

Теория вероятностей и математическая статистика

Индивидуальное домашнее задание №2

Задание 1. Распределение случайной величины ξ задано таблицей:

k	2	3
p_k	1/2	1/2

Вычислить $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{H}\xi$ (в натах). Вычислить распределение $\eta = |\xi - 1|^{3/2}$. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение. (1) Найдем математическое ожидание случайной величины ξ :

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k k \cdot p_k = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

(2) Найдем дисперсию случайной величины ξ :

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \sum_k k^2 \cdot p_k - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

(3) Найдем энтропию случайной величины ξ :

$$\mathbb{H}\xi = - \sum_k p_k \cdot \ln p_k = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

(4) Найдем распределение случайной величины $\eta = |\xi - 1|^{3/2}$:

Носитель случайной величины $\text{supp } \xi = \{2, 3\}$.

Носитель случайной величины $\text{supp } \eta = \{1, 2\sqrt{2}\}$:

При $k = 2$: $\eta = |2 - 1|^{3/2} = 1^{3/2} = 1$.

При $k = 3$: $\eta = |3 - 1|^{3/2} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$.

Таким образом, распределение случайной величины η задается таблицей:

y	1	$2\sqrt{2}$
p_y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(5) Построим графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$:

Функция распределения $F_\xi(x)$ задается следующим образом:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2], \\ 1/2, & x \in (2, 3], \\ 1, & x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Функция распределения $F_\eta(y)$ задается следующим образом:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 1], \\ 1/2, & y \in (1, 2\sqrt{2}], \\ 1, & y \in (2\sqrt{2}, +\infty). \end{cases}$$

Графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ изображены на рисунках 1 и 2.

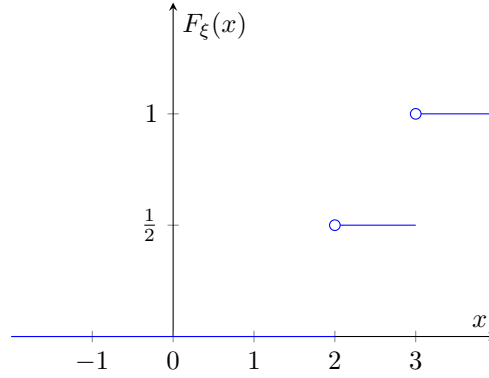


Рис. 1 — График $F_{\xi}(x)$

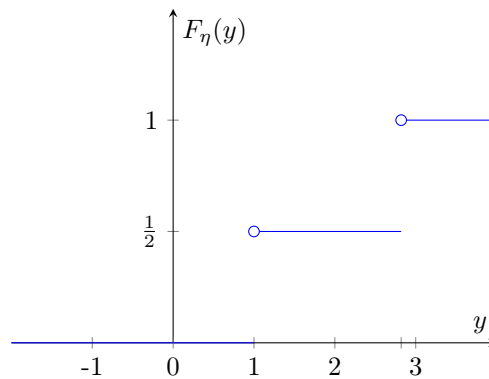


Рис. 2 — График $F_{\eta}(y)$

Задание 2. Дана функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ :

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin(2x), & x \in (0, C], \\ 1, & x > C. \end{cases}$$

Вычислить C , $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{H}\xi$ (в натах). Вычислить распределение $\eta = \sin(3\xi)$. Построить графики функций распределений $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$.

Решение. (1) Найдем константу C :

$$F_{\xi}(C) = 1 \Rightarrow \sin(2C) = 1 \Rightarrow 2C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

(2) Плотность распределения случайной величины ξ :

$$p_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx} = 2 \cos(2x) \cdot \mathbb{1}_{\{0 < x \leq \frac{\pi}{4}\}}.$$

(3) Найдем математическое ожидание случайной величины ξ :

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot 2 \cos(2x) dx = x \cdot \sin(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(4) Найдем дисперсию случайной величины ξ :

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cdot 2 \cos(2x) dx - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{-\pi + 1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}.$$

- (5) Найдем энтропию случайной величины ξ :

$$\mathbb{H}\xi = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \cdot \ln \sin(2x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

- (6) Найдем распределение случайной величины $\eta = \sin(3\xi)$:

Носитель случайной величины $\text{supp } \xi = [0, \frac{\pi}{4}]$.

Носитель случайной величины $\text{supp } \eta = \{0\} \cup \{\sin(3x) \mid x \in (0, \frac{\pi}{4}]\} = [0, 1]$.

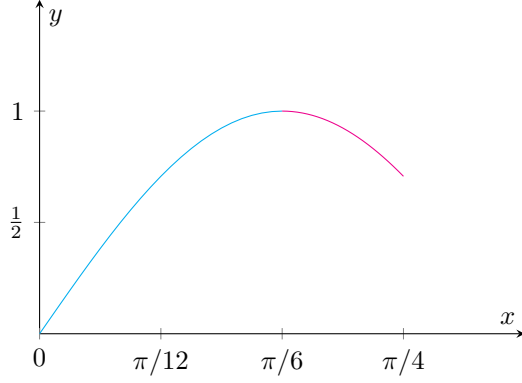


Рис. 3 — $\sin 3x$

Разобьем носитель случайной величины η на два интервала, где функция $\sin 3x$ монотонна: $[0, \frac{\pi}{6}]$ и $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

- (а) При $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, $y \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} g_1(x) = \sin 3x, \\ g_1^{-1}(y) = \frac{1}{3} \arcsin y. \end{cases}$$

- (b) При $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $y \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$:

$$\begin{cases} g_1(x) = \sin 3x, \\ g_1^{-1}(y) = \frac{1}{3} \arcsin y + \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

- (7) Построим графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$:

- (8) Функция распределения $F_\xi(x)$ задается следующим образом:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin(2x), & x \in (0, \frac{\pi}{4}], \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

- (9) Функция распределения $F_\eta(y)$ задается следующим образом:

- (10) Графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ изображены на рисунках 4 и ??.

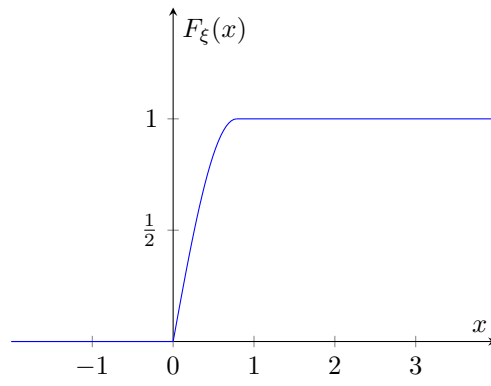


Рис. 4 — График $F_\xi(x)$