Студент: Рыжиков Иван
Группа: 2381
Вариант: 18
Дата: 24 мая 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №3

Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ имеет равномерное распределение в области D:

$$D = \begin{pmatrix} 4x - 2y \geqslant 2, \\ x \leqslant 3, y \geqslant 1 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 2\xi^4 - 2$, $\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$, $\mu = -8\xi + 4\eta$.

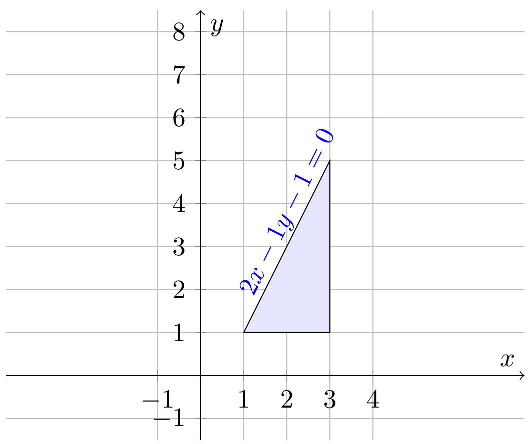

Рис. 1 — Область D

Задание 1. *Найти $p_{\xi,\eta}(x,y)$, функции и плотности распределения компонент. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Равномерное распределение задаётся следующей плотностью:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} C, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдём константу C:

$$1 = \iint\limits_D p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_1^{2x-1} C\,dy = 4C,$$

$$C = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, плотность распределения равна:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } x \in [1,3]\,, y \in [1, 2x-1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } y \in [1,5]\,, x \in \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{2}, 3\right] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдём плотность распределения компонент:

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \int\limits_{1}^{5} \frac{1}{4}\,dy = \frac{x}{2} - \frac{1}{2},$$
$$p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{4}\,dx = \frac{5}{8} - \frac{y}{8}.$$

Итого,

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & x \in [1,3]\,, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$
$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{5}{8} - \frac{y}{8}, & y \in [1,5]\,, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Найдём функции распределения компонент:

$$F_\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & x \in [1,3]\,, \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$
$$F_\eta = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\eta(t)\,dt = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ -\frac{y^2}{16} + \frac{5y}{8} - \frac{9}{16}, & y \in [1,5]\,, \\ 1, & y > 5. \end{cases}$$

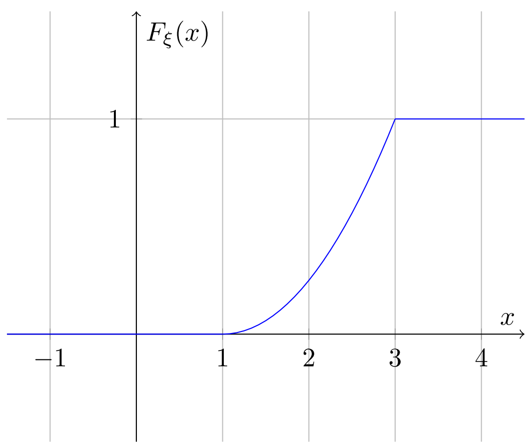

Рис. 2 — График функции распределения $F_\xi(x)$

Проверка компонент на независимость:
Для точки $(x,y) \in D$ плотность распределения компонент равна

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{4},$$
$$p_{\xi,\eta}(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) = \left(\frac{5}{8} - \frac{y}{8}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{(x-1)\,(y-5)}{16}.$$

Таким образом, компоненты не являются независимыми.

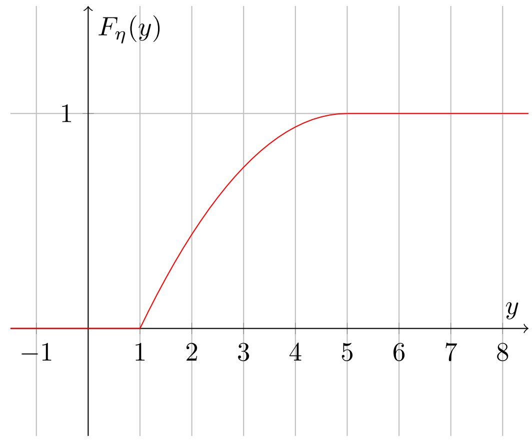

Рис. 3 — График функции распределения $F_\eta(y)$

Задание 2. *Найти распределения случайных величин ζ и ν. Вычислить $\mathbb{E}\zeta$, $\mathbb{D}\zeta$, $\mathbb{E}\nu$ и $\mathbb{D}\nu$. Построить графики функций распределений $F_\zeta(z)$ и $F_\nu(n)$.*

Решение. $\zeta = 2\xi^4 - 2$, $\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$.

