

Элементы функционального анализа
 Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. Определить $\|a\|$, $\|b\|$, $\|a+b\|$ в норме Минковского, порожденную многогранником W .

Многогранник W задан вершинами в первом октанте, остальные вершины получаются из них симметричным отражением относительно координатных плоскостей.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{215}{26} \end{pmatrix}.$$

$$a = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Определение нормы. Норма — функция $|x| : X \rightarrow \mathbf{R}$, обладающая следующими свойствами:

- (1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (2) $|\alpha x| = |\alpha| |x|$,
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Норма Минковского. Пусть задано множество W в линейном пространстве X , такое что

- (1) W — выпуклое множество
- (2) 0 — внутренняя точка и точка симметрии W
- (3) $\forall x \in X, x \neq 0 \exists k > 0 : \frac{1}{k}x \in W$

Тогда норма Минковского определяется как

$$\|x\| = \inf \{k > 0 : \frac{x}{k} \in W\}$$

Симметричные точки:

$$\left[\left(v_1, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(v_2, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right), \left(v_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \left(v_4, \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(v_5, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(v_6, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{215}{26} \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$x < 0, y, z \geq 0 : \left[\left(v_7, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(v_8, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right), \left(v_9, \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$y < 0, x, z \geq 0 : \left[\left(v_{10}, \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(v_{11}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \left(v_{12}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$z < 0, x, y \geq 0 : \left[\left(v_{13}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right), \left(v_{14}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \left(v_{15}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{215}{26} \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$x, y, z \leq 0 : \left[\left(v_{16}, \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(v_{17}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right), \left(v_{18}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right]$$

Разобьем плоскости на октанты:

Первый октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Второй октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Третий октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Четвертый октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Пятый октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Шестой октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Седьмой октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Восьмой октант:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{215}{26} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right]$$

Плоскости. Найдём коэффициенты нормального уравнения плоскости для каждой плоскости в октантах:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0.$$

Выберем $D \leq 0$, так чтобы при подстановке любой точки из многогранника W в уравнение плоскости, левая часть была отрицательной.

№	A	B	C	D
1	4	68	52	-444
2	48	408	318	-2880
3	9/17	18	387/34	-1917/17
4	35/26	1141/26	35	-7525/26
5	4	-68	52	-444
6	48	-408	318	-2880
7	9/17	-18	387/34	-1917/17
8	35/26	-1141/26	35	-7525/26
9	4	-68	-52	-444
10	48	-408	-318	-2880
11	9/17	-18	-387/34	-1917/17
12	35/26	-1141/26	-35	-7525/26
13	4	68	-52	-444
14	48	408	-318	-2880
15	9/17	18	-387/34	-1917/17
16	35/26	1141/26	-35	-7525/26
17	-4	68	52	-444
18	-48	408	318	-2880
19	-9/17	18	387/34	-1917/17
20	-35/26	1141/26	35	-7525/26
21	-4	-68	52	-444
22	-48	-408	318	-2880
23	-9/17	-18	387/34	-1917/17
24	-35/26	-1141/26	35	-7525/26
25	-4	-68	-52	-444
26	-48	-408	-318	-2880
27	-9/17	-18	-387/34	-1917/17
28	-35/26	-1141/26	-35	-7525/26
29	-4	68	-52	-444
30	-48	408	-318	-2880
31	-9/17	18	-387/34	-1917/17
32	-35/26	1141/26	-35	-7525/26

Проверка выпуклости.

Проверим выпуклость многогранника W , используя уравнения плоскостей.

Так как мы выбрали $D \leq 0$, то если все точки многогранника W при подстановке в уравнения плоскостей будут давать отрицательные значения, то многогранник W выпуклый.

