

Prof. ir. W.J. Beranek

KRACHTSWERKING Deel 3

VAKWERKEN STANDZEKERHEID



KRACHTSWERKING

Deel 3

VAKWERKEN

STANDZEKERHEID

Vormvastheid van staafwerken

Analytische en grafische berekening van vakwerken

Standzekerheid (1e orde stabiliteit)

Globale analyse van portalen en raamwerken

Berekening van driescharnierspannen

300



KRACHTSWERKING Deel 3
VAKWERKEN + STANDZEKERHEID
Februari 1999 [301-304] + [300 - 399] +
Trefwoordenlijst [T-01 / T-08]

Dit is een herziene uitgave van
KRACHTSWERKING 1
deel 2: September 1989 [212-296]
aangevuld met de berekening van drieschansierspannen

HOOFDSTUKINDELING

- 301 Hoofdstuk 15 Inleiding staafwerken
- 302 Hoofdstuk 16 Vakwerken
- 303 Hoofdstuk 17 Standzekerheid
- 304 Hoofdstuk 18 Globale analyse van portalen en raamwerken
- 305 Lijst van symbolen

300 15 INLEIDING STAAFWERKEN

- 300 15.1 ALGEMEEN
 - 15.1.1 Afzonderlijke elementen
 - 15.1.2 Vervormingen van staven en liggers
 - 15.1.3 Samenstel van lijnvormige elementen
 - 15.1.4 Buigvaste verbinding van de staven
- 305 15.2 VORMVASTHEID
 - 15.2.1 Begrip vormvastheid
 - 15.2.2 Vormvastheid van drie-en vierhoeken
 - 15.2.3 Wiskundige formulering
 - 15.2.4 Statisch bepaalde staafwerken en vakwerken
 - 15.2.5 Controle trek of druk
 - 15.2.6 Vormgeving van staafwerken
 - 15.2.7 Vormvastheid van rechthoekige staafwerken

314	16	VAKWERKEN <i>Bepaling van de krachtswerking langs analytische en grafische weg</i>
314	16.1	ALGEMEEN
	16.1.1	Overzicht van de stof
315	16.1.2	Vakwerkvormen
316	16.1.3	Schematisering van vakwerken
318	16.1.4	Vergelijking van een vakwerk met een ligger 216
320	16.2	SNEDEMETHODE VOOR VAKWERKEN
	16.2.1	Berekeningswijze
322	16.2.2	Numerieke uitwerking
323	16.2.3	Richting van de onbekende staafkrachten
324	16.2.4	Evenwichtsbeschouwingen
325	16.2.5	Staafkrachten in de diagonalen en verticalen bij vakwerkliggers
326	16.2.6	Staafkrachten in enkele bijzondere verticalen
327	16.3	ANALYSE VAN DE KRACHTSWERKING
	16.3.1	Vergelijking van twee vakwerkliggers
328	16.3.2	Interpretatie van de resultaten
330	16.3.3	Bepaling staafkrachten uit de dwarskrachten-en momentenlijn
332	16.3.4	Boven- en onderrand niet evenwijdig
334	16.4	GRAFISCHE METHODE
	16.4.1	Algemeen
	16.4.2	Voorbeeld
336	16.4.3	Richting van de krachten op staven en knooppunten
338	16.4.4	Nulstaven
340	16.5	CREMONA
	16.5.1	Werkwijze
342	16.5.2	Stapsgewijze opbouw van een Cremona
346	16.6	VISUALISERING KRACHTSWERKING
	16.6.1	Algemeen
	16.6.2	Invloed aangrijppingspunten van de krachten
348	16.6.3	Beschrijving tekeningen
	16.6.4	Vakwerkliggers
350	16.6.5	Parabolische vakwerken
352	16.6.6	Driehoekige vakwerken

354 17 STANDZEKERHEID
1e orde stabilitet van eenvoudige bouwwerken

354	17.1	INLEIDING
	17.1.1	Begrippen standzekerheid en stabiliteit
356	17.1.2	Volledige inklemming en verende inklemming
358	17.2	VORM VAN EEN GEBOUW
	17.2.1	Samenvoegen van constructie-onderdelen
359	17.2.2	Portaal onder horizontale belasting
360	17.2.3	Verdiepinghoge bouw
362	17.3	STANDZEKERHEID STAPELBOUW
	17.3.1	Inleiding
364	17.3.2	Draagstructuur bestaande uit lijnvormige elementen
365	17.3.3	Vorming stijve kern
366	17.3.4	Verdere uitbouw van de draagstructuur
368	17.4	AFDRACHT VAN HORIZONTALE BELASTING
	17.4.1	Mogelijkheden voor de krachtsafdracht
370	17.4.2	Statisch onbepaalde varianten
	17.4.3	Afdracht windbelasting bij rechthoekige gebouwen
372	17.4.4	Afdracht windkrachten; numerieke uitwerking
	17.4.5	Afdracht horizontale en verticale krachten via schijven

374 18 GLOBALE ANALYSE VAN PORTALEN EN RAAMWERKEN
Berekening van driescharnierspannen

374	18.1	INLEIDING
	18.1.1	Functie van portalen
375	18.1.2	Verticale puntlast op een portaal
376	18.1.3	Ligger met overstekken
377	18.1.4	Ligger met haakse overstekken
378	18.2	VERTICALE BELASTING OP EEN PORTAAL
	18.2.1	Verticale puntlast in het midden van de bovenregel
380	18.2.2	Gelijkmatig verdeelde belasting op een bovenregel
381	18.2.3	Stapeling van portalen
382	18.2.4	Meerbeukig portaal
383	18.3	HORIZONTALE BELASTING OP EEN PORTAAL
	18.3.1	Horizontale belasting op de bovenregel
384	18.3.2	Stapeling van portalen
386	18.3.3	Meerbeukig portaal
387	18.4	DRIESCHARNIERSPANTEN
	18.4.1	Algemeen
388	18.4.2	Normaalkrachten en dwarskrachten
389	18.4.3	Momentenverloop in een ligger onder een helling
390	18.4.4	Gelijkmatig verdeelde verticale belasting
392	18.4.5	Momentenlijn uitgezet langs de systeemlijnen
394	18.4.6	Asymmetrische verticale belasting
396	18.4.7	Druklijn voor de regel
397	18.4.8	Horizontale belasting
398	18.4.9	Willkeurig belaste asymmetrisch spanten

T-01 / T-08 Trefwoordenlijst

kleine letters

a	versnelling	$[l t^{-2}]$
a, b, c	afstanden	$[l]$
b	breedte	$[l]$
d	middellijn	$[l]$
e	excentriciteit	$[l]$
d, e, f	afstanden	$[l]$
g	versnelling zwaartekracht	$[l t^{-2}]$
h	hoogte	$[l]$
k	veerstijfheid (veerconstante)	$[k l^{-1}]$
l	lengte, overspanning	$[l]$
m	massa	$[m]$
n	aantal	$[1]$
p	kracht per oppervlakte	$[k l^{-2}]$
q	kracht per lengte	$[k l^{-1}]$
r	straal	$[l]$
t	tijd	$[t]$
t	dikte	$[l]$
u	verplaatsing	$[l]$
v	snelheid	$[l t^{-1}]$
w	doorbuiging	$[l]$
x, y, z	lengte-coördinaten	$[l]$
z	hefboomsarm	$[l]$

HOOFDLETTERS

A	oppervlakte	$[l^2]$
C	constante	$[1]$
E	elasticiteitsmodulus	$[k l^{-2}]$
F	uitwendige kracht	$[k]$
I	kwadr. oppervlaktemoment	$[l^4]$
K	uitwendig moment, koppel	$[k l]$
L	totale lengte	$[l]$
M	buigend moment	$[k l]$
N	normaalkracht	$[k]$
R	reactiekracht	$[k]$
R	kromtestraal	$[l]$
S	lineair oppervlaktemoment	$[l^3]$
S	staafkracht	$[k]$

Griekse lettertekens

α, β, γ	hoeken	$[1]$
α	lineaire uitzettingscoefficient	$[T^{-1}]$
γ	kracht per volume	$[k l^{-3}]$
ε	rek, relatieve vervorming	$[1]$
μ	wrijvings-coëfficiënt	$[1]$
ν	contractie-coëfficiënt	$[1]$
ρ	massa per volume	$[m l^{-3}]$
σ	(normaal)spanning	$[k l^{-2}]$
τ	schuifspanning	$[k l^{-2}]$
ϕ	hoek	$[1]$
ϕ	rotatie	$[1]$
ψ	reductiefactor	$[1]$

Indices

v, V	verticaal	richting
h, H	horizontaal	
l, r	links, rechts	
max	maximum	krachten
min	minimum	
extr	extremum	
repr	representatief	belasting
mom	momentaan	

Dimensie		Eenheid	
$[m]$	massa	kg	
$[l]$	lengte	m	mm
$[t]$	tijd	s	
$[k]$	kracht	kN	N
$[\text{ } T]$	temperatuur	$^{\circ}\text{C}$	

15 INLEIDING STAAFWERKEN

15.1 ALGEMEEN

15.1.1 AFZONDERLIJKE ELEMENTEN

In de bouw worden tegenwoordig hoofdzakelijk lineaire en vlakke constructie-elementen toegepast. Blokvormige onderdelen – zoals behandeld in KW-0 en KW-1 – zijn voornamelijk toegepast in bouwwerken van vóór de industriële revolutie. Van de lineaire constructie-elementen zijn in KW-2 en KW-1 alleen maar afzonderlijke elementen behandeld, zoals staven en liggers in KW-2 en koorden of kabels in KW-1.

Koorden zijn buigslappe elementen die uitsluitend trekkrachten kunnen overbrengen. Als de werklijnen van de krachten samenvallen met de aslijn van het koord, zal het koord onder invloed van de krachten alleen iets uitrekken. Als de uitwendige krachten echter in willekeurige richtingen aangrijpen, zal de vorm van het koord zich zodanig aanpassen, dat alle krachten toch als normaalkrachten via het koord kunnen worden afgevoerd. Het is dan wel noodzakelijk dat het koord aan beide uiteinden zodanig is bevestigd dat krachten in de richting van de aansluitende delen van het koord kunnen worden opgenomen.

De verplaatsingen van het koord onder de invloed van willekeurig gerichte krachten, zijn hierbij aanmerkelijk groter dan de doorsnede-afmetingen van het koord, zie fig. 1.

Staven en *liggers* zijn buigstijve elementen die beide zowel normaalkrachten als buigende momenten kunnen overbrengen.

Bij *staven* denkt men echter in de eerste plaats aan normaalkrachten en bij *liggers* in de eerste plaats aan buigende momenten.

De vervormingen (doorbuigingen) ten gevolge van buigende momenten blijven echter klein ten opzichte van de doorsnede-afmetingen van het element, zie fig. 2.

Indien alleen normaalkrachten optreden, dan blijven de vervormingen (rekken) zelfs uiterst klein en zijn eigenlijk nooit met het blote oog te constateren, zie fig. 3.

Als we kans zien een constructie uit lijnvormige elementen zodanig op te bouwen, dat hierin voornamelijk normaalkrachten optreden, dan hebben we ook een stijve constructie gemaakt.

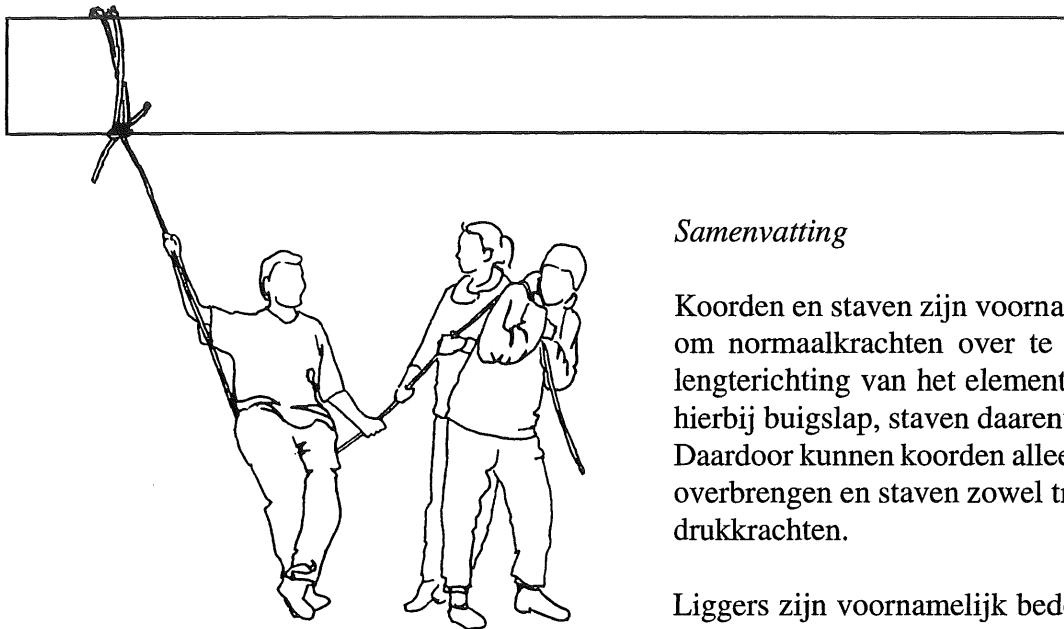


Fig. 1 KOORD :

De vorm van het koord wordt volledig bepaald door de belasting en de verplaatsingen kunnen zeer groot zijn

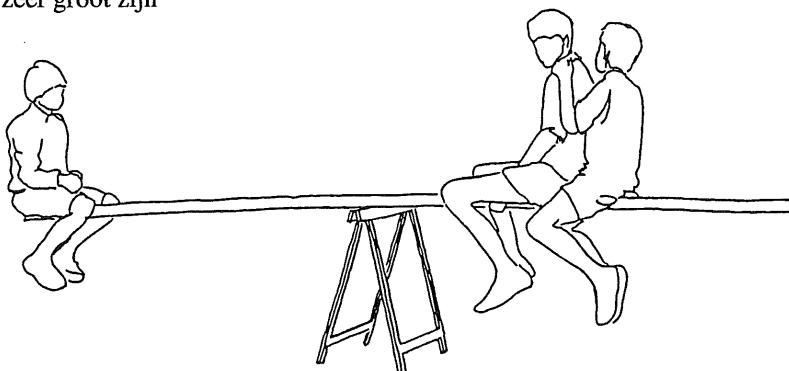


Fig. 2 LIGGER :

De hoofdvorm van de ligger blijft ongewijzigd door de belasting en de vervormingen zijn in het algemeen niet groter dan de dikte van het element

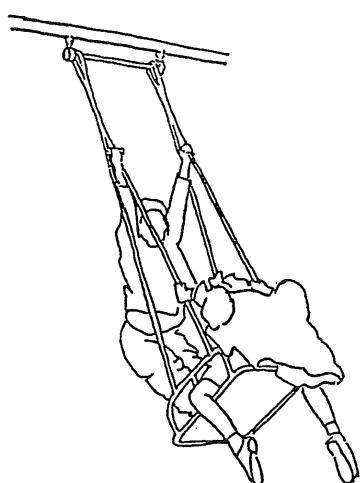


Fig. 3 STAAF :

De vorm van de staaf blijft ongewijzigd onder invloed van de belasting en de vervormingen zijn uitermate klein

Samenvatting

Koorden en staven zijn voornamelijk bedoeld om normaalkrachten over te brengen in de lengterichting van het element. Koorden zijn hierbij buigslap, staven daarentegen buigstijf. Daardoor kunnen koorden alleen trekkrachten overbrengen en staven zowel trekkrachten als drukkrachten.

Liggers zijn voornamelijk bedoeld om belastingen loodrecht op de lengte-as van het element over te dragen via dwarskrachten en buigende momenten.

Uiteraard komen allerlei mengvormen voor. Een kolom is weliswaar in de eerste plaats bedoeld voor de afdracht van normaalkrachten, maar zal vrijwel altijd ook buigende momenten moeten overbrengen.

Een horizontale balk onder zwaartekrachtsbelastingen wordt alleen aan buiging onderworpen en niet aan normaalkrachten.

Er zullen wèl normaalkrachten optreden als de uitwendige krachten ook horizontale componenten bezitten of als de ondersteuningen mede worden gevormd door schuin staande pendelstijlen, zie KW-2 [213].

Bij balken van voorgespannen beton worden door de *constructeur* extra horizontale uitwendige krachten op de balk aangebracht om de draagkracht te vergroten en de doorbuiging te verminderen, zie KW-1 en de Vraagstukkenbundel van KW-4 Spanningen.

15.1.2 VERVORMINGEN VAN STAVEN EN LIGGERS

De vervormingen van staven en liggers onder invloed van de belastingen zijn in de bouwkundige praktijk meestal zeer klein en met het blote oog nauwelijks of niet te zien.

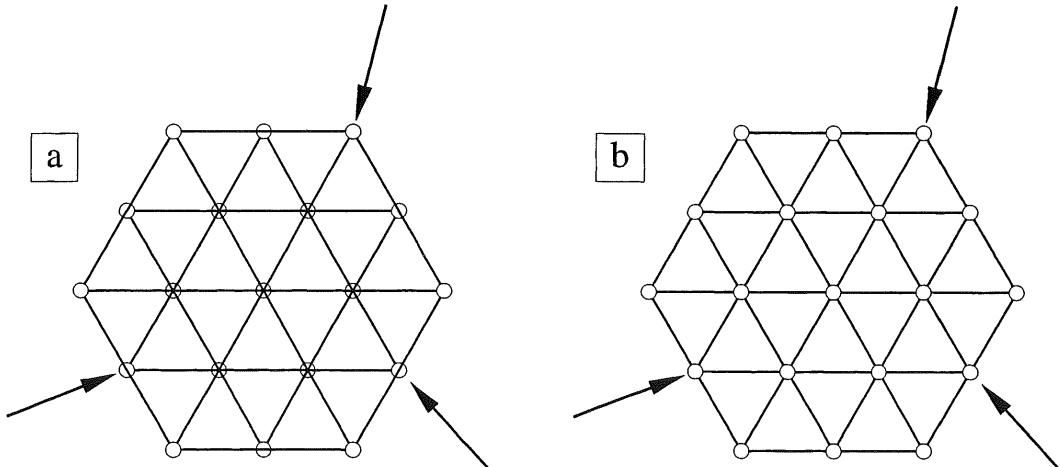
Desalnietemin dient men te bedenken dat de vervormingen door normaalkrachten weer aanmerkelijk kleiner zijn dan die ten gevolge van buigende momenten. De verhouding tussen beide bedraagt (bij vergelijkbare krachten) ca 1 : 100. Hierdoor kunnen de vervormingen door normaalkracht vrijwel altijd worden verwaarloosd ten opzichte van de vervormingen door buiging. Dit heeft weer tot gevolg dat het inzicht in de krachtwerving wordt vergroot en het uitvoeren van een handberekening aanmerkelijk wordt vereenvoudigd.

Uiteraard kunnen alle invloeden bij computerberekeningen zonder meer worden verdisconteerd. Maar voor het inzicht in de hoofdkrachtwerving zijn dergelijke verfijningen zonder enige betekenis.

Fig. 1 Vormvaste configuraties opgebouwd uit driehoeken

- Doorgaande staven scharnierend verbonden
- Niet doorgaande staven in de knooppunten scharnierend met elkaar verbonden

1



15.1.3 SAMENSTEL VAN LIJNVORMIGE ELEMENTEN

Vele constructies bestaan niet uit één afzonderlijk lijnvormig element, maar uit een samenstel van lijnvormige elementen, die op de een of andere manier in hun uiteinden met elkaar zijn verbonden. Als alle elementen in het platte vlak liggen, dan zullen we een dergelijke configuratie in algemene termen een *staafwerk* noemen, waarbij het niet ter zake doet of de verbindingen tussen de staven scharnieren zijn of buigvaste verbindingen. Hierbij nemen we aan dat alle uitwendige krachten in hetzelfde platte vlak liggen en uitsluitend aangrijpen ter plaatse van de verbindingen van de staven (knooppunten).

Vooruitlopend op een meer systematische behandeling zullen we het vervormingsgedrag van enkele regelmatige staafconstructies onder belasting nader beschouwen.

Driehoekig stramien

We beschouwen allereerst een configuratie die is opgebouwd uit driehoeken, zie fig. 1. Het maakt dan weinig uit of de staven buigvast of scharnierend zijn verbonden. Zo'n configuratie is en blijft een star en vrijwel onvervormbaar geheel, onverschillig welke krachten we ook in de knooppunten aanbrengen. Dit komt omdat in alle staven hoofdzakelijk normaalkrachten optreden. De krachten moeten dan wel wel in het vlak van het staafwerk liggen en een evenwichtssysteem vormen.

Rechthoekig stramien

We beschouwen vervolgens een configuratie die wordt gevormd uit doorgaande staven in x - en y -richting, zodat een samenstel van rechthoeken ontstaat, zie fig. 2a. Bij scharnierende verbindingen in de aansluitingen zal de configuratie onder belasting vrijwel altijd een ruitvorm aannemen, zie fig. 2b. De vorm past zich namelijk zodanig aan de uitwendige krachten aan, dat deze krachten zoveel mogelijk als normaalkrachten worden overgedragen.

In de beide hoofdrichtingen hebben we dan een evenwichtssysteem van krachten als bij een ligger op twee steunpunten. In de ene richting wordt de belasting dan over vijf liggers verdeeld en in de andere richting over vier liggers, zie fig. 2b.

Alleen als elke afzonderlijke staaf centrisch wordt gedrukt of getrokken of alle krachten van het evenwichtssysteem in x - en y -richting aangrijpen, behoudt het samenstel in hoofdtrekken zijn (min of meer labiele) rechthoekige vorm, zie fig. 2c. Er treden uiteraard weer buigvervormingen op.

Als het samenstel wordt opgebouwd uit staven die van knoop tot knoop lopen en daar scharnierend met elkaar worden verbonden, dan zijn veel grilliger vervormingspatronen mogelijk.