Найдём распределение случайной величины ζ:

Носитель случайной величины ζ:

$$\operatorname{supp}\zeta = \left\{2x^4 - 2 \;\middle|\; x \in [1,3]\right\} = [0, 160]$$

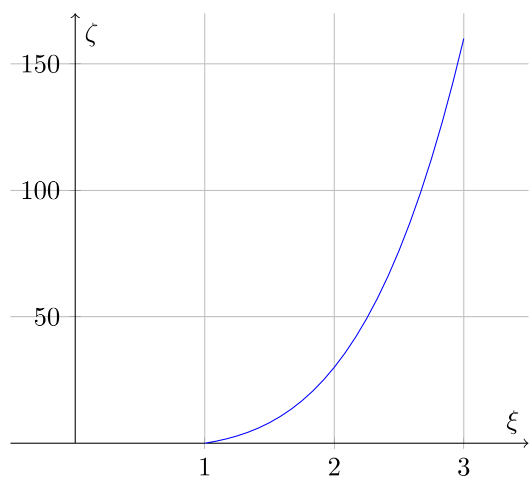

Рис. 4 — График величины ζ в зависимости от ξ

1) $\zeta \in [0, 160] \Rightarrow \xi \in [1, 3]$

$$A = [1,3] \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^4 - 2, \\ g^{-1}(z) = \sqrt[4]{\frac{z}{2} + 1}. \end{cases}$$

$$p_\zeta = |(g^{-1}(z))'| \cdot p_\xi(g^{-1}(z)) = \frac{1}{8\left(\frac{z}{2}+1\right)^{\frac{3}{4}}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{z}{2}+1}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{z+2} - 2^{\frac{3}{4}}}{16\,(z+2)^{\frac{3}{4}}}, z \in [0, 160]\,.$$

Итого, плотность распределения случайной величины ζ:

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{z+2} - 2^{\frac{3}{4}}}{16(z+2)^{\frac{3}{4}}}, & z \in [0, 160]\,, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мат. ожидание и дисперсия случайной величины ζ:

$$\mathbb{E}\zeta = \int\limits_0^{160} z \cdot p_\zeta(z)\, dz = \int\limits_0^{160} z \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{z+2} - 2^{\frac{3}{4}}}{16\,(z+2)^{\frac{3}{4}}}\, dz = \frac{1064}{15},$$

$$\mathbb{D}\zeta = \mathbb{E}\zeta^2 - (\mathbb{E}\zeta)^2 = \int\limits_0^{160} z^2 \cdot p_\zeta(z)\, dz - (\mathbb{E}\zeta)^2 = \frac{321664}{45} - \left(\frac{1064}{15}\right)^2 = \frac{476224}{225}.$$

По плотности вычислим функцию распределения ζ:

$$F_\zeta(z) = \int\limits_0^{z} p_\zeta(z)\, dz = \int\limits_0^{z} \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{z+2} - 2^{\frac{3}{4}}}{16\,(z+2)^{\frac{3}{4}}}\, dz = \frac{\sqrt{2}z + 2\sqrt{z+2}\left(-2^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{z+2} + 1\right) + 2\sqrt{2}}{8\sqrt{z+2}} z \in [0, 160]\,.$$

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \le 0 \\ \frac{\sqrt{2}z + 2\sqrt{z+2}\left(-2^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{z+2} + 1\right) + 2\sqrt{2}}{8\sqrt{z+2}} & \text{for } z \le 160 \wedge z > 0 \\ 1 & \text{for } z > 160 \end{cases}$$