Плоскость\Вершины	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$
1	0	0	0	-204	-18	-14
2	0	0	-204	0	-324	-3255/13
3	0	-18	0	-81	0	-16479/884
4	-14	0	0	-5425/26	-12817/884	0
5	-816	0	-680	-204	-870	-14
6	-4896	0	-4284	0	-5436	-3255/13
7	-216	-18	-180	-81	-3834/17	-16479/884
8	-7028/13	0	-5705/13	-5425/26	-498883/884	0
9	-816	-832	-888	-204	-870	-874
10	-4896	-5088	-5556	0	-5436	-71625/13
11	-216	-3402/17	-3834/17	-81	-3834/17	-182889/884
12	-7028/13	-560	-7525/13	-5425/26	-498883/884	-7525/13
13	0	-832	-208	-204	-18	-874
14	0	-5088	-1476	0	-324	-71625/13
15	0	-3402/17	-774/17	-81	0	-182889/884
16	-14	-560	-140	-5425/26	-12817/884	-7525/13
17	-72	-56	0	-684	-18	-14
18	-864	-672	-204	-5760	-324	-3255/13
19	-162/17	-432/17	0	-2457/17	0	-16479/884
20	-497/13	-245/13	0	-9625/26	-12817/884	0
21	-888	-56	-680	-684	-870	-14
22	-5760	-672	-4284	-5760	-5436	-3255/13
23	-3834/17	-432/17	-180	-2457/17	-3834/17	-16479/884
24	-7343/13	-245/13	-5705/13	-9625/26	-498883/884	0
25	-888	-888	-888	-684	-870	-874
26	-5760	-5760	-5556	-5760	-5436	-71625/13
27	-3834/17	-3528/17	-3834/17	-2457/17	-3834/17	-182889/884
28	-7343/13	-7525/13	-7525/13	-9625/26	-498883/884	-7525/13
29	-72	-888	-208	-684	-18	-874
30	-864	-5760	-1476	-5760	-324	-71625/13
31	-162/17	-3528/17	-774/17	-2457/17	0	-182889/884
32	-497/13	-7525/13	-140	-9625/26	-12817/884	-7525/13
Плоскость\Вершины	$v7$	$v8$	$v9$	$v10$	$v11$	$v12$
1	-72	-56	-684	-816	-680	-870
2	-864	-672	-5760	-4896	-4284	-5436
3	-162/17	-432/17	-2457/17	-216	-180	-3834/17
4	-497/13	-245/13	-9625/26	-7028/13	-5705/13	-498883/884
5	-888	-56	-684	0	0	-18
6	-5760	-672	-5760	0	-204	-324
7	-3834/17	-432/17	-2457/17	0	0	0
8	-7343/13	-245/13	-9625/26	-14	0	-12817/884
9	-888	-888	-684	0	-208	-18
10	-5760	-5760	-5760	0	-1476	-324
11	-3834/17	-3528/17	-2457/17	0	-774/17	0
12	-7343/13	-7525/13	-9625/26	-14	-140	-12817/884
13	-72	-888	-684	-816	-888	-870
14	-864	-5760	-5760	-4896	-5556	-5436
15	-162/17	-3528/17	-2457/17	-216	-3834/17	-3834/17
16	-497/13	-7525/13	-9625/26	-7028/13	-7525/13	-498883/884
17	0	0	-204	-888	-680	-870
18	0	0	0	-5760	-4284	-5436
19	0	-18	-81	-3834/17	-180	-3834/17
20	-14	0	-5425/26	-7343/13	-5705/13	-498883/884
21	-816	0	-204	-72	0	-18
22	-4896	0	0	-864	-204	-324
23	-216	-18	-81	-162/17	0	0
24	-7028/13	0	-5425/26	-497/13	0	-12817/884
25	-816	-832	-204	-72	-208	-18
26	-4896	-5088	0	-864	-1476	-324
27	-216	-3402/17	-81	-162/17	-774/17	0
28	-7028/13	-560	-5425/26	-497/13	-140	-12817/884
29	0	-832	-204	-888	-888	-870
30	0	-5088	0	-5760	-5556	-5436
31	0	-3402/17	-81	-3834/17	-3834/17	-3834/17
32	-14	-560	-5425/26	-7343/13	-7525/13	-498883/884