Nu valt immers de mogelijkheid weg om de krachten via buigen over te brengen, zie fig. 2d.

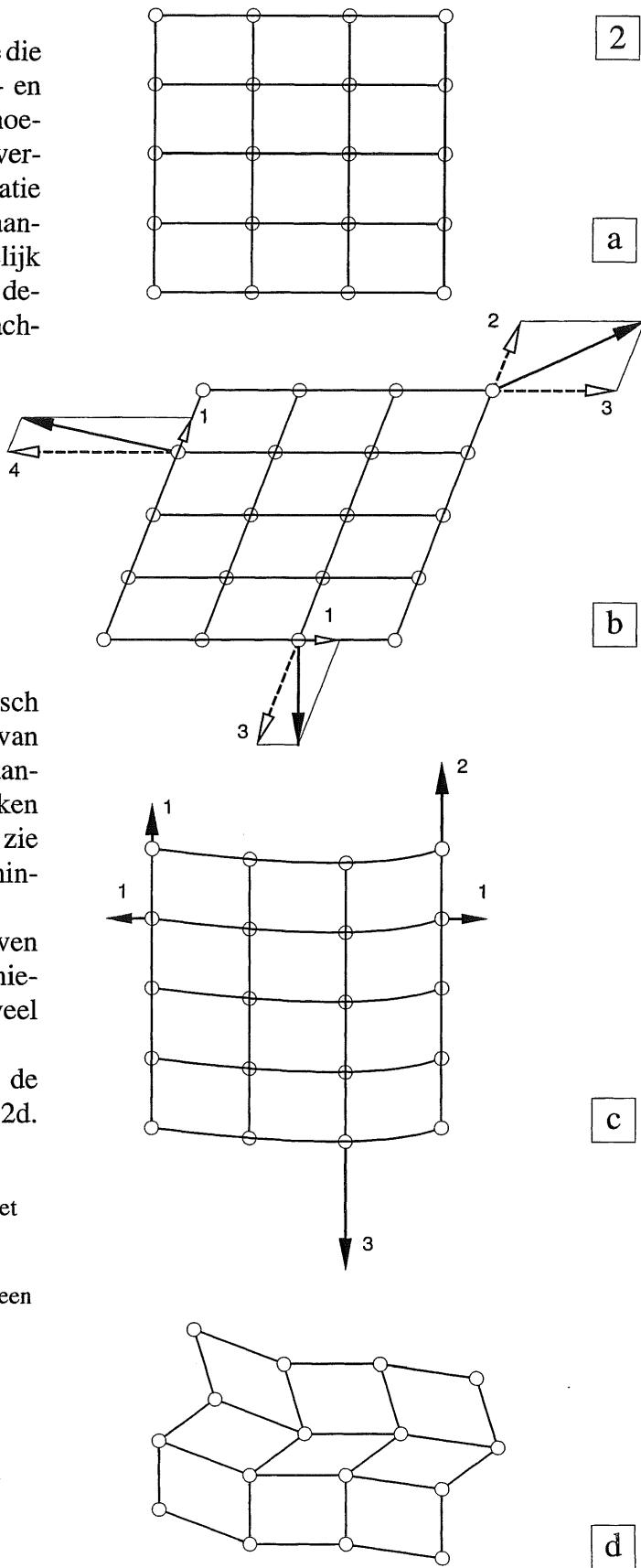


Fig. 2 Configuratie opgebouwd uit rechthoeken met doorgaande staven in x - en y -richting

- Onbelast
- Configuratie neemt een ruitvorm aan onder een willekeurige belasting
(buigvervormingen niet getekend)
- Configuratie blijft alleen rechthoekig onder bijzondere voorwaarden
(buigvervorming overdreven getekend)
- Een configuratie opgebouwd uit rechthoeken met scharnierende verbindingen in de knooppunten kan ook onbelast zeer grillige vormen vertonen

15.1.4 BUIGVASTE VERBINDING VAN DE STAVEN

De enige manier om dergelijke rechthoekige staafconfiguraties krachten te laten overbrengen met behoud van de uitwendige vorm, ligt in het buigvast verbinden van alle knooppunten, zie fig. 1a. We spreken dan van een *raamwerk*.

Indien nu een willekeurig evenwichtssysteem van krachten op zo'n configuratie aangrijpt, zullen vrijwel alle staven ook buigende momenten moeten overbrengen. Doordat buigvervormingen zoveel groter zijn dan normaalkrachtvervormingen, is een rechthoekige configuratie veel slapper dan een driehoekige configuratie, zoals blijkt uit fig. 1b.

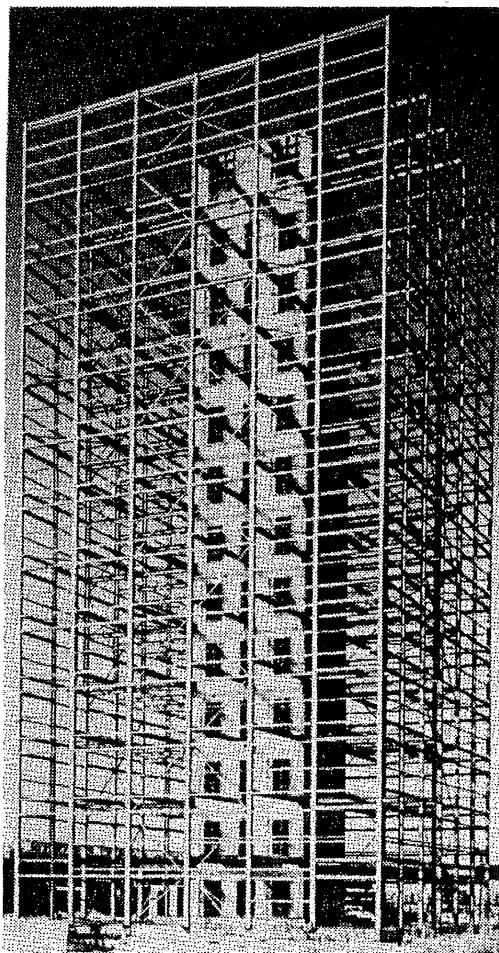


Fig. 2 Stalen raamwerk met stijve kern van gewapend beton

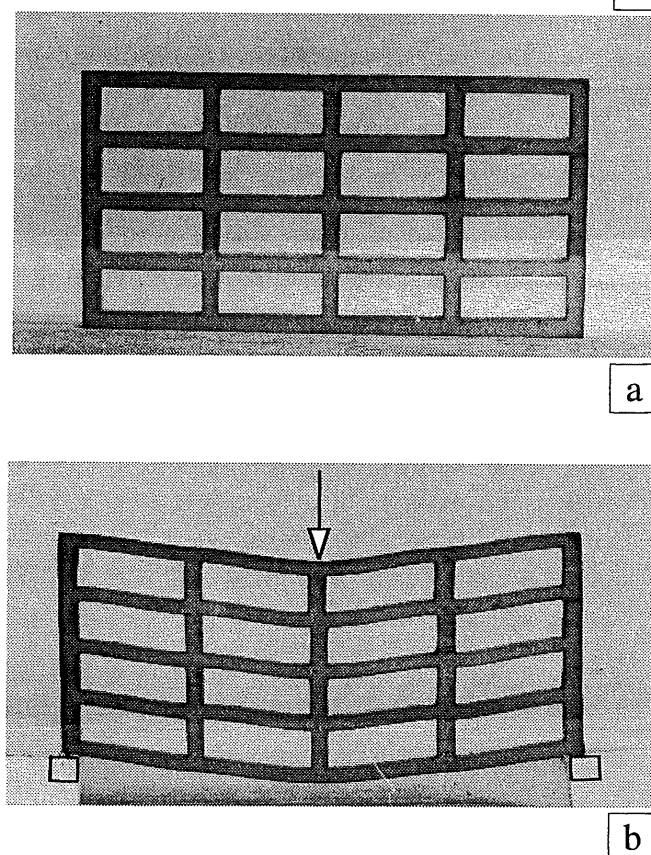


Fig. 1 Buigvaste verbinding van alle staven bij een model van poly-urethaan-rubber

- a. Onbelast
- b. In belaste toestand vertonen alle staven buigvervormingen

Raamwerken van staal en beton in de bouw zijn (vrijwel) altijd rechthoekige configuraties en geen driehoekige, zie fig. 2. Dit gaat goed omdat de zwaartekrachts-belastingen via buiging van de vloeren naar de wanden of kolommen worden afgedragen en vandaar rechtstreeks via normaalkrachten naar de fundering.

De horizontale krachten (wind) moeten echter via een veel ingewikkelder weg naar de fundering worden afgedragen, die globaal zal worden besproken in [383-386]. Maar omdat de horizontale belastingen aanmerkelijk kleiner zijn dan de verticale belastingen, valt een en ander toch nog mee. Over het algemeen moeten aan zo'n raamwerk echter nog stijve delen worden toegevoegd: één of meer stijve kernen, zie fig. 2.

15.2.1 BEGRIP VORMVASTHEID

In algemene zin is een samenstel van staven vormvast als de geometrische vorm onder invloed van uitwendige belastingen niet wezenlijk verandert. De vervormingen moeten dus klein blijven ten opzichte van de afmetingen van het staafwerk.

Met deze definitie zijn dus alle staafwerken vormvast waarbij buigvaste verbindingen tussen de staven aanwezig zijn. Maar dan is het veelal zo, dat zulke grote buigende momenten in de staven optreden, dat een wat andere vorm te prefereren is.

We zullen een staafwerk daarom vormvast noemen, als het niet alleen vormvast is volgens de vorige definitie, maar er bovendien geen buigende momenten in de staven behoeven op te treden om de uitwendige krachten te kunnen afdragen naar de opleggingen.

Voor een toetsing van de vormvastheid worden dan alle buigstijve verbindingen tussen de afzonderlijke staven vervangen door scharnieren.

Configuraties die hun vormvastheid geheel moeten ontleenen aan de buigstijfheid van de verbindingen, zullen dan als een kaartenhuis in elkaar vallen.

Configuraties die hun vormvastheid echter ontleenen aan hun geometrische vorm – zodat er een belastingafdracht mogelijk is uitsluitend via normaalkrachten – zullen we als de 'echte' vormvaste configuraties beschouwen.

Deze gedachtengang zal in hoofdstuk 17 [354] veelvuldig worden toegepast voor de bepaling van de standzekerheid van gebouwen.

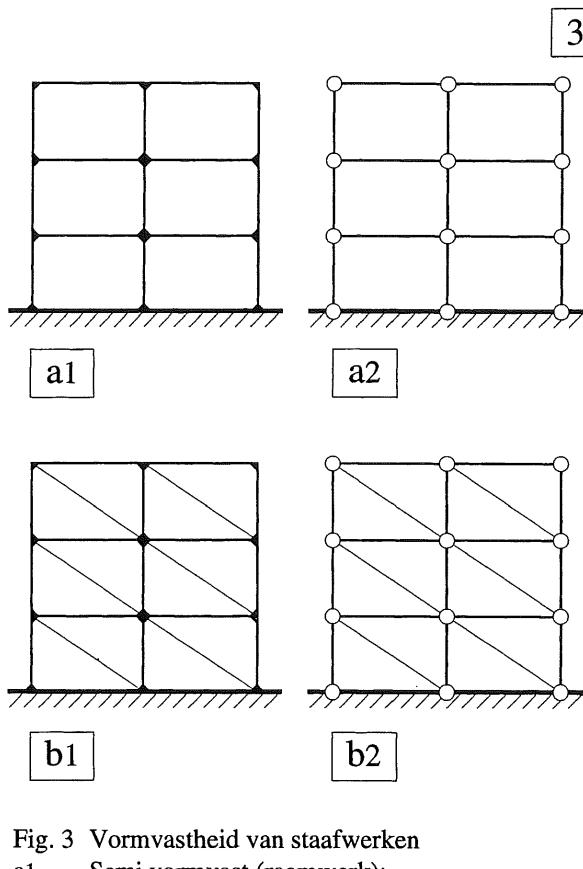


Fig. 3 Vormvastheid van staafwerken

- a1 Semi vormvast (raamwerk): rechthoekig stramien; buigstijve verbindingen
- a2 wordt instabiel bij het vervangen van de buigstijve verbindingen door scharnieren
- b1 Werkelijk vormvast (vakwerk): driehoekig stramien; buigstijve verbindingen
- b2 blijft vormvast bij het vervangen van de buigstijve verbindingen door scharnieren

15.2.2 VORMVASTHEID VAN DRIE- EN VIERHOEKEN

Vakwerken zijn per definitie opgebouwd uit driehoeken, die in principe altijd vormvast zijn. Dit is als volgt aan te tonen.

Om uit drie staven een driehoek te vormen kan men in de uiteinden van de eerste staaf een tweede en derde staaf scharnierend bevestigen, zie fig. 1a. Indien alle drie de staven in hetzelfde platte vlak liggen, kunnen de staven 2 en 3 resp. om de punten A en B worden geroteerd tot ze elkaar in punt C raken. Hier kunnen de staven 2 en 3 dan eveneens scharnierend aan elkaar worden verbonden.

Om te zorgen dat de uiteinden van de staven 2 en 3 elkaar raken moeten de cirkelbogen om A en B elkaar natuurlijk wel snijden, zodat geldt:

$$|l_2 - l_3| < l_1 < l_2 + l_3$$

Als aan bovenstaande voorwaarde is voldaan, kan er maar op één manier een driehoek worden gevormd. Men noemt een driehoek daarom *vormvast*.

Indien vier staven in hetzelfde platte vlak aan elkaar moeten worden bevestigd, dan is dit samenstel nooit vormvast.

Dit is gemakkelijk als volgt in te zien.

De staven 1 en 2 worden scharnierend aan elkaar bevestigd en onder een bepaalde hoek α_1 geïnstalleerd, zie fig. 1b. In de uiteinden van dit samenstel worden de staven 3 en 4 aangebracht, die we weer om de punten A en C' laten roteren tot ze elkaar in punt D raken. Dit kan maar op één manier.

Maar als we de staven 1 en 2 onder een andere hoek α_2 plaatsen, dan kunnen de staven 3 en 4 eveneens weer zodanig worden gedraaid tot ze elkaar raken in punt D', zie fig. 1c.

Er is dus een oneindig aantal vormen van de vierhoek mogelijk. Een dergelijk samenstel is daarom niet vormvast.

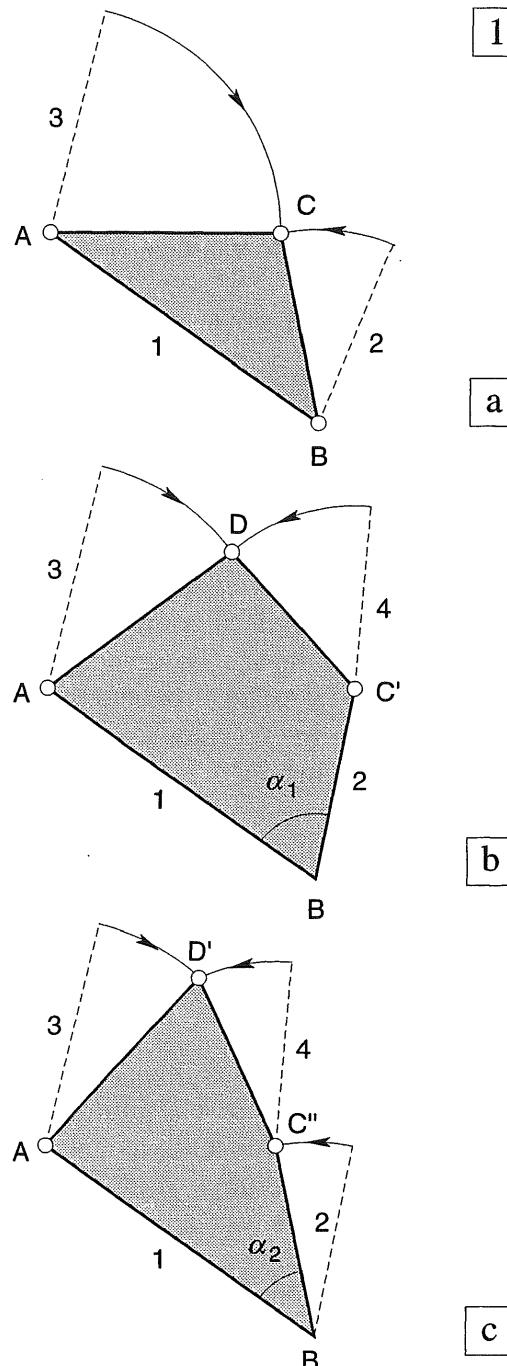


Fig. 1 Vormvastheid

- a. Met behulp van drie staven kan slechts één driehoek worden gevormd
- b. Als we uitgaan van een gegeven hoek α_1 , dan is met de gegeven staven maar één vierhoek te vormen
- c. Als we uitgaan van een andere hoek α_2 , dan vinden we ook een andere vorm van de vierhoek

15.2.3 WISKUNDIGE FORMULERING

Om een vormvast vakwerk samen te stellen, kunnen we uitgaan van één (vormvaste) basisdriehoek, zie fig. 2. Vervolgens kunnen we een nieuw knooppunt formeren door in twee hoekpunten van een willekeurige staaf van de basisdriehoek, elk een nieuwe staaf aan te brengen. De eindpunten van de nieuwe staven worden dan door rotatie tot samenvallen gebracht en met een scharnier verbonden. Om dus n nieuwe knooppunten te formeren, hebben we $2n$ staven nodig.

We kunnen dan het volgende staatje maken voor het aantal knooppunten en staven:

	basis-driehoek	voor n extra knooppunten
knooppunten: $k =$	3	n
staven: $s =$	3	$2n$

Hieruit volgen dan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} k &= 3 + n \\ s &= 3 + 2n \end{aligned}$$

Om n te elimineren vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met 2 en trekken de tweede vergelijking er van af:

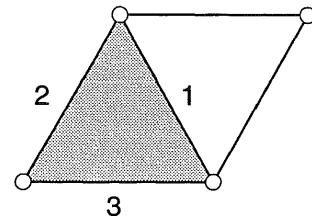
$$\begin{array}{rcl} 2k &= 6 + 2n \\ s &= 3 + 2n \\ \hline 2k - s &= 3 \end{array}$$

ofwel

$$s = 2k - 3 \quad (1)$$

Formule (1) kan als een eerste controle op de vormvastheid van een vakwerk worden gebruikt. Voldoet het aantal staven en knopen *niet* aan de formule dan is het vakwerk ook *niet* vormvast. Voldoet het aantal staven en knopen *wèl* aan de formule dan kan het samenstel van staven toch niet vormvast blijken te zijn. De formule levert een zgn. *noodzakelijke* voorwaarde maar nog geen *voldoende* voorwaarde.

Het blijkt echter veel handiger te zijn om na te gaan of elk volgend knooppunt vormvast met de vorige knooppunten is verbonden. Hier wordt nader op ingegaan onder [310-313].



2

Fig. 2 Basisdriehoek met één knooppunt uitgebreid door het aanbrengen van twee nieuwe staven

15.2.4 STATISCH BEPAALDE STAAFWERKEN EN VAKWERKEN

Voor de berekening van een vlak staafwerk is het algemeen gebruikelijk, om aan te nemen dat de staven scharnierend met elkaar zijn verbonden. Voorts wordt er van uitgegaan dat alle uitwendige krachten als puntlasten in de knooppunten (scharnieren) aangrijpen.

Het eigen gewicht van elke staaf is uiteraard gelijkmatig over de staaflengte verdeeld. Soms grijpen er ook nog wel andere niet al te grote krachten rechtstreeks op een staaf aan.

Voor alle buigvervormingen kan de betreffende staaf worden beschouwd als een ligger op twee steunpunten [KW-2]. De bijbehorende oplegreacties kunnen op de gebruikelijke manier worden bepaald. *Voor het staafwerk worden dan de tegengesteld gerichte krachten als belasting in de knopen aangebracht.*

De buigende momenten die hierdoor in een staaf ontstaan blijken over het algemeen van ondergeschikte betekenis te zijn en worden eigenlijk nooit in de berekening opgenomen.

In het rekenschema zijn alle staven dus door scharnieren verbonden en grijpen alle uitwendige krachten ook in deze scharnieren aan. Hieruit volgt dat de staven van zo'n staafwerk alleen maar normaalkrachten kunnen overbrengen. Om de staafkrachten te bepalen kunnen dan per knooppunt twee evenwichtsvoorwaarden worden opgesteld:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

Aan de derde evenwichtsvoorwaarde

$$\Sigma K_z = 0$$

wordt immers automatisch voldaan.

Als het staafwerk k knooppunten bezit, kunnen dus $2k$ vergelijkingen worden opgesteld. Als onbekenden treffen we dan in het staafwerk aan: s staafkrachten plus 3 oplegreacties (als het staafwerk statisch bepaald is opgelegd).

Het totale aantal onbekenden bedraagt dan:

$$s + 3$$

De vergelijkingen zijn dus op te lossen als geldt:

$$2k = s + 3 \quad (1a)$$

Dit is exact dezelfde uitdrukking als formule [307-(1)] die geldt voor een vormvast vakwerk. Zijn er minder staven dan volgt uit (1), dan is het staafwerk niet vormvast. Zijn er meer staven dan is het staafwerk statisch onbepaald en kunnen de staafkrachten niet worden bepaald door van de evenwichtsvergelijkingen alléén uit te gaan.

