

Министерство образования и науки РФ

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ»

---

## **МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

Методические указания  
к выполнению лабораторных работ

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

2013

УДК 531+537 (079)

Механика и термодинамика. Методические указания к лабораторным работам 1 семестра по курсу “Общая физика” / сост.: Альтмарк А. М., Морозов В. В., Шейнман И. Л., Ходьков Д. А., Павлык А. В., Шишкина М. Н. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 96 с.)

Методические указания содержат теорию и методику экспериментального исследования по лабораторному практикуму к разделам «Механика и термодинамика» курса общей физики технических университетов. Описания к лабораторным работам содержат задание для подготовки и перечень контрольных вопросов.

Предназначено для студентов 1-го курса всех технических факультетов СПбГЭТУ.

Утверждено

редакционно-издательским советом университета

в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие рекомендации по подготовке и выполнению работ .....	4
Работа № 1. Исследование движения тел в диссипативной среде.....	5
Работа № 2. Исследование динамики свободных гармонических колебаний в поле силы тяжести.....	13
Работа № 3. Исследование динамики колебательного и вращательного движения .....	18
Работа № 4. Проверка теоремы Гюйгенса – Штейнера методом вращательных колебаний.....	25
Работа № 5. Определение момента инерции в машине Атвуда.....	30
Работа № 6. Исследование динамики поступательно-вращательного движения твердого тела.....	34
Работа №7. Маятник Обербека .....	40
Работа № 8. Определение скорости распространения звука в воздухе.....	46
Работа № 9. Исследование термодинамических циклов.....	55
Работа № 10. Исследование процессов переноса в газах.....	65
Работа № 11. Исследование нестационарной теплопроводности в диэлектрической среде .....	71
Справочные материалы .....	76
Список литературы .....	78

## **ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТ**

1. При подготовке к выполнению работы изучите теоретическое введение, описание лабораторной установки и методы измерений. Прочтите раздел учебника [1], посвященный теме лабораторной работы.
2. Подготовка к лабораторной работе должна содержать оформленные на листах формата А4:
  - титульный лист;
  - цель работы, схему и краткое описание лабораторной установки и метода измерения, а так же исследуемых закономерностей.
  - бланк протокола наблюдений. Вносите в бланк протокола таблицы для записи результатов наблюдений и для записи постоянных и однократно измеряемых в опыте величин. После окончания работы протокол обязательно должен быть подписан преподавателем.
3. При допуске к лабораторной работе преподаватель имеет право задать вопросы по теме лабораторной работы. Контрольные вопросы, приведенные в конце каждой работы, облегчают подготовку к допуску и защите работы.
4. При проведении экспериментов строго выполняйте все установленные в лаборатории правила техники безопасности.
5. Отчет о работе должен содержать:
  - подготовку к лабораторной работе, выполненную согласно пункту 2;
  - расчетную часть, включающую основные формулы с примерами подстановки в них численных величин с указанием единиц измерения, таблицы обработки измерений, графики, расчет искомых величин и их погрешностей, и вывод.
6. Проводите обработку результатов измерений и представляйте расчеты в табличном виде согласно учебному пособию [2].
7. В выводах кратко излагаются результаты работы: полученные экспериментально или теоретически значения физических величин, их зависимости от условий эксперимента или выбранной расчетной модели, указывается их соответствие или несоответствие физическим законам и теоретическим моделям, возможные причины несоответствия. Они могут содержать сопоставление экспериментального и теоретического результатов,

экспериментальных результатов, полученных различными способами, сопоставление полученных результатов с известными справочными или табличными данными, физическое объяснение полученной в опыте графической закономерности. В выводе принята безличностная форма построения предложений.

8. Исправление работы в соответствии с замечаниями преподавателя должно производиться на тех же листах или на чистой обратной стороне соседнего листа отчета. Замазывание замечаний преподавателя в работе или устранение их путем полной перепечатки или переписки текста недопустимо.
9. В конце указаний приведены справочные материалы и список литературы, рекомендуемой для самостоятельной подготовки к выполнению лабораторных работ [1–4].

## **Работа № 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ**

*Цель работы:* Определение вязкости диссипативной среды (жидкости) по установившейся скорости движения шарика в ней, а также исследование процессов рассеяния энергии в диссипативной среде.

*Приборы и принадлежности:* цилиндрический сосуд с жидкостью, металлические шарики, аналитические весы, масштабная линейка, секундомер.

В работе используется цилиндрический сосуд (рис. 1.1), на боковой поверхности которого нанесены метки. Измеряя расстояние между метками и время движения шарика в жидкости между ними, можно определить скорость его падения. Шарик опускается в жидкость через впускной патрубок, расположенный в крышке цилиндра.

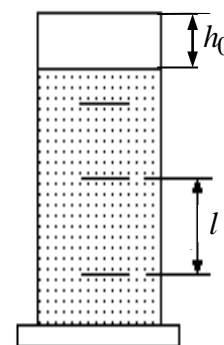


Рис. 1.1.

### ***Исследуемые закономерности***

Вязкость (внутреннее трение) жидкостей и газов выражается в свойстве оказывать сопротивление перемещению их слоев друг относительно друга и возникновению сил трения между слоями жидкости или газа, перемещающимися с различной скоростью. При достаточно высокой вязкости жидкости и малых скоростях движения слоев они движутся практически параллельно

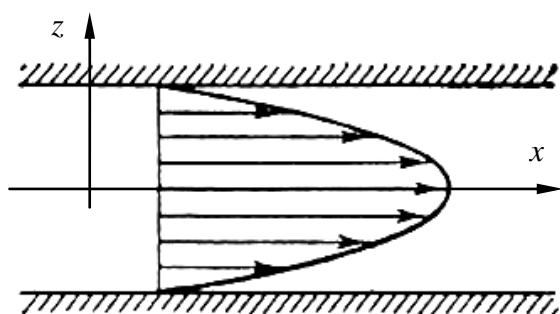


Рис. 1.2.

друг другу (ламинарное течение) в направлении оси  $Ox$  с разной скоростью  $v_x(z)$  (рис. 1.2).

Сила трения направлена по касательной к поверхности соприкосновения слоев и описывается законом Ньютона

$$F_{тр} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} S, \text{ где } \frac{\partial v_x}{\partial z} - \text{производная скорости по нормали к слоям, } S - \text{площадь соприкосновения слоев, } \eta$$

– коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость). Величина обратная вязкости  $1/\eta$  называется текучестью. Наряду с динамической вязкостью часто используется кинематическая вязкость  $\nu = \eta/\rho$ , где  $\rho$  – плотность жидкости.

Внутреннее трение в газах определяется переносом импульса при переходе молекул из одного слоя газа в другой. На движение молекул в жидкости, в отличие от газа, сильно влияет межмолекулярное взаимодействие, ограничивающее их подвижность. Молекула жидкости большую часть времени совершает колебания около положения равновесия внутри небольшого объема. Поэтому во внутреннее трение в жидкости дополнительный вклад дает взаимодействие между молекулами слоев жидкости. Как следствие, вязкость жидкостей в очень сильной степени зависит от температуры. С ростом температуры подвижность молекул жидкости возрастает, а вязкость падает, т.к. с увеличением температуры тепловое движение молекул усиливается, а среднее время “оседлой жизни” молекулы (время релаксации) уменьшается. При невысоких температурах коэффициент динамической вязкости изменяется по закону  $\eta = C \exp(E/kT)$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $E$  – энергия, которую должна приобрести молекула, чтобы перейти от одного положения к другому (энергия активации). Характерный вид температурной зависимости вязкости изображен на рис. 1.3.

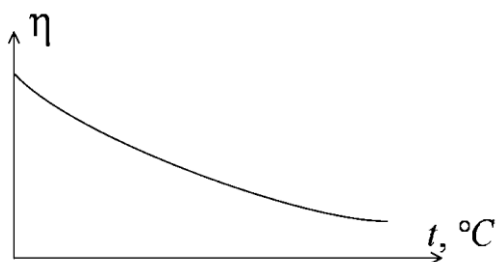


Рис. 1.3.

Сила сопротивления движению тела в вязкой среде. В вязкой среде на движущееся тело действует сила сопротивления, пропорциональная скорости движения. Эта сила направлена против скорости движения тела.

щееся тело действует сила сопротивления, направленная противоположно скорости тела. При небольших скоростях и небольших размерах тела эта сила обусловлена вязким трением между слоями среды и пропорциональна скорости тела

$$F_r = -rv,$$

где  $v$  – скорость движения тела,  $r$  – коэффициент сопротивления, зависящий от формы, размеров тела и от вязкости среды  $\eta$ .

Для шара радиуса  $R$  коэффициент сопротивления определяется формулой Стокса

$$r = 6\pi\eta R.$$

При движении тела в вязкой среде происходит рассеяние (диссипация) его кинетической энергии. Слои жидкости, находящиеся на разном расстоянии от движущегося тела, имеют различную скорость. Слой жидкости, находящийся в непосредственной близости от поверхности движущегося тела, имеет ту же скорость, что и тело, по мере удаления от него скорость слоев жидкости плавно уменьшается, рис. 1.4. В этом состоит явление вязкого трения, в результате которого движения тела передается слоям окружающей среды в направлении, перпендикулярном движению тела. Если скорость тела велика или тело имеет большие размеры, за телом возникают вихри и обтекание становится турбулентным. В этом случае сила сопротивления становится пропорциональной квадрату

скорости:  $F_r = -kS\rho_{\text{ж}}\frac{v^2}{2}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения тела, а  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости,  $k$  – коэффициент пропорциональности.

Сила сопротивления при турбулентном обтекании определяется не столько трением одних слоев жидкости о другие, сколько увеличением кинетической энергии жидкости, вынужденной двигаться, чтобы расступиться и пропустить тело.

Критерием характера движения слоев жидкости (ламинарного или турбулентного) при падении в ней шарика радиуса  $R$  со скоростью  $v$  является

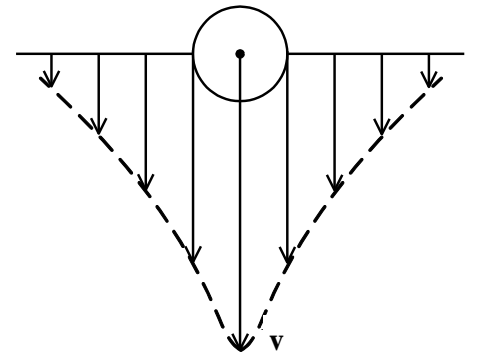


Рис. 1.4.

число Рейнольдса  $Re = 2\rho_{\text{ж}}vR / \eta$ . При  $Re < 2300$  движение слоев – ламинарное, при  $Re > 2300$  – турбулентное.

*Движение тела в диссипативной среде.* Рассмотрим падение шарика в жидкости. В исследуемом в лабораторной работе случае скорость падения шарика невелика, и можно считать, что сила сопротивления пропорциональна первой степени его скорости. Пусть начальная скорость шарика у поверхности жидкости  $v_0$ , его радиус  $R$ , а  $\rho_{\text{ж}}$  и  $\rho_{\text{т}}$  – плотности жидкости и шарика соответственно. Согласно II закону Ньютона:

$$(m + m')\dot{v} = mg - F_A - F_r = F - r v.$$

Здесь  $F_A$  – сила Архимеда,  $F_r$  – сила Стокса,  $F = mg - F_A = m(1 - \rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{т}})g$  – движущая сила,  $m'$  – присоединенная масса жидкости, увлекаемая телом за собой. Присоединенной массой называется такая фиктивная масса жидкости, кинетическая энергия которой при ее движении со скоростью тела равна кинетической энергии окружающей тело жидкости. Присоединенная масса зависит от размеров и формы погруженной в жидкость части тела. Для шарика присоединенная масса равна половине массы вытесненной жидкости:  $m' = \rho_{\text{ж}}V/2 = 2\pi\rho_{\text{ж}}R^3/3 = m\rho_{\text{ж}}/2\rho_{\text{т}}$ , откуда  $m + m' = m(2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}})/2\rho_{\text{т}}$ ,  $m'/m = \rho_{\text{ж}}/2\rho_{\text{т}}$ . Если ввести обозначения  $\beta = \frac{r}{m + m'} = \frac{9\eta}{R^2(2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}})}$ ,  $\alpha = \frac{F}{m + m'} = 2g \frac{\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}}}{2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}}}$ , то задача сведется к решению неоднородного дифференциального уравнения вида  $\dot{v} + \beta v = \alpha$ .

Данное уравнение имеет решение

$$v(t) = v_{\infty} - (v_{\infty} - v_0)e^{-\beta t}, \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-\beta t},$$

где  $v_0$  – скорость падения шарика на поверхность жидкости или его начальная скорость,  $v_{\infty} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2gR^2(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}})}{9\eta}$  – установившаяся скорость движения

шарика,  $a_0 = \beta(v_{\infty} - v_0) = 2g \frac{\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}}}{2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}}} \left(1 - \frac{v_0}{v_{\infty}}\right)$  – его начальное ускорение.



Зависимость скорости движения тела в диссипативной среде от времени представлена на рис. 1.5. Видно, что скорость шарика в зависимости от величины начальной скорости может либо убывать, при  $v_0 \geq \alpha/\beta$ , либо возрастать при  $0 \leq v_0 < \alpha/\beta$ , но в любом случае асимптотически стремится к постоянному значению  $v_\infty$ .

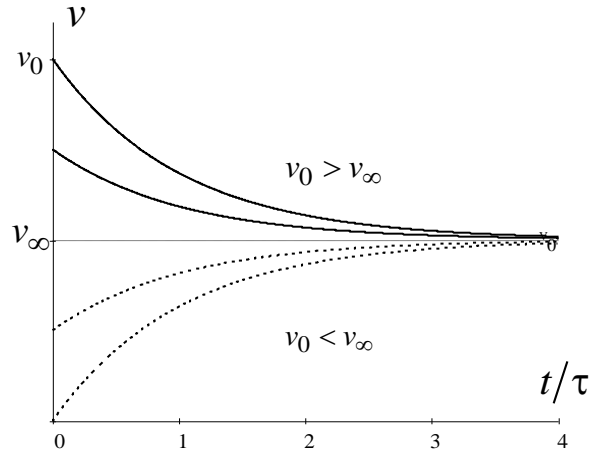


Рис. 1.5.

Время, за которое величина ускорения  $a$  по отношению к своему начальному значению  $a_0$  изменяется в  $e$  раз или отклонение скорости тела от равновесной скорости  $v - v_\infty$  по отношению к своему начальному значению  $v_0 - v_\infty$  изменяется в  $e$  раз называется временем релаксации процесса перехода движения тела от нестационарного режима к стационарному. Его также можно найти как  $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{v_\infty - v_0}{a_0}$ . В исследуемом случае характерное значение  $\tau$  составляет доли секунды. Время движения шарика до первой метки многократно превышает  $\tau$ , и движение шарика между метками можно считать равномерным, а значение его установившейся скорости находить как  $v_\infty = l/t$ , где  $l$  – расстояние между метками.

Второй закон Ньютона в случае стационарного движения шарика имеет вид  $mg - F_A - F_r = 0$  или

$$rv_\infty = mg \left( 1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} \right)$$

Из полученного уравнения может быть найден коэффициент сопротивления среды:

$$r = \frac{mg}{v_\infty} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} \right),$$

а по формуле Стокса–Эйнштейна – вязкость среды:

$$\eta = \frac{r}{6\pi R} = \frac{mg}{6\pi R v_\infty} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} \right).$$

Радиус шарика может быть выражен через его массу  $m = (4/3)\pi R^3 \rho_T$ .

Тогда

$$\eta = A \frac{m^{2/3}}{v_\infty}, \quad (1)$$

где  $A$  – константа, зависящая от плотности жидкости и материала шарика:

$$A = \frac{g}{6\pi} \left( \frac{4\pi\rho_T}{3} \right)^{1/3} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T} \right).$$

В лабораторной работе в качестве жидкости используется глицериновое масло, его плотность  $\rho_{\text{ж}} = 1.1 \text{ г/см}^3$ , материал шарика – свинец,  $\rho_{\text{св}} = 11.3 \text{ г/см}^3$  или сталь  $\rho_{\text{ст}} = 7.8 \text{ г/см}^3$ .

*Превращение энергии в диссипативной системе.*

Полная механическая энергия движущегося в жидкости тела в произвольный момент времени определяется выражением

$$W(t) = mgh \left( 1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T} \right) + \frac{(m + m')v^2(t)}{2},$$

где  $h$  – высота расположения тела над дном сосуда. В установившемся режиме

$$W(t) = mgh \left( 1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T} \right) + \frac{(m + m')v_\infty^2}{2}.$$

Передача энергии жидкой среде, окружающей движущееся тело, происходит за счет совершения работы против сил трения. Энергия при этом превращается в тепло. Скорость диссипации энергии (мощность потерь) в установившемся режиме может быть найдена как

$$P_d = -\frac{dW(t)}{dt} = F_r v_\infty = r v_\infty^2.$$

Уравнение баланса энергии на участке установившегося движения имеет вид:

$$Fl = P_d t, \quad \text{или} \quad mg \left( 1 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right) l = r v_\infty^2 t, \quad (3)$$

где  $l = v_{\infty}t$  – путь, проходимый телом между двумя метками, за время  $t$ .  
Уравнения движения тела (второй закон Ньютона) и баланса энергии при установившемся движении тела эквивалентны друг другу.

### Указания по подготовке к работе

Занесите в протокол Таблицу 1.1 для записи результатов наблюдений и Таблицу 1.2 для записи постоянных и однократно измеряемых в опыте величин.

Таблица 1.1

	1	2	3	4	5	$\theta$
$m$ , мг						
$t$ , с						

Таблица 1.2

$\rho_{\text{ж}}$ , г/см <sup>3</sup>	$\rho_{\text{т}}$ , г/см <sup>3</sup>	$l$ , см	$h_0$ , см	$t$ , °С

### Указания по проведению наблюдений

1. На аналитических весах взвесьте поочередно пять шариков. После взвешивания каждый шарик заверните в лист бумаги и напишите на ней массу шарика. Массы шариков  $m$  и приборную погрешность весов  $\theta_m$  занесите в Таблицу 1.1 протокола наблюдений.
2. Поочередно опуская шарики в жидкость через впускной патрубок, измерьте секундомером время  $t$  прохождения каждым шариком расстояния между двумя метками на боковой поверхности сосуда. Результаты измерений и приборную погрешность секундомера занесите в Таблицу 1.1 протокола.
3. Измерьте миллиметровой линейкой и занесите в Таблицу 1.2 протокола расстояние  $l$  между метками на сосуде и расстояние  $h_0$  от верхней поверхности патрубка до поверхности жидкости, а также температуру  $t$ , °С воздуха в лаборатории и значения плотностей жидкости и материала шариков  $\rho_{\text{ж}}$  и  $\rho_{\text{т}}$ .

