Студент: Рыжиков Иван
Группа: 2381
Вариант: 17
Дата: 18 марта 2025 г.

Элементы функционального анализа
Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. *Определить $\|a\|$, $\|b\|$, $\|a+b\|$ в норме Минковского, порожденную многогранником W.*

Многогранник W задан вершинами в первом октанте, остальные вершины получаются из них симметричным отражением относительно координатных плоскостей.

$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} \frac{43}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{102}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{35}{3} \end{pmatrix}$.

$a = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Определение нормы. Норма — функция $|x| : X \to \mathbf{R}$, обладающая следующими свойствами:

(1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$,
(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Норма Минковского. Пусть задано множество W в линейном пространстве X, такое что

(1) W — выпуклое множество
(2) 0 — внутренняя точка и точка симметрии W
(3) $\forall x \in X, x \neq 0 \; \exists k > 0 : \frac{1}{k}x \in W$

Тогда норма Минковского определяется как

$$\|x\| = \inf\{k > 0 : \frac{x}{k} \in W\}$$

Симметричные точки:

$$\left[\left(\text{v1}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v2}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v3}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v4}, \begin{pmatrix} \frac{43}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v5}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{102}{11} \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v6}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{35}{3} \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$x < 0, y, z \geq 0 : \left[\left(\text{v7}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v8}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v9}, \begin{pmatrix} -\frac{43}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$y < 0, x, z \geq 0 : \left[\left(\text{v10}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v11}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v12}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{102}{11} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$z < 0, x, y \geq 0 : \left[\left(\text{v13}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v14}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v15}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{35}{3} \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$x, y, z \leq 0 : \left[\left(\text{v16}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v17}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \left(\text{v18}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \right) \right]$$

Разобьем плоскости на октанты:

Первый октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Второй октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Третий октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Четвертый октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Пятый октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Шестой октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Седьмой октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Восьмой октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{43}{8}\\0\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\frac{102}{11}\\0\end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{35}{3}\end{pmatrix}\right]\right]$$

Плоскости. Найдём коэффициенты нормальное уравнения плоскости для каждой плоскости в октантах:

$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0.$

Выберем $D \leq 0$, так чтобы при подстановке любой точки из многогранника W в уравнение плоскости, левая часть была отрицательной.

№	A	B	C	D
1	48	22	18	-276
2	12	19/4	9/4	-129/2
3	288/11	24	108/11	-2448/11
4	58	55/3	30	-350
5	48	-22	18	-276
6	12	-19/4	9/4	-129/2
7	288/11	-24	108/11	-2448/11
8	58	-55/3	30	-350
9	48	-22	-18	-276
10	12	-19/4	-9/4	-129/2
11	288/11	-24	-108/11	-2448/11
12	58	-55/3	-30	-350
13	48	22	-18	-276
14	12	19/4	-9/4	-129/2
15	288/11	24	-108/11	-2448/11
16	58	55/3	-30	-350
17	-48	22	18	-276
18	-12	19/4	9/4	-129/2
19	-288/11	24	108/11	-2448/11
20	-58	55/3	30	-350
21	-48	-22	18	-276
22	-12	-19/4	9/4	-129/2
23	-288/11	-24	108/11	-2448/11
24	-58	-55/3	30	-350
25	-48	-22	-18	-276
26	-12	-19/4	-9/4	-129/2
27	-288/11	-24	-108/11	-2448/11
28	-58	-55/3	-30	-350
29	-48	22	-18	-276
30	-12	19/4	-9/4	-129/2
31	-288/11	24	-108/11	-2448/11
32	-58	55/3	-30	-350

Проверка выпуклости.

Проверим выпуклость многогранника W, используя уравнения плоскостей.

Так как мы выбрали $D \leq 0$, то если все точки многогранника W при подстановке в уравнения плоскостей будут давать отрицательные значения, то многогранник W выпуклый.