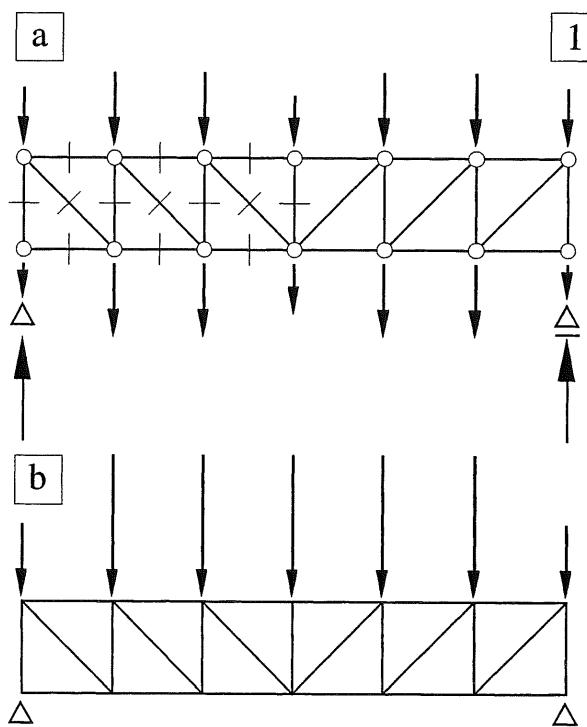


Fig. 1 Vervanging van de eigen gewichten van de vakwerkstaven door geconcentreerde krachten in de knopen

- a. Staaflengte en aantal staven nauwkeurig in rekening gebracht, door middel van een 'eenheidsgewicht' per m'
- b. Gebruikelijke aannname waarbij de belasting als gelijkmatig verdeeld wordt beschouwd, die dan weer kan worden vervangen door een stelsel equivalente puntlasten

15.2.5 CONTROLE TREK OF DRUK

Een van de meest voorkomende vormen van staafwerken is het vlakke vakwerk, zoals is weergegeven in fig. 2. Om zonder enige berekening toch al een indruk te verkrijgen of in de vakwerkstaven trek of druk optreedt, kunnen we als volgt te werk gaan. We verwijderen de staaf waarin we het teken van de kracht willen kennen en gaan na hoe het dan labiele vakwerk wil vervormen onder invloed van de belasting. Met de twee punten die eerst door de staaf werden verbonden kunnen twee dingen gebeuren:

1. De punten verwijderen zich van elkaar. De betreffende staaf is dan een trekstaaf, want we moeten aan de twee knooppunten trekken om de oude positie te herstellen.
2. De punten naderen elkaar. De betreffende staaf is dan een drukstaaf.

In fig. 2a is een onvervormd vakwerk weergegeven, waarbij het teken van vier staven in de tweede moot van links zal worden gecontroleerd. In fig. 2b is de onderrandstaaf verwijderd waarin dus trek moet optreden, en in fig. 2c de bovenrandstaaf waarin dan druk moet optreden. Het tekenen van dergelijke vervormde vakwerken zal nauwelijks moeilijkheden opleveren.

Bij toepassing van een model (bijv. van meccanostaven) is de vervorming bij de verwijdering van een diagonaal of verticaal even gemakkelijk te zien als bij de verwijdering van een boven- of onderrandstaaf. Als we bij afwezigheid van zo'n modelletje de vervormingen willen tekenen, dan moeten we iets meer op onze hoede zijn.

Het is dan handig om de beide vakwerkgedelen niet langer op de opleggingen te laten rusten, maar ze zodanig ten opzichte van elkaar te verplaatsen dat elk deel horizontaal blijft, zie fig. 2d en 2e. Hierbij houden we de ligger als het ware vast ter plaatse van de middendoorsnede M-M waar de dwarskracht gelijk is aan nul. Ten opzichte van deze doorsnede willen dan zowel de linker als de rechter oplegging omhoog verplaatsen. Achteraf kunnen we het vervormde vakwerk desgewenst weer op de opleggingen laten rusten, zie fig. 2f.

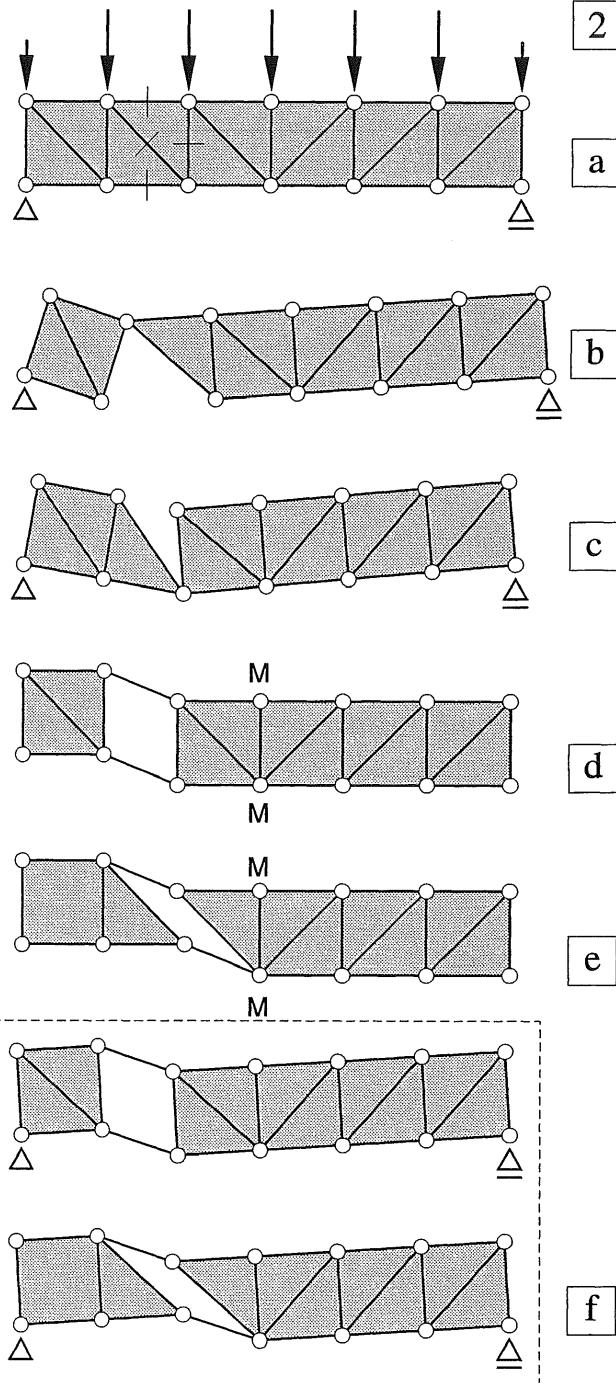


Fig. 2 Verwijderen van staven om het teken van de staafkracht te kunnen bepalen

- a. Onvervormde vakwerkligger
- b. Onderrandstaaf verwijderd: trek
- c. Bovenrandstaaf verwijderd: druk
- d. Diagonaal verwijderd: trek met horizontaal gehouden vakwerkgedelen
- e. Verticaal verwijderd: druk met horizontaal gehouden vakwerkgedelen
- f. De vakwerkgedelen van fig. d. en e. weer op hun opleggingen geplaatst

15.2.6 VORMGEVING VAN STAAFWERKEN

Zoals reeds eerder is vermeld, wordt onder een staafwerk een configuratie van staven verstaan, die aan hun uiteinden onderling al dan niet buigvast met elkaar zijn verbonden.

Voor de toetsing van de vormvastheid van staafwerken volgens [307] worden alle staven echter scharnierend in hun uiteinden aan elkaar bevestigd gedacht. Zo'n configuratie kan dan wel of niet vormvast zijn.

Aan de hand van een viertal voorbeelden wordt op de begrippen statisch bepaald en vormvast ingegaan bij een driehoekig staafwerk.

Vervolgens wordt in [312] gedemonstreerd hoe een rechthoekig staafwerk door een beperkt aantal diagonalen vormvast kan worden gemaakt. Dit heeft voornamelijk betrekking op het vormvast maken van dakvlakken.

Voorbeeld 1

Er wordt uitgegaan van de (vormvaste) driehoek $P_0 - P_1 - P_2$, zie fig. 1a. Hieraan worden twee staven toegevoegd: $P_0 - P_3$ en $P_2 - P_3$.

Punt P_3 is dan eveneens vormvast verbonden aan de basisdriehoek. Het punt P_0 wordt als het centrale punt van de configuratie gekozen.

Punt P_4 kan dan worden toegevoegd door de staven $P_0 - P_4$ en $P_3 - P_4$ aan te brengen, zie fig. 1b. We gaan hiermee door tot we punt P_6 hebben bereikt. In alle tussenfasen hebben we een vormvast geheel dat bovendien statisch bepaald is.

Voorbeeld 2

Uitgangspunt is de staafconfiguratie van fig. 1b. We brengen nu de 'sluitstaaf' $P_6 - P_1$ aan zoals is weergegeven fig. 2. Uiteraard is de configuratie nog steeds vormvast, maar ze is nu wel statisch onbepaald geworden, zoals met behulp van formule [308-(1a)], c.q. [307-(1)] kan worden gecontroleerd.

($k = 7$; $s = 12$, dus $2k - 3 = 11$ terwijl het staafwerk 12 staven telt, dus één te veel).

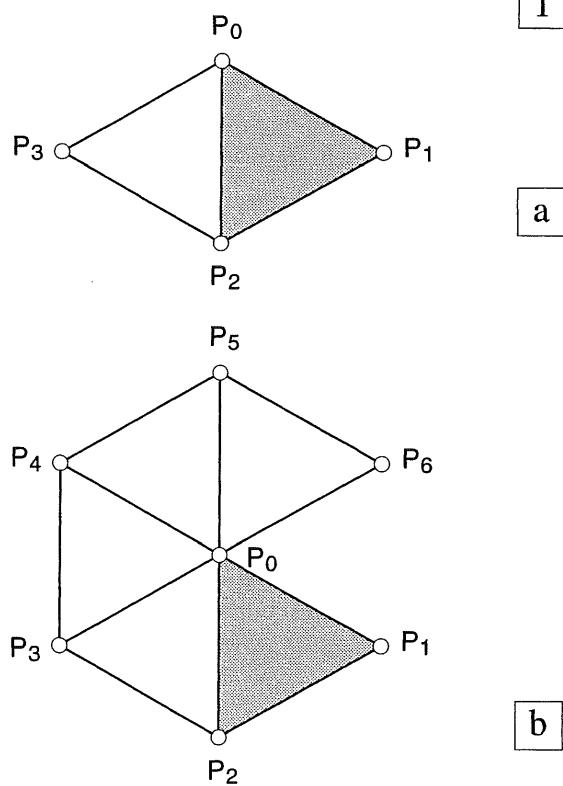


Fig. 1 Statisch bepaalde configuratie van staven

- a. Basisdriehoek met twee aansluitende staven
- b. Zeshoek met nog ontbrekende sluitstaaf

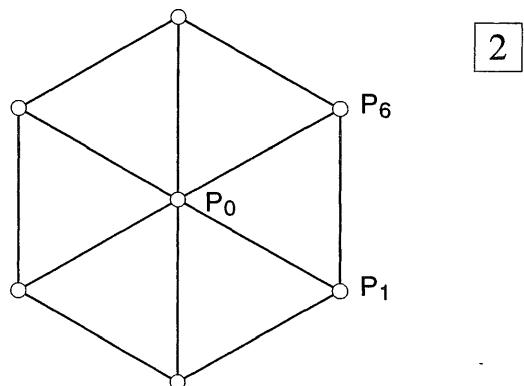


Fig. 2 Statisch onbepaarde configuratie van staven bij een gesloten zeshoek

Voorbeeld 3

We voegen aan de configuratie van voorbeeld 2 nu de punten P_7 en P_8 toe door het parallellogram $P_1 - P_6 - P_7 - P_8$ te formeren, zie fig. 3.

Als we nu klakkeloos formule (1) toepassen is hieraan zonder meer voldaan. Desalnietemin hebben we een configuratie gemaakt die gedeeltelijk statisch onbepaald is (de oorspronkelijke gesloten zeshoek van voorbeeld 2) en gedeeltelijk niet vormvast (het parallellogram).

Voorbeeld 4

We behoeven in voorbeeld 3 maar één staaf te verplaatsen, om een configuratie te verkrijgen die wel geheel vormvast is en eveneens statisch bepaald. Dit is weergegeven in fig. 4. Aan formule (1) is weer zonder meer voldaan, maar we hebben gezien dat dit wel een noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarde is.

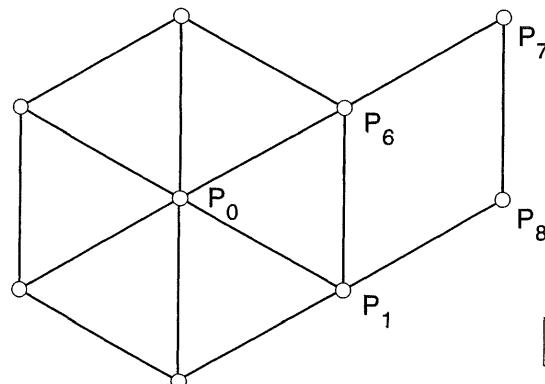
Op het eerste gezicht lijkt de configuratie niet vormvast omdat er weer een parallellogram in voorkomt. Maar in dit geval is het parallellogram $P_0 - P_6 - P_8 - P_1$ wél vormvast, omdat de punten P_1 en P_6 'buitenom' via de punten P_2 t/m P_5 vormvast aan elkaar zijn gekoppeld. En als P_1 en P_6 vormvast zijn, moet dat ook voor punt P_8 gelden.

De enige zekere manier om de vormvastheid van een staafwerk te bepalen is daarom als volgt:

- ga uit van een vormvaste driehoek, of een ander vormvast onderdeel,
- ga na of de volgende punten stuk voor stuk door middel van twee staven weer vormvast aan het voorgaande (vormvaste) samenstel zijn te koppelen,
- omrand elk volgend vormvast punt tot alle punten zijn gecontroleerd.

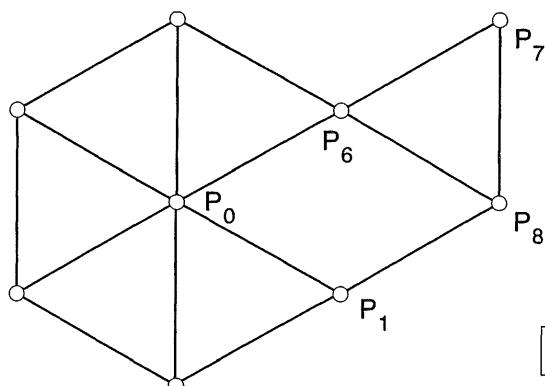
Hierbij doet het weinig ter zake of de configuratie wel of niet statisch bepaald is. Statisch onbepaald is wel wat lastiger om uit te rekenen; maar het is wel veiliger dan statisch bepaald.

De *vormvastheid* is echter essentieel, die bepaalt immers of er kans bestaat op ongewenst grote vervormingen en soms zelfs het bezwijken van een constructie-onderdeel.



3

Fig. 3 De staafconfiguratie voldoet aan formule (1) maar is toch niet vormvast



4

Fig. 4 De staafconfiguratie voldoet aan formule (1) en is wél vormvast, ook al lijkt er een niet vormvaste vierhoek in voor te komen

15.2.7 VORMVASTHEID VAN RECHTHOEKIGE STAAFWERKEN

Aan de hand van enkele voorbeelden wordt gedemonstreerd hoe een rechthoekig staafwerk door het aanbrengen van diagonalen vormvast kan worden gemaakt. Dit zal voornamelijk worden gebruikt voor het vormvast maken van dakkvlakken.

Indien twee loodrecht op elkaar staande zijranden van het rechthoekige staafwerk als onverplaatsbaar mogen worden beschouwd, is het gehele rechthoekige staafwerk vormvast zonder verder ook maar één diagonaal behoeven aan te brengen, zie fig. 1a.

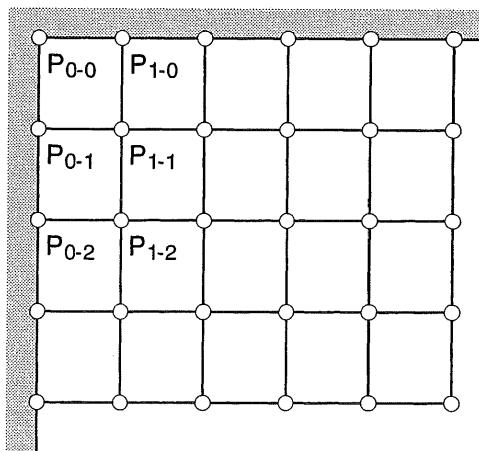
Punt P_{1-1} wordt immers vormvast gekoppeld aan de onverplaatsbare punten P_{0-1} en P_{1-0} ; punt P_{1-2} aan de vaste punten P_{0-2} en P_{1-1} enz.

Indien er maar één onverplaatsbare zijrand aanwezig is, kunnen we de tweede vormvaste zijrand zelf形成en door één travee van rechthoeken te voorzien van diagonalen, zodat deze zich als een vormvast vakwerk gedraagt.

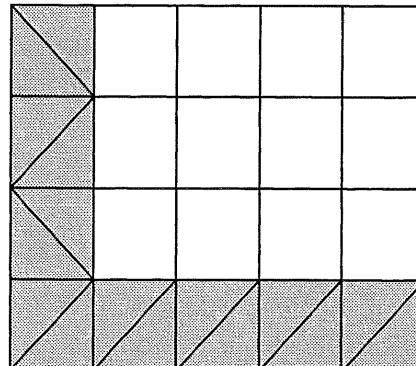
Het zal duidelijk zijn dat het rechthoekige samenstel onafhankelijk van onverplaatsbare zijranden vormvast is, wanneer langs beide randen een vormvast vakwerk aanwezig is, zoals is aangegeven in fig. 1b.

Deze beide vormvaste stroken kunnen op willekeurige plaatsen in het staafwerk worden aangebracht, in fig. 1c is een variantmogelijkheid aangegeven.

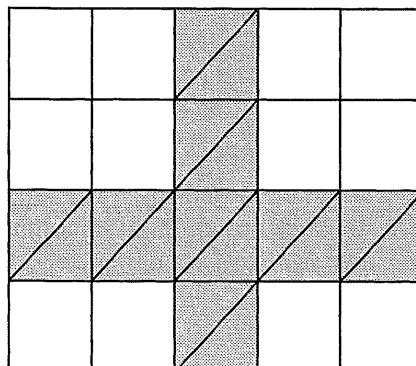
1



a



b



c

Fig. 1 Vormvastheid van rechthoekige staafwerken

- Staven bevestigd aan twee onverplaatsbare zijranden
- Twee zijranden van het staafwerk zelf, zijn vormvast gemaakt door het aanbrengen van diagonalen (richting diagonalen naar believen)
- Vormvast geheel door het aanbrengen van twee willekeurig gekozen onderling loodrechte traveeën met diagonalen

Het is echter ook mogelijk om de stroken in x - en y -richting te laten verspringen, zie fig. 2a. In zo'n geval is een '*punt voor punt*' controle van de vormvastheid van het staafwerk dwingend noodzakelijk.

In essentie komt het er op neer dat in het staafwerk minstens één vormvaste rechte hoek aanwezig moet zijn, zoals er in fig. 2a één met een wat donkerder raster is aangegeven.

In fig. 2b ontbreekt zo'n vormvaste rechte hoek, het staafwerk is dan ook niet vormvast. Verplaatsen we de diagonaal in vak A echter naar B dan is het staafwerk weer wel vormvast. Ga een en ander zelf na!

Ook bij het staafwerk van fig. 2c ontbreken dergelijke vormvaste rechte hoeken. De diagonalen zijn als het ware alleen in de 'witte' of 'zwarte' velden van een denkbeeldig schaakbord aangebracht.

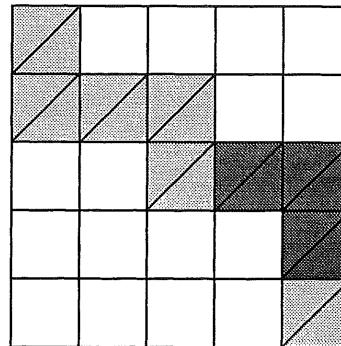
Op het eerste gezicht lijkt dit een heel goede constructie. De niet vormvaste vierkanten in het geheel zien echter geen kans een rotatie van de wel vormvaste delen tegen te gaan, zoals in fig. 2d is weergegeven.

Het is verreweg het beste om zich deze configuratie in het hoofd te prenten als *niet vormvast* en daarna pas na te gaan waarop dit berust. Als men namelijk iets te oppervlakkig redeneert, is men licht geneigd deze configuratie wèl als vormvast te beschouwen.

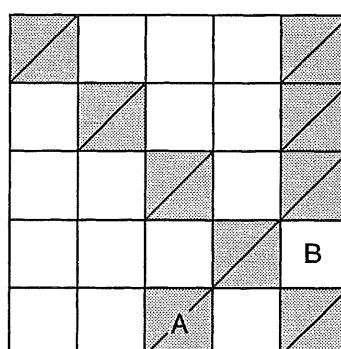
Zoals reeds eerder is vermeld, is de vormvastheid van een dakvlak dikwijls van groot belang voor het afdragen van horizontale krachten en dient men hier de nodige aandacht aan te besteden. Hier wordt nader op ingegaan in de paragrafen 17.3 [362] en 17.4 [368].

Fig. 2 Verspringende verstijfde traveeën in x - en y -richting

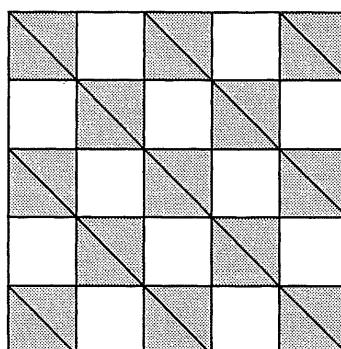
- Wèl vormvast
- Niet vormvast
- Een verstijving in de vorm van een schaakbord-patroon is niet vormvast
- Vervorming van het 'schaakbordpatroon'



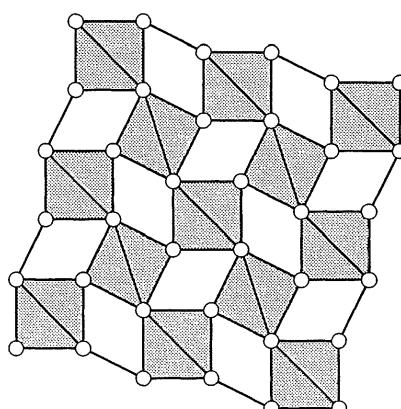
2



b



c



d

16 VAKWERKEN

Bepaling van de krachtsverking langs analytische en grafische weg

16.1 ALGEMEEN

16.1.1 OVERZICHT VAN DE STOF

Onder vakwerken verstaan we min of meer liggerachtige configuraties, die uitsluitend zijn opgebouwd uit driehoeken, zie fig. 1a. We beperken ons hierbij tot statisch bepaald opgelegde vakwerken, ondersteund door een rol en een scharnier. Eén of twee overstekken, zoals is weergegeven in fig. 1b, kunnen in principe aanwezig zijn, maar komen zelden voor.