### Задание по обработке результатов эксперимента

- ✓ 1. Рассчитайте значение коэффициента  $A$  в формуле вязкости (1).
- ✓ 2. По данным Таблицы 1.1 результатов наблюдений определите значения установившейся скорости  $v_{\infty} = l/t$  для каждого из опытов и вязкости жидкости  $\eta = \bar{\eta} \pm \Delta\bar{\eta}$  с  $P = 95\%$  выборочным методом. ✓

- ✓ 3. Для одного из опытов рассчитайте коэффициент сопротивления  $r$  и мощность рассеяния  $P_d$ , а также проверьте баланс энергии на участке установившегося движения (3).
- ✓ 4. Для одного из опытов рассчитайте число Рейнольдса и сделайте вывод о характере движения слоев жидкости относительно друг друга при падении шарика в ней.
- ✓ 5. Для одного из опытов рассчитайте начальную скорость  $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ , ускорение  $a_0$  и время релаксации  $\tau = (v_\infty - v_0) / a_0$ . Постройте графики зависимостей  $v = v(t)$  и  $a = a(t)$  на миллиметровой бумаге.
- ✓ 6. Вычислите количество теплоты, выделяющееся за счет трения шарика о жидкость, при его прохождении между двумя метками.
- ✓ 7. Сравните экспериментальное значение вязкости с табличным (см. раздел Справочные материалы).

### *Контрольные вопросы*

1. Какие параметры характеризуют исследуемую систему как диссипативную? От каких величин зависит коэффициент сопротивления движению тела в диссипативной среде?
2. Дайте определения динамической, кинематической вязкости и текучести жидкости.
3. Объясните характер температурной зависимости вязкости жидкостей и газов.
4. В чем отличие ламинарного течения от турбулентного? Как величина числа Рейнольдса характеризует вид течения жидкости при падении шарика в ней.
5. Объясните методику измерения вязкости, использованную в лабораторной работе.
6. Как зависит сила сопротивления движению шарика в жидкости от скорости при малых и больших скоростях его движения?
7. Чем обусловлена необходимость учета присоединенной массы?
8. Как вычислить количество теплоты, выделяющееся за счет трения шарика о жидкость, при его прохождении между двумя метками.

9. Сделайте рисунок и укажите на нем все силы, действующие на шарик, падающий в жидкости. Используя обозначения сил, указанных на рисунке, напишите уравнение движения шарика (второй закон Ньютона) в диссипативной среде в нестационарном и стационарном режимах его движения.
10. Выразите все силы, действующие на шарик, через радиус шарика и, подставив их во второй закон Ньютона в стационарном режиме, найдите выражение для вязкости жидкости через радиус шарика.
11. Получите выражение для коэффициента  $A$  в формуле вязкости жидкости.
12. Используя метод логарифмирования функции, выведите формулу приборной погрешности вязкости жидкости  $\theta_\eta$ .
13. Обоснуйте, почему в данной работе для обработки данных косвенных измерений нельзя применять метод переноса погрешностей, но возможно применение выборочного метода.
14. Как называются величины  $a_0$ ,  $v_0$ ,  $v_\infty$ ,  $\tau$  и как они взаимосвязаны друг с другом?
15. Докажите что функция  $v(t) = v_\infty - (v_\infty - v_0)e^{-\beta t}$  ( $a(t) = \dot{v}(t) = -\beta(v_\infty - v_0)e^{-\beta t}$ ) является решением дифференциального уравнения  $\dot{v} + \beta v = \alpha$ , где  $\alpha / \beta = v_\infty$ ,  $a_0 = \beta(v_\infty - v_0)$ .

## Работа № 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СВОБОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

*Цель работы:* изучение закономерностей колебательного движения тела в однородном поле силы тяжести; исследование процессов превращения энергии в консервативных системах; определение момента инерции физического маятника.

*Приборы и принадлежности:* физический маятник; секундомер; масштабная линейка, чертежный треугольник.

Конструкция обратного маятника представлена на рис. 2.1. На стержне 1 закреплены два диска –  $D_1$  и  $D_2$ . Маятник может быть подвешен на кронштейне к легкой призме, трение в которой пренебрежимо мало.

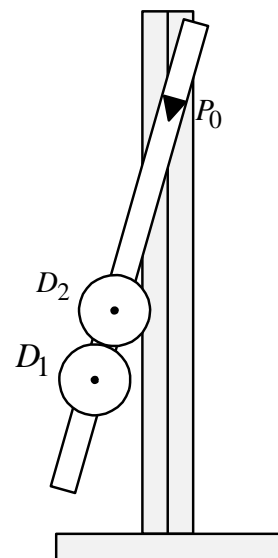


Рис. 2.1

### *Исследуемые закономерности*

Физический маятник – это тело с распределенной массой или система тел, ось вращения которого расположена выше центра масс маятника. Относительно этой оси маятник колеблется с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad (1)$$

где для составного маятника  $m = \sum m_i$  – масса маятника,  $x_c = \frac{1}{m} \sum m_i x_{ci}$  – положение его центра масс относительно оси вращения,  $m_i$  и  $x_{ci}$  – масса  $i$ -го тела и положение его центра масс относительно оси вращения,  $I = \sum I_i$  – полный момент инерции маятника,  $I_i = I_{0i} + m_i x_{ci}^2$  – момент инерции  $i$ -го тела, рассчитанный относительно оси вращения по теореме Штейнера,  $I_{0i}$  – момент инерции этого тела относительно его центра масс. Длина математического маятника, период которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника называется приведенной длиной физического маятника. Ее можно найти как  $l_0 = I / mx_c = gT_0^2 / 4\pi^2$ . Ее можно определить экспериментально, если найти новую ось  $O'$ , называемую осью качания, относительно которой маятник колеблется с тем же периодом  $T_0$ , что и относительно оси вращения  $O$ . Расстояние между осями вращения и качания  $OO' = l_0$  и будет приведенной длиной физического маятника.

Полный момент инерции маятника может быть представлен в виде:

$$I = I_0 + m \overline{x_c^2} \quad (2)$$

где  $I_0 = \sum I_{0i}$ ,  $\overline{x_c^2} = \frac{1}{m} \sum m_i x_{ci}^2$  – средний квадрат положений центров масс системы тел, составляющих маятник.

Если период колебаний маятника определен экспериментально, то из (1) можно найти момент инерции маятника:

$$I = mgx_c T_0^2 / 4\pi^2. \quad (3)$$

*Сохранение энергии гармонических колебаний.* Поскольку физический маятник, качающийся под действием силы тяжести, является консервативной

системой, можно проанализировать процесс перехода потенциальной энергии маятника в кинетическую и обратно.

Потенциальная энергия при достижении амплитудного значения угла отклонения маятника равна:

$$W_{\text{pm}} = mgh_c = mgx_c(1 - \cos \varphi_m) = 2mgx_c \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} \approx \frac{1}{2}mgx_c \varphi_m^2 \quad (4)$$

где  $h_c$  – высота поднятия центра масс маятника при его максимальном отклонении от положения равновесия,  $x_c$  – положение центра масс маятника относительно его точки подвеса,  $\varphi_m$  – максимальный угол отклонения маятника от положения равновесия.

При малых углах отклонения маятника (до  $20^\circ$ ) максимальная потенциальная энергия равна:

$$W_{\text{pm}} \approx \frac{1}{2}mgx_c \varphi_m^2.$$

Максимальная кинетическая энергия физического маятника

$$W_{\text{km}} = \frac{I\omega_m^2}{2} = \frac{mgx_c T_0^2 \omega_m^2}{8\pi^2}, \quad (5)$$

где момент инерции маятника выражен по формуле (3) через период его колебаний. Из закона сохранения полной механической энергии

$$W = W_k + W_p = W_{\text{km}} = W_{\text{pm}} = \text{const}$$

можно найти максимальную угловую скорость маятника при прохождении им положения равновесия  $\omega_m = 2\pi\varphi_m / T_0$ .

### ***Указания по подготовке к работе***

Занесите в протокол таблицу 2.1 для записи результатов наблюдений времени десяти полных колебаний маятника. Занесите в протокол таблицу 2.2 для записи однократно измеряемых в опыте величин.

Таблица 2.1

	1	2	...	5	$\theta$
$t, \text{с}$					

Таблица 2.2

$l$	$d$	$D_1 = D_2$	$h_1 = h_2$	$m$	$\rho$	$x_c$	$x_1$	$x_2$	$x_3$

### ***Указания по проведению наблюдений***

1. Убедитесь, что стержень маятника параллелен вертикальной стойке кронштейна. Если это не соблюдается, выровняйте основание маятника.

2. Запишите в Таблицу 2.2 протокола наблюдений с панели установки массу маятника  $m$ , длину  $l$  и диаметр  $d$  стержня, диаметры  $D_1, D_2$  и толщины  $h_1, h_2$  дисков, плотность материал  $\rho$ , из которого изготовлены элементы маятника.
3. Подвесьте маятник за призму  $P_0$  (см. рис 2.1). Измерьте относительно вершины призмы  $P_0$  положения центров масс  $x_1, x_2$  дисков и середины  $x_3$  стержня. Результаты измерений запишите в Таблицу 2.2.
4. Положите маятник на круглый карандаш или на ребро чертежной линейки, имеющей форму треугольной призмы, и найдите положение  $x_c$  центра масс маятника (точку его равновесия). Его положение относительно вершины призмы  $P_0$  запишите в Таблицу 2.2.
5. Подвесьте оборотный маятник на призме  $P_0$ . Отклоните маятник на угол, составляющий примерно  $5^\circ$  – это соответствует совпадению образующей верхнего диска маятника с вертикальной кромкой линейки кронштейна. С помощью чертежного треугольника и линейки шкалы на стойке кронштейна определите (однократно) катеты треугольника для угла отклонения маятника  $\varphi_m \approx \text{tg}\varphi_m$ . Отпустите маятник и измерьте с помощью секундомера время, за которое маятник совершает  $n = 10$  полных колебаний. Запишите время колебаний  $t$  в Таблицу 2.1 протокола наблюдений. Повторите эти измерения 5 раз.
6. Запишите приборную погрешность измерения времени в протокол.

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Рассчитайте по Таблице 2.1 протокола время  $n = 10$  колебаний маятника  $t = \bar{t} \pm \Delta\bar{t}$  с  $P = 95\%$ .
2. Рассчитайте период  $T = t / n$  колебаний маятника  $T_0 = \bar{T}_0 \pm \Delta\bar{T}_0$  с  $P = 95\%$ .
3. Рассчитайте по формуле (3) момент инерции маятника  $I = \bar{I} \pm \Delta\bar{I}$  с  $P = 95\%$  относительно оси подвеса.
4. Используя измеренные значения параметров  $x_c$  и  $\varphi_m$  в пп. 4 и 5 указаний по выполнению наблюдений, рассчитайте по формуле (4) полную механическую энергию маятника  $W = W_{\text{pm}}$ .
5. Рассчитайте приведенную длину маятника  $l_0 = I / mx_c = gT_0^2 / 4\pi^2$ .



6. Используя данные Таблицы 2.2 протокола, рассчитайте массы  $m_1, m_2$  дисков маятника и его стержня  $m_3$ . Для проверки правильности расчетов сопоставьте сумму этих масс  $m = \sum m_i$  с полной массой маятника  $m$  в Таблице 2.
7. Используя п. 6 и данные Таблицы 2.2 протокола наблюдений, рассчитайте положение центра масс маятника  $x_c$  и сопоставьте его со значением определенным экспериментально и занесенным в Таблицу 2.2.
8. Используя данные Таблицы 2.2 и п. 6 данного раздела, рассчитайте по теореме Штейнера моменты инерции каждого из тел составного маятника и его полный момент инерции  $I = \sum I_i$ . Сопоставьте его значение с определенным экспериментально в п. 3.

### ***Контрольные вопросы***

1. Какие колебания называют гармоническими? Объясните смысл требования малости угловой амплитуды колебаний маятника.
2. Какой маятник называют физическим, а какой математическим? Что такое приведенная длина физического маятника? Как ее определить экспериментально?
3. Дайте определение центра масс системы тел.
4. Дайте определение моментов инерции материальной точки и составного тела.
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Сформулируйте теорему Штейнера.
7. Одинаковы или различны угловые и линейные ускорения и скорости различных точек маятника в фиксированный момент времени при его колебаниях.
8. Какие законы используются для описания колебаний физического маятника?
9. Напишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний осциллятора и его решение и объясните физический смысл величин, входящих в это уравнение.

10. Покажите, что максимальные кинетическая и потенциальная энергии тела, колеблющегося по гармоническому закону, совпадают с его полной механической энергией.

### Работа № 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Цель работы:* исследование динамики колебательного движения на примере крутильного маятника, определение момента инерции маятника, модуля сдвига материала его подвеса и характеристик колебательной системы с затуханием (логарифмического декремента затухания и добротности колебательной системы).

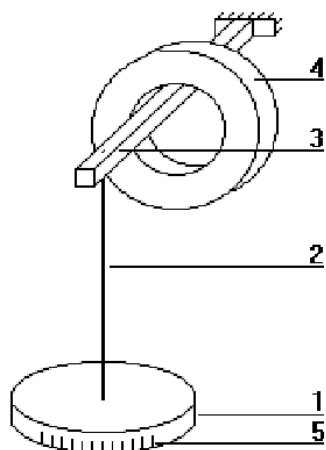


Рис. 3.1.

*Приборы и принадлежности:* крутильный маятник, секундомер, масштабная линейка, микрометр.

Применяемый в работе крутильный маятник (рис. 3.1) представляет собой диск 1, закрепленный на упругой стальной проволоке 2, свободный конец которой зажат в неподвижном кронштейне 3. На кронштейне расположено кольцо 4, масса которого известна. Кольцо 4 можно положить сверху на диск 1, изменив тем самым момент инерции маятника. Для отсчета значений угла поворота маятника

служит градуированная шкала 5, помещенная на панели прибора снизу от диска 1.

#### *Исследуемые закономерности*

##### *Момент инерции крутильного маятника*

Момент инерции (аналог инертной массы тела при его поступательном движении) – физическая величина, характеризующая инертные свойства твердого тела при его вращении. В соответствии с одной из формулировок основного уравнения динамики вращательного движения

$$M = I \varepsilon,$$

где момент инерции  $I$  связывает угловое ускорение тела  $\varepsilon$  и момент сил  $M$ , действующих на него.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то момент инерции относительно этой оси вычисляется как сумма произведений элементарных масс  $\Delta m_i$ , составляющих тело, на квадраты их расстояний  $r_i$  до оси вращения, т.е.

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \rho \Delta V_i r_i^2 ,$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $\Delta V_i$  – элементы объема. Таким образом, момент инерции является аддитивной величиной.

В случае сплошного тела сумма в определении момента инерции переходит в интеграл:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV .$$

Крутильный маятник совершает вращательное колебательное движение вокруг оси, совпадающей с направлением стальной проволоки. Используя основное уравнение динамики вращательного движения, можно определить момент инерции маятника, а также физические величины, описывающие вращательное движение.

*Уравнение движения крутильного маятника.* При повороте тела, закрепленного на упругом подвесе, в результате деформации сдвига возникает вращающий момент упругих сил  $M = -k\varphi$ , где  $k$  – коэффициент кручения,

зависящий от упругих свойств материала подвеса, его размеров и формы,  $\varphi$  – угол поворота диска маятника. Без учета сил трения в подвесе уравнение движения тела имеет вид

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 ,$$

которое является уравнением гармонического осциллятора с частотой собственных колебаний  $\omega_0 = \sqrt{k/I}$ ,  $I$  – момент инерции диска крутильного маятника.

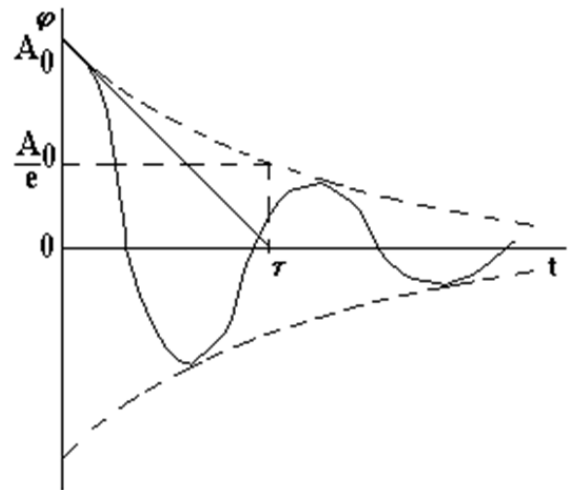


Рис. 3.2.

Трение в подвесе создает тормозящий момент, пропорциональный скорости движения маятника,  $M_R = -R d\varphi/dt = -R\dot{\varphi}$ , где  $R$  – коэффициент сопротивления. С учетом сил трения уравнение движения маятника принимает вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -R \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi, \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

в котором коэффициент  $\beta = R/2I$  называют коэффициентом затухания. Последнее уравнение является уравнением гармонического осциллятора с затуханием. Решение этого уравнения при  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$  описывает затухающие колебания маятника и имеет вид (при условии, что диск повернут относительно положения равновесия и отпущен без толчка)

$$\varphi(t) = A(t) \cos \omega t = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $A_0$  – начальная амплитуда колебаний маятника, измеряемая в радианах,  $\tau = 1/\beta$  – время затухания колебаний, определяющее скорость убывания амплитуды  $A(t)$  колебаний маятника, численно равное времени, за которое амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз  $A(\tau) = A_0/e$  (рис. 3.2),  $\omega$  – частота колебаний осциллятора с затуханием, связанная с собственной частотой соотношением  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ . Время затухания колебаний  $\tau$  выражается через момент инерции  $I$  и коэффициент сопротивления  $R$  материала подвеса маятника  $\tau = 1/\beta = 2I/R$ .

Исследуемый в работе крутильный маятник представляет собой сложную систему (диск с различными креплениями, прикрепленный к проволочному подвесу) с неизвестным моментом инерции  $I_d$ , который представляет собой постоянную часть исследуемой системы. Если на диск маятника положить тело с известным моментом инерции – кольцо с моментом инерции  $I_k$ , то момент инерции маятника станет равным  $I_d + I_k$ . Коэффициент кручения материала подвеса маятника при этом не изменяется:  $k = \omega_{0d}^2 I_d = \omega_{0k}^2 (I_d + I_k) = \text{const}$ , где  $\omega_{0d}$  и  $\omega_{0k}$  – собственные частоты крутильных колебаний «диска» маятника без кольца и с кольцом. Отсюда можно найти неизвестный момент инерции диска маятника

$$I_d = \frac{I_k}{\left(\frac{\omega_{0d}}{\omega_{0k}}\right)^2 - 1} \quad (2)$$

где  $I_k = \frac{m}{8}(D_{ex}^2 + D_{in}^2)$  – момент инерции кольца,  $D_{ex}$ ,  $D_{in}$  – внешний и внутренний диаметры кольца,  $m$  – его масса.

#### *Крутильный маятник как диссипативная система*

Полная энергия колебаний маятника убывает со временем по закону

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}, \quad (3)$$

где  $W_0 = kA_0^2/2$  – начальная энергия колебаний. Убывание энергии происходит за счет совершения работы против сил трения. Энергия при этом превращается в тепло. Скорость диссипации энергии (мощность потерь) может быть найдена как:

$$P_d = -\frac{dW}{dt} = \frac{2W(t)}{\tau}. \quad (4)$$

Помимо коэффициента затухания  $\beta$  (или времени затухания  $\tau$ ) и мощности потерь  $P_d$  колебательная диссипативная система характеризуется также добротностью  $Q$ , позволяющей судить о способности системы сохранять энергию. Добротность определяется отношением запасенной системой энергии к потерям энергии за время  $T/2\pi = 1/\omega$ , что соответствует изменению фазы колебания на 1 радиан. Из этого определения следует, что

$$Q = 2\pi \frac{W}{P_d T} = \frac{\omega \tau}{2} = \pi \frac{\tau}{T} = \pi N_e, \quad (5)$$

т. е. добротность численно равна числу колебаний за время  $t = \pi\tau$ . За это время амплитуда колебаний уменьшается в  $e^\pi \cong 23$  раза, а энергия колебаний в  $e^{2\pi} \cong 535$  раз, иными словами за это время колебания практически затухают. Часто также используется параметр  $N_e = \tau/T$  – число колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

В технике для характеристики колебательных систем с затуханием вводят декремент затухания  $\Delta$ , равный отношению амплитуд колебаний, отли-

чающихся на период колебаний, и его логарифм – логарифмический декремент затухания  $\delta = \ln \Delta$ .

