Całka Riemanna

Niech dana będzie funkcja ograniczona $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Sumą częściową (Riemanna) nazywa się liczbę

$$R_{f,P(q_1,\ldots,q_2)} = \sum_{i=1}^{n} f(q_i) \cdot \Delta p_i \tag{1}$$

Funkcję f nazywa się *całkowalną w sensie Riemanna* lub krótko *R-całkowalną*, jeśli dla dowolnego ciągu normalnego (P^k) podziałów przedziału $[a,b]$, istnieje (niezależna od wyboru punktów pośrednich) granica

$$R_f = \lim_{k \to \inf} R_{f,P^k(q_1^k,\ldots q_{n_k}^k)}$$

nazywana wtedy **całką Riemanna** tej funkcji. Równoważnie: jeżeli istnieje taka liczba R_f, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista $\delta > 0$, że dla dowolnego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ o średnicy $diam P(q_1,\ldots,q_n) < \delta$; bądź też w języku rozdrobnień: że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział $S(t_1,\ldots,t_m)$ przedziału $[a,b]$, że dla każdego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ rozdrabniającego $S(t_1,\ldots,t_m)$ zachodzi

$$\left| R_{f,P(q_1,\ldots q_n)} - R_f \right| < \varepsilon$$