Voor de berekening van de krachtsverking worden twee methoden gehanteerd:

16.2 Analytisch; de snedemethode

16.3 Grafisch; de methode Cremona

Hoewel het de meeste studenten na enige oefening wel lukt om de staafkrachten te berekenen, is het doorzien van de krachtsverking van het vakwerk voor velen aanmerkelijk moeilijker. Daartoe is in 16.1.4 het vakwerk opgevat als een ligger – zij het met veel gaten erin – die in principe kan worden behandeld zoals dat in KW-2 bij liggers is gebeurd. In de paragrafen 16.2 en 16.3 wordt hier in meer gedetailleerde vorm weer op teruggekomen.

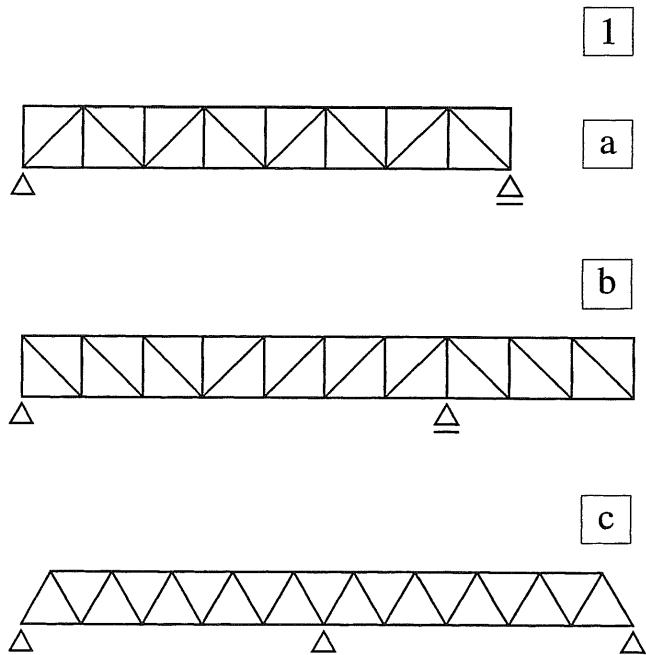


Fig. 1 Een vakwerk is opgebouwd uit driehoeken

- a. Vrij opgelegde vakwerkligger
- b. Vakwerkligger met een overstek
- c. Statisch onbepaalde vorm

16.1.2 VAKWERKVORMEN

Alhoewel zeer vele vakwerkvormen mogelijk zijn, komen bij de vrij opgelegde vakwerken hoofdzakelijk onderstaande typen voor:

- een rechthoekige vorm met een evenwijdige boven- en onderrand (vakwerkligger),
 - een geheel of gedeeltelijk parabolische vorm.
 - een driehoekige vorm (vakwerkspant),
- Bij bouwkundige constructies worden voornamelijk de vormen a. en c. toegepast; in de bruggenbouw daarentegen de vormen a. en b.

In eerste instantie worden uitsluitend *vlakke vakwerken* beschouwd. Hierbij liggen alle staven in één en hetzelfde platte vlak, zie fig. 2b en fig 3. Als dit niet het geval is spreekt men van een *ruimtevakwerk*, zie fig. 2a. Deze worden besproken bij Ruimtelijke constructies.

De ruimtevakwerkligger van fig. 2a is zowel in het verticale vlak als het horizontale vlak stabiel. Het vlakke vakwerk van fig. 2b daarentegen, is alleen stijf als het zijdelings wordt gesteund, zoals op de foto waar het op een plat vlak ligt.

Bij de diagonalen spreekt men – uitgaande van beide opleggingen – van vallende en stijgende diagonalen, zie fig. 3a1 en a2. Als de verticalen ontbreken, dan wisselen stijgende en vallende diagonalen elkaar af, zie fig. 3a3.

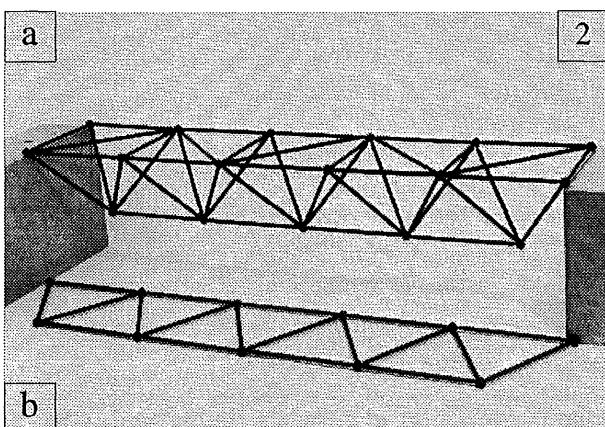
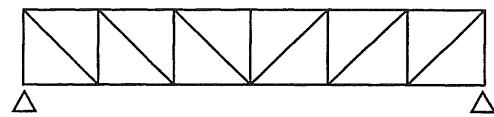


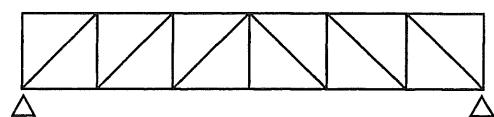
Fig. 2 Basisvormen van vakwerkliggers

- Ruimtevakwerk; stijf in alle richtingen
- Vlak vakwerk; stijf in het platte vlak en slap loodrecht daarop

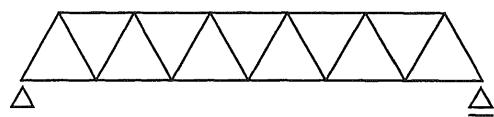
3



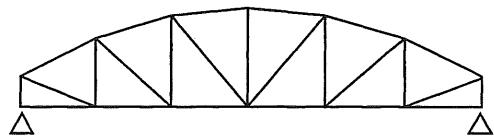
a1



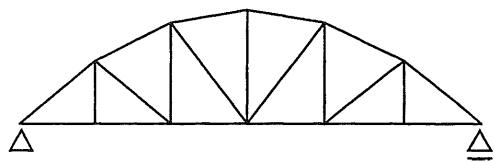
a2



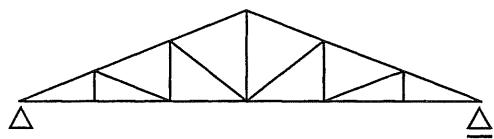
a3



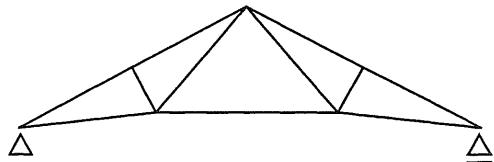
b1



b2



c1



c2

Fig. 3 Hoofdvormen van vlakke vakwerken

- a. **VAKWERKLIGGER:**
- a1 vakwerk met verticalen en vallende diagonalen
 - a2 vakwerk met verticalen en stijgende diagonalen
 - a3 vakwerk zonder verticalen
- b. **PARABOOLVORMIG VAKWERK**
- b1 'afgeknotte' paraboolvorm
 - b2 zuivere paraboolvorm
- c. **VAKWERKSPANT:** driehoekige vorm
- c1 rechte onderrand
 - c2 geknikte onderrand: Polonceauspant

16.1.3 SCHEMATISERING VAN VAKWERKEN

Voor de schematisering en de berekening van vakwerken kan van de volgende aannamen worden uitgegaan, zie fig. 1:

- Alle staafassen liggen in hetzelfde platte vlak (i.h.a. een verticaal vlak).
- Alle staafassen snijden elkaar per knooppunt in één en hetzelfde punt.
- Alle knooppunten mogen als scharnieren worden beschouwd.
- Alle belastingen grijpen uitsluitend aan in de knooppunten.
- De vervormingen van de staven zijn verwaarloosbaar klein, zodat de vorm van het vakwerk ten gevolge van de belasting niet verandert.
- De vakwerken zij steeds statisch bepaald opgelegd (scharnier + rol, c.q. pendelstaaf).

Omtrent de bovenstaande aannamen zijn een aantal opmerkingen te maken:

- In werkelijkheid zijn alle staven van een vakwerk buigvast met elkaar verbonden en zal men trachten om de boven- en onderrand van een vakwerk als doorgaande staven uit te voeren. In werkelijkheid is een vakwerk dus veelvoudig statisch onbepaald, zie fig. 1a.
- Het blijkt echter dat de buigende momenten in de staven bij buigvaste verbindingen verwaarloosbaar klein blijven, zodat de aanschouwing van scharnierende verbindingen even betrouwbare resultaten geeft. De berekening wordt hierdoor wel een stuk gemakkelijker.
- Desalnietemin moeten er altijd voorzorgen worden getroffen dat de staven van het vakwerk zich niet buiten het vlak van het vakwerk kunnen verplaatsen, zie hiervoor: KW-5 en DRAAGCONSTRUCTIES I.
- Meestal zullen de grote uitwendige krachten rechtstreeks ter plaatse van de knooppunten van het vakwerk aangrijpen. Alle belastingen waarvoor dit niet geldt – zoals voor het eigen gewicht – worden vervangen door equivalente puntlasten die in de knooppunten aangrijpen, zie fig. 1d.

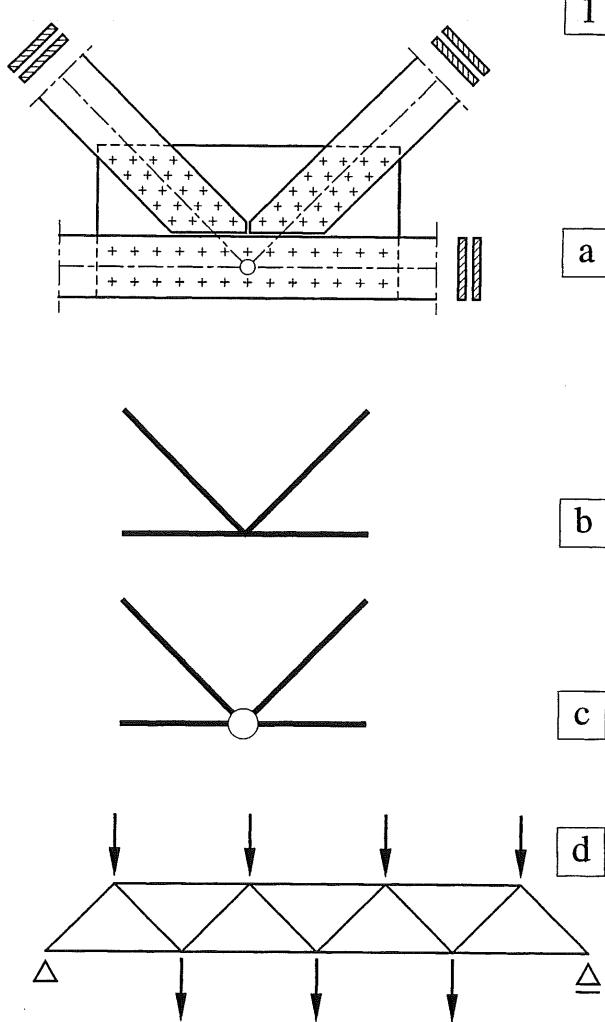


Fig. 1 Aannamen voor de berekening van een vakwerkknoppen

- Vroeger veel toegepaste uitvoering van knooppunten: een schetsplaat waarop de staven worden aangesloten; (de getekende uitvoering is in hout)
- schematisering van het knooppunt: alle staafassen snijden elkaar in één punt
- Buigvaste verbindingen in de aansluitingen worden als scharnieren beschouwd
- Alle belastingen grijpen aan in de knooppunten

De vakwerkstaven kunnen op velerlei manieren aan elkaar worden verbonden, waarbij het constructiemateriaal (staal of hout) een grote rol speelt. Hierop wordt uitvoeriger ingegaan in DRAAGCONSTRUCTIES I.

Ter illustratie slechts twee voorbeelden.

Een houten spant waarbij alle staven naast elkaar liggen en elkaar overlappen, zie fig. 2a.

Een stalen vakwerk opgebouwd uit buisprofielen die aan elkaar zijn gelast, zie fig. 2b.

De vakwerken waar bouwkundigen het meeste mee te maken hebben, zijn vakwerkliggers en vakwerkspanten. In principe zijn dit liggers op twee steunpunten die in hun totaliteit weer dwarskrachten en buigende momenten over moeten dragen. In de berekening zelf komt dit slechts verkapt tot uiting; in alle staven treden immers alleen maar normaalkrachten op.

Als alle staafkrachten van een vakwerk echter bekend zijn, dan is verhelderend achteraf na te gaan op welke wijze de staafkrachten hun aandeel aan de dwarskracht en het buigende moment van de '*ligger*' leveren.

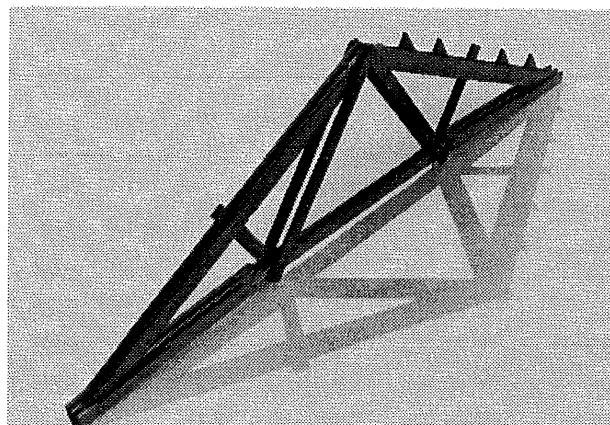
Hiertoe is in [346-353] een aantal uitgewerkte voorbeelden opgenomen. Men krijgt dan ook een goede indruk waar de grootste krachten optreden en waarom dit zo is.

Aangezien de hier te behandelen vakwerken als statisch bepaalde constructies zijn te beschouwen, kan de krachtsverdeling op een betrekkelijk eenvoudige wijze zowel analytisch als grafisch worden bepaald. Zoals reeds is vermeld, worden twee mogelijkheden besproken:

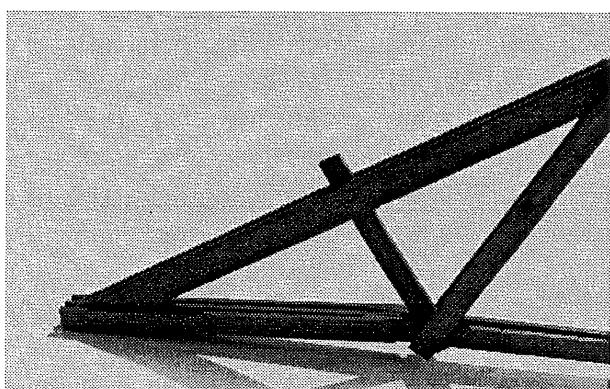
- 1 de snedemethode (analytisch)
- 2 het gebruik van een Cremona (grafisch)

De snedemethode is vooral aangewezen als men vooraf weet in welke staven de grootste normaalkrachten optreden en men uitsluitend daarvan de grootte wenst te kennen.

Bij de grafische methode moeten in principe alle staafkrachten worden bepaald, maar aan het eind van de berekening heeft men wèl een controle op de juistheid hiervan.



a1



a2



b

Fig. 2 Uitvoeringsvormen van vakwerken

- a. Model van een houten vakwerkspant
- a1 schuin van boven gezien
- a2 van opzij gezien
- b. Stalen vakwerklijger opgebouwd uit buisprofielen (loopbrug van het Stevinlab)

16.1.4 OVERGANG VAN EEN LIGGER NAAR EEN VAKWERK

Om de krachtswerking in een vakwerk te kunnen vergelijken met die in een ligger, zullen we terugrijpen op de eenzijdig ingeklemde ligger die al in KW-2 [207] is behandeld, zie fig. 1a. We verdelen de ligger in vierkante moten, waarbij we elke moot in de naastliggende moot ingeklemd kunnen denken. Bij een gegeven uitwendige belasting zijn de oplegreacties op de gebruikelijke wijze te berekenen, zie fig. 1a. Uiteraard zijn voor *elke* moot de daarop werkende momenten en dwarskrachten aan te geven; fig. 1b. We hebben in [207-208] ook gesteld dat een volledige inklemming met goede benadering kan worden vervangen door een rol en een scharnier op korte afstand van elkaar te plaatsen, zoals dit in fig. 1c voor de rechterzijde van de moot is aangegeven. De verticale reactiekracht wordt dan door het scharnier opgenomen en het koppel door twee evenwijdige en tegengesteld gerichte horizontale krachten ter plaatse van de rol en het scharnier. Hierbij geldt dan: $R_H = 3F$. De rol kan dan zowel trek- als drukkrachten opnemen.

De volgende stap is weergegeven in fig. 1d; de rol is vervangen door een pendelstijl (1) ter lengte van een moot en het scharnier door een veel groter scharnier – ook met de afmetingen van een moot – door twee pendelstijlen (2) en (3) in de top scharnierend aan te sluiten. Vanuit de moot werken dan actiekrachten, die gelijk en tegengesteld gericht zijn aan de reactiekrachten van fig. 1c. In fig. 1d worden de horizontale actiekrachten $3F$ van het koppel en rechtstreeks afgevoerd via de pendelstijlen 1 en 3. De verticale kracht in de top van het scharnier moet echter worden ontbonden langs de pendelstijlen 2 en 3, zie fig. 1e. Hierdoor ontstaat in pendelstijl 2 een trekkracht en in pendelstijl 3 een drukkracht. De horizontale componenten van deze beide krachten veroorzaken een toename van het moment met $\Delta M = Fa$ en de verticale component is gelijk aan de uitwendige kracht F . Het eindresultaat is in algemene termen weergegeven in fig. 1f.

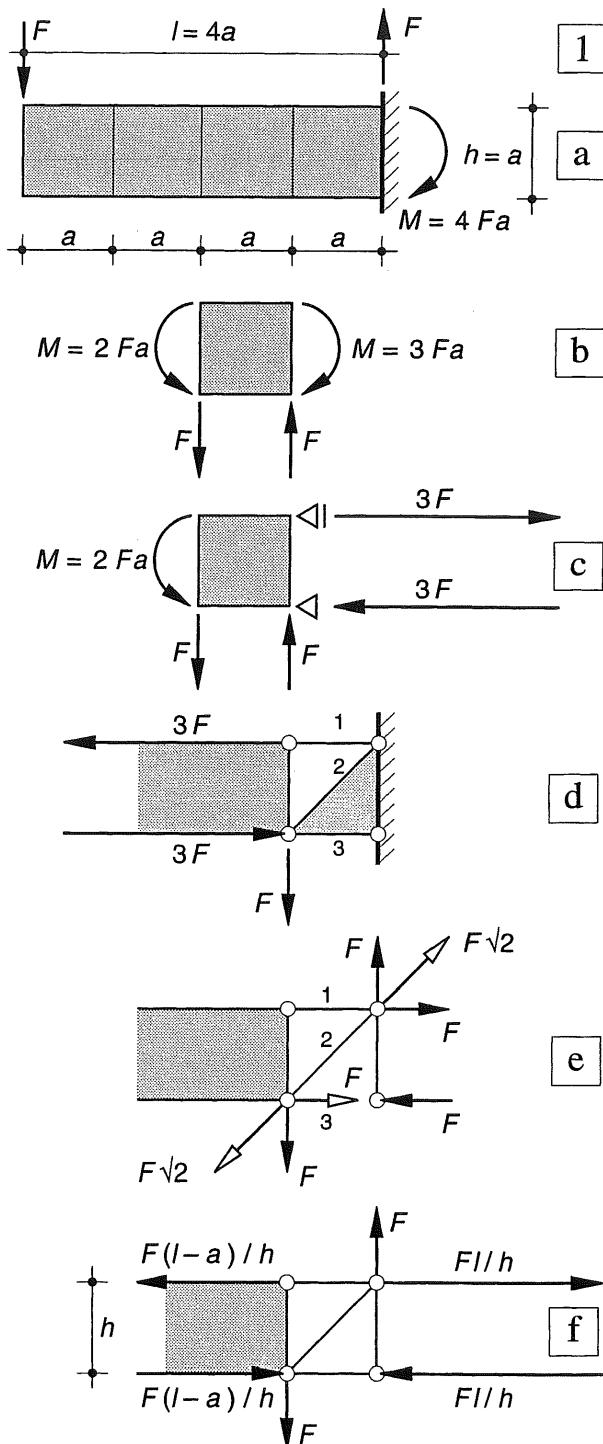


Fig. 1 Eenzijdig ingeklemde ligger verdeeld in moten
 a. Schema
 b. Evenwicht afzonderlijke moot
 c. Inklemming rechts vervangen door een rol en een scharnier
 d. Rol vervangen door een pendelstijl; scharnier door twee in de top verbonden pendelstijlen
 e. Staafkrachten in de pendels veroorzaakt door de verticale actiekracht F
 f. Eindresultaat in algemene termen

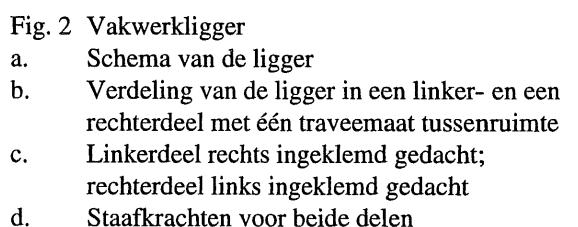
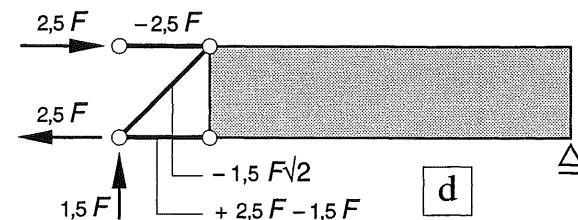
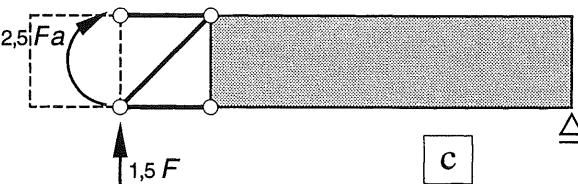
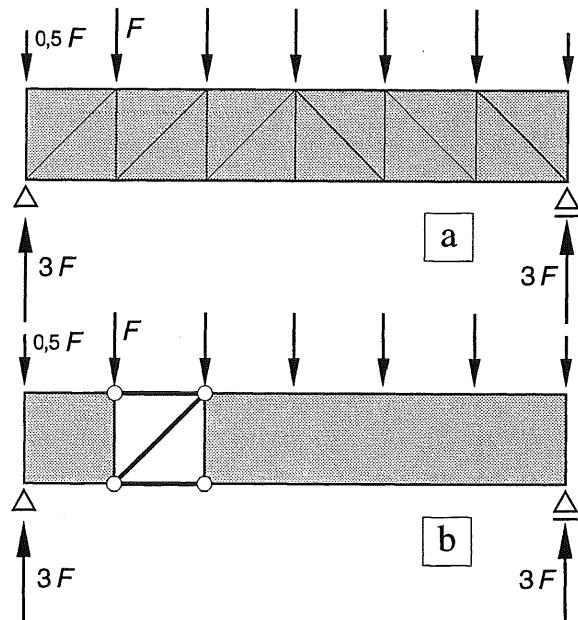


Fig. 2 Vakwerkligger

- Schema van de ligger
- Verdeling van de ligger in een linker- en een rechterdeel met één traveemaat tussenruimte
- Linkerdeel rechts ingeklemd gedacht; rechterdeel links ingeklemd gedacht
- Staafkrachten voor beide delen

Vrij opgelegd vakwerk

In fig. 2a is een vrij opgelegde vakwerkligger weergegeven, die we in eerste instantie weer als een ligger zullen beschouwen. Zodra we de oplegreacties van de ligger hebben berekend, kunnen we in elke snede de dwarskracht en het buigend moment berekenen; dit kan zowel door het linker afgesneden deel te beschouwen, als het rechter afgesneden deel. Het linker deel is dan als het ware in het rechter deel ingeklemd en het rechter deel in het linker.