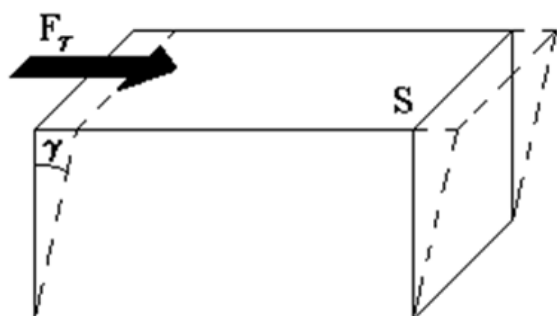


Рис. 3.3.

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

откуда

$$\delta = \beta T = \frac{1}{N_e} = \frac{\pi}{Q}.$$

*Определение модуля сдвига.*

Методом крутильных колебаний пользуются для косвенного измерения модуля сдвига  $G$  материала подвеса. Модуль сдвига характеризует упругие свойства материала и в случае малых деформаций равен силе, действующей на единицу площади  $S$  при единичном угле сдвига  $\gamma$  (рис. 3.3) касательно сдвигу слоев вещества в месте определения модуля  $G$ .

Для подвеса из стальной проволоки модуль сдвига определяется из соотношения

$$G = \frac{32kl}{\pi d^4}, \quad (6)$$

где  $l$  – длина подвеса,  $d$  – его диаметр,  $k$  – его коэффициент кручения.

Модуль сдвига  $G$  связан с модулем Юнга, характеризующим сопротивление материала сжатию или растяжению, соотношением  $E = 2G(1 + \nu)$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = \varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{\parallel}$  – отношение поперечной и продольной относительной деформации образца материала и для металлов близок к 0.3.

### ***Указания по подготовке к работе***

Занесите в протокол Таблицу 3.1 для записи результатов наблюдений времени десяти полных колебаний диска без кольца и с кольцом и времен уменьшения амплитуды колебаний маятника в два раза, а также Таблицу 3.2 для записи параметров установки и однократно измеряемых в опыте величин.

Таблица 3.1

№	$t_d, \text{с}$	$t_{0d}, \text{с}$	$t_k, \text{с}$	$t_{0k}, \text{с}$
1				
...				

Таблица 3.2

$l$	$d$	$D_{ex}$	$D_{in}$	$D_0$	$h_0$	$m$	$\rho$

### **Указания по выполнению наблюдений**

1. Измерить или записать с панели установки в Таблицу 2 протокола наблюдений длину подвеса  $l$ , диаметр проволоки подвеса  $d$ , а также внешний  $D_{ex}$  и внутренний  $D_{in}$  диаметры кольца, диаметр  $D_0$  и толщину  $h_0$  диска маятника, а также значения массы  $m$  и плотности  $\rho$  материала диска маятника и кольца.
2. Снять, если это необходимо, кольцо с диска и укрепить его на кронштейне. Измерить время  $t_d$   $n=10$  полных колебаний маятника без кольца, для чего повернуть диск на некоторый угол (примерно  $30^\circ$ ) и отпустить его, включив одновременно секундомер с точностью измерения времени  $\theta_t = 0.01\text{с}$ . Отсчитав  $n = 10$  полных колебаний, отключить секундомер. Измерения повторить 5 раз, занося результаты измерений  $t_d$  в Таблицу 3.1 протокола наблюдений.
3. Повернуть диск, отклонив указатель диска маятника на 8 или 6: делений, и, отпустив диск и включив одновременно секундомер, измерить время  $t_{0d}$  уменьшения амплитуды колебаний маятника в 2 раза (до 4 или 3 делений). Измерения повторить 5 раз, занося результаты измерений  $t_{0d}$  в Таблицу 3.1 протокола наблюдений.
4. Положить кольцо на диск и повторить 5 раз измерения времен  $t_k$  и  $t_{0k}$  для диска с кольцом, аналогичные пп. 2 и 3. Результаты измерений занести в Таблицу 3.1 протокола наблюдений.

### **Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Определить по данным Таблицы 3.1 значения времен  $t_d = \bar{t}_d \pm \Delta \bar{t}_d$ ,  $t_k = \bar{t}_k \pm \Delta \bar{t}_k$ ,  $t_{0d} = \bar{t}_{0d} \pm \Delta \bar{t}_{0d}$ ,  $t_{0k} = \bar{t}_{0k} \pm \Delta \bar{t}_{0k}$  с  $P=95\%$ .
2. Рассчитайте периоды ( $T = t/n$ ) колебаний диска без кольца и с кольцом  $T_d = \bar{T}_d \pm \Delta \bar{T}_d$ ,  $T_k = \bar{T}_k \pm \Delta \bar{T}_k$  с  $P=95\%$ .
3. Рассчитайте времена затухания ( $\tau = t_0 / \ln 2$ ) колебаний диска без кольца и с кольцом  $\tau_d = \bar{\tau}_d \pm \Delta \bar{\tau}_d$ ,  $\tau_k = \bar{\tau}_k \pm \Delta \bar{\tau}_k$  с  $P=95\%$ . Время затухания колебаний вычисляется по формуле (если установка настроена, то  $a_0=0$  и  $a_1 / a_t = 2$ )

$$\tau = \frac{t_0}{\ln \frac{a_1 - a_0}{a_t - a_0}}.$$

4. Рассчитайте собственные частоты колебаний маятника без кольца и с кольцом  $\omega_{0д} = \bar{\omega}_{0д} \pm \Delta\bar{\omega}_{0д}$ ,  $\omega_{0к} = \bar{\omega}_{0к} \pm \Delta\bar{\omega}_{0к}$  с  $P = 95\%$ .
5. Используя данные Таблицы 3.2 протокола наблюдений, рассчитайте момент инерции кольца  $I_k$  в формуле (2).
6. Рассчитать момент инерции диска  $I_d = \bar{I}_d \pm \Delta\bar{I}_d$  с  $P = 95\%$ . Для вывода формулы погрешности  $\Delta\bar{I}_d$  удобно формулу (2) записать в виде  $I_d = \frac{I_k \omega_{0к}^2}{\omega_{0д}^2 - \omega_{0к}^2}$  и прологарифмировать это выражение.
7. Используя данные Таблицы 3.2, рассчитайте значение момента инерции диска маятника  $I_d$ , исходя из его размеров и плотности материала. Сравнить полученный результат с экспериментальным значением в п. 6.
8. Найдите коэффициент кручения  $k = \omega_{0д}^2 I_d$  и, используя данные Таблицы 2, по формуле (6) – значение модуля сдвига  $G$  и модуля Юнга  $E$  материала подвеса маятника.
9. Пользуясь формулами (3)–(5), определите начальное значение полной энергии  $W_0$ , мощности потерь  $P_d$  и добротности маятника  $Q$ .
10. В соответствии с уравнением затухающих колебаний (1) постройте для маятника без кольца графики зависимости угла поворота маятника  $\varphi = \varphi(t)$  и амплитуды  $A = A(t)$  его колебаний от времени  $t$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения.
2. Дайте определение момента инерции. В чем состоит его физический смысл?
3. Какие параметры характеризуют исследуемую систему как диссипативную?
4. Дайте определение времени затухания колебаний.
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.



6. Дайте определение модуля сдвига. В чем состоит физический смысл этой величины?
7. Напишите дифференциальные уравнения движения гармонического осциллятора без затухания и с затуханием, а также решения этих уравнений. Объясните физический смысл величин, входящих в эти уравнения.
8. Выведите формулы для моментов инерции кольца  $I_k$  и маятника без кольца  $I_d$  в пп. 5 и 6 Задания по обработке результатов эксперимента.
9. Дайте определение времени затухания колебаний. Как определить время затухания, пользуясь графиком переходного процесса (зависимости амплитуды колебаний маятника от времени) в диссипативной системе?
10. Дайте определения добротности колебательной системы и логарифмического декремента затухания. Как они взаимосвязаны друг с другом? Каков физический смысл этих параметров? Исходя из определений этих параметров, выведите формулы для их расчета.

#### **Работа № 4. ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА – ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

*Цель работы.* Определение момента инерции эталонного диска методом вращательных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

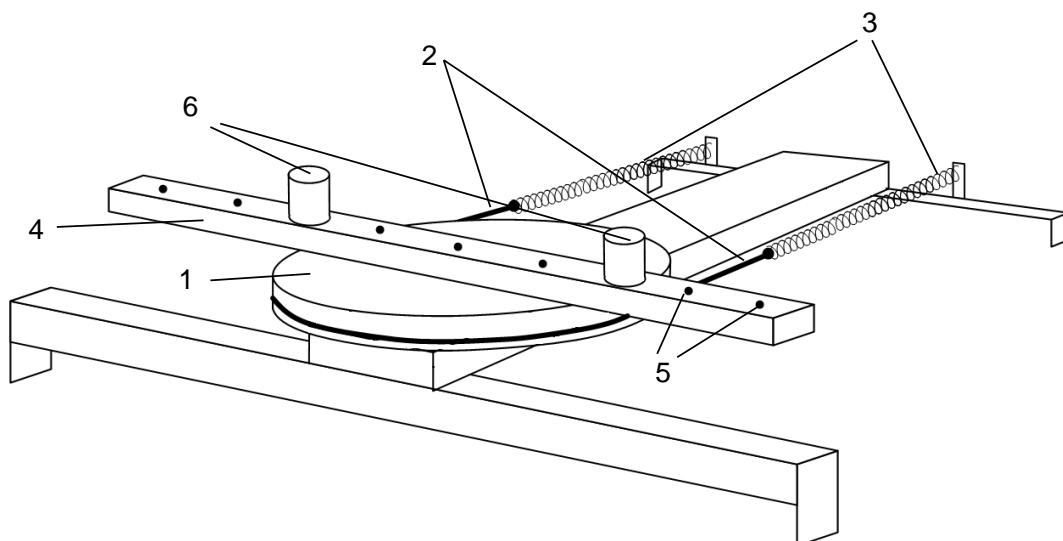


Рис. 4.1.

*Приборы и принадлежности.* Лабораторная установка (рис. 4.1) включает колебательную систему, вращающуюся в горизонтальной плоскости, ко-

торая состоит из закрепленного на вертикальной оси диска (шкива) 1, ремень 2 которого связан с упругими пружинами 3, зацепленными за штыри стойки. К шкиву жестко прикреплен металлический профиль 4 с рядом отверстий 5, в которых фиксируются грузы 6.

### *Исследуемые закономерности*

Период колебаний  $T$  подвижной части колебательной системы, используемой в работе, связан с ее моментом инерции  $I$ . Выведем эту зависимость. В положении равновесия силы упругости пружин, а, следовательно, и силы натяжения нити с разных сторон диска (шкива) одинаковы. Обозначим эти силы  $F_0$ . Для выведения шкива из положения равновесия повернем его на угол  $\varphi$ . По закону Гука силы упругости изменятся на  $kd\varphi/2$ , здесь  $k$  – коэффициент жесткости системы последовательно соединенных пружин  $d$  – диаметр шкива. Тогда натяжение одной пружины увеличится, а другой уменьшится на  $kd\varphi/2$ , и на шкив будет действовать возвращающий момент сил:

$$M = \frac{d}{2} \left( F_0 - k \frac{d}{2} \varphi \right) - \frac{d}{2} \left( F_0 + k \frac{d}{2} \varphi \right) = -\frac{d^2}{2} k \varphi \quad (1)$$

Подставляя (1) в основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon, \quad (2)$$

и учитывая, что  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ , получаем дифференциальное уравнение для  $\varphi$ :

$$I\ddot{\varphi} + \frac{d^2}{2} k \varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

которое имеет вид дифференциального уравнения гармонического осциллятора. Из теории дифференциальных уравнений известно, что его решение имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Здесь  $\varphi_0$  и  $\alpha$  – константы, определяемые начальными условиями, а

$$\omega = \sqrt{\frac{d^2 k}{2I}} \quad (3)$$

– собственная частота колебаний рассматриваемого маятника.

Если обозначить  $I_0$ ,  $\omega_0$ ,  $T_0$  соответственно момент инерции, частоту и период системы, в которой грузы 6 (рис. 4.1) помещены на металлическом профиле 4 в центр шкива 1, то согласно формуле (3):

$$I_0 = \frac{d^2 k}{2\omega_0^2} = \frac{d^2 k T_0^2}{8\pi^2} \quad (4)$$

Если грузы переместить симметрично относительно оси вращения системы вдоль металлического профиля на шкиве в положения (1-1), (2-2) и т.д., то момент инерции  $I$ , частота  $\omega$  и период  $T$  колебательной системы изменятся, и ее момент инерции станет равным:

$$I = \frac{d^2 k}{2\omega^2} = \frac{d^2 k T^2}{8\pi^2} \quad (5)$$

Из (4), (5) видно, что отношение моментов инерции равно:

$$\frac{I}{I_0} = \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = \left( \frac{T}{T_0} \right)^2. \quad (6)$$

Если радиус цилиндров  $R$ , а их масса  $m$ , то при установке цилиндров на расстоянии  $r$  от оси вращения колебательной системы ее момент инерции равен

$$I = I_D + 2 \left( \frac{1}{2} m R^2 + m r^2 \right) = I_0 + 2 m r^2 \quad (7)$$

где  $I_D$  момент инерции диска 1 с металлическим профилем 4,  $\frac{1}{2} m R^2 + m r^2$  – момент инерции одного цилиндра, рассчитанный согласно теореме Гюйгенса-Штейнера,  $I_0 = I_D + m R^2$  – постоянная часть момента инерции колебательной системы.

С учетом формул (6), (7) выражение для  $I_0$  имеет вид:

$$I_0 = \frac{2 m r^2}{\left( \frac{T}{T_0} \right)^2 - 1} \quad (8)$$

Формула (8) получена при использовании теоремы Гюйгенса-Штейнера, а значит, хотя и косвенным образом, может быть использована для проверки правильности этой теоремы. Для этого достаточно убедиться,

что значения моментов инерции  $I_0$ , определенные при разных положениях цилиндров относительно оси вращения колебательной системы примерно одинаковы.

Если момент инерции  $I_0$  определен, то из формулы (4) можно найти жесткость колебательной системы в данном эксперименте:

$$k = \frac{8\pi^2 I_0}{d^2 T_0^2} . \quad (9)$$

### ***Указания по подготовке к работе***

Создайте Таблицы 4.1 и 4.2 для занесения параметров установки и результатов наблюдений.

Таблица 4.1

№	0	1	2	3	4	$\theta$
$r$ , см	0	6.0	10.0	14.0	18.0	0.2
$t$ , с						

Таблица 4.2

$m$ , г	$d$ , мм	$R$ , мм
$200 \pm 2$	$138 \pm 2$	$16 \pm 2$

### ***Указания по проведению наблюдений***

1. Осторожно обращайтесь с подвижной системой. Не допускайте чрезмерного растяжения пружин – это может привести к потере их упругих свойств.
2. Установите цилиндры в центре диска (позиция (0-0)). Отклоните указатель диска на угол примерно  $30^\circ$  и измерьте время  $n = 5$  его колебаний с помощью любого датчика времени, имеющего точность  $\theta_t = 0,01$  с. Результат наблюдения занесите в Таблицу 4.1. Опыт повторите  $N = 5$  раз.
3. Устанавливая цилиндры симметрично относительно оси вращения системы в положениях (1-1), (2-2), (3-3), (4-4) на металлическом профиле диска, повторите опыт п. 2 для этих положений цилиндров. Результаты измерений занесите в Таблицу 4.1.

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Рассчитайте параметры  $\bar{t}_i$ ,  $T_i = \bar{t}_i / n$ ,  $I_{0i}$ . Сопоставьте значения моментов инерции колебательной системы  $I_{0i}$  и сделайте заключение о справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера.

2. Рассчитайте постоянную часть момента инерции колебательной системы  $I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta \bar{I}_0$  с  $P = 95\%$ .
3. Используя значения моментов инерции  $\bar{I}_0$  и двух цилиндров  $mR^2$ , рассчитайте момент инерции  $I_{\text{д}}$  диска (шкива).
4. Используя формулу (9), рассчитайте жесткость колебательной системы  $k = \bar{k} \pm \Delta \bar{k}$  с  $P = 95\%$ . Погрешность  $\Delta \bar{k}$  рассчитайте по формуле, выведенной в подготовке к работе.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое жесткость колебательной системы и каков ее физический смысл? Как экспериментально ее можно определить?
2. Дайте определение момента силы, момента импульса и момента инерции абсолютно твердого тела относительно некоторой оси.
3. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера, которая используется для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси вращения.
4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Каков физический смысл входящих в него параметров?
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Напишите дифференциальные уравнения гармонических колебаний с затуханием и без затухания и их решения. Каков смысл входящих в них параметров?
7. Докажите, что функция  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$  является решением дифференциального уравнения  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ .
8. Выведите формулу (8) для расчета постоянной части момента инерции колебательной системы в данной работе.
9. Выведите формулу расчета приборной погрешности  $\theta_{I_{0i}}$  постоянной части момента инерции колебательной системы.
10. Выведите формулу (9) для расчета жесткости колебательной системы в данной работе.
11. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.

## Работа № 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ В МАШИНЕ АТВУДА

*Цель работы:* изучение вращательного и поступательного движений на машине Атвуда, определение момента инерции блока и момента сил трения в оси блока.

*Приборы и принадлежности.* Машина Атвуда, набор грузов, секундомер, масштабная линейка.

Машина Атвуда является настольным прибором, ее изображение приведено на рис. 5.1. На вертикальной стойке 1 основания 2 расположены три кронштейна: нижний 3, средний 4 и верхний 5. На верхнем кронштейне 5 крепится блок с узлом подшипников качения, через который переброшена нить с грузом 6. На верхнем кронштейне находится электромагнит 7, который при подаче на него напряжения с помощью фрикциона удерживает систему с грузами в неподвижном состоянии.

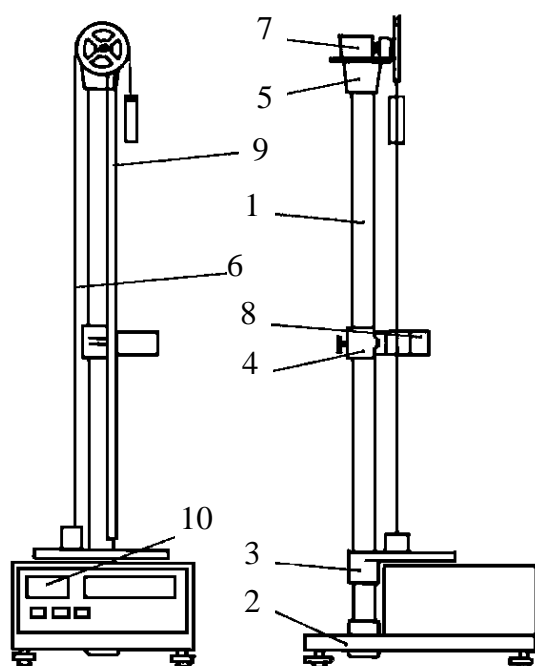


Рис. 5.1.

