ {r+1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} \left\{ {r+1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

□

Замечательно! Теперь мы можем переходить между x^m и убывающими степенями!

4.3 Вычисление чисел Стирлинга

Мы можем вывести формулу для вычисления чисел Стирлинга, без рекурентного соотношения, полученного в теореме 4.2.

Теорема 4.3.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Доказательство. Опять же, докажем это комбинаторно. Тут мы будем считать количество суръекций между множеством из n элементов X и множеством из k элементов Y. Поскольку мы считаем суръекции, то каждому элементу из Y соответствует непустое множество элементов из X. Значит количество таких суръекций это $k!\left\{ n \atop k \right\}$. С другой стороны, мы можем посчитать это методом включения и исключения. Рассмотрим все возможные отображения из X в Y и отнимим количество отображений, где хотя бы одному элементу из Y не соответствует ни один элемент из X. Используя метод велючения и исключения, мы получаем

$$\binom{k}{0}k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Делим обе части на $k!$ для завершения доказательства. □

5 Множество примеров...

В этом разделе, мы посмотрим на несколько примеров, чтобы показать полезность конченого исчисления.

5.1 $\sum_{x=1}^{n} x^2$

Поскольку я ещё не показал, как посчитать эту сумму, давайте это сделаем сейчас.

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \sum_{1}^{n+1} x^2 \delta x = \sum_{1}^{n+1} x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \delta x = (n+1)^{\underline{3}}/3 + (n+1)^{\underline{2}}/2 - 1^{\underline{3}}/3 - 1^{\underline{2}}/2 = (n+1)^{\underline{3}}/3 + (n+1)^{\underline{2}}/2.$$

5.2 Двойная сумма

Как и обещал в начале, давайте посчитаем $\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(x+y)^2$ используя конечное исчисление.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(x+y)^2 &= \sum_{x=1}^{n+1}\sum_{y=1}^{n+1}(x+y)^2\delta y\delta x = \sum_{x=1}^{n+1}\sum_{y=1}^{n+1}(x+y)^{\underline{2}} + (x+y)^{\underline{1}}\delta y\delta x \\
&= \sum_{1}^{n+1}(x+n+1)^{\underline{3}}/3 + (x+n+1)^{\underline{2}}/2 - (x+1)^{\underline{3}}/3 - (x+1)^{\underline{2}}/2\delta x \\
&- (2n+2)^{\underline{4}}/12 + (2n+2)^{\underline{3}}/6 - (n+2)^{\underline{4}}/6 - (n+2)^{\underline{3}}/3
\end{aligned}$$

Несмотря на то, что это верно, мы пропустили один шаг. Чему равняется $\sum (x+c)^{\underline{m}}\delta x$? Мы предположили, что это равняется $\sum x^{\underline{m}}\delta x$ без доказательства. Посмотрев на доказательство теоремы 3.1, это верно, ведь мы просто добавили постоянную к убывающей степени.

5.3 Средняя длина команды

Представьте, что вы глава программирования одного из марсоходов. Они принимают команды длиной до 10 бит. Их краткое содержание есть ниже.

0	стоп
1	взять фотографию
00	двигаться вперёд
01	двигаться назад
10	двигаться влево
11	двигаться вправо
⋮	⋮
001101	взять фотографию зелёного пришельца
⋮	⋮
1111111111	самоуничтожение

В этой таблице есть пара интересных вещей. Во-первых, 0 и 00 - это разные команды! Во-вторых, все возможные команды используются и нет избыточности в командах. После того, как вы сделали эту систему команд, ваш босс звонит вам и хочет узнать среднюю длину команды. Поскольку NASA платит за межпланетную коммуникацию по битам, он сильно хочет знать сколько будет стоит ваша система. Пока вы разговариваете с вашим боссом, вы делаете пару заметок. Во-первых, существует ровно 2^x команд длиной x бит. Значит, общее количество команд это

$$\sum_{x=1}^{10} 2^x = 2^{11} - 2.$$

Во-вторых, общая длина всех команд длиной x бит это $x2^x$. Ага! Теперь вы можете легко посчитать среднюю длину команды.

$$\frac{\sum_{x=1}^{10} x2^x}{\sum_{x=1}^{10} 2^x}.$$

Несмотря на то, что вы уже посчитали знаменатель, числитель чуть сложнее. Но, поскольку вы (очевидно) прочитали все части этой статьи, вы знаете про конечное исчислении и продожаете.

$$\sum_{x=1}^{10} x2^x = \sum_{1}^{11} x2^x \delta x.$$

Теперь вы вспоминаете маленькую теорему про “дискретное интегрирование по частям” (Теорема 3.6.)

$$\sum x2^x \delta x = x2^x - \sum 2^{x+1} \delta x = x2^x - 2^{x+1} = 2^x(x-2).$$

Тогда,

$$\sum_{x=1}^{10} x2^x = 2^{11}(11-2) - 2^1(1-2) = 9 * 2^{11} + 2.$$

Тогда, средняя длина команды это

$$\frac{9 * 2^{11} + 2}{2^{11} - 2} \approx 9.00978 \approx 9.$$

После небольшой паузы в разговоре, вы сувереностью отвечаете: “Сэр, средняя длина команды - 9 бит до двух знаков после запятой”