1.

IA: zeige Gültigkeit für $n=1$

$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 2\cdot 1 - 1 = 2-1 = 1$

$n^2 = 1^2 = 1$

IV: Für ein beliebiges, aber festes n gilt:

$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

IV: zeigen Gültigkeit für $n+1$

$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + 2(n+1) - 1$

$= n^2 + 2(n+1) - 1$

$= n^2 + 2n + 2 - 1$

$= n^2 + 2n + 1$

$(n+1)^2$

$= n^2 + 2n + 1$

2.

IA: Zeige Gültigkeit für $n=1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 \text{ ebenso } \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

IV: Für ein beliebiges, aber festes n gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

IS: Wir zeigen, dass aus Gültigkeit von n auch $n+1$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1^3)$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{13}{4}n^2 + 3n + 1$$

$$\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(n^2+3n+2)(n^2+3n+2)}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{13}{4}n^2 + 3n + 1$$

3.

I A: Zeige Gültigkeit für $n = 1$

$$\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + z^{2^0}\right) = \left(1 + z^1\right) = 1 + z$$

$$\frac{1 - z^{2^1}}{1 - z} = \frac{1 - z^2}{1 - z} = \frac{-(-1 + z^2)}{1 - z} = \frac{-(-1^2 + z^2)}{1 - z}$$

$$= \frac{-((-1 + z)(1 + z))}{1 - z}$$

$$= \frac{-((-1 + z)(1 + z))}{-(-1 + z)}$$

$$= \frac{-(1 + z)(-1 + z)}{-(-1 + z)}$$

$$= (1 + z) \frac{-(-1 + z)}{-(-1 + z)} = 1 + z$$

I V: Für ein beliebiges, aber festes n gilt:

$$\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + z^{2^i}\right) = \frac{1 - z^{2^n}}{1 - z} \qquad z \neq 1$$

I S: Wir zeigen, dass Gültigkeit auch für $n + 1$ gilt

$$\prod_{i=0}^{n} \left(1 + z^{2^i}\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + z^{2^i}\right) \cdot \left(1 + z^{2^n}\right)$$

$$= \frac{1 - z^{2n}}{1 - z} \cdot \left(1 + z^{2^n}\right)$$

$$= \frac{1 - z^{2^n}}{1 - z} \cdot \left(\frac{1 + z^{2^n}}{1}\right)$$

$$= \frac{1 + z^{2^n} - z^{2^n} - z^{2^{n+1}}}{1 - z}$$

$$= \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z}$$