темую с грузами в неподвижном состоянии.

На среднем кронштейне 4 крепится фотодатчик 8, выдающий электрический сигнал по окончании счета времени равноускоренного движения грузов. На среднем кронштейне имеется риска, совпадающая с оптической осью фотодатчика. Нижний кронштейн представляет собой площадку с резиновым амортизатором, о который ударяется груз при остановке. На вертикальной стойке 1 укреплена миллиметровая линейка 9, по которой определяют начальное и конечное положения грузов, т. е. пройденный путь.

Начальное положение определяют визуально по нижнему краю торца груза, конечное положение – по риске среднего кронштейна. Секундомер 10 выполнен как самостоятельный прибор с цифровой индикацией времени.

### *Исследуемые закономерности*

Машина Атвуда предназначена для изучения законов поступательного и вращательного движений. Принцип работы установки основан на том, что,

когда на концах нити подвешены грузы различной массы, система начинает двигаться равноускоренно. В комплект грузов входит несколько перегрузов, что позволяет исследовать движения с различными ускорениями.

На каждый груз действуют две силы – сила тяжести и сила реакции нити, под действием которых грузы движутся. Полагая, что нить невесома и нерастяжима, получим, что ускорения обоих грузов будут постоянны, одинаковы по величине и противоположны по направлению.

На основании второго закона Ньютона для первого груза с перегрузом и второго груза можно записать

$$(m_1 + \Delta m_i)g - T_1 = (m_1 + \Delta m_i)a \quad (1)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a \quad (2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы 1-го и 2-го грузов;  $\Delta m_i$  – масса перегруза, находящегося на 1-м грузе;  $T_1$  и  $T_2$  – силы, равные силам натяжения нитей, действующие на 1-й и 2-й грузы и на блок;  $a$  – ускорение грузов. Вращение блока описывается уравнением

$$(T_1 - T_2)r - M_{\text{тр}} = I\varepsilon, \quad (3)$$

где  $r$  – радиус блока;  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения в оси блока;  $I$  – момент инерции блока;  $\varepsilon = a/r$  – угловое ускорение. Из уравнений (1)–(3) можно получить:

$$M = I\varepsilon + M_{\text{тр}}; \quad (4)$$

$$M = (T_1 - T_2)r = r((m_1 + \Delta m_i)(g - a) - m_2(g + a)); \quad (5)$$

$$a = 2S/t^2; \quad (6)$$

$$\varepsilon = a/r = 2S/(rt^2), \quad (7)$$

где  $S$  – путь, пройденный грузом за время  $t$ . Из выражения (4) видно зависимость момента силы от углового ускорения является линейной ( $Y=aX+b$ ).

Целью работы является определение момента инерции блока  $I$  и момента сил трения в блоке  $M_{\text{тр}}$ . Для этого экспериментально исследуется зависимость (4)  $M$  от  $\varepsilon$ . Различные значения  $M$  реализуются с помощью набора

перегрузов массой  $\Delta m_i$  и определяются по формуле (5). Значения  $\varepsilon$  рассчитываются по формуле (7). Величины  $I$  и  $M_{\text{тр}}$  определяются по формулам линейной регрессии (методом наименьших квадратов).

### **Указания по подготовке к работе**

1. Занесите в протокол Таблицу 5.1 для записи результатов наблюдений и Таблицу 5.2 для записи параметров установки и однократно измеряемых в опыте величин.

Таблица 5.1

	$\Delta m_1$	$\Delta m_2$	$\Delta m_3$	$\Delta m_4$	$\Delta m_1 + \Delta m_3$	$\Delta m_2 + \Delta m_3$	$\Delta m_3 + \Delta m_4$
$t_1, \text{с}$							
$t_2, \text{с}$							
$t_3, \text{с}$							

Таблица 5.2

$r, \text{см}$	$h_0, \text{см}$	$h_1, \text{см}$	$m_1, \text{г}$	$m_2, \text{г}$	$\Delta m_1, \text{г}$	$\Delta m_2, \text{г}$	$\Delta m_3, \text{г}$	$\Delta m_4, \text{г}$

2. Изучите и сформулируйте алгоритм нахождения коэффициентов  $a$  и  $b$  в линейной зависимости  $Y = aX + b$  по методу наименьших квадратов (см. [2], а также Приложение к пособию).

### **Указания по проведению наблюдений**

1. Перекиньте через блок нить с двумя грузами. Запишите радиус блока  $r$ , указанный на панели прибора, в Таблицу 5.2.
2. Отрегулируйте положение основания установки при помощи регулировочных опор, используя для визуального наблюдения нить с грузами в качестве отвесов, чтобы она была параллельна стойке 1.
3. Установите кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы таким образом, чтобы правый груз при движении проходил посередине оптической оси фотодатчика. По риску на среднем кронштейне определите  $h_0$  – положение оптической оси фотодатчика на измерительной шкале вертикальной стойки и занесите его в Таблицу 5.2 протокола.
4. Нажмите кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели секундомера, при этом должны загореться лампочки с цифровой индикацией.



5. Нажмите на кнопку «СБРОС» секундомера и убедитесь, что на цифровых индикаторах загорелись нули.
6. Переместите правый груз в верхнее положение, положите на него перегруз № 1.
7. Запишите в Таблицу 5.2 протокола значение шкалы  $h_1$ , соответствующее нижнему краю груза в его верхнем положении. Пройденный путь определяется как разность:  $s = h_0 - h_1$ .
8. Поместив ладонь руки под кронштейном с фотодатчиком, нажмите кнопку «ПУСК». При нажатии кнопки отключается фрикцион магнита, удерживающего грузы в неподвижном состоянии, а секундомер начинает счет времени. При пересечении грузом оптической оси фотодатчика счет времени прекратится, после чего отпустите кнопку «ПУСК». Запишите время  $t$  равноускоренного движения грузов в Таблицу 5.1.
9. Проведите измерения по пп. 7 и 8 три раза.
10. Проведите измерения по пп. 7–9 для следующих перегрузов и их комбинаций: а) № 2; б) № 3; в) № 3 + № 1; г) № 3 + № 2; д) № 3 + № 4. Значения масс перегрузов выгравированы на их поверхности и должны быть занесены в Таблицу 5.2.

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Определите момент инерции блока  $I = \bar{I} \pm \Delta \bar{I}$  и момент сил трения в блоке  $M_{\text{тр}} = \bar{M}_{\text{тр}} \pm \Delta \bar{M}_{\text{тр}}$  методом наименьших квадратов (МНК). Из сопоставления линейной зависимости  $Y = aX + b$  и уравнения (4) получим:  $X = \varepsilon$ ;  $Y = M$ ;  $a = I$ ;  $b = M_{\text{тр}}$ . Для расчетов используются  $N = 6$  пар значений параметров  $X_i$  и  $Y_i$ . Результат запишите в виде:  $M = I\varepsilon + M_{\text{тр}}$ , где  $I = \bar{I} \pm \Delta \bar{I}$ ,  $M_{\text{тр}} = \bar{M}_{\text{тр}} \pm \Delta \bar{M}_{\text{тр}}$  при  $P = 95\%$ .
2. По найденным методом наименьших квадратов параметрам линейной зависимости (4), постройте график зависимости  $M$  от  $\varepsilon$ . Для этого на осях  $Y = M$  и  $X = \varepsilon$  в соответствии с Таблицей 5.2 выберите масштаб (он выбирается так, чтобы график шел примерно под углом  $45^\circ$  к оси  $X$ ) и нанесите в выбранном масштабе на координатную плоскость экспериментальные

точки  $(X_i, Y_i) = (\varepsilon_i, M_i)$  ( $i=1 \dots 6$ ). Аппроксимирующая эти точки теоретическая прямая должна проходить через точки  $(\bar{X}, \bar{Y})$  и  $(0, \bar{b})$ .

### ***Контрольные вопросы***

1. Дайте определение момента инерции точечного, составного и сплошного тел. Объясните его физический смысл.
2. Сделайте рисунок машины Атвуда и укажите на нем все силы, действующие на грузы и блок.
3. Дайте определение момента силы. Укажите на рисунке направления моментов сил, действующих на блок.
4. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
5. Используя рисунок, напишите уравнения движения грузов и блока.
6. Используя эту систему уравнений, найдите ускорение движения грузов. Считая все величины, входящие в полученную формулу, известными из опыта, рассчитайте это ускорение для одного из перегрузов и сопоставьте с его экспериментально определенным значением.

### **Работа № 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Цель работы:* изучение законов поступательно-вращательного движения твердого тела, сохранения энергии, определение момента инерции маятника.

*Приборы и принадлежности:* маятник Максвелла, секундомер, масштабная линейка, штангенциркуль.

Маятник Максвелла (рис. 6.1) представляет собой диск 6, закрепленный на стержне 7, подвешенном на бифилярном подвесе 5 к верхнему кронштейну 2. На диск крепится кольцо 8. Верхний кронштейн 2, установленный на вертикальной стойке 1, имеет электромагнит и устройство 4 для регулировки длины бифилярного подвеса. Маятник с кольцом фиксируется в верхнем исходном положении с помощью электромагнита.

На вертикальной стойке 1 нанесена миллиметровая шкала, по которой определяется ход маятника. На нижнем кронштейне 3 находится фотоэлектрический датчик 9. Кронштейн обеспечивает возможность перемещения фотодатчика вдоль вертикальной стойки и его фиксирования в любом положении в пределах шкалы 0...420 мм. Фотодатчик предназначен для выдачи электрических сигналов на секундомер 10 в момент пересечения светового луча оси фотодатчика диском маятника.

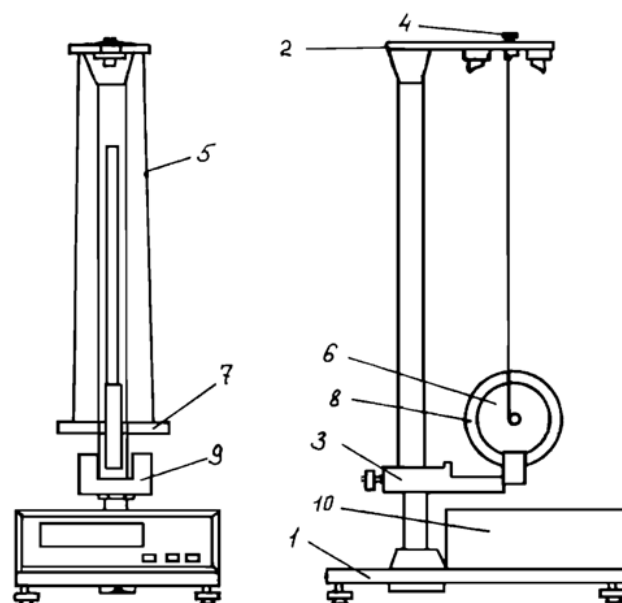


Рис. 6.1.

### *Исследуемые закономерности*

Маятник Максвелла массой  $m$ , поднятый на высоту  $h$  путем намотки нитей подвеса на стержень маятника, имеет потенциальную энергию  $mgh$ . После отключения электромагнита маятник начинает раскручиваться, совершая поступательно-вращательное движение. Потенциальная энергия маятника переходит в кинетическую энергию поступательного движения  $mv^2/2$  его центра масс и энергию вращательного движения  $I\omega^2/2$  вокруг него. На участках опускания и подъема маятника потери энергии на трение пренебрежимо малы по сравнению с изменением механической энергии. В момент полного разматывания нити происходит рывок маятника и частичный переход механической энергии в тепло. На основании закона сохранения механической энергии на участке пути, меньшем длины нити, можно написать

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right), \quad (1)$$

где  $v = \omega r$  – скорость маятника в момент пересечения оптической оси фотодатчика;  $\omega$  – его угловая скорость вращения в тот же момент времени,  $r$  –

радиус стержня, на который намотана нить бифилярного подвеса маятника,  $I$  – момент инерции маятника. Из уравнения (1) получим для экспериментального значения момента инерции маятника

$$I = mr^2 \left( \frac{2gh}{v^2} - 1 \right) = mr^2 \left( \frac{g - a}{a} \right) \quad (2)$$

где учтено, что  $v^2 = 2ah$ ,  $a$  – ускорение, с которым опускается маятник. Учитывая, что  $a = 2h / t^2$ , получим

$$I = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (3)$$

Если учитывать теплоту  $Q$ , выделяющуюся маятником в момент рывка нити, то закон сохранения энергии после рывка нити будет иметь вид

$$mgh_{01} = mgh_{02} + mv^2 / 2 + J\omega^2 / 2 + Q,$$

где высоты  $h_{01}$  и  $h_{02}$  отсчитываются в системе координат, ось высот которой направлена вверх, а начало находится в точке рывка нити.

Из этого уравнения следует, что количество теплоты, выделяющееся при рывке, можно оценить по изменению высоты первого подъёма маятника:  $Q = mg\Delta h$ , где  $\Delta h$  – изменение высоты наивысшего положения маятника в первом цикле спуск – подъем.

Теоретическое значение момента инерции маятника относительно его оси рассчитывается по формуле

$$I_T = \frac{1}{2} (m_{\text{ст}} r^2 + M(r^2 + R^2) + m_{\text{к}}(R^2 + R_0^2)), \quad (4)$$

где  $m_{\text{ст}}$  – масса стержня;  $M$  – масса диска, укрепленного на стержне;  $m_{\text{к}}$  – масса кольца;  $r$  – радиус стержня,  $R$  – внешний радиус диска;  $R_0$  – внешний радиус кольца.

### ***Указания по подготовке к работе***

Создайте Таблицы 6.1 и 6.2 для занесения параметров установки и результатов наблюдений.

Таблица 6.1

$m_{\text{ст}},$ г	$M,$ г	$m_{\text{к}},$ г	$r,$ мм	$R,$ мм	$R_0,$ мм	$h_0,$ см	$h_1,$ см	$h_2,$ см
29	131							

Таблица 6.2

$i$	$h_{0i},$ см	$t_1,$ с	...	$t_5,$ с
1				
...				
4				

### Указания по проведению наблюдений

1. Измерьте штангенциркулем диаметры стержня  $d$ , диска  $D$  и кольца  $D_0$  и рассчитайте их радиусы  $r = d/2$ ,  $R = D/2$ ,  $R_0 = D_0/2$ . Занесите их, а также массу кольца  $m_{\text{к}}$  (указана на его боковой поверхности) в Таблицу 6.1 протокола. Некоторые из этих параметров могут быть указаны на панели установки.
2. Опустите вниз диск маятника. Произведите регулировку положения основания установки при помощи регулировочных опор так, чтобы бифилярный подвес маятника шел параллельно вертикальной стойке установки, а диск находился посередине оси фотодатчика. Установите с помощью устройства 4 максимальную длину бифилярного подвеса, меньшую его полной длины, таким образом, чтобы нижний край кольца маятника находился на 4–5 мм ниже оптической оси фотодатчика; при этом ось маятника должна занять горизонтальное положение. Запишите положение  $h_{0i}$  оптической оси фотодатчика по шкале миллиметровой линейки в Таблицу 6.2.
3. Нажмите кнопку «СЕТЬ», расположенную на лицевой панели секундомера; при этом должны загореться лампочки фотодатчика и цифровые индикаторы секундомера. Вращая маятник, зафиксируйте его в верхнем положении при помощи электромагнита; при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на стержень виток к витку. Запишите положение  $h_0$  нижнего края кольца маятника по миллиметровой шкале на вертикальной стойке установки в Таблицу 6.1.
4. Нажмите кнопку «СБРОС», затем кнопку «ПУСК». При этом электромагнит обесточивается, маятник раскручивается, секундомер начинает производить отсчет времени, прекращающийся в момент пересечения маятни-

ком оптической оси фотодатчика. Запишите значение времени  $t_i$  в Таблицу 6.2. Вращая маятник, вновь зафиксируйте его в верхнем положении. Нажав последовательно кнопки «СБРОС» и «ПУСК», повторите наблюдения еще 4 раза для данной высоты свободного хода маятника. Результаты наблюдений занесите в Таблицу 6.2.

5. Установите новую длину свободного хода маятника. Для этого поднимите нижний кронштейн с фотодатчиком на 5–6 см и зафиксируйте его на стойке. С помощью винта 4 вновь установите необходимую длину бифилярного подвеса и запишите новое положение  $h_{0i}$  оси фотодатчика в Таблицу 6.2. Проведите 5 наблюдений по определению времени  $t_i$  свободного хода маятника для новой высоты.
6. Указанную в п. 3 процедуру проделайте еще для двух высот, уменьшая каждый раз длину свободного хода на 5–6 см. Таким образом, для четырех высот свободного хода маятника будет получено 20 значений времени и четыре средних значений времен движения маятника для этих высот.
7. Опустите кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение. Отрегулируйте бифилярный подвес для свободного хода маятника в соответствии с п. 2. Поднимите маятник в верхнее положение и нажмите кнопку ПУСК. Определите высоту  $h_2$ , на которую поднимется ось маятника после рывка нити, и запишите ее в Таблицу 6.1 протокола.

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Рассчитайте среднее значение ускорения падения маятника и его полную погрешность  $a = \bar{a} \pm \Delta a$  с  $P = 95 \%$ .
2. Рассчитайте по формуле (2). момент инерции маятника  $I = \bar{I} \pm \Delta I$  с  $P = 95 \%$ . Формулу погрешности  $\Delta I$  выведите методом логарифмирования функции.
3. Для одного из опытов рассчитайте по формуле (3) величину момента инерции  $I$  маятника.

4. Рассчитайте по формуле (4) теоретическое значение момента инерции маятника  $I_T$  и сопоставьте его со средним экспериментальным значением  $\bar{I}$  в п. 2 и рассчитанным в п. 3. Сделайте заключение о причинах расхождения значений моментов инерции, если таковое имеется.
5. Рассчитайте количество теплоты  $Q$ , выделяющейся при рывке нити маятника в нижней точке его движения. При расчете  $\Delta h = h_2 - h_1$  используйте значения начальной высоты оси маятника  $h_1 = -(R_0 - h_0)$  и высоты ее подъема после рывка  $h_2$ . Высоты  $h_1$  и  $h_2$  отсчитываются по шкале измерительной линейки на вертикальной стойке установки, положительное направление оси высот которой направлено вниз.

### ***Контрольные вопросы***

1. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
2. Объясните, на каком участке движения и почему возможно применение закона сохранения механической энергии для описания движения маятника.
3. Докажите уравнения связи между линейными и угловыми величинами при вращательном движении тела  $s = \varphi r$ ,  $v = \omega r$ ,  $a_\tau = \varepsilon r$ ,  $a_n = \omega^2 r$ . Каков смысл входящих в эти выражения параметров? Одинаковы ли значения величин  $\varphi, \omega, \varepsilon$  относительно параллельных осей вращения в фиксированный момент времени?
4. Используя одну из высот и время падения с нее маятника в данной работе, рассчитайте
  - а) линейное  $a$  и угловое  $\varepsilon$  ускорение маятника,
  - б) линейную  $v$  и угловую  $\omega$  скорость маятника, а также частоту  $n$  его вращения в этот момент времени,
  - г) угол поворота  $\varphi$  и число оборотов  $N$ , которое сделает маятник за это время.