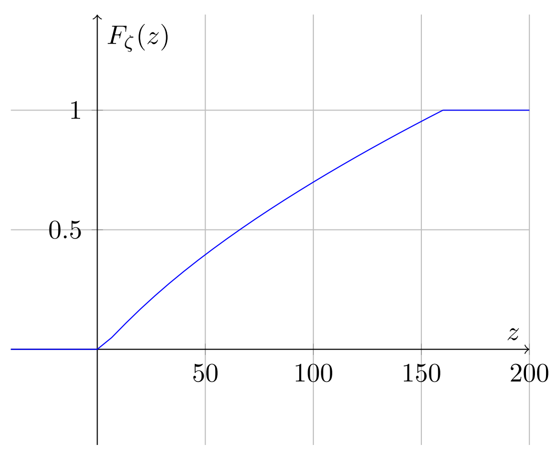

Рис. 5 — График функции распределения $F_\zeta(z)$

Найдём распределение случайной величины ν:

Носитель случайной величины ν:

$$\operatorname{supp}\nu = \{\lfloor 5y \rfloor \mid y \in [1, 5]\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Величина ν дискретная. Поэтому для каждого значения ν найдём вероятность. Для этого разобьём носитель η на отрезки.

1) $\nu = 1 \Rightarrow \eta \in [1, 2]$

$$A_1 = [1, 2] \Rightarrow p_{\nu\,1} = \int\limits_1^2 p_\eta(y)\, dy = \int\limits_1^2 \frac{5}{8} - \frac{y}{8}\, dy = \frac{7}{16}.$$

2) $\nu = 2 \Rightarrow \eta \in [2, 3]$

$$A_2 = [2, 3] \Rightarrow p_{\nu\,2} = \int\limits_2^3 p_\eta(y)\, dy = \int\limits_2^3 \frac{5}{8} - \frac{y}{8}\, dy = \frac{5}{16}.$$

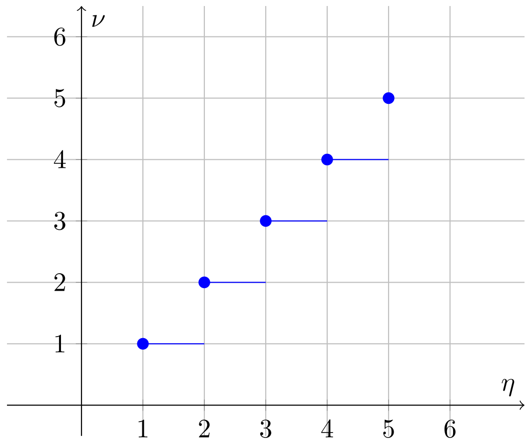

Рис. 6 — График величины ν в зависимости от η

3) $\nu = 3 \Rightarrow \eta \in [3, 4]$

$$A_3 = [3,4] \Rightarrow p_{\nu 3} = \int\limits_3^4 p_\eta(y)\,dy = \int\limits_3^4 \frac{5}{8} - \frac{y}{8}\,dy = \frac{3}{16}.$$

4) $\nu = 4 \Rightarrow \eta \in [4, 5]$

$$A_4 = [4,5] \Rightarrow p_{\nu 4} = \int\limits_4^5 p_\eta(y)\,dy = \int\limits_4^5 \frac{5}{8} - \frac{y}{8}\,dy = \frac{1}{16}.$$

5) $\nu = 5 \Rightarrow \eta \in 5$

$$A_5 = 5 \Rightarrow p_{\nu 5} = \int\limits_5^5 p_\eta(y)\,dy = \int\limits_5^5 \frac{5}{8} - \frac{y}{8}\,dy = 0.$$

Итого, вероятность получить каждое из значений случайной величины ν:

Таблица 1 — Распределение случайной величины ν

ν	1	2	3	4	$\sum$
$\mathbb{P}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

Найдём мат. ожидание и дисперсию случайной величины ν:

$$\mathbb{E}\nu = \sum_{n=1}^{4} n \cdot p_\nu(n) = \frac{15}{8},$$

$$\mathbb{D}\nu = \mathbb{E}\nu^2 - (\mathbb{E}\nu)^2 = \sum_{n=1}^{4} n^2 \cdot p_\nu(n) - (\mathbb{E}\nu)^2 = \frac{35}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{55}{64}.$$

