Студент: Рыжиков Иван
Группа: 2381
Вариант: 18
Дата: 26 апреля 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. *Найти вероятность того, что среди 8 выбранных наудачу цифр будут представлены ровно 2 различных цифры.*

Решение. (Исправлено) Множество всех исходов Ω представляет собой все размещения с повторениями из 10 цифр по 8 позициям. Тогда $\#\Omega = 10^8$. Пусть A — событие, что среди 8 выбранных наудачу цифр будут представлены ровно 2 различных цифры.

Выберем цифру a и зафиксируем, это можно сделать 10 способами, зафиксируем её на первой позиции. Выберем вторую цифру b, которая будет отличаться от первой, это можно сделать 9 способами, но не будем фиксировать её на определенной позиции.

$$a\square\square\square\square\square\square\square$$

Вместо этого расположим произвольным образом цифры a и b на оставшихся 7 позициях. Это можно сделать 2^7 способами.

aaaaaaaa
aaaaaaab
aaaaaaba
aaaaaabb
...
abbbbbba
abbbbbbb

Заметим, что одна из перечисленных последовательностей одна нам не подходит *aaaaaaaa*.

Тогда итоговое число благоприятных исходов равно

$$\#A = 10 \cdot 9 \cdot (2^7 - 1) = 10 \cdot 9 \cdot 127 = 11430.$$

Таким образом, вероятность наступления события A равна

$$\mathbb{P}A = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{11430}{10^8} = 0{,}0001143.$$

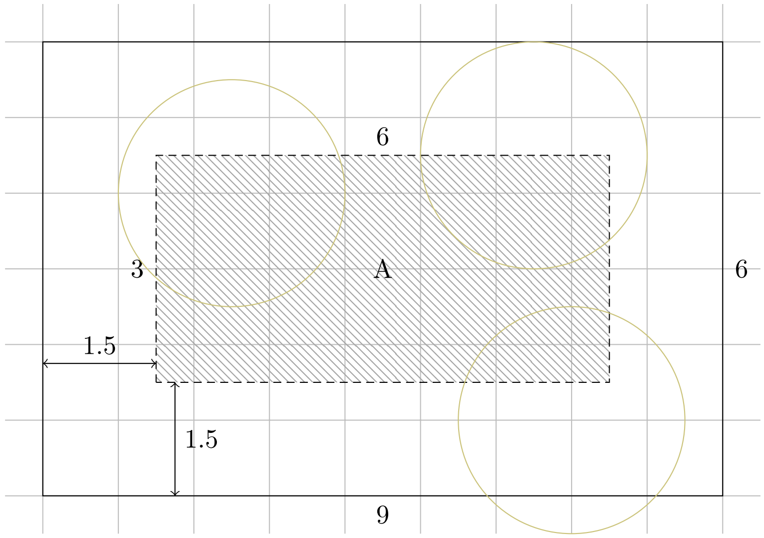
Ответ: $\mathbb{P}A = 0{,}0001143$.

Задание 2. *На плоскости расчерчена прямоугольная сетка. Величина каждой ячейки равна* 9×6 *ед. Определить вероятность того, что монета диаметра 3, наугад брошенная на плоскость, не пересечёт ни одной прямой.*

Решение. Уточним, что значит, наугад брошенная монета. Пусть монета падает равномерно по всей плоскости, т.е. для любых двух областей на плоскости с равной площадью вероятность попадания в них центра монеты одинакова. Тогда решение будет таким.

Так как каждая ячейка сетки имеет размер 9×6 ед., то монета диаметра 3 не пересечёт ни одной прямой, если монета будет находится внутри ячейки не касаясь её границ. Тогда вероятность того, что монета не пересечёт ни одной прямой, равна отношению площади области, где монета не касается края ячейки к площади ячейки:

$$\mathbb{P}A = \frac{6 \cdot 3}{9 \cdot 6} = \frac{1}{3}.$$



Задание 3. *В первой урне находится 18 белых и 10 чёрных шаров; во второй -8 белых и 16 чёрных шаров. Одновременно из первой во вторую урну наугад перекладывают 2 шара; из второй урны в первую перекладывают 3 шара. Затем из второй урны достают шар. Он белый. Определить вероятность того, что в первой урне осталось столько же белых шаров, сколько было вначале.*

Решение. Рассмотрим такую полную группу решений: H_0 — событие, что в первой урне осталось столько же белых шаров, сколько было вначале. $H_{+1б}$ — событие, что в первой урне осталось на один белый шар больше, чем было вначале. $H_{+2б}$ — событие, что в первой урне осталось на два белых шара больше, чем было вначале. $H_{-1б}$, $H_{-2б}$ — события, что в первой урне осталось на один и два белых шара меньше соответственно, чем было вначале.