5. Сделайте упрощенный рисунок маятника, используемого в данной работе, и укажите на нем все силы, действующие на него. Используя рисунок, напишите второй закон Ньютона для центра масс маятника и уравнение вращательного движения маятника вокруг него. Из этой системы уравнений найдите выражение для ускорения падения маятника.
6. Какая из сил на рисунке в п. 3 играет роль силы трения качения? Чему равна работа этой силы, если проскальзывание между нитью и стержнем отсутствует?
7. Рассчитайте величину силы натяжения нити маятника.
8. Напишите закон сохранения механической энергии для маятника в данной лабораторной работе и получите из него выражение для ускорения его падения.
9. Используя теоретическое значение момента инерции маятника  $I_T$ , рассчитайте ускорение  $a$  падения маятника и сопоставьте его с экспериментальным средним значением, полученным в данной работе.
10. Каким образом можно оценить количество теплоты, выделяющееся при рывке нити маятника в данной работе?

### **Работа №7. МАЯТНИК ОБЕРБЕКА**

*Цель работы.* Экспериментальное исследование законов динамики вращательного движения твердого тела на примере маятника Обербека, определение постоянной части момента инерции маятника Обербека.

*Приборы и принадлежности.*

Маятник Обербека (рис. 7.1) представляет собой крестовину 1 с грузами 2, на вращающейся оси 3. На шкив на оси намотана нить с грузиком 5, которая, разматываясь, вызывает вращательное движение крестовины. На четырех взаимно перпендикулярных стержнях крестовины располагаются четыре подвижных груза 2 массой  $m$  каждый, положение которых относительно оси вращения маятника определяется по измерительной линейке 6. В опыте положения грузов на крестовине меняют с помощью их перемещения по



резьбовым спицам крестовины. Фиксация грузов в каждой серии измерений осуществляется путем заклинивания двух резьбовых половин каждого груза в выбранном положении. На оси крестовины располагается датчик 4 угловой скорости вращения маятника, подключенный через концентратор к измерительному блоку 7.

### *Исследуемые закономерности*

Вращение маятника описывается основным уравнением динамики вращательного движения

$$M = I \varepsilon, \quad (1)$$

где  $M$  – момент сил, действующих на маятник,  $I$  – его момент инерции.

Вращательный момент  $M$  сил, действующих на маятник, определяется выражением:

$$M = TR - M_{\text{тр}}, \quad (2)$$

где  $T$  – сила, действующая на шкив маятника со стороны нити,  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения в оси маятника,  $R$  – радиус шкива, на который намотана нить с прикрепленным к ней грузом  $m_0$ .

Движение груза  $m_0$  на нити описывается вторым законом Ньютона

$$m_0 a = m_0 g - T. \quad (3)$$

С учетом этого уравнения момент сил, действующих на маятник, можно записать в виде:

$$M = m_0 (g - a) R - M_{\text{тр}}. \quad (4)$$

Если подставить (4) в (1), то уравнение вращательного движения маятника примет вид

$$I \varepsilon = m_0 (g - a) R - M_{\text{тр}}.$$

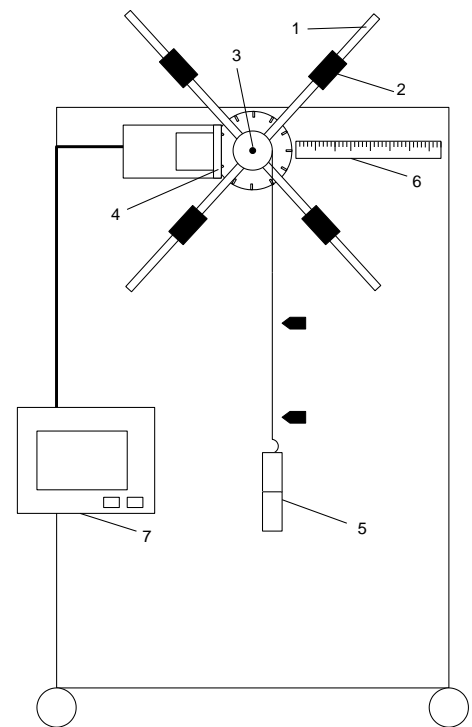


Рис. 7.1.

С учетом, что угловое ускорение  $\varepsilon$  вращения маятника связано с ускорением  $a$  движения груза  $m_0$  соотношением

$$a = \varepsilon R, \quad (5)$$

это уравнение можно привести к виду:

$$(I + m_0 R^2) \varepsilon = m_0 g R - M_{\text{тр}}. \quad (6)$$

В этой формуле правая часть равенства есть постоянная величина. Отсюда следует, что вращение маятника для выбранного в опыте положения грузов является равноускоренным. Кроме того, из формулы (6) следует, что увеличение момента инерции  $I$  системы должно приводить в данной работе к уменьшению углового ускорения  $\varepsilon$  ее вращения, и наоборот.

Если  $m$  – масса одного из грузов на крестовине,  $r$  – его расстояние до оси вращения маятника, то момент инерции крестовины с 4-мя грузами в формуле (6) равен

$$I = I_0 + 4(I_m + m r^2) = I_C + 4m r^2, \quad (7)$$

где  $I_0$  – суммарный момент инерции крестовины без грузов,  $I_m + m r^2$  – момент инерции одного из подвижных грузов, рассчитанный по теореме Гюйгенса-Штейнера,  $I_m$  его собственный момент инерции,  $I_C = I_0 + 4I_m$  – постоянная часть момента инерции маятника Обербека.

Момент инерции  $I_C$  в данной работе является экспериментально определяемой величиной. Для его нахождения запишем (6) для двух различных положений  $r_i$  и  $r_j$  грузов  $m$  относительно оси вращения маятника:

$$(I_C + 4m r_i^2 + m_0 R^2) \varepsilon_i = m_0 g R - M_{\text{тр}}, \quad (8)$$

$$(I_C + 4m r_j^2 + m_0 R^2) \varepsilon_j = m_0 g R - M_{\text{тр}}. \quad (9)$$

Равенство правых частей этих равенств означает и равенство их левых частей:

$$(I_C + 4m r_i^2 + m_0 R^2) \varepsilon_i = (I_C + 4m r_j^2 + m_0 R^2) \varepsilon_j \quad (10)$$

Отсюда можно найти искомую величину  $I_C$ :

$$I_C = 4m \frac{r_j^2 \varepsilon_j - r_i^2 \varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} - m_0 R^2, \quad (11)$$

где  $i \neq j$ , и при  $r_i < r_j$  должно быть  $\varepsilon_i > \varepsilon_j$ . В этой формуле величины

$I_C, R, m, m_0$  – константы, поэтому множитель  $b_{ij} = \frac{r_j^2 \varepsilon_j - r_i^2 \varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \text{const}$  при раз-

личной геометрии постановки эксперимента.

Для выполнения работы необходимо выполнить три серии измерений угловых ускорений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  маятника при трех различных удаленностях  $r_1, r_2$  и  $r_3$  грузов на крестовине от оси ее вращения.

Угловое ускорение вращения маятника определяется по формуле  $\varepsilon = 2\varphi / t^2 = 2h / Rt^2$ , где  $\varphi = h / R$  – угол поворота шкива при прохождении грузом на нити расстояния  $h$  между двумя метками на установке за время  $t$ . Операцию определения времени  $t$  и вычисления  $\varepsilon$  в работе выполняет измерительный блок установки. При этом средние значения  $t$  и  $\varepsilon$  по четырем измерениям в одном опыте высвечиваются на ЖК дисплее установки.

### **Указания по подготовке к работе**

Занесите в протокол Таблицу 7.1 для записи параметров установки и Таблицу 7.2 для записи результатов наблюдений.

Таблица 7.1.

$m$ , г	$m_0$ , г	$R$ , см	$l$ , см	$h$ , см	$r_1$ , см	$r_2$ , см	$r_3$ , см

Таблица 7.2.

$r_1$ , см	$t_1$ , с	$\varepsilon_1$ , м/с <sup>2</sup>	$r_2$ , см	$t_2$ , с	$\varepsilon_2$ , м/с <sup>2</sup>	$r_3$ , см	$t_3$ , с	$\varepsilon_3$ , м/с <sup>2</sup>

### **Указания по проведению наблюдений**

1. Запишите в Таблицу 7.1 массы грузов  $m = 53$  г на крестовине маятника и на нити шкива  $m_0 = 119$  г, радиус шкива  $R = 16.5$  мм, высоту (длину) грузов на крестовине  $l = 24$  мм, расстояние между метками на установке  $h =$

430 мм и удаленности грузов на крестовине от ее оси вращения  $r_1 = 8\text{ см}$ ,  $r_2 = 12\text{ см}$ ,  $r_3 = 16\text{ см}$ . Приборные погрешности масс  $2\text{ г}$ ,  $\theta_R = 0.5\text{ мм}$ ,  $\theta_l = \theta_h = \theta_r = 1\text{ мм}$ .

2. Соберите лабораторную установку, зафиксировав подвижные грузы на выбранном расстоянии  $r_1$  от оси вращения маятника. ВНИМАНИЕ! При установке грузов на крестовине отметка на линейке, соответствующая их выбранному положению, должна быть видна сквозь зазор между грузами, т.е. совпадать с положением их общего центра масс.

**Замечание.** Эксперимент включает в себя три серии измерений, соответствующих различному положению грузов  $r_1, r_2, r_3$  относительно оси вращения маятника, а каждая серия включает 4 измерения угловых ускорений  $\varepsilon$  относительно оси вращения маятника и времен  $t$  движения груза на нити между двумя метками на боковой панели установки. Средние по четырем измерениям значения  $\varepsilon$  и  $t$  высвечиваются на ЖК дисплее установки. Если при выполнении серии в одном из четырех измерений произошли сбой или ошибка, то, не записывая средние значения  $\varepsilon$  и  $t$  в таблицу эксперимента, серию с четырьмя измерениями надо повторить без изменения геометрии эксперимента. При этом измерение, следующее за ошибочным, надо считать первым в новой серии. Полученные в каждой серии измерений значения  $\varepsilon$  и  $t$  записать в Таблицу 7.2.

3. Тумблером «Сеть» включите измерительный блок.
4. Нажмите кнопку «Пуск». При этом на ЖК дисплее отобразится краткая инструкция по использованию измерительной установки.
5. Для начала измерений поднимите груз, прикрепленный к нити, пока его основание (плоскость его нижнего торца) не займет положение верхней метки на вертикальном щите прибора (рис. 7.1). Для этого вращайте маятник за один из стержней по часовой стрелке, придерживая груз рукой. При этом нить с грузом будет наматываться на шкив маятника. Придерживая маятник за один из стержней, другой рукой остановите колебания груза на нити в его верхнем положении.

6. Не отпуская стержень маятника, снова нажмите кнопку «Пуск», при этом на панели установки загорится красный светодиод. Не более чем через 9 с (см. Примечание) отпустите груз. После прохождения грузом нижнего указателя на стенке макета (рис. 7.1) на ЖК дисплее отобразится измерительная информация: время  $t$  движения груза на нити между двумя метками и угловое ускорение  $\varepsilon$  вращения маятника, высвечиваемых в виде отдельных чисел на дисплее. Запишите средние по четырем входящим в серию измерениям значения  $t$  и  $\varepsilon$  с ЖК дисплея в Таблицу 7.2.

**Примечание:** при отпускании груза после нажатия кнопки «Пуск» через время, большее 9 с, на ЖК дисплее появится сообщение об ошибке. В этом случае не заносите информацию с дисплея в протокол и, полностью завершив опыт с четырьмя измерениями, проведите эксперимент с четырьмя измерениями (пп. 5 и 6) повторно.

7. Установите новые положения грузов  $r_2$  и  $r_3$  (п. 2) относительно оси вращения маятника и повторите измерения пп. 5 и 6, заносая измеренные значения  $t_2$ ,  $t_3$  и  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  в Таблицу 7.2. При  $r_3 > r_2 > r_1$  должно быть  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ .

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Используя данные Таблицы 7.2, проверьте близость значений коэффициентов  $b_{ij}$  в формуле (11) при различной геометрии постановки эксперимента и, при их близости, рассчитайте постоянную часть момента инерции маятника Обербека  $I_C = \bar{I}_C \pm \Delta \bar{I}_C$  с  $P = 95\%$ .
2. Используя данные Таблицы 7.1 и экспериментально определенное значение  $I_C$ , рассчитайте для двух опытов по формулам (8) и (9) момент  $M_{\text{тр}}$  сил трения, действующих в оси маятника. Проверьте, что оба расчетных значения  $M_{\text{тр}}$  примерно одинаковы. Исходя из этого сопоставления, сделайте заключение о возможности расчета момента инерции  $I_C$  по формуле (11).

3. Рассматривая грузы на крестовине маятника как стержни длиной  $l$  и массой  $m$  (см. Таблицу 7.1) с собственным моментом инерции  $I_m = ml^2/12$ , рассчитайте момент инерции  $I_0$  крестовины маятника Обербека.
4. По одной из серий Таблицы 7.2 рассчитайте в момент времени  $t$  угловую скорость  $\omega$  вращения маятника, угол  $\varphi$  его поворота и число  $N$ , сделанных им оборотов; линейную  $v$  скорость, касательное  $a_\tau$ , нормальное  $a_n$  и полное  $a$  ускорение точек на ободу шкива. Определите путь  $h$ , который пройдет груз на нити за это время. Сопоставьте полученное значение со значением  $h$  в Таблице 7.1.

### ***Контрольные вопросы***

1. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.
2. Что называется моментом инерции твердого тела? В каких единицах он измеряется?
3. Что называется моментом силы, и в каких единицах он измеряется?
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Почему в данной работе увеличение момента инерции  $I$  системы должно приводить к уменьшению углового ускорения  $\varepsilon$  ее вращения, и наоборот?
6. Вычислите натяжения нити  $T_1$  и  $T_2$  при двух положениях  $r_1$  и  $r_2$  грузов относительно оси вращения маятника.
7. Выведите формулу (11) для расчета постоянной части момента инерции  $\bar{I}_C$  маятника Обербека.
8. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.

## **Работа № 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ**

*Цель работы:* определение скорости распространения звуковых колебаний в воздухе методом стоячих волн в резонаторе. Построение амплитудно-частотной характеристики резонатора и определение его добротности.

*Приборы и принадлежности:* установка акустического резонанса, электронный осциллограф, звуковой генератор.

### ***Исследуемые закономерности***

Звуковые колебания в газе представляют собой периодическое чередование областей сжатия и разрежения, распространяющихся со скоростью, зависящей от его свойств. Газы, в отличие от твёрдых тел, не обладают сдвиговой жесткостью, поэтому в них возникают только продольные волны. В такой волне направление колебаний частиц среды происходит в направлении распространения волны.

Если сжатие и разрежение газа происходит быстро, то области сжатия и разрежения в газе не успевают обмениваться теплом. Такой процесс распространения звука является адиабатическим; в этом случае скорость звука в газе рассчитывается по формуле

$$u = (\gamma p / \rho)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\gamma = C_p / C_v$  – показатель адиабаты, равный отношению теплоёмкостей газа в изобарном и изохорном процессах;  $p$  и  $\rho$  – давление и плотность газа.

Соотношение (1) может быть преобразовано при использовании уравнения состояния идеального газа  $pV = (m/\mu)RT$  к виду

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (2)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура газа;  $\mu$  – его молярная масса (для воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг / моль).

В более общем случае политропного процесса распространения звука, его скорость  $u = \sqrt{\frac{nRT}{\mu}}$ , где  $n$  – показатель политропы (для изотермического процесса  $n = 1$ , для адиабатного  $n = \gamma$ ). Политропный процесс – процесс с постоянной теплоемкостью  $c$ , которая может быть рассчитана по известному

показателю политропы  $n = \frac{c - c_p}{c - c_V}$ , где  $c_V = iR/2$  и  $c_p = c_V + R = (i+2)R/2$

соответствующие молярные теплоемкости воздуха,  $i$  – число степеней свободы молекул газа. Из последнего выражения для теплоемкости политропического процесса получаем  $c = c_V \left( \frac{n - \gamma}{n - 1} \right)$ , где  $\gamma = c_p / c_V = (i + 2) / i$  – показатель адиабаты. Воздух можно считать двухатомным газом, для которого  $i = 5$  и  $\gamma = 1.4$ .

Удобным методом измерения скорости звуковых волн в газе является метод, основанный на измерении длины волны  $\lambda$  бегущих звуковых волн, излучаемых источником. Если длина волны  $\lambda$ , определяемая как расстояние, проходимое волной за период колебаний, измерена экспериментально и известна частота  $\nu$  возбуждаемых источником звуковых волн, то скорость бегущей волны

$$u = \lambda \nu. \quad (3)$$

При интерференции двух встречных бегущих волн возникают стоячие звуковые волны, показанные на рис. 8.1. для различных моментов времени ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ).

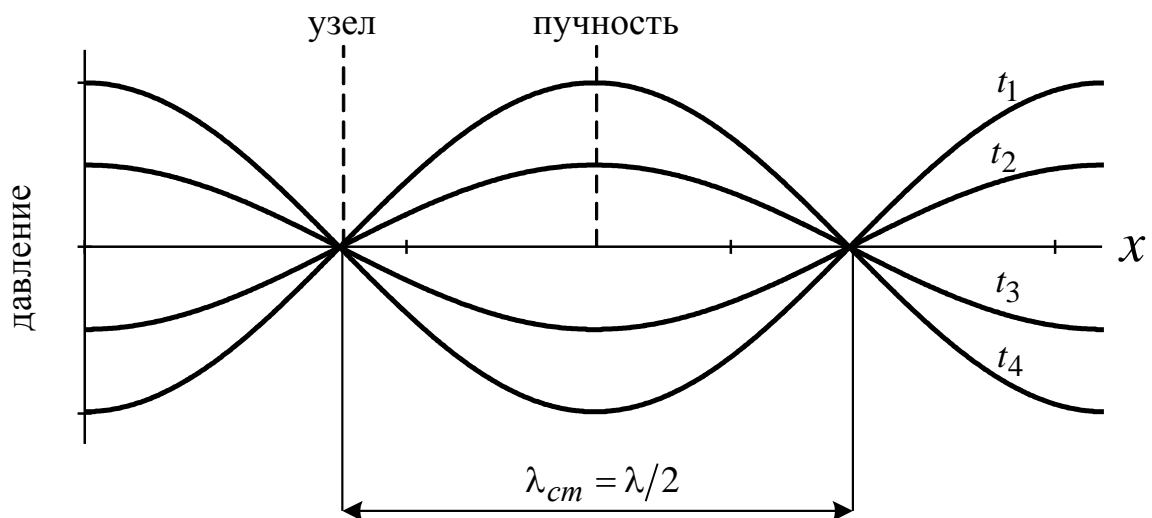


Рис. 8.1



В данной работе суммируются прямая волна от источника звука и волна, отразившаяся от торца резонатора. Точки стоячей волны, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами стоячей волны. Расстояние между соседними узлами или пучностями называют длиной стоячей волны  $\lambda_{\text{ст}}$ . Она равна половине длины волны  $\lambda$  интерферирующих встречных бегущих волн:  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda / 2$ .