Построим графики функций распределения $F_\nu(n)$:

$$F_\nu(n) = \sum_{x=1}^{n} p_\nu(x)$$

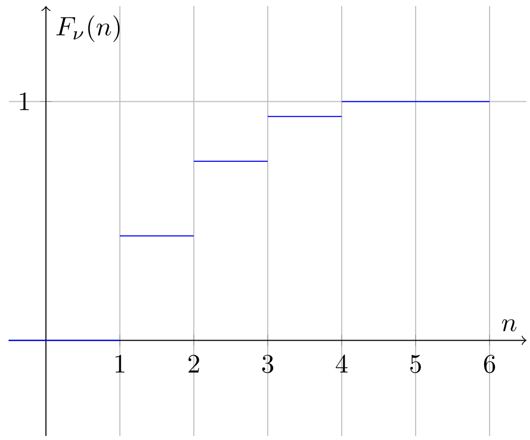

Рис. 7 — График функции распределения $F_\nu(n)$

$$F_\nu(n) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \leq 1 \\ \frac{7}{16} & \text{for } n \leq 2 \wedge n > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{for } n \leq 3 \wedge n > 2 \\ \frac{15}{16} & \text{for } n \leq 4 \wedge n > 3 \\ 1 & \text{for } n > 4 \end{cases}$$

Задание 3. *Вычислить вектор математических ожиданий, построить ковариационную и корреляционную матрицы для вектора* (ξ,η)*. Найти условное распределение* ξ *при условии* η*. Вычислить* $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ *и* $\mathbb{D}(\xi|\eta)$*.*

Решение. Найдем мат. ожидание случайной величины (ξ,η):

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_\xi \, dx = \int\limits_{1}^{3} x \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{3},$$

$$\mathbb{E}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p_\eta \, dy = \int\limits_{1}^{5} y \cdot \left(\frac{5}{8} - \frac{y}{8}\right) dy = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbb{E}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Найдем ковариационную матрицу: Вычислим дисперсии ξ и η:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p_\xi \, dx - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int\limits_{1}^{3} x^2 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx - \frac{7}{3}^2 = \frac{2}{9},$$

$$\mathbb{D}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot p_\eta \, dy = \int\limits_{1}^{5} y^2 \cdot \left(\frac{5}{8} - \frac{y}{8}\right) dy = \frac{8}{9}.$$

Найдём ковариацию ξ и η:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot p_{\xi,\eta}(x,y) \, dy \, dx$$

$$= \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{1}^{2x-1} x \cdot y \cdot \left(\frac{1}{4}\right) dy = \frac{2}{9}.$$

Матрица ковариаций:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Найдем корреляционную матрицу. Для начала вычислим коэффициент корреляции:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}} = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{9}}} = \frac{1}{2}$$

Корреляционная матрица:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем условное распределение ξ при условии η:

$$p_{\xi|\eta=y_0}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}, p_\eta > 0$$

$$p_{\xi|\eta=y_0}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}$$

$$p_{\xi,\eta}(x,y_0) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{for } (x,y_0) \in D, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$p_\eta(y_0) = \begin{cases} \frac{5}{8} - \frac{y_0}{8} & \text{for } y_0 \geq 1 \land y_0 \leq 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$p_{\xi|\eta=y_0}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{y_0-5}, & \text{for } x \in \left[\frac{y_0}{2}+\frac{1}{2}, 3\right], y_0 \in [1,5], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$p_{\xi|\eta}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\eta-5} & \text{for} x \in \left[\frac{\eta}{2}+\frac{1}{2}, 3\right], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Найдем мат. ожидание и дисперсию случайной величины ξ при условии η:

$$\mathbb{E}(\xi|\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_{\xi|\eta}(x)\,dx = \int\limits_{\frac{\eta}{2}+\frac{1}{2}}^{3} x \cdot \left(-\frac{2}{\eta-5}\right)\,dx = \frac{\eta}{4} + \frac{7}{4}$$

$$\mathbb{D}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\xi^2|\eta) - (\mathbb{E}(\xi|\eta))^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p_{\xi|\eta}(x)\,dx - (\mathbb{E}(\xi|\eta))^2$$

$$= \int\limits_{\frac{\eta}{2}+\frac{1}{2}}^{3} x^2 \cdot \left(-\frac{2}{\eta-5}\right)\,dx - \left(\frac{\eta}{4}+\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{\eta^2}{48} - \frac{5\eta}{24} + \frac{25}{48}$$

