$\underline{M}\ddot{q}(t) + \underline{C}\dot{q}(t) + \underline{K}q(t) = \underline{Q}(t) \rightarrow M = M^T \quad C = C^T \quad K = K^T$ symetric | (22-24)/06/19 Gediz

↳ General form of equations, derived from Lagrangian mechanics.

Influence coefficients

Stiffness inf. coeffs $F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} u_j$ Flexibility inf coeffs $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j$

↳ j. den birim deplasman uygulandığında i.yi sabit tutacak kuvvet deplasmansız

↳ j. den birim kuvvet girildiğinde, i. deki deplasman.

$A = [a_{ij}] \quad K = [k_{ij}]$

$\underline{A} \cdot \underline{K} = I$

$V = \frac{1}{2} u^T K u \rightarrow$ potansiyel enerji quadratik Formda

$T = \frac{1}{2} u^T M u \rightarrow$ kinetik enerji quadratik Formda

$\mathcal{F}$ or $D = \frac{1}{2} q^T C q \rightarrow$ dissipasyon enerjisi

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k}_{\text{Lagrangian Mechanics}}$$

—— MODAL Uzayda ——

$q(t) = U\eta(t) \quad , \quad \ddot{q}(t) = U\ddot{\eta}(t)$

Burda $U \rightarrow$ özvektörler aslında bir (modal uzaya geçişte) transformasyon matrisi olarak da adlandırılır.

$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = Q(t) \rightarrow M'\ddot{\eta}(t) + K'\eta(t) = N(t)$

$N(t) = U^T Q(t)$

$$\eta = \begin{cases} C_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \qquad \ddot{\eta} = [\omega_r] \cdot \eta$$

$M' = U^T M U = M'^T \rightarrow ?$

$K' = U^T K U = K'^T \rightarrow ?$

> mass normalisation ?

*Burdaki M' ve K' matrisleri modal uzaydaki stifness ve mass matrisleridir.

Şimdi öyle bir U bulalım ki bu M' ve K' yı sırasıyla inertially ve elastically uncoupled yapsın. Böylece

Böyle bir U matrisi vardır adı modal matristir ve doğal modları içerir.

$M'_{jj}\ddot{\eta}_j(t) + K'_{jj}\eta_j(t) = N_j(t)$ olsun.

↳ independent equations are refferred as modal equations.

↳ solution of these diffeqs called <u>modal analysis</u>

* Eğer U M' ve K' 'i diagonal yapacak bir matris ise ikisine göre de ortogonaldir

Eğer $\tilde{M}'$ i ben I yaparsam normalizasyon yapmış oluyorum.

ORTHOGONALITY of MODAL VEC.

$u_s^T K u_r = \omega_r^2 u_s^T M u_r$

$u_r^T K u_s = \omega_s^2 u_r^T M u_s$

$> K u_r = \omega_r^2 M u_r \quad K u_s = \omega_s^2 M u_s \leftarrow x = q = U\eta = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}\eta \rightarrow Kx + M\ddot{x} = 0$

$KU\eta [\omega_i]^2 MU\eta = 0$?

↳ * Zaten modal koordinatlara geçiş kütle ve yay matrislerini decoupled hale getirmekti (modal coordinatlar cinsinden) öyleyse modal vektörle çarpınca elime doğal frekans n. mod'un gelmesi de anlaşılır bir durum

Meirovitch'den Özet

MODAL TRANSFORMASYONU ANLAMAK

28-06-2010

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \Sigma k_i & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$M\ddot{x} + Kx = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \\ m_3\ddot{x}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma k_i x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 \\ -k_2x_1 + k_2x_2 \\ -k_3x_1 + k_3x_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 - \Sigma k_i x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_1 - k_2x_2 &= 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + k_3x_1 - k_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

↑ Lagrange'dan geliyor

$M\ddot{x} + Kx = 0 \rightarrow [K - \lambda M]x = 0$

$$\begin{bmatrix} \Sigma k_i & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda m_3 \end{bmatrix} = 0$$

??? işte Burda Eigenvalue problemi yani

$[K - \lambda M]x = 0$

$[M^{-1}K - \lambda I]x = 0$

Bilinen eigenvalue çözümü yapıldıktan sonra,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = |U_1| C_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + |U_2| C_2\cos(\omega_2 t - \varphi_1) + |U_3| C_3\cos(\dots)$$

★ $\underline{M^{-1}K}$ hareketi önem kazanıyor.

$$\begin{matrix} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{matrix} \; |U_1|C_1\tilde{\eta}_1 + |U_2|C_2\tilde{\eta}_2 + |U_3|C_3\tilde{\eta}_3$$

→ genelleştirilmiş koordinatlarda → Öklit uzayında Euclidian space

↓ Modal uzaydan denklemler ve M, K matrisleri M' ve K' şeklinde decoupled olmuştur.