Явление резонанса, при котором возникает стоячая волна с максимальной амплитудой, наблюдается при совпадении частоты излучения источника звуковой волны и собственной частоты колебаний резонатора. В этом случае длина резонатора  $L_n$ , в котором устанавливается стоячая волна, равна целому числу длин стоячих волн или полуцелому числу длин звуковых волн, излучаемых источником:

$$L_n = n\lambda_{\text{ст}} = n\lambda / 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Явление резонанса резко выражено в том случае, если затухание колебаний в волне мало. В используемом в работе резонаторе затухание колебаний обусловлено неполным отражением звуковых волн от торца (поршня) резонатора за счет их частичного поглощения и потерями на излучение волн из резонатора в окружающую среду.

Характеристикой убыли энергии при затухании колебаний в волне служит добротность колебательной системы

$$Q = 2\pi W(t) / (W(t) - W(t+T)).$$

Знаменатель представляет убыль энергии волны за период колебаний  $T$ , отсчитываемый от момента времени  $t$ .

Можно показать, что

$$Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \pi \nu_0 \tau$$

где  $\omega_0 = 2\pi \nu_0$  — циклическая частота,  $\tau$  — время затухания колебаний в волне.

Свойства колебательной системы можно изучать как во временной, так и частотной областях. Во временной области исследуется зависимость уменьшения амплитуды и энергии колебаний волны во времени. В частотной области исследуется реакция (отклик) колебательной системы на внешнее (обычно гармоническое) воздействие. В этом случае исследуется зависимость амплитуды колебаний в системе (резонаторе) от частоты воздействующей на нее внешней периодической силы. Эта зависимость называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы.

Для многих резонансных систем, в частности, и для используемого в работе резонатора, зависимость амплитуды колебаний в системе от частоты внешнего периодического воздействия (АЧХ системы) при не слишком больших отклонениях частоты относительно резонанса может быть аппроксимирована функцией Лоренца, которая имеет вид

$$A_v = A_0 / (1 + ((v-v_0) / \Delta v_0)^2)^{1/2},$$

и представляет собой симметричную колоколообразную кривую с четко выраженным максимумом. Здесь  $A_0$  и  $v_0$  – максимальная амплитуда стоячей волны в резонаторе и частота излучения источника звуковых волн в максимуме АЧХ (т. е. при резонансе);  $\Delta v_0$  – ширина резонансной кривой, которая определяется как разность двух частот  $v_2$  и  $v_1$  по обе стороны от резонансной частоты  $v_0$ , при которых амплитуда колебаний в резонаторе уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с амплитудой колебаний в максимуме кривой:  $A_n = A_0 / \sqrt{2}$ . Тогда добротность резонатора по его АЧХ вычисляется по формуле

$$Q = \frac{v_0}{\Delta v_0} = \frac{v_0}{v_2 - v_1}.$$

*Метод измерений.* Работа выполняется на установке, схема которой приведена на рис. 8.2. На одном конце кварцевой трубы на-

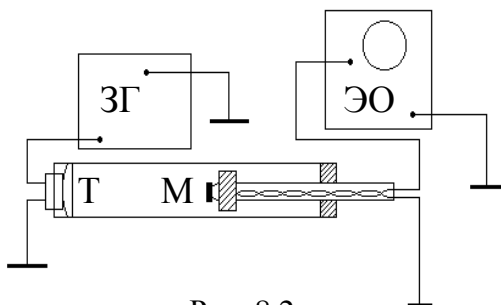


Рис. 8.2.

ходится телефон Т, являющийся источником звука. Телефон соединен со звуковым генератором ЗГ. Колебания мембраны телефона создают периодические сгущения и разрежения в прилегающем к ней слое воздуха, возбуждая акустическую волну.

Внутри трубы перемещается поршень с вмонтированным в него приемником – микрофоном М. Микрофон принимает звуковые колебания, преобразует их в электрические и передает на вход У электронного осциллографа ЭО. На экране осциллографа возникает синусоидальный сигнал, амплитуда которого зависит от частоты колебаний источника звука и длины резонатора, которая изменяется за счет перемещения отражающего торца (поршня) резонатора, прикрепленного к подвижному стержню.

При выполнении условия (4) наступает резонанс, при котором амплитуда наблюдаемых колебаний максимальна. Настройка на резонанс может быть осуществлена либо изменением длины воздушного столба в трубе резонатора (перемещением поршня), либо изменением частоты колебаний генератора. В работе для определения длины звуковой волны, испускаемой источником, и скорости звука в воздухе используется первый способ, а для определения добротности резонатора – второй.

### ***Указания по подготовке к работе***

Занесите в протокол Таблицу 8.1 для записи однократно измеряемых в опыте величин, Таблицу 8.2 для определения скорости звука в воздухе и Таблицу 8.3 для построения АЧХ резонатора и определения его добротности.

Таблица 8.1.

$\nu_0$ , Гц	$t$ , °С	$T$ , К	$p$ , Па

Таблица 8.2.

$i$	1	...	...	...	10
$L_1$ , см					
$L_2$ , см					
$L_3$ , см					

Таблица 8.3.

$i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\theta$
$\nu$ , Гц												
$A_\nu$												

### ***Указания по проведению наблюдений***

1. Включите генератор звуковых колебаний и установите на нем частоту, указанную на панели установки ( $\nu_0 \sim 1000 \text{ Гц}$ ). Запишите установленное значение частоты и ее приборную погрешность  $\theta_\nu$  в Таблицу 8.1.
2. Включите осциллограф, и после появления на экране сигнала (синусоиды) установите удобный для наблюдения размер изображения (амплитуды сигнала). Для этого, перемещая поршень в резонаторе, убедитесь, что максимальная амплитуда синусоиды, высвечиваемой на экране осциллографа, не выходит за пределы экрана и не слишком мала.
3. Поршень с микрофоном придвиньте к телефону. Медленно удаляя микрофон от телефона, найдите положение, при котором на экране осциллографа наблюдается первый максимум амплитуды колебаний в стоячей волне. По измерительной линейке определите длину  $L_1$  резонатора (расстояние от телефона до микрофона). Продолжая перемещать поршень, найдите длины  $L_2$  и  $L_3$  резонатора для двух последующих резонансов. Перемещая микрофон в обратном направлении, вновь зафиксируйте длины резонаторов  $L_3$ ,  $L_2$  и  $L_1$ . Указанную процедуру повторите пять раз. Полученные данные запишите в Таблицу 8.2. Запишите в протокол приборную погрешность  $\theta_L$  определения положений максимумов.
4. Не меняя частоту генератора, установите микрофон в положение  $L_2$ . Затем плавным изменением частоты уточните положение резонанса, добиваясь максимального значения амплитуды сигнала на экране осциллографа. Запишите значение резонансной частоты  $\nu_0$  и амплитуды колебаний  $A_0$  (в делениях сетки экрана осциллографа, условно в миллиметрах) в центральный столбец Таблицы 8.3. Изменяя частоту генератора относительно  $\nu_0$  в сторону увеличения, а затем уменьшения частоты, запишите соответствующие значения частот  $\nu_i$  и амплитуд колебаний  $A_\nu$  в Таблицу 8.3. Максимальное изменение, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения частоты выбирайте таким образом, чтобы амплитуда уменьшилась по сравнению с

резонансной амплитудой не менее чем в два раза. Шаг изменения частоты выберите в соответствии с градуировкой прибора (частотомера). Запишите в протокол приборную погрешность определения частоты  $\theta_v$ .

5. Запишите в Таблицу 8.1 протокола определенную по термометру температуру  $T$ , а по барометру – давление  $p$  воздуха в лаборатории.

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Вычислите для каждого из трех резонансов ( $n = 1, 2, 3$ ) среднее значение положений  $\bar{L}_n$  каждого резонанса, скорости звука  $u_n = \lambda_n v_0 = 2\bar{L}_n v_0 / n$  и ее приборных погрешностей  $\theta_{u_n}$ .
2. По выборке  $u_n$  объема  $n = 3$  и приборным погрешностям  $\theta_{u_n}$  вычислите скорость звука  $u = \bar{u} \pm \overline{\Delta u}$  с  $P = 95\%$ .
3. По экспериментально полученному значению скорости звука  $\bar{u}$  определите показатель политропного процесса  $n$  и его теплоемкость  $c$ . Сопоставьте показатель политропы  $n$  с показателем адиабаты для двухатомного газа  $\gamma = 1.4$  и дайте характеристику процесса распространения звука в воздухе.
4. Используя данные Таблицы 8.1 и экспериментально определенное значение показателя политропы  $n$ , рассчитайте по формуле скорости звука в газах, а также по уравнению Клапейрона  $p = (\rho / \mu) RT$ , плотность воздуха в лаборатории и сопоставьте эти значения друг с другом и с табличным значением плотности воздуха (при нормальных условиях  $\rho = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ).
5. Постройте, используя Таблицу 8.3, экспериментальную резонансную кривую (АЧХ резонатора)  $A_v = f(v)$ . Определите ее ширину  $\Delta v_0$  на уровне  $A_0 / \sqrt{2}$ .
6. Рассчитайте добротность резонатора по формуле  $Q = v_0 / \Delta v_0$ .

### ***Контрольные вопросы***

1. Как направлена колебательная скорость молекул воздуха в акустической волне по отношению к направлению ее распространения?

2. Какие волны называются стоячими? Как образуются стоячие волны?
3. Дайте определение длины бегущей и стоячей волны. Как они взаимосвязаны друг с другом?
4. Свободными или вынужденными являются колебания, возникающие в резонаторе при условиях, заданных в работе? В чем заключается явление резонанса? При каких условиях (длинах резонатора), оно наблюдается?
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Какие колебания называются затухающими? Назовите физические величины, характеризующие затухание колебаний. Каков их физический смысл?
7. Дайте определение добротности колебательной системы. Как она вычисляется по резонансной кривой (АЧХ), описываемой функцией Лоренца?
8. Изобразите качественно график зависимости скорости звука от температуры.
9. Что такое степени свободы молекул газа? Как вычисляются полные степени свободы молекул газа с учетом поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекулы? Рассчитайте полное число степеней свободы для молекул  $O_2$  и  $CO_2$  с учетом и без учета их колебательных степеней свободы.
10. Какие процессы называют политропными? Как вычисляется теплоемкость политропного процесса?
11. Какой процесс называют адиабатным? Что такое показатель адиабаты и чему он равен для двухатомного газа?
12. Как связаны между собой молярные и удельные теплоемкости идеального газа в изобарном и изохорном процессах (формула Майера)? Каковы их размерности?

## Работа № 9. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

*Цель работы:* исследование политропно-изохорно-изотермического ( $nVT$ ) и адиабатно-изохорно-изотермического ( $SVT$ ) циклов.

*Приборы и принадлежности:* баллон с воздухом, манометр, микрокомпрессор, лабораторные термометр и барометр.

### Исследуемые закономерности

*Метод измерений.* Используемая в работе установка изображена на рис. 9.1. Баллон А объёмом  $V_1$  может сообщаться либо с насосом Н, либо с атмосферой. Внутри баллона помещён манометр М, измеряющий избыточное давление. Одно деление шкалы равно 4 мм вод. ст., что составляет 40 Па. Рабочим газом является воздух. В исходном состоянии параметры состояния воздуха следующие: внешнее давление  $p_2$  и комнатная температура  $T_1$ . Диаграмма исследуемого цикла в координатах ( $p, V$ ) показана на рис. 9.2.

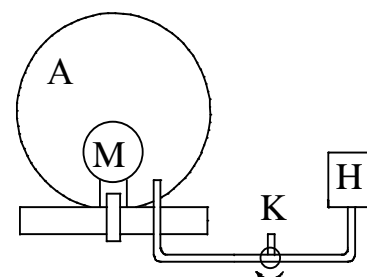


Рис. 9.1.

Вначале насосом в баллон накачивают воздух до давления  $p_1 = p_2 + \Delta p_1$  (рис. 9.2 ( $p_1; V_1$ )). При сжатии воздух нагревается, поэтому после закрытия крана необходимо выждать некоторое время, пока температура воздуха в баллоне не сравняется с температурой окружающей среды (при этом прекращается движение стрелки манометра).

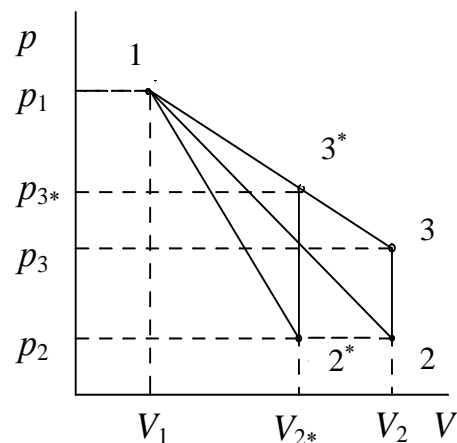


Рис. 9.2.

Затем воздух выпускают через кран К в атмосферу в течение нескольких секунд. Когда стрелка манометра приблизится к нулю, кран закрывают. В этот момент давление воздуха в баллоне становится  $p_2$  (рис. 9.2 ( $p_2; V_2$ )). Изменение параметров состояния воздуха в процессе расширения отражает линия 1–2 на рис. 9.2, которая является политропой.

После закрытия крана охлаждённый при расширении воздух изохорически нагревается до температуры окружающей среды в результате теплообмена с ней. Изменение параметров состояния воздуха отражает линия 2–3 рис. 9.2, которая является изохорой. Температура воздуха в баллоне становится равной температуре в точке 1 ( $T_3 = T_1$ ), следовательно, точки 1 и 3 лежат на одной изотерме.

После выравнивания температур давление в баллоне изменится на  $\Delta p_3$  и станет  $p_3 = p_2 + \Delta p_3$  (рис. 9.2 ( $p_3$ ;  $V_2$ )). Таким образом,  $\Delta p_1$  и  $\Delta p_3$  – это изменения давления на участках 1–2 и 2–3. Участки 1–2 и 1–3 на диаграмме можно аппроксимировать прямыми, так как изменения параметров  $p$ ,  $V$ ,  $T$  в данной работе малы и много меньше абсолютных значений соответствующих величин.

В работе изучается политропно-изохорно-изотермический ( $nVT$ ) цикл. Для сравнения с  $nVT$  циклом используется адиабатно-изохорно-изотермический ( $SVT$ ) цикл, отличающийся тем, что процесс расширения газа на участке 1–2\* рассматривается как адиабатический. Изучение циклов осуществляется путем их моделирования при значениях показателя адиабаты  $\gamma=1,4$  и показателя политропы  $n$ , определенным опытным путем.

**Определение показателя политропы.** Первое начало термодинамики формулируется следующим образом: сообщённое системе количество теплоты  $\delta Q$  расходуется на увеличение внутренней энергии  $dU$  системы и совершение системой работы  $\delta A$ :

$$\delta Q = dU + \delta A = C_V dT + p dV,$$

где  $C_V$  – теплоёмкость газа в изохорном процессе.

*$nVT$ -цикл.* Процесс расширения воздуха на участке 1–2 (рис. 9.2) является политропным, в котором теплоёмкость газа  $C$  остаётся постоянной. Первое начало термодинамики для политропного процесса имеет вид

$$CdT = C_V dT + p dV \quad \text{или} \quad C_V' dT + p dV = 0,$$



где  $C$  – теплоемкость воздуха в политропном процессе,  $C_V' = C_V - C$ . Из этого соотношения с помощью уравнения состояния идеального газа можно получить уравнение Пуассона для политропного процесса  $TV^{n-1} = \text{const}$  или  $pV^n = \text{const}$ , где  $n$  – показатель политропы,

$$n = (C_p - C) / (C_V - C).$$

где  $C_p$  и  $C_V$  – теплоемкости газа в изобарном и изохорном процессах.

*SVT-цикл.* Предположим, что процесс расширения воздуха на участке  $1-2^*$  (рис. 9.2) является адиабатным. Адиабатный процесс является одним из видов политропных процессов, он происходит без теплообмена с окружающей средой:  $\delta Q = 0$  и теплоемкость газа в этом процессе  $C=0$ . Поэтому показатель политропы в этом процессе равен  $n = \gamma = c_p / c_V$  и называется показателем адиабаты. Взаимосвязь между параметрами состояния в адиабатном процессе также описывается уравнениями Пуассона либо объединенным газовым законом.

Показатель политропы  $n$  может быть определён экспериментально. Выразим  $n$  через экспериментально измеряемые величины, для чего продифференцируем уравнения политропы ( $pV^n = \text{const}$ ) и изотермы ( $pV = \text{const}$ ):  $pnV^{n-1} dV + V^n dp = 0$  – для политропы и  $p dV + V dp = 0$  – для изотермы. Откуда

$$\left( \frac{dp}{dV} \right)_n = -\frac{np}{V}, \quad \left( \frac{dp}{dV} \right)_T = -\frac{p}{V}, \quad \left( \frac{dp}{dV} \right)_n = n \left( \frac{dp}{dV} \right)_T$$

При относительно малых изменениях  $\Delta p$  и  $\Delta V$  угловые коэффициенты политропы  $1-2$  и изотермы  $1-3$  (см. рис. 9.2) рассчитывается по формулам

$$\left( \frac{dp}{dV} \right)_n = -\frac{\Delta p_1}{\Delta V}, \quad \left( \frac{dp}{dV} \right)_T = -\frac{\Delta p_1 - \Delta p_3}{\Delta V}$$

где  $\Delta V = V_2 - V_1$ . Из этих и приведенных выше соотношений получаем формулу

$$n = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_3}. \quad (1)$$

Зная  $n$ , можно определить мольную теплоемкость газа в политропном процессе (мольные величины обозначаем соответствующими строчными буквами)

$$c = c_V \left( \frac{n - \gamma}{n - 1} \right), \quad (2)$$

где  $\gamma = c_p / c_V$  – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа в изобарном и изохорном процессах,  $c_V = iR/2$ ,  $c_p = c_V + R = (i + 2)R/2$ ,  $i$  число степеней свободы молекул газа,  $R = 8,31$  Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная. Воздух можно считать двухатомным газом, для которого при небольших температурах  $i = 5$  и  $\gamma = (i + 2) / i = 1.4$

На участке 1–2 воздух охлаждается, а тепло через стеклянную колбу поступает в систему ( $dQ > 0, dT < 0$ ) поэтому теплоемкость газа в политропном процессе  $c = dQ/dT$  – отрицательна. Это означает согласно формуле (2), что на участке 1–2 показатель политропы  $1 < n < \gamma$ .

*Расчет изменения внутренней энергии и работы газа на участках цикла.* Так как в цикле и в изотермическом процессе  $\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$  и  $\Delta U_{31} = 0$ , то изменение внутренней энергии газа в политропном процессе  $\Delta U_{12}$  и в изохорном процессе  $\Delta U_{23}$  одинаковы по величине и противоположны по знаку. Тогда

$$\Delta U_{12} = \nu c_V (T_2 - T_1), \quad (3)$$

где  $\nu$  – число молей воздуха в баллоне, определяемое по уравнению состояния (уравнение Менделеева-Клапейрона).