Плоскость\Вершины	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$
1	0	0	0	-18	-72	-66
2	0	0	-18	0	-225/11	-153/4
3	0	-72	0	-900/11	0	-108
4	-66	0	0	-153/4	-180	0
5	-264	0	-264	-18	-480	-66
6	-57	0	-75	0	-1194/11	-153/4
7	-288	-72	-288	-900/11	-4896/11	-108
8	-286	0	-220	-153/4	-520	0
9	-264	-72	-552	-18	-480	-486
10	-57	-9	-111	0	-1194/11	-363/4
11	-288	-1224/11	-4896/11	-900/11	-4896/11	-3708/11
12	-286	-120	-700	-153/4	-520	-700
13	0	-72	-288	-18	-72	-486
14	0	-9	-54	0	-225/11	-363/4
15	0	-1224/11	-1728/11	-900/11	0	-3708/11
16	-66	-120	-480	-153/4	-180	-700
17	-288	-480	0	-534	-72	-66
18	-72	-120	-18	-129	-225/11	-153/4
19	-1728/11	-3672/11	0	-3996/11	0	-108
20	-414	-580	0	-2647/4	-180	0
21	-552	-480	-264	-534	-480	-66
22	-129	-120	-75	-129	-1194/11	-153/4
23	-4896/11	-3672/11	-288	-3996/11	-4896/11	-108
24	-634	-580	-220	-2647/4	-520	0
25	-552	-552	-552	-534	-480	-486
26	-129	-129	-111	-129	-1194/11	-363/4
27	-4896/11	-4104/11	-4896/11	-3996/11	-4896/11	-3708/11
28	-634	-700	-700	-2647/4	-520	-700
29	-288	-552	-288	-534	-72	-486
30	-72	-129	-54	-129	-225/11	-363/4
31	-1728/11	-4104/11	-1728/11	-3996/11	0	-3708/11
32	-414	-700	-480	-2647/4	-180	-700

Плоскость\Вершины	$v7$	$v8$	$v9$	$v10$	$v11$	$v12$
1	-288	-480	-534	-264	-264	-480
2	-72	-120	-129	-57	-75	-1194/11
3	-1728/11	-3672/11	-3996/11	-288	-288	-4896/11
4	-414	-580	-2647/4	-286	-220	-520
5	-552	-480	-534	0	0	-72
6	-129	-120	-129	0	-18	-225/11
7	-4896/11	-3672/11	-3996/11	0	0	0
8	-634	-580	-2647/4	-66	0	-180
9	-552	-552	-534	0	-288	-72
10	-129	-129	-129	0	-54	-225/11
11	-4896/11	-4104/11	-3996/11	0	-1728/11	0
12	-634	-700	-2647/4	-66	-480	-180
13	-288	-552	-534	-264	-552	-480
14	-72	-129	-129	-57	-111	-1194/11
15	-1728/11	-4104/11	-3996/11	-288	-4896/11	-4896/11
16	-414	-700	-2647/4	-286	-700	-520
17	0	0	-18	-552	-264	-480
18	0	0	0	-129	-75	-1194/11
19	0	-72	-900/11	-4896/11	-288	-4896/11
20	-66	0	-153/4	-634	-220	-520
21	-264	0	-18	-288	0	-72
22	-57	0	0	-72	-18	-225/11
23	-288	-72	-900/11	-1728/11	0	0
24	-286	0	-153/4	-414	0	-180
25	-264	-72	-18	-288	-288	-72
26	-57	-9	0	-72	-54	-225/11
27	-288	-1224/11	-900/11	-1728/11	-1728/11	0
28	-286	-120	-153/4	-414	-480	-180
29	0	-72	-18	-552	-552	-480
30	0	-9	0	-129	-111	-1194/11
31	0	-1224/11	-900/11	-4896/11	-4896/11	-4896/11
32	-66	-120	-153/4	-634	-700	-520