Событие A — событие, что из второй урны достали белый шар. Тогда вероятность, которую требуется найти — это $\mathbb{P}(H_0|A)$.

i	0	$+1б$	$+2б$	$+3б$	$-1б$	$-2б$	Σ
$\mathbb{P}H_i$	...	...	...	...	...	...	1
$\mathbb{P}(A\|H_i)$	$\frac{8}{23}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{10}{23}$	—
$\mathbb{P}(H_i\|A)$	?	...	...	...	...	...	—

Найдем вероятности каждого из событий H_i:

Рассмотрим эксперемент, когда мы в первый раз достаём шары из корзины, перед тем как переложить их.

Всего элементарных исходов достать 2 шара из первой корзины (28 шаров) и 3 шара из второй корзины (24 шара) равно $\#\Omega_1 = \binom{28}{2} \cdot \binom{24}{3} = 765072$.

Событие H_i обозначает, что мы взяли из второй корзина на i белых шаров больше.

2 корзина \ 1 корзина	чч	чб	бч	бб
ччч	0	$-1б$	$-1б$	$-2б$
ччб	$+1б$	0	0	$-1б$
чбч	$+1б$	0	0	$-1б$
бчч	$+1б$	0	0	$-1б$
чбб	$+2б$	$+1б$	$+1б$	0
бчб	$+2б$	$+1б$	$+1б$	0
ббч	$+2б$	$+1б$	$+1б$	0
ббб	$+3б$	$+2б$	$+2б$	$+1б$

$\#H_0$ = количеству способов выбрать 0 *белых* из I корзины и 0 *белых* из II, плюс 1*б* из I и 1*б* из II, плюс 2*б* из I и 2*б* из II.

$$\begin{aligned}
\#H_0 \quad &= \binom{18}{0}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{0}\cdot\binom{16}{3}+\binom{18}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{16}{2}+\binom{18}{2}\cdot\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{16}{1}=266544.\\
\#H_{+1б} &= \binom{18}{0}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{16}{2}+\binom{18}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{16}{1}+\binom{18}{2}\cdot\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{16}{0}=132408.\\
\#H_{+2б} &= \binom{18}{0}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{16}{1}+\binom{18}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{16}{0}=30240.\\
\#H_{+3б} &= \binom{18}{0}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{16}{0}=2520.\\
\#H_{-1б} &= \binom{18}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{0}\cdot\binom{16}{3}+\binom{18}{2}\cdot\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{16}{2}=247680.\\
\#H_{-2б} &= \binom{18}{2}\cdot\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{0}\cdot\binom{16}{3}=85680.
\end{aligned}$$

Вероятности каждого из этих событий

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}H_0 \quad &= \frac{\#H_0}{\#\Omega_1}=\frac{266544}{765072}\approx 0{,}34839,\\
\mathbb{P}H_{+1б} &= \frac{\#H_{+1б}}{\#\Omega_1}=\frac{132408}{765072}\approx 0{,}17307,\\
\mathbb{P}H_{+2б} &= \frac{\#H_{+2б}}{\#\Omega_1}=\frac{30240}{765072}\approx 0{,}03952,\\
\mathbb{P}H_{+3б} &= \frac{\#H_{+3б}}{\#\Omega_1}=\frac{2520}{765072}\approx 0{,}00329,\\
\mathbb{P}H_{-1б} &= \frac{\#H_{-1б}}{\#\Omega_1}=\frac{247680}{765072}\approx 0{,}32373,\\
\mathbb{P}H_{-2б} &= \frac{\#H_{-2б}}{\#\Omega_1}=\frac{85680}{765072}\approx 0{,}11198,
\end{aligned}$$

Дополним таблицу вероятностями событий H_i:

i	0	+1б	+2б	+3б	−1б	−2б	Σ
$\mathbb{P}H_i$	0.34839	0.17307	0.03952	0.00329	0.32373	0.11198	1
$\mathbb{P}(A\vert H_i)$	$\frac{8}{23}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{10}{23}$	—
$\mathbb{P}(H_i\vert A)$	?	...	...	...	...	...	—

Теперь найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}A &= \sum_i \mathbb{P}H_i\cdot\mathbb{P}(A|H_i)=\\
&= 0{,}34839\cdot\frac{8}{23}+0{,}17307\cdot\frac{7}{23}+0{,}03952\cdot\frac{6}{23}+0{,}00329\cdot\frac{5}{23}+0{,}32373\cdot\frac{9}{23}+0{,}11198\cdot\frac{10}{23}=\\
&= 0{,}36024.
\end{aligned}$$

Тогда искомая вероятность события $H_0|A$ равна по теореме Байеса:

$$\mathbb{P}(H_0|A)=\frac{\mathbb{P}H_0\cdot\mathbb{P}(A|H_0)}{\mathbb{P}A}=\frac{0{,}34839\cdot\frac{8}{23}}{0{,}36024}=0{,}3364.$$

Ответ: $\mathbb{P}(H_0|A)\approx 0{,}3364$.