Работа расширения (сжатия) газа в политропическом  $A_{12}$  и изотермическом  $A_{13}$  процессах может быть рассчитана по формулам:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n - 1}, \quad A_{13} = \nu R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}. \quad (4)$$

*Расчёт холодильного коэффициента.* Цикл, изучаемый в данной работе, является холодильным (ориентирован против часовой стрелки). Его эффективность принято характеризовать холодильным коэффициентом  $\varepsilon$ , который определяется как отношение теплоты, отнятой от охлаждаемого газа, к затраченной в цикле работе. Для  $SVT$ -цикла с учетом  $Q_{12}=0$  и  $Q_{23}=|\Delta U_{23}|=|\Delta U_{12}|=A_{12}$  холодильный коэффициент  $\varepsilon$  равен (обозначения цифровых индексов согласованы с рис. 9.2).

$$\varepsilon(SVT) = \frac{Q_{23}^{**}}{A} = \frac{A_{12}^{**}}{A_{13}^{**} - A_{12}^{**}},$$

а для  $nVT$ -цикла в предположении  $Q_{12} \approx 0$

$$\varepsilon(nVT) = \frac{A_{12}}{A_{13} - A_{12}}.$$

Перепишем выражения для  $\varepsilon$ , используя экспериментально измеряемые величины давлений, для чего значения работы  $A_{12}$  и  $A_{12}^{**}$  определим графическим способом. В  $pV$ -координатах (рис. 9.2) они равны площадям трапеций, основания которых  $p_1$  и  $p_2 = p_{2}^{**}$  (либо  $p_3$  или  $p_{3}^{**}$ ), а высоты –  $(V_2 - V_1)$  и  $(V_{2}^{**} - V_1)$  соответственно. Учитывая, что  $\Delta p_1 \ll p_2$  и  $p_1 + p_2 = 2p_2 + \Delta p_1 \approx 2p_2$ , получим

$$\varepsilon(nVT) = \frac{2p_2}{\Delta p_3} \text{ и } \varepsilon(SVT) = \frac{2p_2}{\Delta p_{3}^{**}}.$$

В проводимом опыте  $\Delta p_{3}^{**} > \Delta p_3$ , поэтому отношение холодильных коэффициентов  $\varepsilon(nVT) / \varepsilon(SVT) > 1$ .

*Расчет изменения энтропии.* Функция состояния, дифференциалом которой является отношение  $\delta Q / T$ , называется энтропией:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \nu c \int_1^2 \frac{dT}{T} = \nu c \ln \frac{T_2}{T_1},$$

где  $c$  – мольная теплоемкость газа, зависящая от типа политропного процесса (адиабатный, изохорный, изобарный и т.п.). Отметим, что данное выраже-

ние справедливо лишь для обратимых процессов, то есть процессов, которые могут быть проведены в обратном направлении через те же промежуточные состояния, что и при прямом процессе; при этом тепловое состояние окружающей среды не изменяется (процесс без теплотерь).

Выразим изменение энтропии  $\Delta S$  через экспериментально определяемые в опыте величины давлений сначала для  $nVT$ -цикла. В политропном процессе (на участке 1–2) с учетом уравнения Пуассона  $Tr^{(1-n)/n} = const$

$$\Delta S_{12} = \nu c \ln \frac{T_2}{T_1} = -\nu c \left( \frac{n-1}{n} \right) \ln \frac{p_1}{p_2} = -\nu c \left( \frac{n-1}{n} \right) \ln \left( 1 + \frac{\Delta p_1}{p_2} \right) \approx -\nu c \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\Delta p_1}{p_2}.$$

В изохорном процессе (на участке 2–3) изменение энтропии с учетом  $T_3 = T_1$  и  $i = 5$ , а также уравнения Пуассона равно:

$$\Delta S_{23} = \nu c_V \ln \frac{T_3}{T_2} = \nu c_V \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \nu c_V \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\Delta p_1}{p_2} = 2.5 \nu R \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\Delta p_1}{p_2}.$$

В изотермическом процессе (на участке 3–1)

$$\Delta S_{31} = \nu R \ln \frac{V_1}{V_3} = \nu R \ln \frac{V_1}{V_2} = \nu R \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n} \nu R \frac{\Delta p_1}{p_2}.$$

Для  $SVT$ -цикла изменение энтропии в адиабатном процессе (на участке 1–2\*) равно нулю. С учетом, что изменение энтропии в цикле также равно нулю, заключаем, что изменения энтропии в изохорном и изотермическом процессах равны по величине, но различаются знаком:

$$\left| \Delta S_{3*1} \right| = \nu R \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p_1}{p_2}.$$

### ***Указания по подготовке к работе***

Занесите в бланк Протокола Таблицу 9.1 для записи однократно измеряемых в опыте величин и Таблицу 9.2 для определения показателя политропы.

Таблица 9.1.

$p_2$ , Па	$V_1$ , л	$t_1$ , °C	$T_1$ , К

Таблица 9.2.

	1	...	...	10
$\Delta p_1$				
$\Delta p_3$				

### **Указания по проведению наблюдений**

1. Откройте кран на атмосферу и, когда стрелка манометра установится на нуле, закройте его.
2. Откройте кран и, закрыв отверстие патрубка пальцем, нажмите кнопку насоса и накачайте в баллон воздух до давления 0,8 – 0,9 предельного по шкале манометра, после чего закройте кран. Когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (стрелка манометра остановится), запишите в Таблицу 9.2 установившееся избыточное давление  $\Delta p_1$ .
3. Откройте кран на атмосферу и, как только избыточное давление в баллоне упадёт до нуля, закройте кран. Когда воздух в баллоне нагреется до комнатной температуры (перестанет уменьшаться давление в баллоне), запишите значение установившегося избыточного давления  $\Delta p_3$  в Таблицу 9.2 протокола.
4. Действия, описанные в пп. 1, 2, выполните 10 раз.
5. По барометру и термометру, имеющимися в лаборатории, измерьте атмосферное давление  $p_2$  и температуру воздуха  $T_1$ . Объём баллона  $V_1$  указан на панели установки. Все измеренные величины запишите в Таблицу 9.1 протокола.

### **Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Используя данные Таблицы 9.2, рассчитайте в делениях шкалы манометра избыточные давления  $\Delta p_1 = \Delta \bar{p}_1 \pm \Delta(\Delta \bar{p}_1)$  и  $\Delta p_3 = \Delta \bar{p}_3 \pm \Delta(\Delta \bar{p}_3)$  с  $P = 95\%$ .
2. Рассчитайте показатель политропы  $n = \bar{n} \pm \Delta \bar{n}$  с  $P = 95\%$  на участке 1–2  $nVT$  цикла. При выводе формулы погрешности  $\Delta \bar{n}$  функцию (1) удобно прологарифмировать.

3. Выразите избыточные давления  $\Delta \bar{p}_1$  и  $\Delta \bar{p}_3$  в Па, а комнатную температуру  $T_1$  в К (одно деление шкалы манометра равно 40 Па). Рассчитайте давления  $p_1$  и  $p_3$ , выразив их в Па.
4. Рассчитайте параметры состояния  $(p, V, T)$  в точках 1, 2 и 3  $nVT$ -цикла, а также в точках  $1^*$ ,  $2^*$  и  $3^*$   $SVT$ -цикла, используя уравнения политропического и адиабатического процессов. При расчётах используйте экспериментальные значения изменения давления  $\Delta \bar{p}_1$  и  $\Delta \bar{p}_3$  и величину  $p_2$ , измеренную барометром. Рассчитанные значения параметров  $(p, V, T)$  в вершинах  $nVT$ - и  $SVT$ - циклов сведите в две отдельные таблицы.
5. Постройте  $nVT$ - и  $SVT$ -циклы в координатах  $(p, V)$  на миллиметровой бумаге в удобном масштабе.
6. Рассчитайте изменения внутренней энергии, величину работы газа и поглощаемое (отдаваемое) им количество теплоты для всех процессов  $nVT$  цикла. Для участка 1-2 используйте при расчетах определенное в опыте значение мольной теплоемкости воздуха в политропном процессе. Проверьте выполнение первого начала термодинамики для каждой из ветвей цикла и всего цикла.
7. Рассчитайте холодильные коэффициенты для  $nVT$ - и  $SVT$ -циклов. Сравните значения холодильных коэффициентов, полученные расчетным путем, с холодильными коэффициентами обратимого цикла Карно, построенного в пределах тех же максимальных и минимальных температур циклов, т. е.  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_2^*$  соответственно. Обратите внимание, что холодильные коэффициенты обратимых циклов Карно меньше, чем холодильные коэффициенты рассматриваемых циклов.
8. Используя уравнения состояния идеального газа, найдите число молей воздуха в сосуде  $v$  по известным значениям  $p_2$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  в Таблице 9.1. Считается, что число молей газа при его сжатии и расширении в исследуемом цикле – постоянная величина.

9. Рассчитайте мольную теплоемкость  $c_V$  воздуха при постоянном объеме, а по формуле (2) – его мольную теплоёмкость  $c$  в политропном процессе.
10. Рассчитайте изменение энтропии всех процессов в  $nVT$ - и  $SVT$ -циклах.

### ***Контрольные вопросы***

1. Какой газ называют идеальным?
2. Дайте определение степеней свободы молекул газа (поступательных, вращательных и колебательных). Как рассчитываются полные степени свободы молекул газа и чему они равны при невысоких температурах для одноатомного, двухатомного и многоатомного газов? Рассчитайте (с учетом колебательных степеней свободы) полное число степеней свободы молекул  $O_2$  и  $CO_2$ .
3. Какие циклы называют тепловыми, а какие холодильными? Какими параметрами принято характеризовать эффективность этих циклов?
4. Что такое состояние вещества? Какие величины называют параметрами состояния? Напишите уравнение состояния идеального газа.
5. Дайте определение термодинамических функций: работы газа  $A$ , его внутренней энергии  $U$ , количества теплоты  $Q$ , отдаваемой (получаемой) газом, энтропии  $S$ . Какие из этих функций являются функциями состояния, а какие функциями процесса? Чему равно изменение функций состояния в цикле?
6. Какие процессы называют политропными? Дайте определение показателя политропы. Чему равны показатели политропы для изохорного, изобарного, изотермического и адиабатного процессов?
7. Как экспериментально определяется показатель политропы в данной работе? Докажите формулу, по которой он рассчитывается.
8. Сформулируйте объединенный газовый закон, и, исходя из него, напишите уравнения изохоры, изобары и изотермы.

9. Сформулируйте первое начало термодинамики. Какой вид оно имеет для каждой из ветвей цикла, а также всего цикла? Напишите первое начало для изобарного, изохорного, изотермического и адиабатного процессов.
10. Дайте определение удельной и мольной теплоемкостей вещества. Как они взаимосвязаны друг с другом? Каковы их размерности?
11. Как можно вычислить теплоемкость идеального газа в произвольном политропном процессе через показатель политропы? Докажите эту формулу.
12. Объясните, почему теплоемкость воздуха в политропном процессе в данной работе отрицательна?
13. Напишите уравнение Пуассона в переменных  $(p, V)$ ,  $(p, T)$  и  $(V, T)$ .
14. Дайте определение холодильного коэффициента. Как он вычисляется в цикле, изучаемом в данной работе?
15. Как соотносятся холодильные коэффициенты  $nVT$ - и  $SVT$ - циклов? Какой из них больше и почему?
16. Покажите, что холодильный коэффициент (ХК)  $\varepsilon$  холодильника и КПД  $\eta$  тепловой машины, работающих по взаимно обратным циклам, связаны соотношением  $\varepsilon = 1/\eta - 1$ .
17. В каких интервалах изменяются ХК  $\varepsilon$  и КПД  $\eta$ ? Может ли тепловая машина с высоким КПД, если ее цикл обратить, работать как хороший холодильник, и наоборот?
18. Дайте термодинамическое и статистическое (формула Больцмана) определение энтропии. Как можно вычислить ее изменение в произвольном политропном процессе?
19. Какие формулировки второго начала термодинамики вам известны? Дайте энтропийную формулировку второго начала.



## Работа № 10. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

*Цель работы:* изучение явлений переноса в газе. Определение коэффициентов диффузии и вязкости воздуха, длины свободного пробега и эффективного диаметра его молекул.

*Приборы и принадлежности:* прибор для измерения объемной скорости истечения газа из трубки.

### Исследуемые закономерности

*Явления переноса.* Хаотическое движение молекул в газе приводит к тому, что в объеме газа поддерживается равновесное состояние, которое характеризуется постоянством его параметров состояния и концентрации молекул во всем объеме.

При нарушении равновесия в газе хаотическое движение молекул приводит к возникновению макроскопических потоков, стремящихся восстановить нарушенное равновесное состояние. Явления, возникающие при протекании этих процессов, называются явлениями переноса.

К явлениям переноса относят диффузию, внутреннее трение (вязкость), теплопроводность. В данной работе исследуются первые два явления.

*Внутреннее трение* – это явление, обусловленное переносом импульса молекул. Пусть при течении газа его слои движутся параллельно друг другу в направлении оси  $x$  с различной скоростью  $v_x(z)$  (рис. 10.1, *а*). Тогда в направлении, перпендикулярном

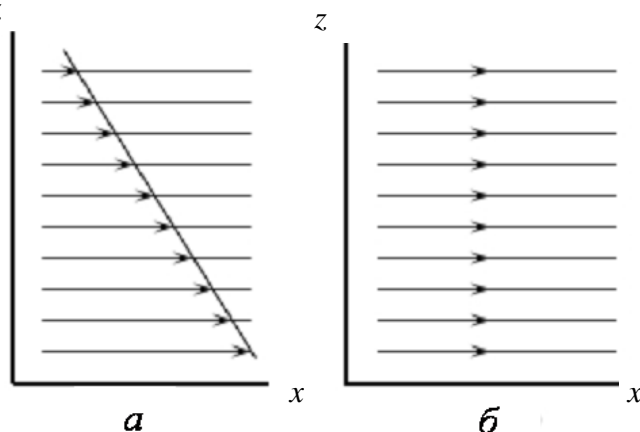


Рис. 10.1.

скорости течения газа, будет происходить перенос импульса от молекул, находящихся в слоях, движущихся с большей скоростью, к молекулам, находящимся в слоях, движущихся с меньшей скоростью. Это проявляется как трение, возникающее между слоями газа. В результате скорости движения

слоев газа выравниваются (рис. 10.1, б). Сила трения, возникающая между слоями газа, определяется как

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dz} S,$$

где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения (вязкости);  $v$  – скорость отдельных слоев газа;  $dv/dz$  – градиент скорости слоев газа в направлении, перпендикулярном к поверхности, разделяющей слои (в направлении оси  $z$  перпендикулярной скорости слоев  $v$ );  $S$  – площадь соприкасающихся слоев.

*Течение газа в узкой цилиндрической трубке.* Пусть газ течет в трубке с радиусом  $a$  и длиной  $l$  ( $l \gg a$ ) под действием разности давлений  $\Delta p$  на концах трубки (рис. 10.2).

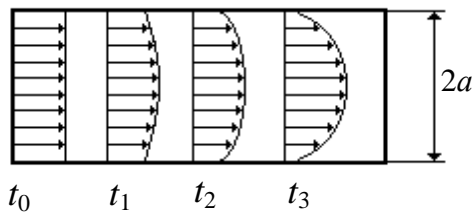


Рис. 10.2.

В установившемся режиме ( $t > t_3$ ) изменение скорости течения газа по сечению трубки описывается параболической зависимостью

$$v_x(r) = 2\bar{v}_x \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

где  $r$  – расстояние, отсчитываемое от оси трубки,  $\bar{v}_x$  – средняя по сечению скорость течения газа (ось  $x$  направлена по направлению скорости слоев газа). Вблизи стенок трубки при  $r = a$  градиент скорости равен  $\frac{dv_x}{dr} = \frac{4\bar{v}_x}{a}$ .

Учитывая, что сила трения газа о стенки цилиндрической трубки

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{4\bar{v}_x}{a} 2\pi a l, \text{ где } S_{\text{б}} = 2\pi a l \text{ площадь боковой поверхности трубки, уравновешивает внешнюю силу, действующую на газ в трубке, } F = \Delta p \pi a^2,$$

где  $S_{\text{с}} = \pi a^2$  – площадь сечения трубки, получим выражение для средней скорости слоев газа:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta p a^2}{8\eta l}.$$

Это выражение называется формулой Пуазейля. В данной работе измеряется расход газа  $Q = \Delta V / \Delta t$ , определяемый как объем  $\Delta V$  газа, вытекающий из трубки за некоторый промежуток времени  $\Delta t$ . Расход газа связан со средней скоростью  $\bar{v}_x$  соотношением  $Q = \pi a^2 \bar{v}_x$ , так что средняя скорость слоев газа по сечению трубки

$$\bar{v}_x = \Delta V / (\Delta t \pi a^2).$$

Приравнявая полученные выражения для  $\bar{v}_x$ , получаем формулу для расчета коэффициента вязкости газа:

$$\eta = \frac{\pi a^4}{8l} \frac{\Delta p \Delta t}{\Delta V}.$$

*Диффузия* – это явление, обусловленное переносом массы молекул. Если различные области занимаемого газом объема различаются концентрацией молекул, то в газе возникают макроскопические потоки молекул, стремящиеся выровнять их концентрацию. Процесс диффузии описывается законом Фика:

$$m = -DS \, d\rho/dz,$$

где  $m$  – масса газа, переносимая через площадь поверхности  $S$  в единицу времени;  $D$  – коэффициент диффузии;  $d\rho/dz$  – градиент плотности газа в направлении переноса массы газа.

*Молекулярно-кинетические соотношения.* Кинетические коэффициенты  $D$  и  $\eta$

зависят от средней скорости теплового движения молекул  $\bar{u} = (8RT/\pi\mu)^{1/2}$  и средней длины свободного пробега  $\lambda = (\sqrt{2}\pi d^2 n)^{-1}$  молекул

$$D = \frac{1}{3} \bar{u} \lambda; \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{u} \lambda; \quad \eta = D\rho.$$

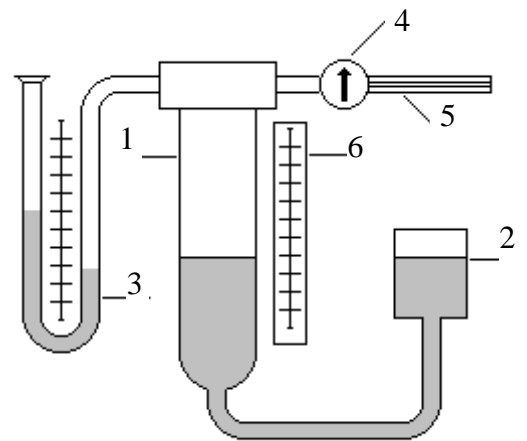


Рис. 10.3.

В формулах используются следующие обозначения:  $T$  – температура газа;  $R = 8.31$  Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная;  $\rho$  – плотность газа;  $\mu$  – его молярная масса;  $d$  – газокинетический или эффективный диаметр молекул;  $n$  – концентрация молекул газа ( $n = \rho N_A / \mu$ ,  $N_A$  – число Авогадро).

**Метод измерений.** Прибор для измерения объемной скорости течения газа  $Q = \Delta V / \Delta t$  (рис. 10.3) состоит из сосуда 1 с исследуемым газом и сосуда 2, заполненного водой и присоединенного к сосуду 1 гибкой трубкой. Давление в сосуде 1 регулируется перемещением по вертикали открытого сосуда 2 и измеряется U-образным манометром 3 (1 мм вод. ст.  $\approx 10$  Па). Сосуд 1 сообщается с атмосферой через кран 4 и узкую трубку 5. Положение уровня жидкости и изменение объема газа в сосуде 1 определяются по шкале 6.