Задание 4. *Найти распределение μ. Вычислить $\mathbb{E}\mu$ и $\mathbb{D}\mu$. Построить график функции распределения $F_\mu(m)$.*

Решение. $\mu = 4\eta - 8\xi$

Изобразим область D и прямую $-m - 8x + 4y$:

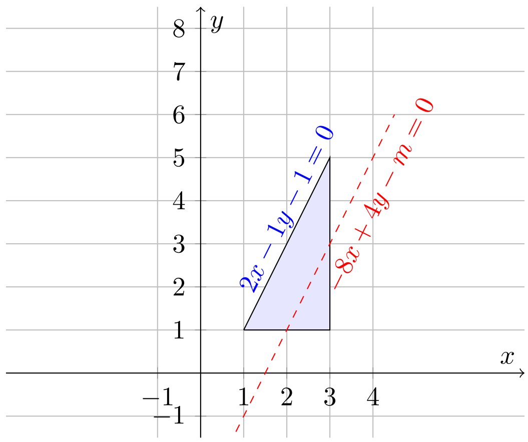

Рис. 8 — Область D и прямая $-8x + 4y - m = 0$

По определению функция распределения случайной величины μ:

$$F_\mu(m) = \mathbb{P}(\mu \le m) = \mathbb{P}(4\eta - 8\xi \le m)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\cdot \mathbb{1}_{\{4\eta-8\xi\le m\}}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}-\frac{m}{8}}^{3} dx \int_{1}^{\frac{m}{4}+2x} \frac{1}{4}\,dy \quad = \frac{m^2}{256} + \frac{5m}{32} + \frac{25}{16}.$$

В точке $(x;y) = (3;1)$ прямая $-8x + 4y - m = 0$ пересекает область D при единственном значении $m = -20$.

$$F_\mu(m) \begin{cases} 0 & \text{for } m \le -20 \\ \frac{m^2}{256} + \frac{5m}{32} + \frac{25}{16} & \text{for } m \le -4 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

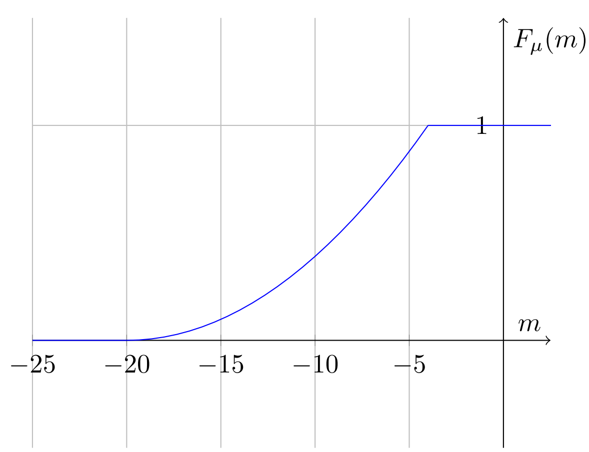

Рис. 9 — График функции распределения $F_\mu(m)$

Найдём плотность распределения случайной величины μ:

$$p_\mu(m) = \frac{dF_\mu(m)}{dm} = \begin{cases} \frac{m}{128} + \frac{5}{32} & \text{for } m \geq -4 \wedge m \leq -4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины μ:

$$\mathbb{E}\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} m \cdot p_\mu(m)\, dm = \int\limits_{-20}^{-4} m \cdot \left(\frac{m}{128} + \frac{5}{32}\right)\, dm = -\frac{28}{3}$$

$$\mathbb{D}\mu = \mathbb{E}\mu^2 - (\mathbb{E}\mu)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} m^2 \cdot p_\mu(m)\, dm - (\mathbb{E}\mu)^2 = \int\limits_{-20}^{-4} m^2 \cdot \left(\frac{m}{128} + \frac{5}{32}\right)\, dm - \left(-\frac{28}{3}\right)^2 = \frac{304}{3} - \left(-\frac{28}{3}\right)^2 = \frac{128}{9}$$