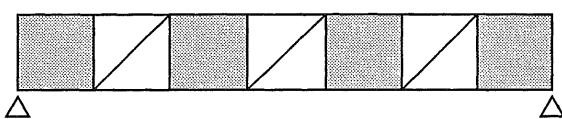
We beschouwen nu van de vakwerkligger een linker en een rechterdeel die een tussenruimte van één travee bezitten, zie fig. 2b. De drie staven tussen beide delen kunnen we nu zowel voor het linker- als het rechter deel als een verende inklemming beschouwen (rol + scharnier).

Aangezien de uitwendige krachten op beide delen bekend zijn, kunnen de staafkrachten op precies dezelfde wijze als voorheen worden bepaald, zie fig. 2c, d.

In fig. 3a is het vakwerk om en om als liggermoot beschouwd en als een stelsel staven die gezamenlijk de pendelstijl en het scharnier vormen. Als we in een tweede stap de liggermoten ook weer vervangen door zo'n stelsel staven, dan zijn de liggermoten gereduceerd tot twee verticale staven met een diagonaal ertussen, zodat een zuiver vakwerk is ontstaan, zie fig. 3b.

3

a



b

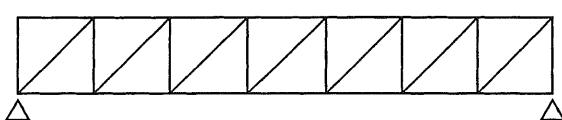


Fig. 3 Vakwerk verdeeld in 'liggermoten' en 'reactiekraam-moten'

- Liggermoten om en om
- Liggermoten gereduceerd tot 2 verticale staven met tussenliggende diagonaal

16.2.1 BEREKENINGSWIJZE

Bij de berekening van een vakwerk volgens de snedemethode, gaan we min of op dezelfde wijze te werk, als bij de berekening van een ligger volgens deze methode, zie KW-2 [220].

De geometrie van het vakwerk en de belastingen worden bekend verondersteld, zie fig. 1a. Allereerst moeten dan de oplegreacties worden bepaald, zie fig. 1b. Evenals bij een ligger kan men hiertoe het statisch moment van alle krachten opmaken om het eerste oplegpunt en vervolgens om het tweede oplegpunt. De verticale componenten van de oplegreacties zijn dan bekend en de voorwaarde: $\sum F_y = 0$ kan dienen als controle. Indien ook horizontale krachten op het vakwerk aangrijpen of de plaats van de opleggingen een horizontale reactiekracht vereist, gebruiken we de voorwaarde: $\sum F_x = 0$.

Om de snedekrachten in een *ligger* te bepalen wordt een snede aangebracht waardoor de ligger in twee stukken wordt verdeeld. Hiervan wordt dan het linker of rechterdeel beschouwd.

In de doorsnede werken dan drie onbekende snedekrachten: N , V , M .

Aangezien alle andere krachten die op dat deel werken bekend zijn, kunnen de drie onbekende snedekrachten worden bepaald met behulp van de drie evenwichtsvergelijkingen.

Bij een *vakwerk* wordt een overeenkomstige aanpak gevolgd. Ook hier wordt een snede aangebracht waardoor het vakwerk in twee afzonderlijke stukken wordt verdeeld, zie fig. 1c. Zo'n snede zal dus altijd twee, drie of meer afzonderlijke staven snijden.

Men beschouwt vervolgens één van de 'afgesneden' stukken en brengt in elke 'doorgesneden staaf' een vooralsnog onbekende staafkracht S aan, die in de staaf een normaalkracht N veroorzaakt, zie fig. 1d. Als de snede niet meer dan drie staven doorsnijdt, kunnen er maximaal drie onbekenden op dat deel werken. Met behulp van de drie evenwichtsvergelijkingen kunnen deze dan worden opgelost.

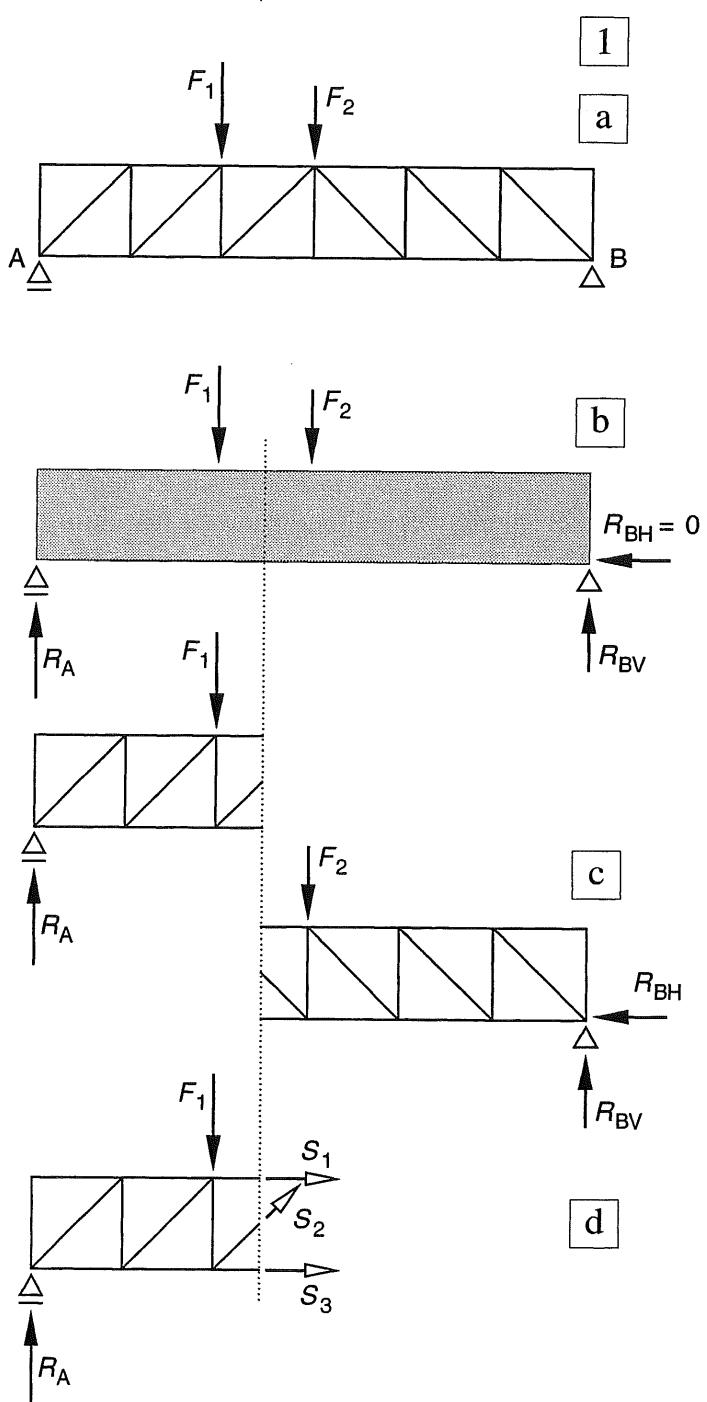


Fig. 1 Berekening vakwerk

- Schema
- Berekening oplegreacties
- Aanbrengen van een snede voor de beschouwing van het linker- of het rechterdeel
- Aanbrengen van drie onbekende normaalkrachten in de doorgesneden staven

Het is even onwennig dat de drie snedekrachten N , V en M bij de *ligger* kunnen worden vervangen door drie normaalkrachten N_1 , N_2 , N_3 bij het *vakwerk*.

Ter verduidelijking het volgende:

Zowel bij de ligger als het vakwerk werken op het afgesneden deel een aantal bekende krachten waarvan in principe de resultante ΣF kan worden bepaald.

Bij de *ligger* wordt deze resultante naar de beschouwde snede verplaatst waarbij een koppel moet worden toegevoegd (KW-2 [220]). Het koppel maakt evenwicht met het buigende moment M en de resultante ΣF wordt ontbonden in een component N evenwijdig aan de staafas en een component V loodrecht op de staafas. Deze componenten maken resp. evenwicht met de normaalkracht en de dwarskracht in de betreffende doorsnede.

Bij het *vakwerk* wordt de resultante echter rechtstreeks ontbonden langs de werklijnen van de drie 'doorgesneden' staven , zie KW-0 [025]. De normaalkrachten in deze drie staven maken dan evenwicht met de drie ontbondenen.



Fig. 2 Stalen vakwerkliggers met vallende diagonalen

Stalen vakwerkliggers worden bij voorkeur uitgevoerd met vallende diagonalen. De diagonalen zijn langer dan de verticalen en de krachten in de diagonalen zijn ook groter dan in de aansluitende verticalen.

Met het oog op het knikverschijnsel (KW-5) kunnen de drukkrachten dan ook het beste worden opgenomen door de verticalen.

16.2.2 NUMERIEKE UITWERKING

In fig. 1a is een symmetrische vakwerkligger weergegeven die is belast door een aantal puntlasten die equivalent zijn met een gelijkmatig verdeelde belasting.

In de vakwerkligger is een viertal stafsoorten aan te wijzen, zie fig. 1a rechts:

- bovenrandstaven (b)
- onderrandstaven (o)
- diagonalen (d)
- verticalen (v)

Soms worden de staven met deze letters en een index aangegeven, bijv. $b_1, b_2, b_3; d_1, d_2, d_3$ enz. Zolang we echter maar enkele staven in één 'vak' van het vakwerk beschouwen, zullen we deze staven meestal met opeenvolgende cijfers aangeven: 1, 2, 3, enz.

De oplegreacties zijn uit symmetrie-overwegingen elk gelijk aan de helft van de totale belasting. Om de snede-methode verder te demonstreren wordt in een willekeurig vak van het vakwerk een verticale snede aangebracht, zie fig. 1a. De preciese plaats van de snede in x -richting doet hierbij niet ter zake, zolang de snede maar niet meer dan de drie te beschouwen staven 1, 2 en 3 snijdt.

We beschouwen vervolgens één van beide afgesneden delen van het vakwerk, en evenals bij de ligger kiezen we hiervoor bij voorkeur het kleinste deel, in dit geval het linkerdeel zie fig. 1b. Het rechterdeel moet bij de hierna volgende berekeningen volledig buiten beschouwing worden gelaten. De beginner kan hiertoe het beste drastisch te werk gaan en het rechterdeel uitsturen of van de tekening afknippen. Het linkerdeel afzonderlijk opnieuw tekenen behoort ook tot de mogelijkheden. Bij voldoende routine kan men wat rustiger te werk gaan, maar in het begin voorkomt deze werkwijze veel vergissingen.

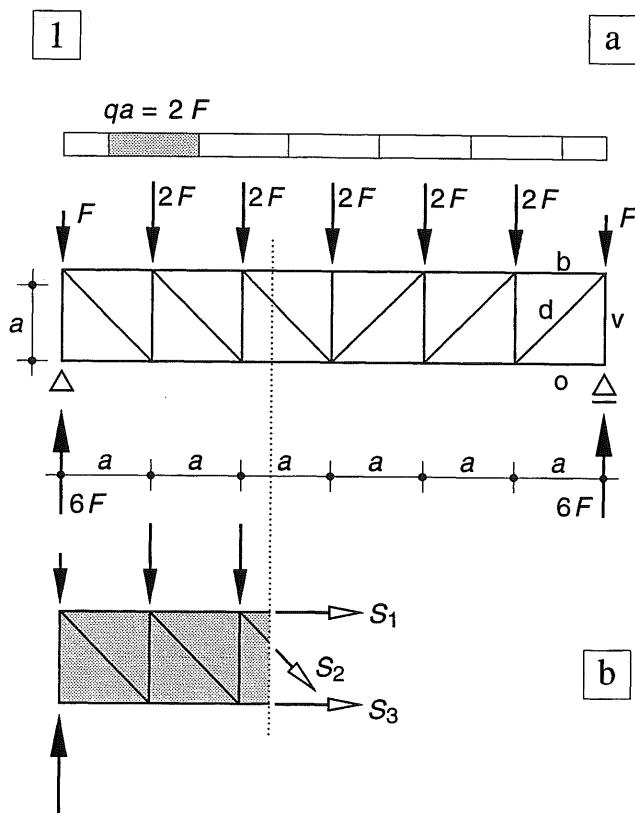


Fig. 1 Symmetrisch belaste vakwerkligger
a. Schema met belasting en afmetingen
b. Beschouwing van het afgesneden deel

16.2.3 RICHTING VAN DE ONBEKENDE STAAFKRACHTEN

In het verlengde van de afgesneden staven moeten de onbekende staafkrachten S_1 , S_2 en S_3 worden getekend. Hierbij zijn twee mogelijkheden voor het aangeven van de richting:

1. Alle staafkrachten worden als trekkrachten op het afgesneden deel aangebracht, zoals in fig. 2a. Als de berekening negatieve waarden oplevert, dan werken daar drukkrachten.
2. De staafkrachten worden aangebracht in de richting waarin men weet of vermoedt, dat ze zullen werken, zie fig. 2b.

Zijn de aannamen juist geweest dan zijn alle waarden positief, zo niet dan treden ook negatieve waarden op en werken de staafkrachten in tegengestelde richting. Deze negatieve krachten moeten dan alsnog in de juiste richting worden getekend.

De eerstgenoemde mogelijkheid werkt het eenvoudigste en geeft de meest directe resultaten, zolang men geen rekenfouten maakt. De normaalkrachten in de staven hebben dan automatisch het juiste teken.

De tweede mogelijkheid is alleen aan te bevelen als men vrij zeker weet in welke richting de staafkrachten zullen werken. Men moet dan voor elke staaf alsnog nagaan welk teken (+ of -) aan de normaalkracht moet worden toegekend.

In fig. 1b is het linkerdeel met de bekende krachten afzonderlijk overgetekend, de onbekende staafkrachten S_1 , S_2 en S_3 zijn alle als trekkrachten aangegeven volgens methode 1.

In [321] is gesteld dat de bekende krachten op het beschouwde deel door hun resultante kunnen worden vervangen en dat deze resultante langs de werklijnen van de staven 1, 2 en 3 kan worden ontbonden. Het blijkt dat deze tussenstap – het bepalen van de resultante – kan worden overgeslagen. Enkel de aanzet tot het bepalen van de resultante wordt gegeven en de ontbinding in de richting van de gegeven werklijnen kan rechtstreeks worden uitgevoerd, zie ook KW-0 [025].

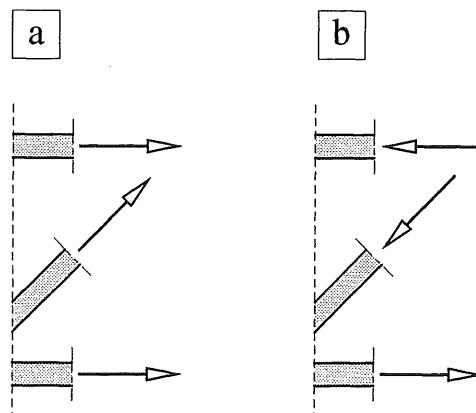


Fig. 2 Richting van de onbekende staafkrachten
 a. Alle staafkrachten worden als trekkrachten op het afgesneden deel aangebracht
 b. De staafkrachten worden aangebracht in de richting waarin we vermoeden (of weten) dat ze zullen werken

16.2.4 EVENWICHTS-BESCHOUWINGEN

Zoals bekend kunnen alle evenwichts-beschouwingen worden uitgevoerd door het moment op te maken om drie punten die niet op een rechte lijn zijn gelegen. Ziet men hierbij kans om een punt te kiezen dat op het snijpunt ligt van de werklijnen van twee van de onbekende snedekrachten, dan wordt de derde snedekracht rechtstreeks in de bekende grootheden uitgedrukt; KW-0 [025].

Om de snedekracht S_1 te bepalen wordt daarom het moment opgemaakt om het snijpunt Q van de staven 2 en 3, zie fig. 1b. Het moment van alle uitwendige krachten (inclusief de drie snedekrachten) moet dan gelijk zijn aan nul.

$$\sum K_Q = 0:$$

$$+ 6F * 3a - F * 3a - 2F * 2a - 2F * a + \\ + S_1 * a = 0$$

zodat geldt:

$$S_1 = -9F$$

Voor de bepaling van staafkracht S_3 moet het moment om het snijpunt P van S_1 en S_2 worden opgemaakt, zie fig. 1c.

$$\sum K_P = 0:$$

$$+ 6F * 2a - F * 2a - 2F * a - 2F * 0 + \\ - S_3 * a = 0$$

Hieruit volgt:

$$S_3 = +8F$$

Om de staafkracht S_2 te bepalen, moet het snijpunt van de werklijnen van S_1 en S_3 worden gekozen, dat in het oneindige ligt, zie fig. 1d.

De momentvoorwaarde gaat dan over in:

$$\sum F_y = 0:$$

Het is dan aan te bevelen S_2 te ontbinden in een verticale en een horizontale component.

$$-6F + F + 2F + 2F + S_{2y} = 0$$

Hieruit volgt:

$$S_{2y} = F \quad \text{zodat geldt:} \quad S_2 = F\sqrt{2}$$

Samengevat

S_1 is een drukstaaf

S_2 en S_3 zijn trekstaven

Als we op het afgesneden deel verdere berekeningen willen uitvoeren, zullen we eerst S_1 in de tegengestelde richting moeten aanbrengen.