### **Указания по подготовке к работе**

Занесите в бланк Протокола Таблицу 10.1 для записи однократно измеряемых в опыте величин и Таблицу 10.2 по определению вязкости  $\eta$  воздуха.

### **Указания по проведению наблюдений**

1. Запишите в Таблицу 10.1 протокола наблюдений с панели установки диаметр  $2a$  и длину  $l$  капилляра, а по термометру и барометру температуру  $T$  и давление  $p$  воздуха в лаборатории.

Таблица 10.1.

$2a$ , мм	$l$ , см	$t_1$ , °C	$T_1$ , К	$p$ , Па

Таблица 10.2.

	1	...	5
$\Delta p$			
$n_{0i}$			
$n_i$			
$\Delta t_i$			

2. Соедините измерительную установку с атмосферой, открыв кран 4 (см. рис. 10.3). Опустите сосуд 2 в нижнее положение. Когда жидкость в обоих коленях манометра 3 установится на одном уровне, закройте кран.
3. Поднимите сосуд 2 на такую высоту, чтобы манометр 3 показывал раз-

- ность давлений  $\Delta p \approx 500$  Па (1 мм вод. ст.  $\approx 10$  Па). Запишите в Таблицу 10.2 значение  $\Delta p$  и положение  $n_0$  уровня жидкости в сосуде 1, определенное по шкале 6.
- Откройте кран 4, одновременно включив секундомер, и, поднимая сосуд 2, поддерживайте постоянное значение разности давлений  $\Delta p$  по манометру 3.
  - Когда объем жидкости в сосуде 1 увеличится на  $(5-10)$  см<sup>3</sup>, закройте кран и остановите секундомер. Запишите в Таблицу 10.2 конечное положение  $n_l$  уровня жидкости в сосуде 1 и время  $\Delta t$  течения газа по секундомеру. Разность между значениями положений уровней жидкости численно равна объему  $\Delta V$  [см<sup>3</sup>] протекающего газа ( $\Delta V = n_l - n_0$ ).
  - Повторите измерения (пп. 2-5) 5 раз при различных значениях разности давлений  $\Delta p$ , изменяя ее с выбранным шагом 50–100 Па по указанию преподавателя.

### *Задание по обработке результатов эксперимента*

- Используя Таблицу 10.2, найдите вязкость воздуха  $\eta = \bar{\eta} \pm \Delta\eta$  выборочным методом с  $P = 95\%$ .
- Учитывая, что плотность воздуха при нормальных условиях  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>, вычислите методом переноса погрешностей значение коэффициента диффузии воздуха  $D = \bar{D} \pm \Delta D$  с  $P = 95\%$ .
- По известному из опыта значению вязкости  $\bar{\eta}$  воздуха оцените среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  его молекул и газокинетический диаметр  $d$  молекул воздуха (молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль).
- Рассчитайте теплопроводность воздуха  $\kappa = c_V \eta$ , где  $c_V = iR/2\mu$  – его удельная теплоемкость ( $i=5$ ) и сопоставьте ее с табличным значением  $\kappa = 24$  мВт/(м · К).
- Проверьте выполнение принятых в работе допущений о стационарности течения газа и отсутствия турбулентности, т. е. завихрений при течении

газа. Число Рейнольдса вычисляется по формуле  $Re = 2a\bar{v}_x/D$ . Для ламинарного (гладкого, без завихрений) течения оно должно быть менее 2300. Стационарность течения газа в трубке можно проверить, рассчитав длину  $l_{ст}$ , на которой происходит установление стационарного распределения скорости газа по сечению трубки,  $l_{ст} \approx 0,1 a Re$ .

### ***Контрольные вопросы***

1. В чем сущность явлений переноса, при каких условиях они возникают?
2. Дайте определения коэффициента вязкости, коэффициента диффузии. Как они взаимосвязаны друг с другом? Как взаимосвязаны между собой плотность вещества и концентрация частиц в нем?
3. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
4. Дайте определения ламинарного и турбулентного течений газа.
5. Каким образом определяется тип течения газа в данной работе?
6. Дайте определение длины свободного пробега молекул газа. Как ее можно рассчитать?
7. Как вычисляются средняя, среднеквадратическая и наиболее вероятная скорости молекул газа? Каков их физический (статистический) смысл?
8. Напишите модификации уравнения Клапейрона, выражающие давление газа через его плотность и концентрацию молекул в нем.
9. Азот вытекает из сосуда через горизонтальную трубку. Длина трубки  $l$ , радиус  $a = 0,01 \cdot N$  (мм). Определите среднюю по сечению трубки скорость течения газа, если величина градиента давления  $\Delta p/l = 10 \cdot k$  (мм рт. ст./см). Вычислите скорость течения газа на расстоянии  $r = a/N$  от оси трубки. Коэффициент внутреннего трения азота  $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5}$  Па·с.
10. Кислород вытекает из сосуда, где он находится под давлением  $p_1 = (1000 + 50 \cdot N)$  мм рт. ст. через капилляр радиуса  $a = 0,01 \cdot N$  (мм). Определите массу газа вытекающего за 1 секунду через капилляр, если наружное давление

составляет  $p_0 = 760$  мм рт. ст.; температура  $T = 10 \cdot k$  ( $^{\circ}\text{C}$ ); длина трубки  $l = 10$  см; коэффициент внутреннего трения кислорода  $\eta = 1,9 \cdot 10^{-5}$  Па·с.

*Примечание.* В примерах 9 и 10, используются следующие обозначения:  $N$  – номер в группе,  $k$  – номер группы в потоке.

## **Работа № 11. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

*Цель работы:* изучение закономерностей процесса тепловой диффузии и определение значения коэффициента тепловой диффузии исследуемого материала.

*Приборы и принадлежности:* установка для измерения температурного поля, создаваемого в среде тепловым источником.

### ***Исследуемые закономерности***

*Уравнение теплопроводности.* Теплопроводность характеризует диффузию тепла в среде. Перенос энергии теплового движения в газах осуществляется через столкновения молекул, в твердых телах – посредством передачи энергии колебаний кристаллической решетки. В обоих случаях процесс переноса теплоты описывается *уравнением диффузии Фика*:

$$\mathbf{j} = -D_T \text{grad } u,$$

где  $\mathbf{j}$  – плотность теплового потока;  $u$  – объемная плотность внутренней энергии среды;  $D_T$  – коэффициент тепловой диффузии. Учитывая, что объемная плотность внутренней энергии связана с температурой среды соотношением  $u = cT$ , где  $c$  – теплоемкость единицы объема среды, можно записать *уравнение теплопроводности Фурье*:

$$\mathbf{j} = -\lambda \text{grad } T,$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\lambda = D_T c$ .

*Температурное поле точечного источника тепла.* Рассмотрим задачу определения температурного поля  $T(x; t)$  в однородной среде. Положим, что температурное поле создается импульсным точечным источником тепла. Рассмотрим распространение тепла вдоль однородного бесконечного стержня, расположенного вдоль оси  $x$ . Начало координат совместим с положением нагревателя, который расположен перпендикулярно оси.

Пусть в тонком поперечном слое при  $x = 0$  и  $t = 0$  мгновенно выделилось количество теплоты  $Q_0$ . Выделившееся тепло диффундирует вдоль оси  $x$ .

Распределение тепла вдоль стержня в любой момент времени соответствует нормальному закону Гаусса:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right),$$

где  $P(x)$  – вероятность того, что к некоторому моменту времени порция теплоты будет иметь координату  $x$ ;  $\sigma$  – среднеквадратичная ширина распределения. Тогда распределение линейной плотности тепла вдоль стержня равно:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{Q_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right).$$

Разделим обе части этого равенства на произведение  $(cS)$ , где  $c$  – теплоемкость единицы объема стержня,  $S$  – площадь его поперечного сечения:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} \frac{1}{cS} = \frac{Q_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{cS} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right).$$

Левая часть данного выражения есть приращение температуры относительно исходной. Она равна приращению температуры  $\Delta T(x; t)$  в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$  по отношению к температуре в момент времени  $t = 0$ :

$$\Delta T(x; t) = T(x; t) - T(x; 0).$$

Тогда искомое распределение температуры вдоль стержня имеет вид

$$\Delta T(x; t) = T(0; t) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right), \quad (1)$$

где  $T(0; t)$  – температура стержня к моменту времени  $t$  в точке среды с координатой  $x = 0$ ;  $\sigma$  – среднеквадратичная ширина распределения температуры по координате  $x$ . Кривые распределения температуры по координате для двух моментов времени показаны на рис. 11.1.

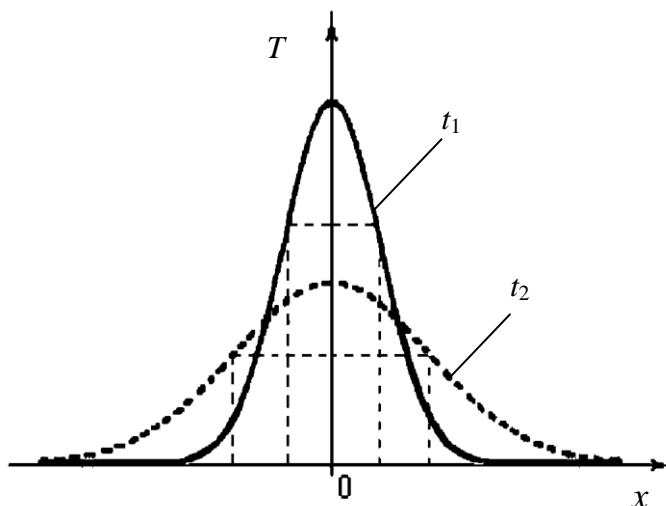


Рис. 11.1

двух моментов времени показаны на рис. 11.1.

С увеличением времени параметр  $\sigma$  увеличивается, при этом температура  $T(0; t)$ , соответствующая максимуму распределения, уменьшается. Нерав-



новесное состояние неравномерно нагретого стержня релаксирует к равновесному состоянию с одинаковой температурой во всех точках стержня. Зависимость  $\sigma$  от времени можно представить в следующем виде:

$$\sigma(t) = \sqrt{2D_T t}. \quad (2)$$

Формула (2) аналогична соотношению Смолуховского – Эйнштейна для среднеквадратичного смещения частицы, совершающей броуновские блуждания.

Задача работы – сверить выводы теории теплопроводности в диэлектриках с экспериментом и определить значение коэффициента тепловой диффузии для исследуемого материала.

Для этой цели зависимость (1), используя операцию логарифмирования, можно линеаризовать и привести к виду  $Y = aX + b$ , где  $Y = \ln \Delta T(x, t)$ ,  $X = x^2$ ,  $a = -1/(2\sigma^2)$ ,  $b = \ln T(0, t)$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  в этой линейной зависимости могут быть найдены методом наименьших квадратов (МНК).

Для проверки закона  $\sigma(t) = \sqrt{2D_T t}$  запишем его в виде

$$\sigma = \sigma(t) = At^\alpha, \quad (3)$$

где  $A = \sqrt{2D_T}$ . Эту формулу также можно линеаризовать, используя операцию логарифмирования. В результате придем к зависимости  $\tilde{Y} = \alpha\tilde{X} + \beta$ , где  $\tilde{Y} = \ln \sigma$ ,  $\tilde{X} = \ln t$ ,  $\beta = \ln A$ , коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в которой также могут быть найдены по МНК.

По найденному значению коэффициента  $\bar{\beta}$  можно найти значение коэффициента  $A = e^{\bar{\beta}}$ , а затем значение коэффициента тепловой диффузии,  $\bar{D}_T = A^2/2 = e^{2\bar{\beta}}/2$ .

Если полученное значение  $\bar{\alpha}$  близко к  $1/2$ , то закон  $\sigma(t) \sim \sqrt{t}$  в данном опыте выполняется. Степень отличия  $\bar{\alpha}$  от  $1/2$  может служить мерой невыполнения теоретических допущений в данном эксперименте.

*Метод измерений.* В работе исследуется нестационарное распределение температуры в среде после кратковременного нагревания среды в некотором малом объеме. Экспериментальная установка содержит электронагревательный элемент, имеющий форму пластины, и термометры, находящиеся на различных расстояниях от нагревателя. Пространство между нагревателем и

термометрами заполнено кварцевым песком. Удельная теплоемкость песка  $1.3 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К). Геометрические размеры установки подобраны таким образом, что температурное поле вблизи нагревателя можно считать изменяющимся только вдоль одной координаты  $x$ . Направление оси  $x$  перпендикулярно плоскости пластины.

### ***Указания по подготовке к работе***

Занесите в бланк Протокола Таблицы 11.1 и 11.2 по определению измеряемых величин.

Таблица 11.1.

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$							

Таблица 11.2.

$t$ , мин	$T_1$ , °С	$T_2$ , °С	$T_3$ , °С	$T_4$ , °С	$T_5$ , °С	$T_6$ , °С	$T_7$ , °С
0							
5							
...							

### ***Указания по выполнению наблюдений***

1. Запишите координаты  $x_i$  термометров в Таблицу 11.1.
2. Запишите начальные показания термометров  $T(x; 0)$ .
3. Включите нагреватель, удерживая нажатой кнопку включения на панели установки в течение 5 минут.
4. Выключите нагреватель и регистрируйте показания термометров  $T(x; t)$  через интервалы времени  $\Delta t = 5$  мин. Количество измерений 6–8. Результаты наблюдений занесите в Таблицу 11.2.

### ***Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Вычислите приращение температуры среды относительно исходной температуры  $\Delta T(x; t) = T(x; t) - T(x; 0)$  для каждого момента времени  $t$  в точках с координатами термометров  $x$ .
2. Постройте графики распределения приращения температуры в координатах  $(x, T)$  для каждого значения времени  $t_j$ .
3. Введите обозначения  $X_i = x_i^2$  и  $Y_{ij} = \ln(\Delta T(x_i; t_j))$ . Используя МНК, найдите по наборам экспериментальных точек  $(X_i, Y_{i1}), (X_i, Y_{i2}), \dots$  коэффициенты  $(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots$  линейных зависимостей  $Y_1 = a_1 X + b_1$ ,

$Y_2 = a_2 X + b_2$ , ... прологарифмированного уравнения (1) для каждого момента времени  $t_j$ .

4. Постройте графики распределения температуры в приведенных координатах  $(X, Y)$  для каждого значения времени  $t_j$ . Для этого нанесите на координатную плоскость точки  $(X_i, Y_{i1}), (X_i, Y_{i2}), \dots$  и проведите прямые МНК  $Y_j = a_j X + b_j$  через точки  $(\bar{X}, \bar{Y}_j)$  и  $(0, \bar{b}_j)$ .
5. Введите обозначения  $\tilde{Y}_j = \ln \sigma_j = -\frac{1}{2} \ln(-2a_j)$ ,  $\tilde{X}_j = \ln t_j$ . Используя МНК, найдите по набору  $(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j)$  коэффициенты  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  линейной зависимости  $\tilde{Y} = \alpha \tilde{X} + \beta$  прологарифмированного уравнения (3).
6. Сопоставьте найденное по МНК значение  $\bar{\alpha}$  со значением  $1/2$  и сделайте заключение о соответствии теории и эксперимента.
7. Используя определенное по МНК значение коэффициента  $\bar{\beta}$ , найдите значение коэффициента диффузии  $\bar{D}_T$ .

### ***Контрольные вопросы***

1. При каком условии в твердом теле возникает поток тепла?
2. Запишите уравнение теплопроводности для одномерного случая, например, распространения тепла вдоль оси  $x$ .
3. Что означает знак «минус» в уравнении теплопроводности или диффузии?
4. Назовите размерность следующих величин: плотность теплового потока, поток тепла.
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Нарисуйте распределение Гаусса и отметьте на графике среднеквадратичную ширину данного распределения.
7. Поясните, почему теплопроводность твердых тел во много раз больше, чем теплопроводность газов?
8. В каких координатах зависимость  $y = ae^x$  будет линейной?
9. Поясните способ построения линейных зависимостей согласно МНК.

## СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Таблица 12.1. Значения коэффициентов Стьюдента  $t_{P,N}$  в зависимости от числа наблюдений  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$t_{P,N}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.0

Таблица 12.2. Коэффициенты  $\beta_{P,N}$  для расчета доверительной погрешности по размаху выборки  $\Delta x = \beta_{P,N} R$  для числа наблюдений  $N$  доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_{P,N}$	1.30	0.72	0.51	0.40	0.33	0.29	0.25	0.23	0.21	0.19

Таблица 12.3. Коэффициенты  $u_{P,N}$  для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки  $N$  для доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,N}$	0.94	0.76	0.64	0.51	0.41	0.34	0.30	0.26	0.20

Таблица 12.4. Коэффициенты  $v_{P,N}$  для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{P,N}$	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29

Таблица 12.5. Значения вязкости глицерина для разных температур.

$t, ^\circ\text{C}$	0	5	10	20	30	40	50
$\eta, \text{Па}\cdot\text{с}$	12.1	7.05	3.95	1.48	0.60	0.33	0.18

Энергия активации глицерина составляет  $1.115 \cdot 10^{-19}$  Дж,  
 $C = 1.574 \cdot 10^{-12}$  Па $\cdot$ с.

Таблица 12.6. Значения вязкости и плотности веществ при  $t = 20^\circ\text{C}$ .

Вещество	Воздух	Вода	Машинное масло лег- кое	Машинное масло тя- желое	Касторовое масло	Глицериновое масло	Глицерин
$\eta, \text{Па}\cdot\text{с}$	$17 \cdot 10^{-6}$	0.001	0.1	0.65	0.99	0.26	1.48
$\rho, \text{г}/\text{см}^3$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	1.0	0.88	0.94	0.96	1.1	1.26

Таблица 12.7. Значения коэффициентов  $\lambda$  и  $D_T$  для некоторых твердых веществ.

Вещество	$D_T$ , см <sup>2</sup> /с	$\lambda$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К)
Алюминий	1	200
Лед	0,01	2
Песок морской	0,003	0,3

**Алгоритм обработки данных по методу наименьших квадратов  
для линейной зависимости вида  $Y = aX + b$**

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum Y_i, \quad \bar{a} = \frac{\sum X_i Y_i - N \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - N \bar{X}^2}, \quad \bar{b} = \bar{Y} - \bar{a} \bar{X},$$

$$S_a^2 = \frac{1}{N-2} \left( \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} - \bar{a}^2 \right), \quad S_b^2 = S_a^2 \left( \bar{X}^2 + \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^2 \right),$$

$$S_a^- = \sqrt{S_a^2}, \quad S_b^- = \sqrt{S_b^2},$$

$$\Delta a = t_{P, N-1} S_a^-, \quad \Delta b = t_{P, N-1} S_b^-, \quad \theta_x = \frac{1}{N} \sum \theta_{xi}, \quad \theta_y = \frac{1}{N} \sum \theta_{yi}, \quad \theta_a = 0,$$

$$\theta_b = |\bar{a}| \theta_x + \theta_y, \quad \bar{\Delta a} = \Delta a, \quad \bar{\Delta b} = \Delta b + \theta_b.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И. В. Курс общей физики: В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2006.
2. Морозов В. В., Соботковский Б. Е., Шейнман И. Л. Методы обработки результатов физического эксперимента: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. – 4-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. - 560 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – 5-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 544 с.