Плоскость\Вершины	v13	v14	v15	v16	v17	v18
1	-832	-208	-874	-888	-888	-888
2	-5088	-1476	-71625/13	-5760	-5760	-5556
3	-3402/17	-774/17	-182889/884	-3834/17	-3528/17	-3834/17
4	-560	-140	-7525/13	-7343/13	-7525/13	-7525/13
5	-832	-888	-874	-72	-888	-208
6	-5088	-5556	-71625/13	-864	-5760	-1476
7	-3402/17	-3834/17	-182889/884	-162/17	-3528/17	-774/17
8	-560	-7525/13	-7525/13	-497/13	-7525/13	-140
9	0	-680	-14	-72	-56	0
10	0	-4284	-3255/13	-864	-672	-204
11	-18	-180	-16479/884	-162/17	-432/17	0
12	0	-5705/13	0	-497/13	-245/13	0
13	0	0	-14	-888	-56	-680
14	0	-204	-3255/13	-5760	-672	-4284
15	-18	0	-16479/884	-3834/17	-432/17	-180
16	0	0	0	-7343/13	-245/13	-5705/13
17	-888	-208	-874	-816	-832	-888
18	-5760	-1476	-71625/13	-4896	-5088	-5556
19	-3528/17	-774/17	-182889/884	-216	-3402/17	-3834/17
20	-7525/13	-140	-7525/13	-7028/13	-560	-7525/13
21	-888	-888	-874	0	-832	-208
22	-5760	-5556	-71625/13	0	-5088	-1476
23	-3528/17	-3834/17	-182889/884	0	-3402/17	-774/17
24	-7525/13	-7525/13	-7525/13	-14	-560	-140
25	-56	-680	-14	0	0	0
26	-672	-4284	-3255/13	0	0	-204
27	-432/17	-180	-16479/884	0	-18	0
28	-245/13	-5705/13	0	-14	0	0
29	-56	0	-14	-816	0	-680
30	-672	-204	-3255/13	-4896	0	-4284
31	-432/17	0	-16479/884	-216	-18	-180
32	-245/13	0	0	-7028/13	0	-5705/13

Определение норм векторов. Проверим, лежит ли заданный вектор в конической оболочке, которую образуют три вектора, соответствующие грани многогранника, а именно: выражается ли он как их неотрицательная линейная комбинация

Для этого построим биортогональный базисов, так что при умножении на матрицу сразу получаются те самые коэффициенты λ_i . Если все λ_i неотрицательны, то вектор действительно принадлежит конусу.

Затем сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ интерпретируется как «коэффициент масштабирования», который в задаче равен норме Минковского для данного вектора.

Найдем норму вектора $a = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Поиск нормы вектора $v = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$:

Номер плоскости 1 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{111} \\ \frac{7}{222} \\ -\frac{35}{444} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{37} \\ -\frac{3}{74} \\ \frac{15}{148} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} \\ \frac{6}{37} \\ \frac{7}{74} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v :

$$W = \begin{pmatrix} 10/111 & 7/222 & -35/444 \\ 1/37 & -3/74 & 15/148 \\ -4/37 & 6/37 & 7/74 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{29}{148} \\ \frac{153}{148} \\ -\frac{121}{74} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 2 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{60} \\ -\frac{1}{40} \\ -\frac{7}{480} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ 1/60 & -1/40 & -7/480 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{121}{480} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 3 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{213}{34} \\ 0 \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{68}{639} \\ \frac{34}{213} \\ -\frac{85}{213} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v :

$$W = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -68/639 & 34/213 & -85/213 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{289}{71} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 4 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{215}{26} \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{208}{1505} \\ -\frac{52}{1075} \\ \frac{26}{215} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v :

$$W = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ -208/1505 & -52/1075 & 26/215 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{7}{5} \\ -\frac{2262}{7525} \end{bmatrix}$$

Есть отрицательные значения. Не этот конус.

Номер плоскости 5 Точки плоскости: $u_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Вычисление биортогонального базиса:

$$w_1 = \frac{u_2 \times u_3}{w_1 \cdot u_1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{111} \\ \frac{7}{222} \\ -\frac{35}{444} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_1 \times u_3}{w_2 \cdot u_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{37} \\ \frac{3}{74} \\ \frac{15}{148} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{u_1 \times u_2}{w_3 \cdot u_3} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} \\ -\frac{6}{37} \\ \frac{7}{74} \end{bmatrix}$$

Построение матрицы W и преобразование вектора v :

$$W = \begin{pmatrix} 10/111 & -7/222 & -35/444 \\ 1/37 & 3/74 & 15/148 \\ -4/37 & -6/37 & 7/74 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_W = W \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{283}{444} \\ \frac{69}{148} \\ \frac{47}{74} \end{bmatrix}$$

Все координаты неотрицательны; норма вектора:

$$\|v\| = x_{W,1} + x_{W,2} + x_{W,3} = \frac{193}{111}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\| = \frac{193}{111}$$

Аналогично, для векторов $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ и $a + b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Ответ:

$$\|a\| = \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = 1.7387$$

,

$$\|b\| = \left\| \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = 2.3423$$

,

$$\|a + b\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} \right\| = 1.854$$

.