Плоскость\Вершины	$v13$	$v14$	$v15$	$v16$	$v17$	$v18$
1	-72	-288	-486	-552	-552	-552
2	-9	-54	-363/4	-129	-129	-111
3	-1224/11	-1728/11	-3708/11	-4896/11	-4104/11	-4896/11
4	-120	-480	-700	-634	-700	-700
5	-72	-552	-486	-288	-552	-288
6	-9	-111	-363/4	-72	-129	-54
7	-1224/11	-4896/11	-3708/11	-1728/11	-4104/11	-1728/11
8	-120	-700	-700	-414	-700	-480
9	0	-264	-66	-288	-480	0
10	0	-75	-153/4	-72	-120	-18
11	-72	-288	-108	-1728/11	-3672/11	0
12	0	-220	0	-414	-580	0
13	0	0	-66	-552	-480	-264
14	0	-18	-153/4	-129	-120	-75
15	-72	0	-108	-4896/11	-3672/11	-288
16	0	0	0	-634	-580	-220
17	-552	-288	-486	-264	-72	-552
18	-129	-54	-363/4	-57	-9	-111
19	-4104/11	-1728/11	-3708/11	-288	-1224/11	-4896/11
20	-700	-480	-700	-286	-120	-700
21	-552	-552	-486	0	-72	-288
22	-129	-111	-363/4	0	-9	-54
23	-4104/11	-4896/11	-3708/11	0	-1224/11	-1728/11
24	-700	-700	-700	-66	-120	-480
25	-480	-264	-66	0	0	0
26	-120	-75	-153/4	0	0	-18
27	-3672/11	-288	-108	0	-72	0
28	-580	-220	0	-66	0	0
29	-480	0	-66	-264	0	-264
30	-120	-18	-153/4	-57	0	-75
31	-3672/11	0	-108	-288	-72	-288
32	-580	0	0	-286	0	-220

Определение норм векторов. Проверим, лежит ли заданный вектор в конической оболочке, которую образуют три вектора, соответствующие грани многогранника, а именно: выражается ли он как их неотрицательная линейная комбинация

Для этого постоем биортагональный базисов, так что при умножении на матрицу сразу получаются те самые коэффициенты λ_i. Если все λ_i неотрицательны, то вектор действительно принадлежит конусу.

Затем сумма $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ интерпретируется как «коэффициент масштабирования», который в задаче равен норме Минковского для данного вектора.

Найдем норму вектора $a = \left(\begin{smallmatrix}5\\-7\\9\end{smallmatrix}\right)$.

Поиск нормы вектора $v = \begin{bmatrix}5\\-7\\9\end{bmatrix}$:

Номер плоскости 1 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix}0\\6\\8\end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{23}\\ \frac{10}{69}\\ -\frac{5}{46}\end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix}\frac{4}{23}\\ -\frac{2}{23}\\ \frac{3}{46}\end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{23}\\ \frac{1}{46}\\ \frac{5}{46}\end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v:

$$W = \begin{pmatrix}1/23 & 10/69 & -5/46\\ 4/23 & -2/23 & 3/46\\ -1/23 & 1/46 & 5/46\end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix}5\\-7\\9\end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix}-\frac{245}{138}\\ \frac{95}{46}\\ \frac{14}{23}\end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 2 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix}\frac{43}{8}\\0\\0\end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{6}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} \frac{8}{43} \\ -\frac{4}{43} \\ -\frac{20}{43} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 8/43 & -4/43 & -20/43 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{112}{43} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 3 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{102}{11} \\ 0 \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{51} \\ \frac{11}{102} \\ -\frac{11}{136} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v:

$$W = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ -11/51 & 11/102 & -11/136 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{9}{8} \\ -\frac{1045}{408} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 4 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{35}{3} \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{175} \\ -\frac{4}{35} \\ \frac{3}{35} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v:

$$W = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ -6/175 & -4/35 & 3/35 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 5 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{23} \\ -\frac{10}{69} \\ -\frac{5}{46} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{23} \\ \frac{2}{23} \\ \frac{3}{46} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{23} \\ -\frac{1}{46} \\ \frac{5}{46} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v:

$$W = \begin{pmatrix} 1/23 & -10/69 & -5/46 \\ 4/23 & 2/23 & 3/46 \\ -1/23 & -1/46 & 5/46 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{35}{138} \\ \frac{39}{46} \\ \frac{21}{23} \end{bmatrix}$$

Все координаты неотрицательны; норма вектора:

$$||v|| = x_{W,1} + x_{W,2} + x_{W,3} = \frac{139}{69}$$

$\left\| \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix} \right\| = \frac{139}{69}$

Аналогично, для векторов $b = \left(\begin{smallmatrix} -9 \\ 7 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ и $a + b = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 0 \\ 14 \end{smallmatrix}\right)$.

Ответ:

$$||a|| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = 2.0145$$

,

$$||b|| = \left\| \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = 2.4493$$

,

$$||a + b|| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \right\| = 1.8629$$

.