→ Modal uzayda birim vektörler $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3$ dür.
yalnız C'ler η ların içinde mi dışında mı ne farkeder?
Cevap: $\tilde{\eta}_i = \cos(\omega_i t - \varphi_i)$ denirse muallakta kalmamış olur.
$\eta_i = C_i\cos(\omega_i t - \varphi_i)$ " " " "

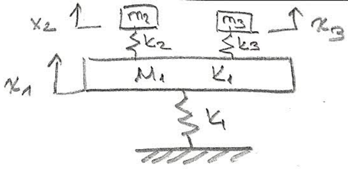
BU DECOUPLING'i GÖRELİM

(1)

$M_1 = 1kg$ $\quad K_1 = 1\,N/m$

$m_2 = 0,04\,kg$ $\quad k_2 = 0,02\,N/m$

$m_3 = 0,06\,kg$ $\quad k_3 = 0,24\,N/m$



Lagrange dan hareket denk → ordan M ve K bulunur

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \Sigma k_n & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$Kx + M\ddot{x} = Q$$

$$Q = 0 \Rightarrow x(K - \lambda M) = 0$$

$$x = U\eta \qquad U\eta(K - [\omega_{i_0}]^2 M) = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0,06 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1,26 & -0,02 & -0,24 \\ -0,02 & 0,02 & 0 \\ -0,24 & 0 & 0,24 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}K - M^{-1}\lambda M = 0$$

$$M^{-1}K - I\lambda = 0$$

$$M \cdot ? = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0,06 \end{bmatrix} \cdot ? = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{100}{6} \end{bmatrix} = M^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 50/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.26 & -0,02 & -0,24 \\ -0,02 & 0,02 & 0 \\ -0,24 & 0 & 0,24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.26 & -0,02 & -0,24 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1}K$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1,26-\lambda & -0,02 & -0,24 \\ -0,5 & 0,5-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow |M^{-1}K - \lambda|_{det} = 0 \Rightarrow (1,26-\lambda)(\lambda^2 - 4,5\lambda + 2) - (-0.02)(0,5\lambda - 2) + (-0,24)(-4\lambda + 2)$$

↓ det

$$= 1.26\lambda^2 - \lambda^3 - 4.5 \cdot 1,26\lambda + 4.5\lambda^2 + \cancel{2.52}$$

$$-2\lambda + 0,01\lambda - 0,04 + 0,96\lambda - 0,48$$

$$= -\lambda^3 + 5.76\lambda^2 + \underbrace{6.64\lambda - 2\lambda}_{4.64} - 2 \quad \cancel{-0,52}$$

$$= -\lambda^3 + 5.76\lambda^2 + 6.7\lambda - 2$$

$$\begin{array}{r} 1,26 \\ \times\ 4,5 \\ \hline 630 \\ +504\ \ \\ \hline 5,670 \\ +\ -0,97 \\ \hline 4.7 \\ +\ +2 \\ \hline 6.7 \end{array}$$

Bu karakteristik denklemi newton metodu ile çözebiliriz

$$\lambda^3 - 5.76\lambda^2 + 6.7\lambda + 2 = 0$$

ancak direkt çözümü verelim

$\lambda_1 \rightarrow 0,480275 \qquad \lambda_2 \rightarrow 0,96517 \qquad \lambda_3 \rightarrow 4,31455$

$\omega_1 \rightarrow 0,693019 \qquad \omega_2 \rightarrow 0,982431 \qquad \omega_3 = 2.07715 \qquad \omega_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$\eta_i = c_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

$$x = U\eta = \begin{vmatrix} U_1 \end{vmatrix} C_1 \cos(0,693t - \varphi_1) + \begin{vmatrix} U_2 \end{vmatrix} C_2 \cos(0,982431t - \varphi_2)$$

$$+ \begin{vmatrix} U_3 \end{vmatrix} C_3 \cos(2.07715t - \varphi_3)$$

(2)

$$U = \begin{bmatrix} -0,0393794 & 0.506853 & -0,0783925 \\ -0.998222 & -0.544804 & 0.0102754 \\ -0,0447528 & 0.668048 & 0.99687 \end{bmatrix}$$

Bunu normalize etmek istersek (Kütle normalizasyonu)

$$u_1^T = \{-0,0393794 \quad -0,998222 \quad -0,0447528\}$$

$$u_1^T M u_1 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0,06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \begin{bmatrix} u_{11} \\ 0,04\,u_{12} \\ 0,06\,u_{13} \end{bmatrix} = u_{11}^2 + u_{12}^2\,0.04 + 0,06\,u_{13}^2$$

$= 0.0415288$ ve biz bunun birim olmasını bekliyorduk

$u_1' = u_1 / \sqrt{u_1^T M u_1}$ diyebiliriz.

Bütün modal vektörler için yapıldığında

$${}_{mn}U = \begin{bmatrix} -0,193239 & 0,992324 & -0,305665 \\ -4.89838 & -1.00213 & 0,0400656 \\ -0.219607 & 1.22883 & 3.88695 \end{bmatrix}$$

Şimdi bunu test etmek için ${}_{mn}U^T M\, {}_{mn}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ Indeed

---

Başlangıç Koşullarına göre C_i ve φ_i lerin hesaplanmasında modal analiz.