Студент: Рыжиков Иван
Группа: 2381
Вариант: 18
Дата: 26 мая 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика

Индивидуальное домашнее задание №4

Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид:

$$M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 1. *Определить матрицу перехода за 2 шага.*

Решение. Матрицу перехода за два шага можно найти, возводя матрицу перехода в квадрат:

$$M^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 26 & 38 & 18 \\ 27 & 9 & 20 & 18 & 26 \\ 17 & 0 & 19 & 32 & 32 \\ 24 & 0 & 23 & 29 & 24 \\ 20 & 0 & 25 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

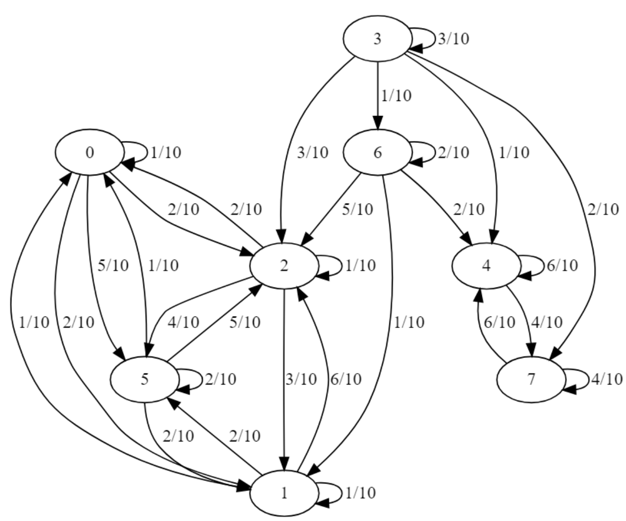

Рис. 1 — Граф состояний цепи Маркова.

Задание 2. *Выделить классы сообщающихся состояний.*

Решение. Состояния i и j называется сообщающиеся (обозначается $i \leftrightarrow j$), если

$$i \to j \text{ и } j \to i.$$

Отношение сообщающихся состояний является отношением эквивалентности. Тогда можно выделить классы эквивалентности, которые называются классами сообщающихся состояний.

В данной цепи Маркова можно выделить два класса сообщающихся состояний:

$$E_1 = \{0, 1, 2, 5\},$$
$$E_2 = \{4, 7\}.$$

Задание 3. *Есть ли невозвратные состояния?*

Решение. Состояние i называется невозвратным, если

$$\exists j : i \to j \implies j \nrightarrow i.$$

Состояние 3 невозвратное, так как $3 \to 4$, но $4 \nrightarrow 3$.

Состояние 4 невозвратное, так как $4 \to 7$, но $7 \nrightarrow 4$.

Все остальные состояния возвратные.

Задание 4. *Найти период в каждом из классов.*

Решение. Период класса сообщающихся состояний E равен

$$d(E) = \gcd\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0, i \in E\}.$$

Для класса $E_1 = \{0, 1, 2, 5\}$ период равен 1, так как для каждой из вершин класса существует путь длины 1 – петля.

Аналогично, для класса $E_2 = \{4, 7\}$ период равен 1, так как для каждой из вершин класса существует петли.

Задание 5. *Вычислить финальные вероятности в каждом классе.*

Решение. Чтобы вычислить финальные состояния нужно решить систему для каждого класс E_j

$$\begin{cases} xP = x, \\ \sum\limits_{i \in E_j} x_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P^\mathsf{T} - E)x^\mathsf{T} = 0, \\ \sum\limits_{i \in E_j} x_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{47x_4}{58} \\ 0 \\ \frac{27x_4}{29} \\ \frac{37x_4}{29} \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$P^\mathsf{T} - E = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Решив, эту систему методом Гаусса получим, что

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{47x_4}{58} \\ 0 \\ \frac{27x_4}{29} \\ \frac{37x_4}{29} \\ x_4 \end{pmatrix}$$