Студент: Рыжиков Иван
Группа: 2381
Вариант: 18
Дата: 9 мая 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №3

Случайный вектор $(\xi,\,\eta)$ имеет равномерное распределение в области D:

$$D = \begin{pmatrix} 4x - 2y \geqslant 2, \\ x \leqslant 3, y \geqslant 1 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 2\xi^4 - 2$, $\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$, $\mu = -8\xi + 4\eta$.

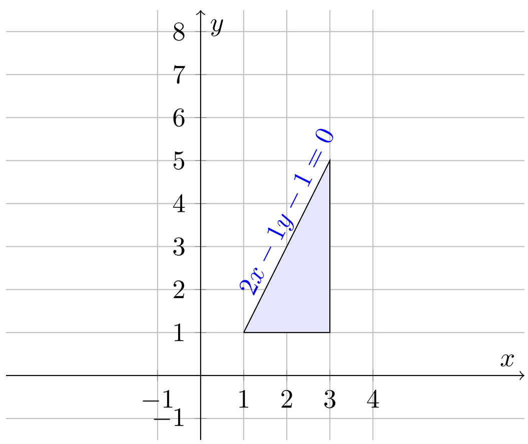

Рис. 1 — Область D

Задание 1. *Найти $p_{\xi,\eta}(x,y)$, функции и плотности распределения компонент. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Равномерное распределение задаётся следующей плотностью:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} C, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдём константу C:

$$1 = \iint\limits_D p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_1^{2x-1} C\,dy = 4C,$$
$$C = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, плотность распределения равна:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } x \in [1,3]\,, y \in [1, 2x-1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } y \in [1,5]\,, x \in \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{2}, 3\right] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдём плотность распределения компонент:

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \int\limits_1^5 \frac{1}{4}(x,y)\,dy = \frac{x}{2} - \frac{1}{2},$$

$$p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = \int\limits_1^3 \frac{1}{4}(x,y)\,dx = \frac{5}{8} - \frac{y}{8}.$$

Найдём функции распределения компонент:

$$F_\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & x \in [1,3], \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$

$$F_\eta = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\eta(t)\,dt = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ -\frac{y^2}{16} + \frac{5y}{8} - \frac{9}{16}, & y \in [1,5], \\ 1, & y > 5. \end{cases}$$

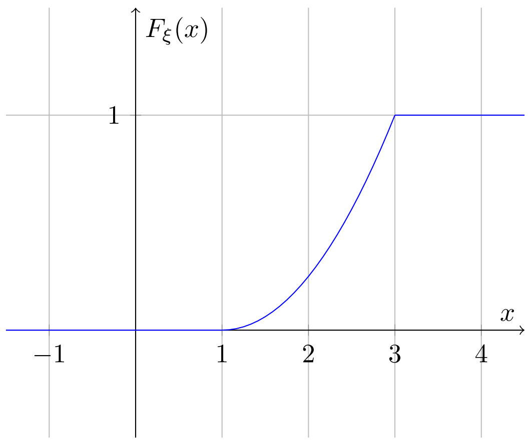

Рис. 2 — График функции распределения $F_\xi(x)$

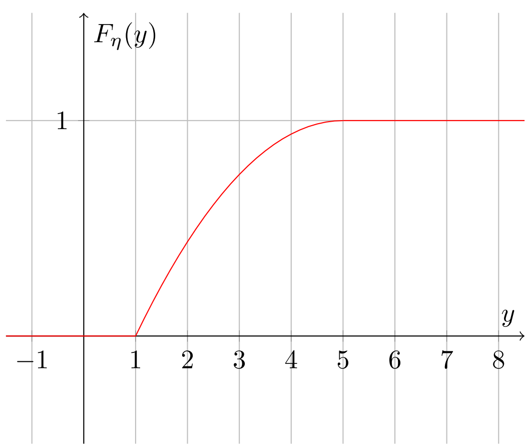

Рис. 3 — График функции распределения $F_\eta(y)$

Проверка компонент на независимость:

Для точки $(x, y) \in D$ плотность распределения компонент равна

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{4},$$

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) = \left(\frac{5}{8} - \frac{y}{8}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{(x-1)(y-5)}{16}.$$

Таким образом, компоненты не являются независимыми.