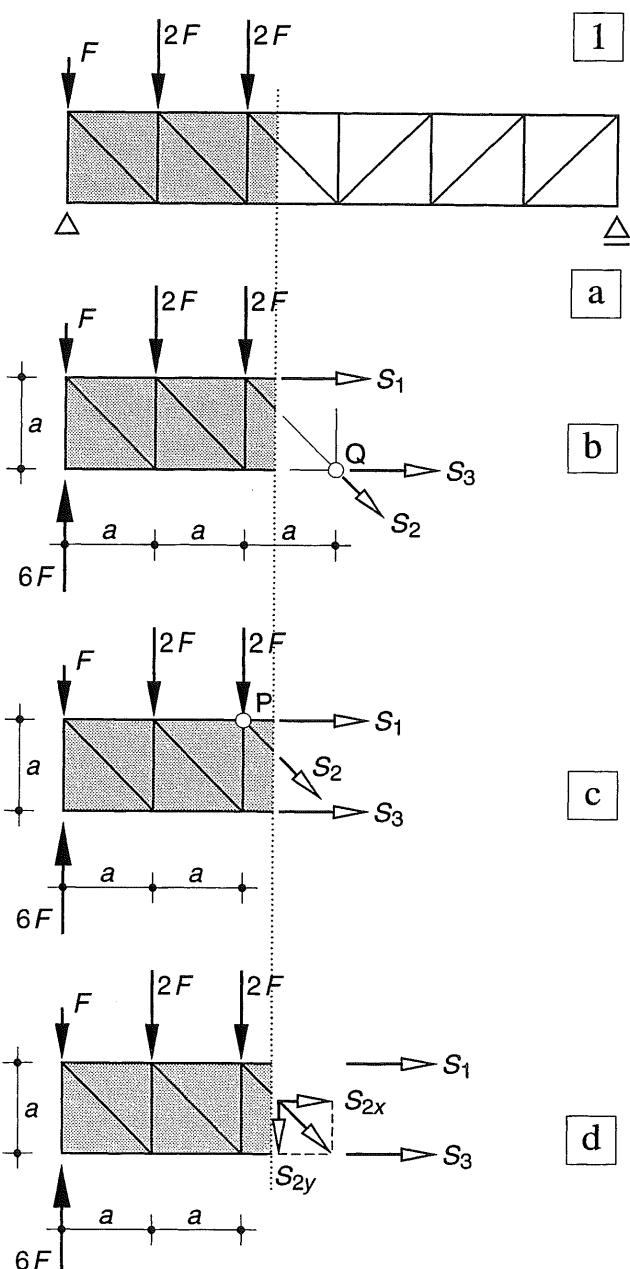


Fig. 1 Bepaling staafkrachten vakwerkligger
 a. Schema van het vakwerk en de belastingen
 b.c.d. Bepaling van S_1 , S_3 en S_2

Als de staafkrachten S_1 en S_3 bekend zijn, kan de waarde van S_2 ook worden bepaald door controle van het horizontale evenwicht, zie fig. 1d:

$$\sum F_x = 0:$$

$$+ S_1 + S_{2x} + S_3 = 0$$

$$S_{2x} = -S_1 - S_3 = +9F - 8F = F$$

zodat we weer vinden:

$$S_2 = F\sqrt{2}$$

2

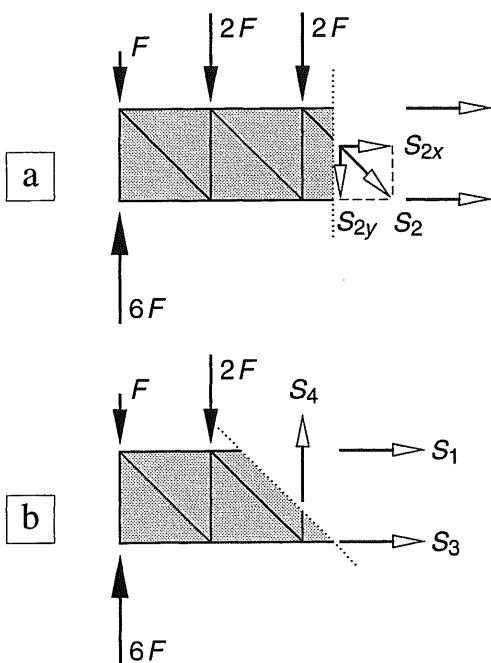


Fig. 2 Staafkrachten in de diagonaal en verticaal bij vakwerkliggers

- a. Staafkracht in een diagonaal bij voorkeur ontbinden in een horizontale en een verticale component
- b. Schuine snede aanbrengen voor het bepalen van de staafkracht in een verticaal

16.2.5 STAAFKRACHTEN IN DE DIAGONALEN EN VERTICALEN BIJ VAKWERKLIJGERS

Als de boven- en onderrand van het vakwerk evenwijdig zijn, verdient het aanbeveling de staafkracht in de diagonaal te ontbinden in een verticale en een horizontale component en één (desgewenst twee) van deze component(en) te bepalen, zoals in fig. 1d is gedaan.

Uit de helling van de diagonaal – die niet altijd gelijk aan 45° behoeft te zijn – kan dan de staafkracht in de diagonaal worden bepaald.

Om de kracht in een verticale staaf te bepalen kan een schuine snede worden aangebracht over drie staven. Hierbij is het weer uitermate belangrijk om het rechter afgesneden deel volledig weg te denken om geen kracht mee te tellen die niet rechtstreeks op het afgesneden stuk werkt.

Als we nu het verticale evenwicht beschouwen, vallen de horizontale staafkrachten weg en is de verticale staafkracht rechtstreeks te bepalen.

Bepaling van S_4 :

$$\sum F_y = 0:$$

$$-6F + F + 2F - S_4 = 0$$

zodat geldt:

$$S_4 = -3F$$

Nogmaals voor alle duidelijkheid: als de methode van [323-1.] wordt toegepast, geeft het teken van de staafkracht tegelijkertijd ook het teken van de normaalkracht in de staaf aan, waarbij zoals gebruikelijk geldt:

+ = trek

- = druk

Zodra we echter verdere berekeningen met de krachten in zo'n snede willen uitvoeren, zullen we de *drukkrachten* eerst in de juiste richting moeten tekenen.

De staafkrachten in verreweg de meeste staven van een vakwerk, kunnen worden bepaald door op overeenkomstige wijze een snede over drie staven aan te brengen. Voor sommige staven is echter extra oplettendheid nodig [326].

16.2.6 STAAFKRACHTEN IN ENKELE BIJZONDERE VERTICALEN

Als men de kracht in de middelste verticaal van het vakwerk wil bepalen, kan alleen een snede over vier staven worden aangebracht, zodat deze staafkracht niet rechtstreeks is te berekenen, zie fig. 1a. Men zal daarom eerst één van de andere staafkrachten moeten bepalen en deze als bekende kracht invoeren voor men S_4 kan berekenen.

Kent men S_2 dan is uit symmetrie-overwegingen ook de staafkracht $S_{2'}$ bekend en kan de voorwaarde $\sum F_y = 0$ worden toegepast.

Dit levert dan, zie fig. 1b:

$$-6F + F + 2F + 2F - S_4 - S'_{2y} = 0$$

$$\text{Nu is } S'_{2y} = S_{2y} = +F$$

zodat volgt:

$$S_4 = -6F + 5F - F = -2F$$

Voor dit soort staven kan echter ook een directe oplossing worden gegeven, namelijk door gebruik te maken van enkele stellingen over de zgn. nulstaven [338-339]

Het bepalen van de verticale staafkracht boven een oplegging is in wezen uiterst eenvoudig, maar vormt voor vele studenten een bron van vergissingen. De vorm van het vakwerk speelt hierbij een grote rol.

In fig. 1c wordt nog steeds uitgegaan van het vakwerk van fig. 1a met *vallende* diagonalen. Het verdient de voorkeur een snede over twee staven aan te brengen en niet over drie staven.

Beschouwing van het verticale evenwicht van het afgesneden deel levert dan direct de oplossing dat de drukkracht in de staaf even groot moet zijn als de oplegreactie.

$$-6F - S_0 = 0 \quad \rightarrow \quad S_0 = -6F$$

NB Bij *vallende* en *stijgende* diagonalen wordt het 'vallen' of 'stijgen' steeds beschouwd vanuit de dichtstbijzijnde oplegging.

Bij een vakwerk met *stijgende* diagonalen blijkt echter, dat na het aanbrengen van een overeenkomstige snede de staafkracht in de verticaal gelijk is aan de verticale belasting aan de bovenzijde van de staaf, zie fig. 1d.

$$+ S_0 + F = 0 \quad \rightarrow \quad S_0 = -F$$

Beschouw vooral de uitgewerkte voorbeelden die zijn weergegeven in paragraaf 16.6.

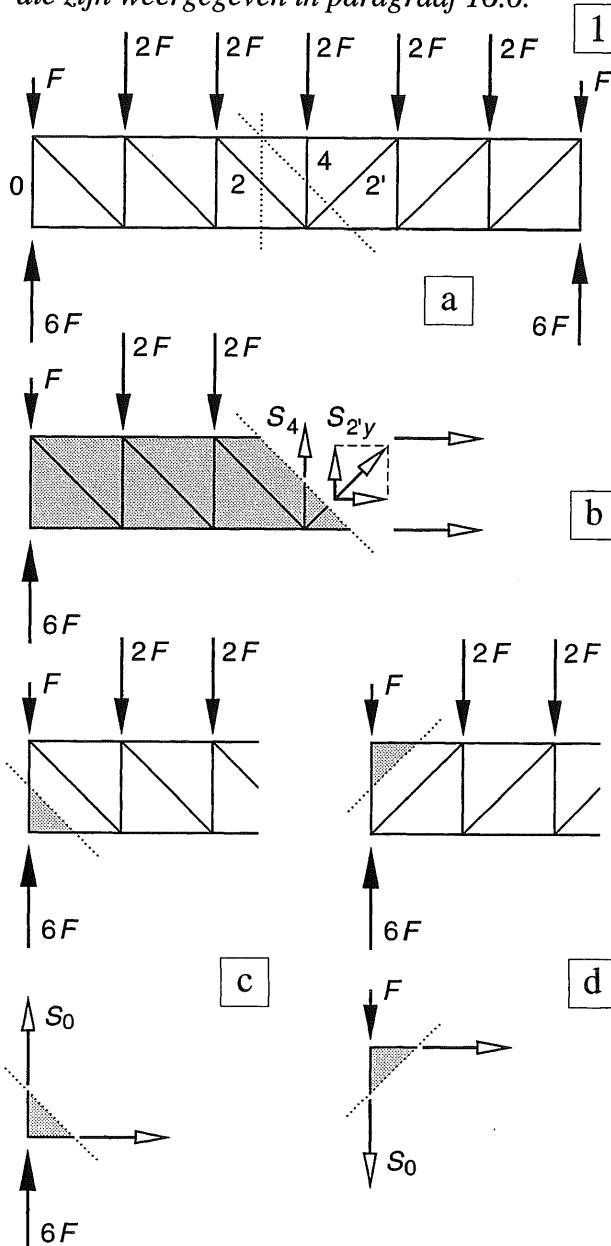


Fig. 1 Staafkrachten in enkele bijzondere verticalen

- a. Schema vakwerkligger
- b. Verticaal in de middendoorsnede
- c. Rand-verticaal bij vallende diagonalen
- d. Rand-verticaal bij stijgende diagonalen

16.3.1 VERGELIJKING VAN TWEE VAKWERKLIGGERS

In fig. 2a zijn voor het vakwerk met de vallende diagonalen, alle staafkrachten in de helft van het vakwerk weergegeven. Voor een gemakkelijker overzicht is hierbij de kracht F gelijk aan 1 gesteld. De lezer zou geen moeite moeten hebben de juistheid van de voorheen nog niet berekende staafkrachten te verifiëren.

Uit de figuur blijkt het volgende:

- 1 alle bovenrandstaven brengen drukkrachten over,
- 2 alle onderrandstaven brengen trekkrachten over (of zijn gelijk aan nul),
- 3 alle diagonalen brengen trekkrachten over,
- 4 alle verticalen brengen drukkrachten over.
- 5 In een 'ruitvormig vak' van het vakwerk (ge rasterd weergegeven in het rechterdeel van de figuur) zijn de krachten in de boven- en onderrandstaaf in absolute waarde aan elkaar gelijk. *Ga na waarom!*

In fig. 2b zijn voor een overeenkomstig vakwerk, maar nu met stijgende diagonalen, de staafkrachten eveneens weergegeven.

Uit de figuur blijkt het volgende:

- 1 alle bovenrandstaven brengen drukkrachten over (of zijn gelijk aan nul),
- 2 alle onderrandstaven brengen trekkrachten over,
- 3 alle diagonalen brengen drukkrachten over,
- 4 de verticalen brengen in principe trekkrachten over (de middelste verticaal en de randverticalen onttrekken zich aan deze regel),
- 5 In een 'ruitvormig vak' van het vakwerk zijn de krachten in boven- en onderrandstaven in absolute zin aan elkaar gelijk.

Vergelijken we beide vakwerken met elkaar dan geldt voor beide:

- drukkrachten in de bovenrand (1)
- trekkrachten in de onderrand (2)

Vergelijken we de absolute waarden van de staafkrachten dan geldt:

- gelijke staafkrachten in de boven- en onder rand van alle 'ruitvormige vakken' (5),
- de staafkrachten in de diagonalen zijn voor beide vakwerken hetzelfde; maar het teken is gewisseld (3),
- de staafkrachten in de boven- en onderrand van 'verticale vakken' zijn bij de twee vakwerken van plaats gewisseld.

Er zit kennelijk een zekere systematiek in de opbouw van de staafkrachten, ook al is de lengte van de twee vakwerken te klein om dit goed tot uiting te laten komen. In het uitgewerkte voorbeeld van [330-1] is dit echter overduidelijk.

In 16.6 [346] wordt nader op de krachtswerking ingegaan en op de rol die de verschillende staven daarin spelen. Hierdoor kan het inzicht aanzmerkelijk worden verdiept zodat we bewust een bepaalde vorm voor een vakwerk kunnen kiezen en niet alleen maar moeizaam staafkrachten moeten berekenen bij een gegeven vorm.

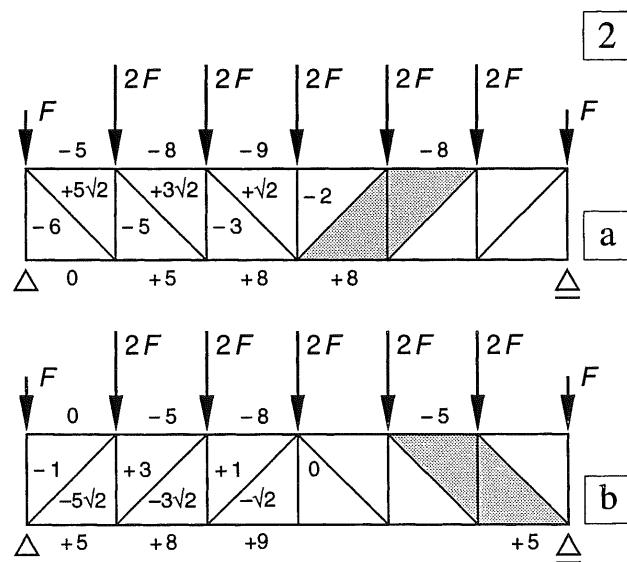


Fig. 2 Staafkrachten in twee vakwerkliggers
a. Vakwerk met vallende diagonalen
b. Vakwerk met stijgende diagonalen

16.3.2 □ INTERPRETATIE VAN DE RESULTATEN

Bij een ligger onder een verticale gelijkmatig verdeelde belasting, kan de krachtswerking duidelijk worden weergegeven door de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn, zie fig. 1a.

Als de gelijkmatig verdeelde belasting wordt vervangen door een stelsel equivalente puntlasten, ondergaat de hoofdkrachtswerking geen wezenlijke veranderingen, zie fig. 1b.

Als een vakwerkligger aan dezelfde belasting wordt onderworpen, moeten in elke verticale snede uiteraard precies dezelfde dwarskrachten en buigende momenten worden overgebracht, zie fig. 1c. Het is echter niet zo gemakkelijk om dit zonder meer uit de grootte van de diverse staafkrachten af te lezen.

Als we in een vakwerk een willekeurige verticale snede aanbrengen, dan is het 'buigend moment' in die snede gelijk aan het statisch moment dat de krachten in de 'doorgesneden' staven leveren. Dit moment mag ten opzichte van elk willekeurig punt worden opgemaakt.

We kiezen hiervoor het snijpunt van de verticale snede met de horizontale lijn die ter halverhoogte van het vakwerk kan worden getekend. We zullen deze lijn als een soort van neutrale lijn beschouwen, zie fig. 2.

Alle staafkrachten worden bekend verondersteld, maar we behoeven ze alleen maar in de 'doorgesneden' staven nader te beschouwen.

De bovenrandstaaf levert een kracht S_1 , de diagonaal een kracht S_2 en de onderrandstaaf een kracht S_3 . Voor de bepaling van het momentevenwicht dienen deze krachten te worden getekend zoals ze op de afgesneden staven werken, zie fig. 2. Hierbij is $F = 1$ gesteld.

Fig. 2 Aandeel van de vakwerkstaven aan het buigend moment in een verticale snede

- a. b. c. krachten in dsn. I – I ; II – II en III – III
- d. Moment-aandelen van de staven tussen B en C

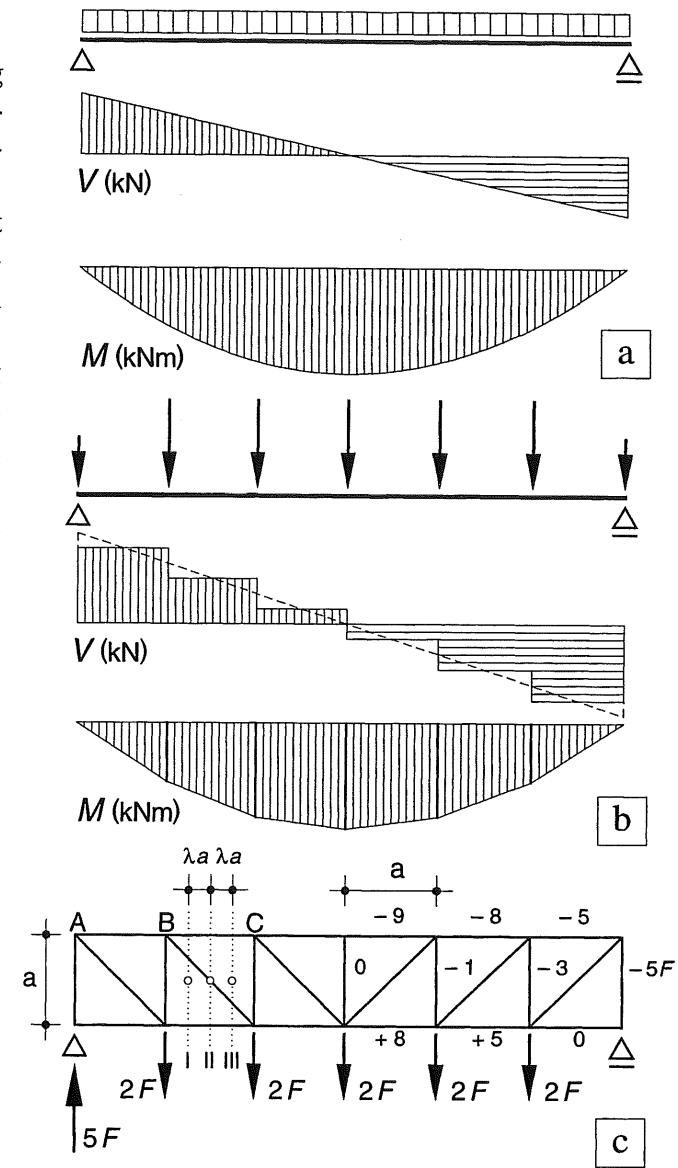
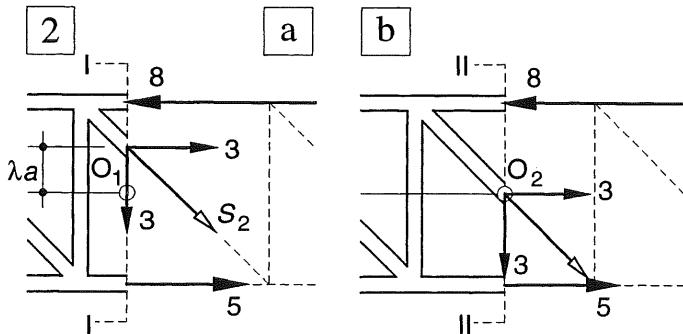
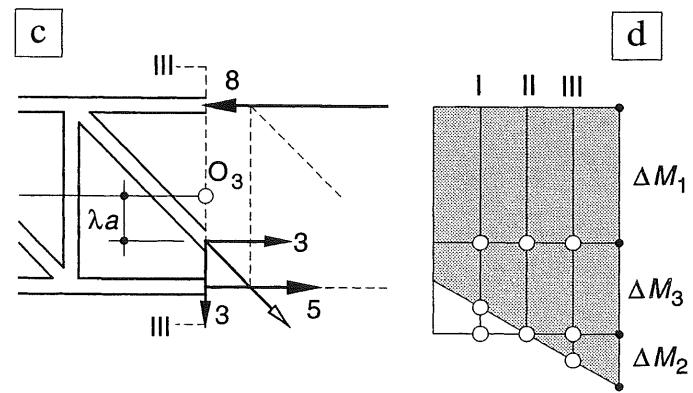


Fig. 1 Krachtswerking bij een ligger

- a. V en M bij gelijkmatig verdeelde belasting
- b. V en M bij een equivalent stelsel puntlasten
- c. De belasting op het vakwerk levert dezelfde V - en M -lijnen op als onder b. is getekend



Moment-aandeel van de staven

3

Bij elke verticale snede tussen B en C leveren de boven- en onderrandstaaf tezamen een constant aandeel aan het buigend moment ter grootte:

$$\Delta M_1 + \Delta M_3 = +S_1 * a/2 + S_3 * a/2$$

De diagonaal levert echter een variërend deel aan het buigend moment. We beschouwen eerst snede II-II, midden tussen B en C, zie fig. 2b. De kracht S_2 gaat dan door punt O_2 waaromheen het buigend moment wordt opgemaakt. De bijdrage van S_2 is daar dus gelijk aan nul.

We beschouwen vervolgens snede I-I, op een afstand λa links van doorsnede II-II, zie fig. 2a. Als we S_2 weer ontbinden in een verticale en een horizontale component, dan gaat S_{2y} door punt O_1 en levert dus geen moment. De component S_{2x} ligt nu op een afstandje λa boven punt O_1 – bij diagonalen onder 45° – en levert dus een *negatief* aandeel aan het moment ter grootte:

$$\Delta M_2 = -S_{2x} * \lambda a$$

In snede III-III op een afstandje λa rechts van doorsnede II-II vinden we op overeenkomstige wijze een *positief* aandeel aan het buigend moment ter grootte, zie fig. 2c:

$$\Delta M_2 = +S_{2x} * \lambda a$$

De bijdrage van de diagonaal is recht evenredig met de afstand van de staafdoorsnijding tot de 'neutrale lijn', en veroorzaakt dus een lineair verlopend buigend moment dat varieert van:

$$-(S_{2x} * a/2) \text{ in B tot } +(S_{2x} * a/2) \text{ in C.}$$

In fig. 2d zijn de moment-aandelen van de drie staven in de vakwerkmoet tussen B en C weergegeven. In fig. 3 zijn de moment-aandelen van de staven voor het gehele vakwerk weergegeven. In de opvolgende 'vakken' van het vakwerk nemen de moment-aandelen van de boven- en onderrandstaven dus sprongsgewijs toe. Het lineair verlopende moment-aandeel van de diagonaal zorgt ervoor dat superpositie van de drie moment-aandelen uiteindelijk de geknikte momentenlijn levert zoals die ook bij de overeenkomstig belaste ligger optreedt; vergelijk fig. 1b en 3c.