Задание 4. *Четыре станции независимо друг от друга посылают на спутник сообщение, состоящее из 5-ти символов. Вероятность искажения каждого символа, независимо от другихравна 0.2. В случае получения хотя бы одного неискажённого сообщения спутник посылает ответ, состоящий из 3-х символов. При этом вероятность искажения каждого символа равна 0.5. Определить вероятность того, что хотя бы одна из станций получит полностью ответное сообщение.*

Решение. Пусть B_i — событие, что i-я станция отправит сообщение без ошибок. A_i — событие, что i-я станция получит ответное сообщение без ошибок.

Тогда вероятность того, что i-я станция отправит сообщение без ошибок равна $\mathbb{P}(B_i) = 0.8^5 = 0.32768$.

Вероятность того, что i-я станция получит ответное сообщение без ошибок при условии, что она отправила сообщение без ошибок, равна $\mathbb{P}(A_i|B_i) = 0.5^3 = 0.125$.

Тогда вероятность того, что i-я станция получит ответное сообщение без ошибок равна $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_i|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i) = 0.125 \cdot 0.32768 = 0.04096$.

Тогда вероятность события, что хотя бы одна из станций получит полностью ответное сообщение равна

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu_4 \geq 1) = &\sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} \cdot 0{,}04096^i \cdot (1-0{,}04096)^{4-i} = \\ =&1 - \mathbb{P}(\mu_4 = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0{,}04096^0 \cdot (1-0{,}04096)^4 = 1 - 0{,}95904^4 \approx 0{,}1540\end{aligned}$$

Ответ: $\mathbb{P}(\mu_4 \geq 1) \approx 0{,}1540$.

Задание 5. *Вероятность успеха в схеме Бернулли равна* $1/1500$. *Проводится* 2000 *испытаний. Написать точную формулу и вычислить приближённо вероятность того, что число успехов не превышает* 3.

Решение.

$$p = \frac{1}{1500}$$
$$n = 2000$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mu_{2000} \leq 3\right) = \sum_{k=0}^{3} P_{2000}(k) = &\sum_{k=0}^{3} \binom{2000}{k} p^k \left(1-p\right)^{2000-k} = \\ =& \frac{2000!}{0! \cdot 2000!} \left(\frac{1}{1500}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{1500}\right)^{2000} + \frac{2000!}{1! \cdot 1999!} \left(\frac{1}{1500}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{1500}\right)^{1999} + \\ &+ \frac{2000!}{2! \cdot 1998!} \left(\frac{1}{1500}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{1500}\right)^{1998} + \frac{2000!}{3! \cdot 1997!} \left(\frac{1}{1500}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{1500}\right)^{1997}\end{aligned}$$

Вычислим это значение приближённо. Воспользуемся формулой схемой Пуассона, т.к. $np = 2000 \cdot \frac{1}{1500} = \frac{4}{3} < 10$

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \text{ где } \lambda = np$$

Тогда $\lambda = np = \frac{4}{3}$, и

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mu_{2000} \leq 3\right) \approx &\frac{\lambda^0}{0!} \exp(-\lambda) + \frac{\lambda^1}{1!} \exp(-\lambda) + \frac{\lambda^2}{2!} \exp(-\lambda) + \frac{\lambda^3}{3!} \exp(-\lambda) = \\ =& \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9 \cdot 2} + \frac{64}{27 \cdot 6}\right) \exp\left(-\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}9535.\end{aligned}$$

Ответ: $\mathbb{P}\left(\mu_{2000} \leq 3\right) \approx 0{,}9535$.

Для сравнения найдём значение используя схему Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}\left(k_1 \leq \mu_n \leq k_2\right) \approx \Phi\left(\frac{k2 - np}{\sqrt{np\left(1-p_i\right)}}\right) - \Phi\left(\frac{k1 - np}{\sqrt{np\left(1-p_i\right)}}\right)$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\inf}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$\mathbb{P}\left(\mu_{2000} \leq 3\right) \approx \Phi\left(\frac{3-\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{0-\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3\cdot\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{3\cdot\sqrt{2}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(1{,}17\right) - \Phi\left(-0{,}94\right) = \Phi\left(1{,}17\right) - 1 + \Phi\left(0{,}94\right) \approx 0{,}8790 - 1 + 0{,}8264 = 0{,}7054.$$

Для достоверности посчитаем эту сумму используя ВольфрамАльфа

$$\mathbb{P}\left(\mu_{2000} \leq 3\right) = 0{,}9535.$$

Видно, что формула Пуассона даёт лучшее приближение, чем формула Муавра-Лапласа.