Dwarskracht-aandeel van de staven

De dwarskracht is gelijk aan de verticale component van de staafkracht S_2 in de diagonaal. De verticale staven hebben bij dit vakwerk als voornaamste functie: het transporteren van de belasting vanuit het midden van de overspanning vanaf de bovenzijde van de ene diagonaal naar de onderzijde van de volgende diagonaal.

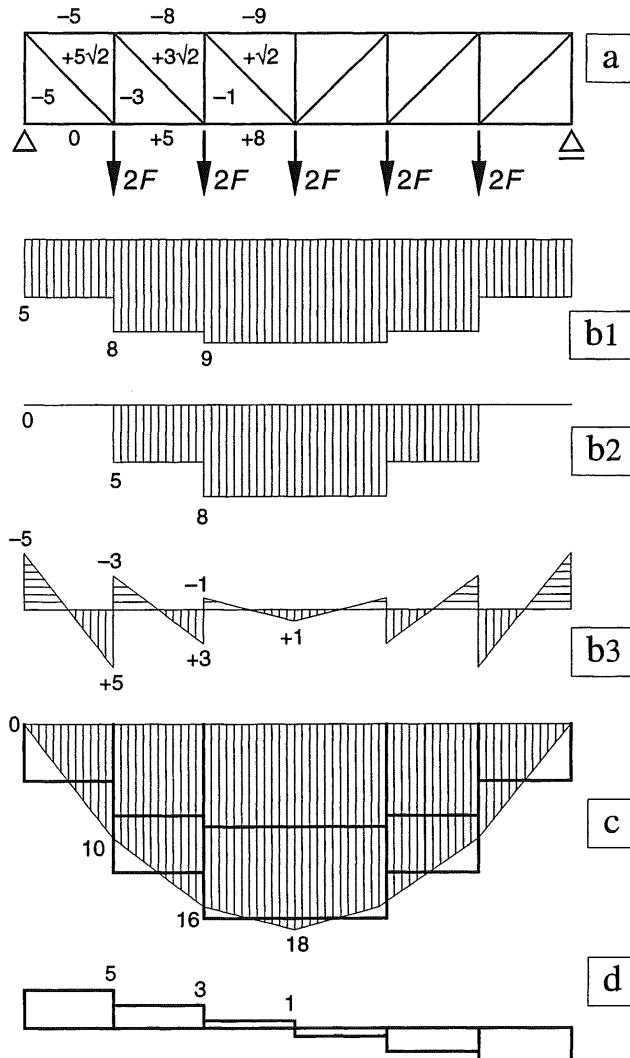


Fig. 3 Bijdrage van de verschillende staven aan het momenten- en dwarskrachten-evenwicht

- Vakwerk met staafkrachten
- Aandeel van de bovenrandstaven, de onderrandstaven en de diagonalen
- Superpositie van de drie aandelen
- Bijdrage van de diagonalen aan de dwarskracht

Het zal duidelijk zijn dat de boven- en onderrandstaven in een verticaal vak van het vakwerk ongelijk groot moeten zijn. Uit de evenwichtsvoorwaarde $\sum F_x = 0$ in elke verticale snede volgt immers dat de horizontale component van de kracht S_2 tezamen met de gelijk gerichte kracht in de boven- of onderrand evenwicht moet maken met de tegengesteld gerichte kracht in de onder- of bovenrand.

16.3.3 BEPALING STAAFKRACHTEN UIT DE DWARSKRACHTEN- EN MOMENTENLIJN

In [324] werd voor elke staaf het moment opgemaakt om een geschikt gekozen punt. Maar nu de relatie bekend is tussen de staafkrachten S van het vakwerk en de snedekrachten V en M van een ligger, kunnen de staafkrachten ook worden bepaald door uit te gaan van de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn.

Een en ander is uitgewerkt in het voorbeeld van fig. 1, met een verhouding $h/l = 1 : 12$.

Afwijkend van het normale gebruik lopen alle diagonalen in dezelfde richting, zodat we van links naar rechts overgaan van vallende diagonalen naar stijgende diagonalen (fig. 1a). Zo komt de systematiek in het teken en de grootte van de staafkrachten het beste tot zijn recht.

Dwarskrachtenlijn

De dwarskrachtenlijn van fig. 1b wordt gebruikt om de verticale component van de staafkracht in de diagonaal te bepalen, zie fig. 1c.

Uitgaande van de oplegreactie is dan direct duidelijk dat bij vallende diagonalen alleen trekkrachten in de diagonalen evenwicht kunnen maken met de oplegreactie en bij stijgende diagonalen alleen drukkrachten.

Als de diagonalen trek overbrengen zullen de verticalen druk moeten overbrengen en omgekeerd. Voor de grootte van de krachten in de verticalen behoeft men slechts het 'zig-zag' pad te volgen waarlangs de uitwendige krachten vanaf het dwarskrachtnulpunt via de verticaal naar de volgende diagonaal worden getransporteerd tot uiteindelijk de oplegging is bereikt.

Als men deze systematiek eenmaal heeft doorzien, dan kunnen de staafkrachten in de verticalen direct worden opgeschreven.

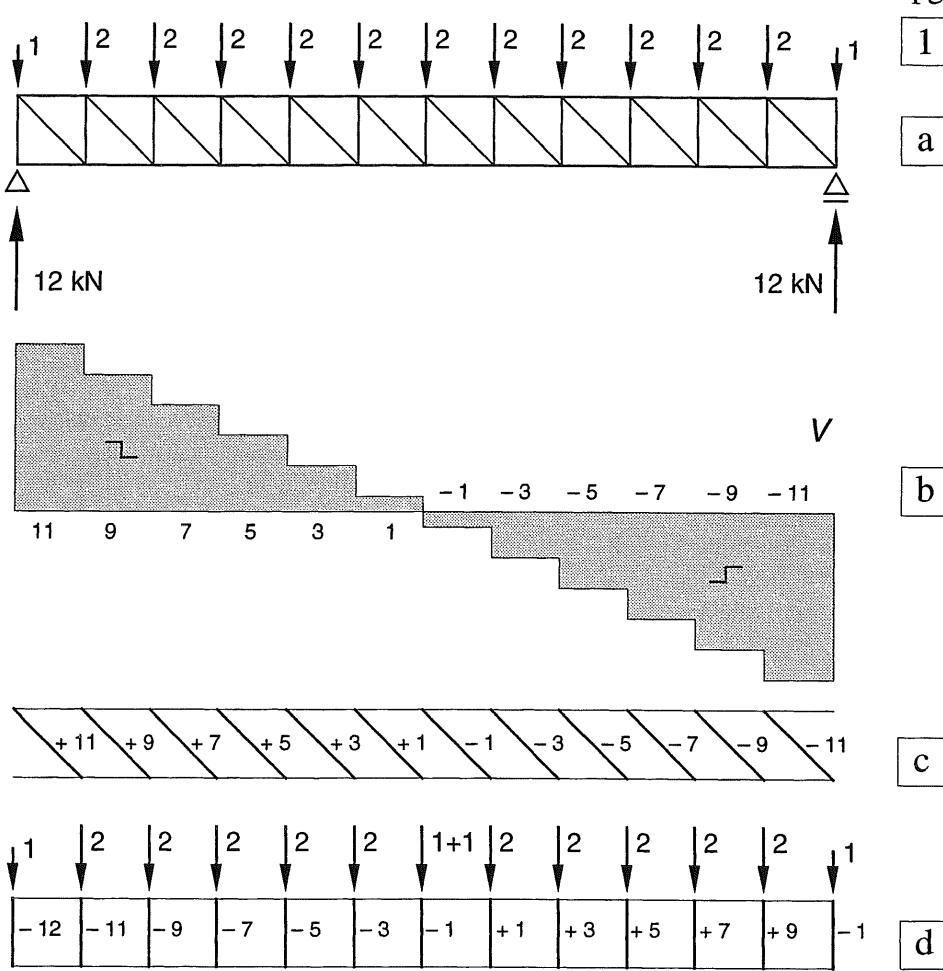


Fig. 1
Bepaling van de staafkrachten uit de dwarskrachtenlijn (asymmetrisch vakwerk)
links: vallende diagonalen
rechts: stijgende diagonalen
 a. Schema
 b. Dwarskrachtenlijn
 c. Verticale component van de staafkracht in de diagonalen
 d. Staafkracht in de verticalen

Bij vakwerken met *vallende* diagonalen komt de regelmatige opbouw van de staafkrachten het beste tot uiting omdat alle diagonalen en verticalen tot aan de oplegging noodzakelijk zijn voor de krachtsafdracht.

Bij vakwerken met *stijgende* diagonalen zijn de buitenste verticalen en bovenrandstaven niet echt nodig voor het afdragen van de belasting, maar alleen om het vakwerk met een verticale rand af te sluiten in plaats van met een schuine rand, vergelijk de staafkrachten op blad [349].

Momentenlijn

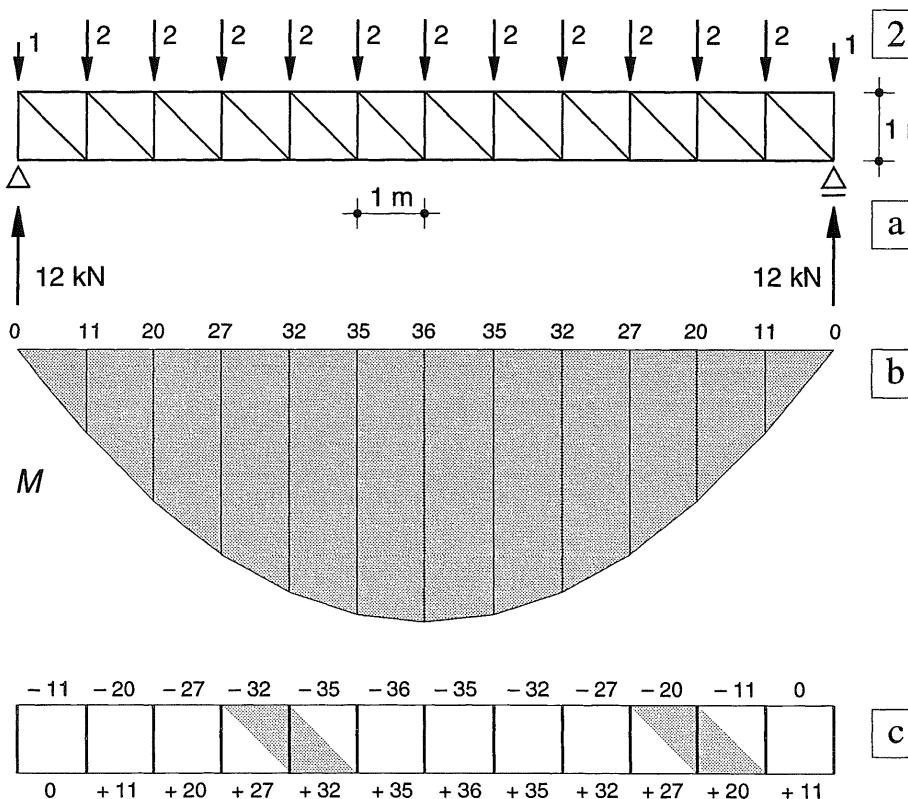
De momentenlijn van fig. 2a geldt voor *elke* verticale doorsnede van het vakwerk. Voor de bepaling van de staafkrachten worden echter alleen de momenten gebruikt ter plaatse van de verticale staven van het vakwerk. Uit stelling 5 van [327] volgt dan direct de grootte van beide staafkrachten in het 'ruitvormige' vak' ter weerszijden van de verticaal. In fig. 2c zijn twee van dergelijke 'ruitjes' met een raster aangegeven.

Het min-teken voor de bovenrandstaven en het plus-teken voor de onderrandstaven zijn bij een vrij opgelegde vakwerkligger vanzelfsprekend. Bij uitkragende vakwerkliggers geldt in het deel waar de negatieve momenten optreden uiteraard het omgekeerde

Functiesplitsing

In een vakwerk met evenwijdige randen treedt een duidelijke functiesplitsing op:

- De boven- en onderrand verzorgen voornamelijk het buigende moment, en wel in het bijzonder het constante aandeel van het buigend moment.
- De diagonalen brengen de dwarskracht over en zorgen voor het varierende deel van het buigend moment.
- De verticalen transporteren de rechtstreeks aangrijpende uitwendige krachten plus de daar over te brengen dwarskracht van de ene diagonaal naar de volgende.



Ter wille van de eenvoud bij de bepaling van het buigend moment hebben alle verticale en horizontale staven van het vakwerk de lengte 1 gekregen

Fig. 2
Bepaling van de staafkrachten uit de momentenlijn bij een asymmetrisch vakwerk

- Schema
- Momentenlijn volgt uit:
 - Integratie van de dwarskrachtenlijn in fig. 1b
 - of het successievelijk toepassen van de snedemethode
- Staafkrachten in boven- en onderrandstaven

16.3.4 □ BOVEN- EN ONDERRAND NIET EVENWIJDIG

Indien de boven- en onderrand van het vakwerk niet evenwijdig zijn, zal evenals voorheen elke verticale snede weer hetzelfde moment en dezelfde dwarskracht moeten overbrengen als de overeenkomstig belaste ligger.

Het heeft in zo'n geval echter geen zin om de staafkrachten weer via de lijnen voor het buigend moment en de dwarskracht te berekenen.

De analytische snedemethode blijkt bij een dergelijk vakwerk wat minder vlot te werken, dan bij een vakwerk met evenwijdige boven- en onderanden. Het principe van de berekening blijft echter onveranderd:

- breng een snede aan, die niet meer dan drie staven snijdt,
- breng de onbekende staafkrachten aan als trekkrachten in de doorgesneden staven,
- maak het momentenevenwicht op om het snipunt van twee van de drie doorgesneden staven om de kracht in de derde staaf te kunnen bepalen.

Indien het vakwerk nauwkeurig op schaal wordt getekend, kan men de benodigde afstanden opmeten of desgewenst berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras of een ander matematisch hulpmiddel.

Alhoewel de grafische methode voor het getekende vakwerk meer voor de hand ligt, is het vakwerkspant van fig. 1a toch langs analytische weg berekend in algemene termen.

Voor de bepaling van de staafkrachten S_1 en S_2 kan een willekeurige snede I-I door de staven 1 en 2 worden getrokken, zie fig. 1a

In het voorbeeld is een verticale snede gekozen op een afstand x_1 vanaf A, zie fig. 1b. Voor de bepaling van S_1 wordt het moment opgemaakt om punt Q (x_1, y_1). Dit kan op twee manieren:

Methode 1.

De onbekende staafkracht wordt ontbonden in een verticale en een horizontale component.

$$R_A * x_1 + S_{1x} (y_2 - y_1) = 0$$

$$S_{1x} = \frac{x_1}{y_2 - y_1} R_A$$

Uit fig. 1b volgt $\tan \alpha = y_2 / x_1$ zodat geldt

$$S_{1y} = S_{1x} \tan \alpha \quad \text{en}$$

$$S_1 = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2}$$

Methode 2.

De staafkracht wordt rechtstreeks bepaald door een loodlijn op haar werklijn neer te laten, zie fig. 1c.

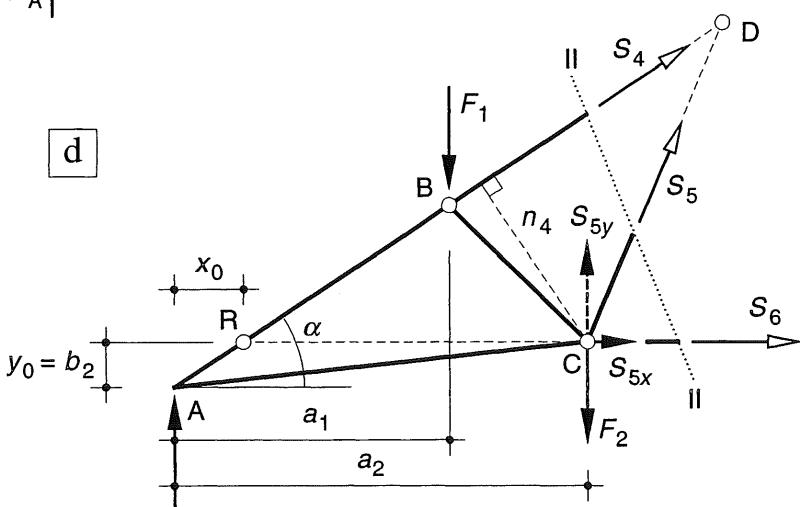
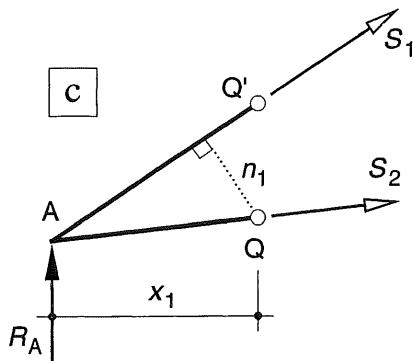
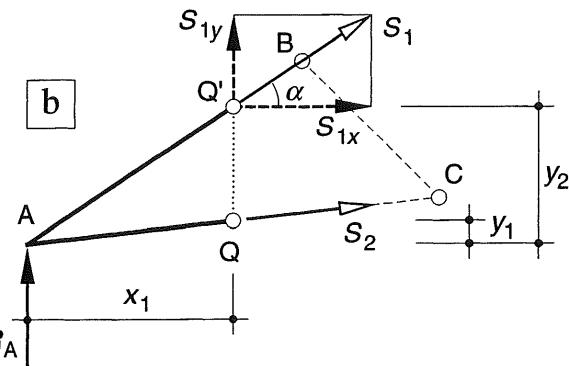
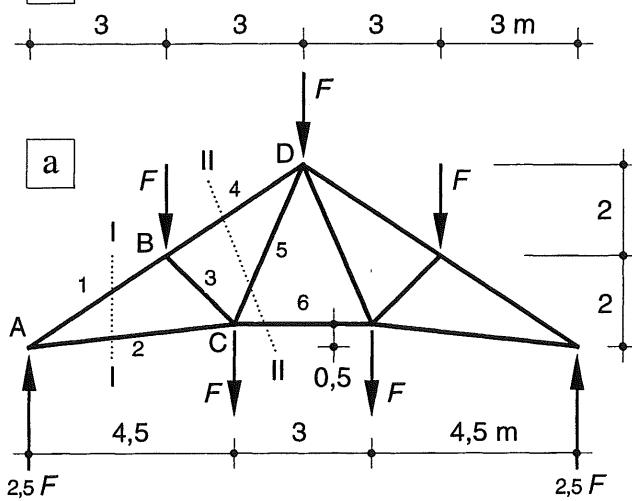
$$R_A * x_1 + S_1 * n_1 = 0$$

$$S_1 = -\frac{x_1}{n_1} R_A$$

Als men de afstanden uit de figuur opmeet, werkt methode 2. sneller. Als men de afstanden wil berekenen, is methode 1. aan te bevelen.

De staafkracht S_2 kan op een overeenkomstige manier worden bepaald door het moment om het punt Q (x_1, y_2) op te maken.

1



Voor de bepaling van de staafkrachten S_4 , S_5 en S_6 wordt een willekeurige snede II-II door deze staven aangebracht, zie fig. 1a en 1d.

Om S_4 te bepalen wordt het moment opgemaakt om punt C; het snijpunt van S_5 en S_6 .

$$\sum K_C = 0: \text{ (methode 2.)}$$

$$+ R_A * a_2 - F_1 * (a_2 - a_1) - F_2 * 0 + \\ + S_4 * n_4 = 0$$

Substitutie van de numerieke waarden levert de staafkracht S_4 .

Om S_5 te bepalen moet het moment nu worden opgemaakt om punt R(x_0, y_0); het snijpunt van S_4 en S_6 ($y_0 = b_2$; $x_0 = b_2 \cot \alpha$)

$$\sum K_R = 0:$$

$$+ R_A * x_0 + F_1 * (a_1 - x_0) + F_2 * (a_2 - x_0) \\ - S_{5y} * (a_2 - x_0) = 0$$

Substitutie van de numerieke waarden levert de staafkracht S_{5y} . Uit de goniometrie van het vakwerk volgt S_{5x} .

$$S_{5x} = \frac{a_3}{2 b_2} S_{5y}$$

De staafkracht S_6 kan op een overeenkomstige wijze worden bepaald door het moment om punt D op te maken.

Fig. 1 Snedemethode bij een vakwerk dat geen evenwijdige randen bezit

- a. Schema Polonceau-spant
- b. Bepaling van de staafkracht S_1 volgens methode I
- c. Bepaling van de staafkracht S_1 volgens methode II
- d. Bepaling van de staafkracht S_5

16.4.1 ALGEMEEN

Uit de snedemethode volgt dat bij een statisch bepaald vakwerk in elk knooppunt de krachten uit het evenwicht kunnen worden bepaald. Aangezien in alle staven alleen maar normaalkrachten optreden, kan voor elk knooppunt een krachtenveelhoek worden getekend die gesloten moet zijn; KW-0 [011].

Grafisch is het echter niet mogelijk om in een willekeurig punt van het vakwerk zonder meer zo'n krachtenveelhoek te tekenen. Dit kan alleen indien in een knooppunt niet meer dan twee staven samenkommen en er één uitwendige kracht aangrijpt. De uitwendige kracht kan dan worden ontbonden langs de twee staven.

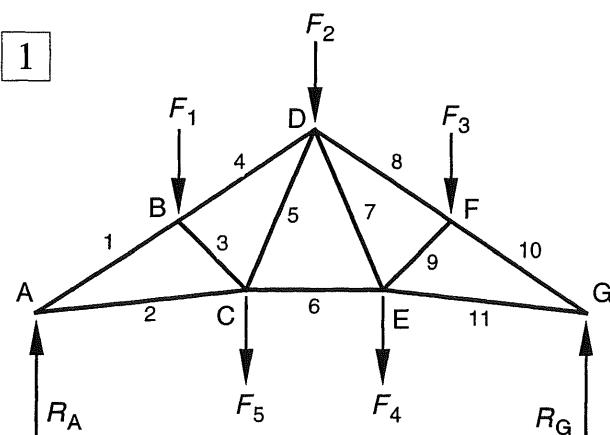
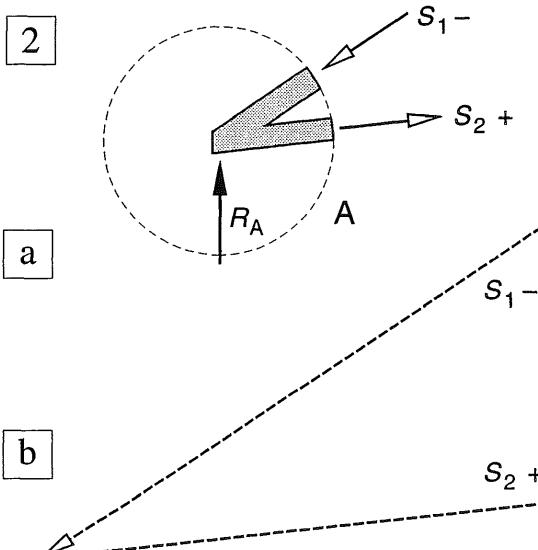


Fig. 1 Schema van het vakwerk



16.4.2 VOORBEELD

We beschouwen het vakwerk dat in fig. [333-1] is behandeld, zie fig. 1. We kunnen dan alleen het opleggen van A maar aanpakken. De drie krachten R_A, S₁ en S₂ moeten evenwicht met elkaar maken. De bijbehorende krachtendriehoek moet dus gesloten zijn, en kan zonder meer worden getekend, zie fig. 2b. Bij het uitzetten van de bekende krachten is steeds een rechtsdraaiende volgorde aangehouden, hoewel dat strikt genomen hier niet nodig is.

De drie krachten werken dus in de aangegeven richting van fig. 2b op punt A. Om te zien welk effect deze krachten op punt A hebben, tekenen we een cirkeltje om punt A dat we als een door gaande snede opvatten, waardoor dit onderdeeltje geheel afzonderlijk van de rest van het vakwerk kan worden beschouwd, zie fig. 2a.

Uit de krachtendriehoek volgt dan:

- De oplegreactie R_A werkt omhoog.
- De staafkracht S₁ werkt schuin omlaag naar links, dat betekent dus dat ze op het afgesneden stukje van staaf 1 een drukkracht moet uitoefenen.

De staafkracht S₂ werkt schuin omhoog naar rechts, ze moet dus op het afgesneden staafdeeltje een trekkracht uitoefenen.



Fig. 2
Grafische bepaling van de staafkrachten S₁ en S₂ in punt A

- Knooppunt A afzonderlijk beschouwd om de richting van de krachten te kunnen vaststellen
- Krachtendriehoek voor het opleggen van A

Nu de staafkrachten S_1 en S_2 bekend zijn, kunnen we wel punt B aanpakken, maar punt C nog niet. In punt B zijn immers de staafkracht S_1 en de uitwendige kracht F_1 bekend, dus ook de resultante van deze twee krachten. Die moet dan weer evenwicht maken met de staafkrachten S_3 en S_4 . In punt C werken twee bekende krachten; S_2 en F_2 , en drie onbekende krachten: S_3 , S_5 , S_6 . Deze onbekende staafkrachten kunnen dus niet eenduidig grafisch worden bepaald.

Om de krachtenveelhoek voor punt B te kunnen tekenen wordt weer een cirkelvormig gebiedje rond punt B beschouwd, zie fig. 3a. Aangezien S_1 een drukkracht is, zal deze schuin omhoog naar punt B toegericht moeten zijn. De uitwendige kracht F_1 werkt omlaag. De krachtenveelhoek is dan eenvoudig te voltooien met de krachten S_4 en S_3 , zie fig. 3b.

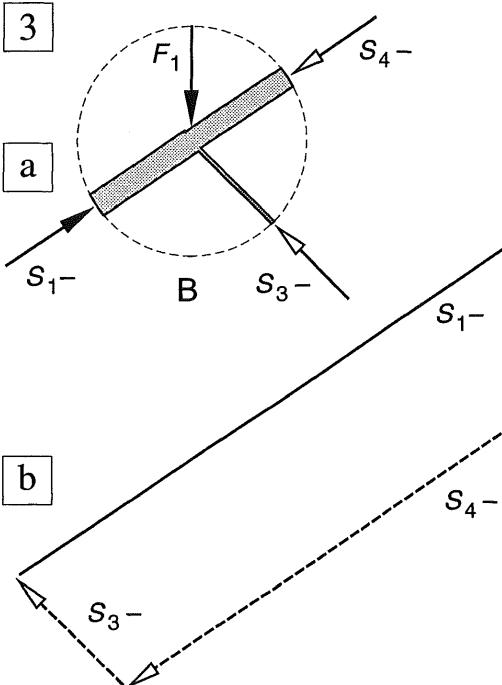


Fig. 3 Staafkrachten rond punt B
a. Richting van de krachten, werkend op punt B
b. Krachtenveelhoek

Fig. 4 Staafkrachten rond punt C
a. Richting van de krachten, werkend op punt C
b. Krachtenveelhoek

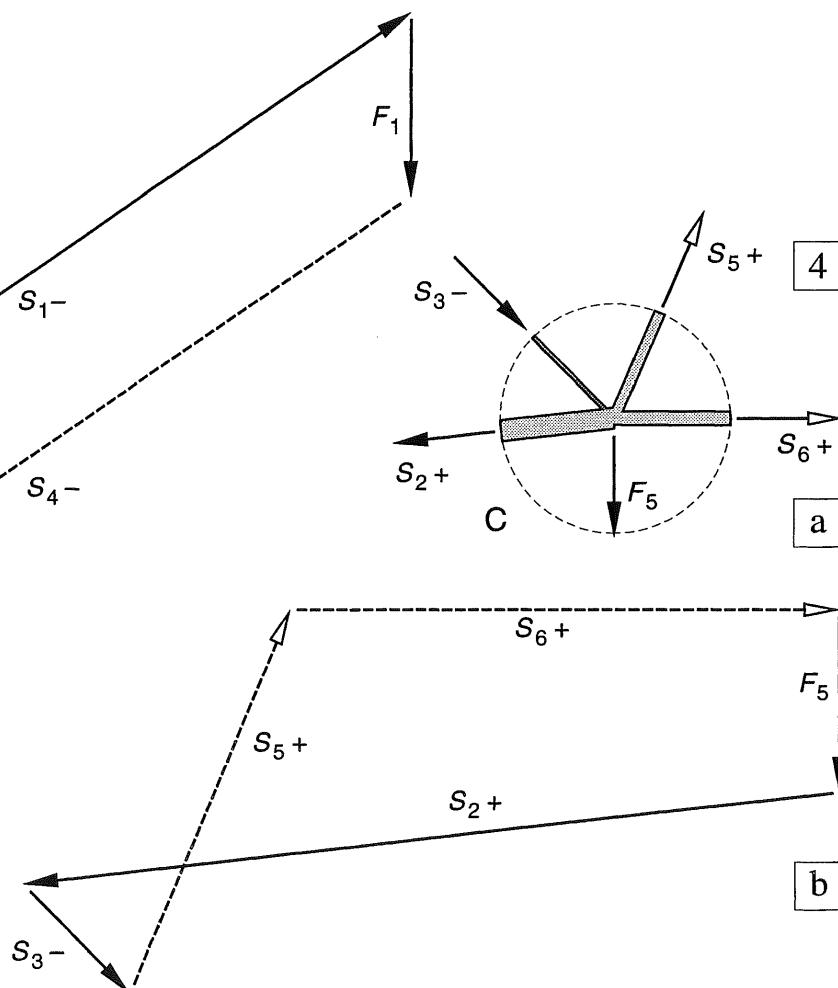
Hierna kan punt C wèl worden aangepakt, zoals blijkt uit fig. 1. We beschouwen weer een cirkelvormig gebiedje rond punt C, zie fig. 4a.

De bekende krachten zijn S_2 (trek), S_3 (druk) en de uitwendige kracht F_2 in punt C, (omlaag gericht).

We kunnen dan eerst de resultante van de bekende krachten F_5 , S_2 en S_3 bepalen, en sluiten de krachtenveelhoek vervolgens met de krachten S_5 en S_6 , zie fig. 4b.

Aangezien zowel het vakwerk als de belasting symmetrisch zijn, is hiermede de krachtswerving volledig bepaald.

Het is uitermate belangrijk om elk knooppunt steeds weer geïsoleerd te beschouwen en na te gaan in welke richting de staafkrachten moeten werken om in de resterende stukjes staaf een trek- of een drukkracht te veroorzaken.



16.4.3 RICHTING VAN DE KRACHTEN OP STAVEN EN KNOOPPUNTEN

Wellicht ten overvloede is een deel van het vakwerk overgetekend met de geïsoleerde punten A en C en de daartussenliggende staaf 2 (A-C), zie fig. 2. Voor elk onderdeel is aangegeven hoe de krachten op dat onderdeel aangrijpen. De toepassing van het beginsel 'actie = reactie' is hier schering en inslag. Ga zo nodig bij het voorbeeld van de touwtrekende kinderen nog eens na hoe een en ander werkt; KW-0 [002].

In fig. 3 is ter controle nog de krachtenveelhoek getekend voor punt D, waarbij weer een cirkelvormig gebiedje rond punt D is beschouwd.

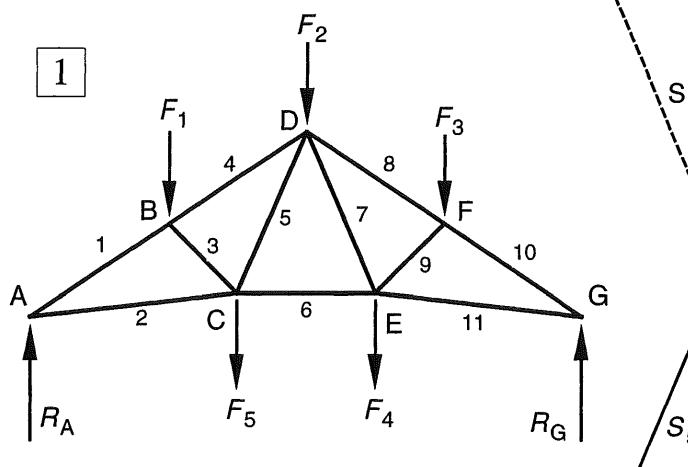
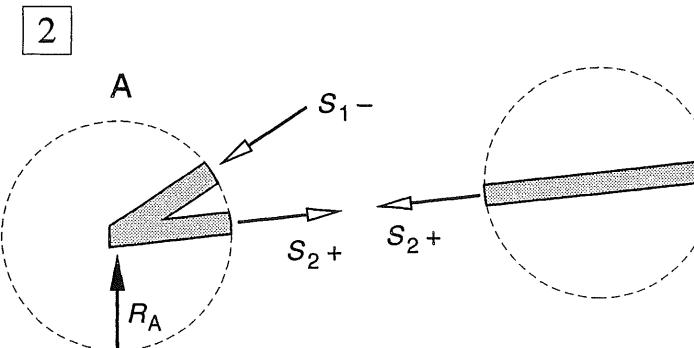


Fig. 1 Schema van het vakwerk

Fig. 2 Evenwicht van de afzonderlijke delen van de onderrandstaaf A-C



In de voorgaande paragraaf is voor elk punt steeds weer een nieuwe krachtenveelhoek getekend, waarbij dan een of meer krachten uit een voorgaande krachtenveelhoek moeten worden overgenomen.

Er bestaat echter een grafische methode, waarbij alle opeenvolgende krachtenveelhoeken op een bepaalde wijze precies passend aaneensluiten. Deze methode is genoemd naar zijn uitvinder: Cremona. De methode wordt behandeld in 16.5 [340].

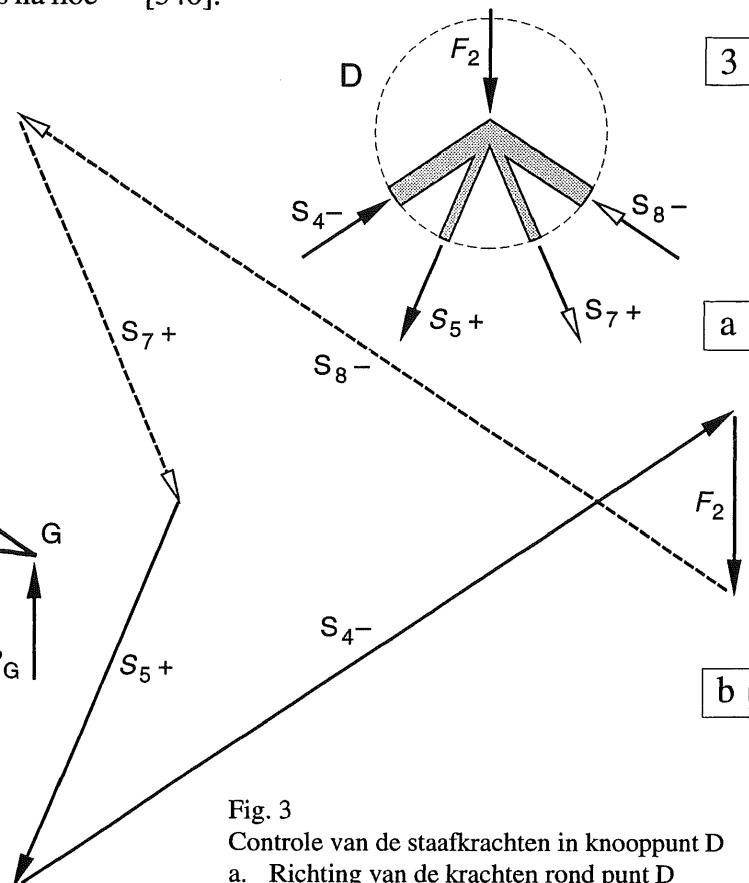
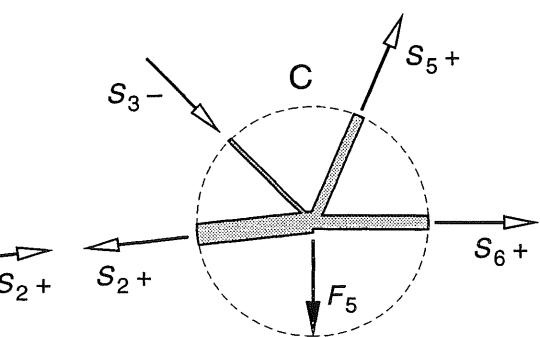
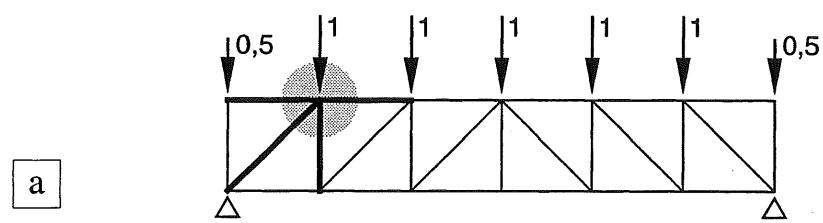


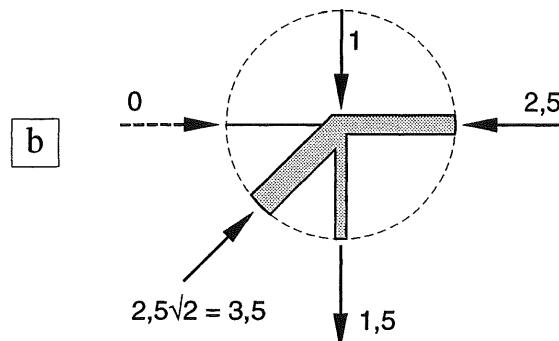
Fig. 3
Controle van de staafkrachten in knooppunt D
a. Richting van de krachten rond punt D
b. Krachtenveelhoek



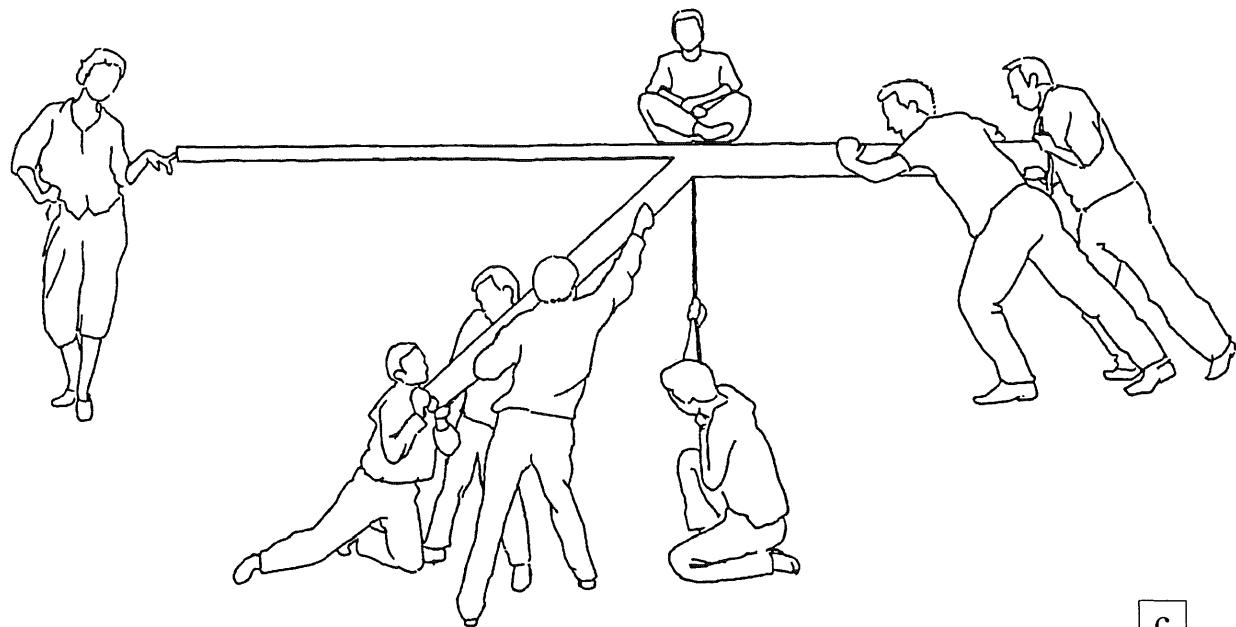
4



a



b



c

Fig. 4 Visualisering van het krachtenspel in een knooppunt van een vakwerk
a. Vakwerk met stijgende diagonalen

- a. Vakwerk met stijgende diagonalen
Vergelijk fig. [327-2b]
- b. Evenwicht van krachten in punt B

- c. Ga voor jezelf na hoe dergelijke krachten door personen op een knooppunt kunnen worden overgebracht en of daar druk of trek in de betreffende staaf uit volgt

16.4.4 NULSTAVEN

Er bestaat een aantal staafconfiguraties waarbij men rechtstreeks de grootte van één of meer staafkrachten kan aangeven, zonder dat de staafkrachten in de aangrenzende staven bekend behoeven te zijn.

Indien de staafkrachten hierbij gelijk moeten zijn aan nul, spreekt men van *nulstaven*. Voor een aantal staafconfiguraties zijn echter nog andere uitspraken te doen over de staafkrachten. Bij de beschouwingen dient men onderscheid te maken tussen *onbelaste* en *belaste* knooppunten, dat wil zeggen; knooppunten waarop geen of wel uitwendige krachten aangrijpen. Deze gevallen worden resp. behandeld in [338] en [339].

Als men een vakwerkligger als een vrij opgelegde ligger beschouwt, zoals in [328-329], dan kan nog een derde categorie nulstaven worden aangegeven. Deze volgen dan uit het verloop van de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn en wel in gebieden waar geldt $V = 0$ en in de omgeving van punten of gebieden waar geldt $M = 0$ [339].

I Onbelaste knooppunten

Drie staven

1. Indien drie staven in willekeurige richtingen samenkomen, zullen in principe krachten optreden in alle drie de staven, zie fig. 1a. Deze krachten kunnen eventueel ook gelijk zijn aan nul, maar dat kan nooit volgen uit de beschouwing van het afzonderlijke knooppunt, maar alleen uit de berekening van het hele vakwerk.
2. Indien twee van de drie staven in elkaars verlengde liggen, zijn de staafkrachten in deze staven gelijk en moet de derde staafkracht gelijk zijn aan nul; fig. 1b1. Dit is namelijk de enige manier waarop evenwicht mogelijk is. Gater verificatie uit van een willekeurige staafkracht S_1 , en tracht via de krachten S_2 en S_3 het beginpunt van S_1 weer te bereiken, zie fig. 1b2.

Twee staven

3. Indien tweé staven in een knooppunt samenkomen, onder welke hoek dan ook, moeten beide staven nulstaven zijn, zie fig. 1c. Dit is de enige mogelijkheid voor evenwicht.

Nut van de gegeven regels

Kennis in het opsporen van nulstaven is vooral praktisch bij Cremona-berekeningen [340-345]. Meer dan eens komen er in een knooppunt bij een oplegging drie staven samen. De grafische methode kan dan alleen worden toegepast als men van één van deze staven de grootte van de kracht weet aan te geven. Hiervoor dienen dan de voorgaande regels.

Bij het vakwerk van fig. [326-1] kan in de midden-doorsnede bij toepassing van de analytische snedemethode alleen maar een snede over vier staven worden aangebracht. Toepassing van de regel genoemd onder [339-2.] leert echter, dat de totale uitwendige kracht $2F$ door de genoemde verticaal moet worden opgenomen.

Ook de krachten in de verticale randstaven van vakwerkliggers zijn met behulp van de laatstgenoemde regel (4.), direct te bepalen, vergelijk fig. [326-1d].

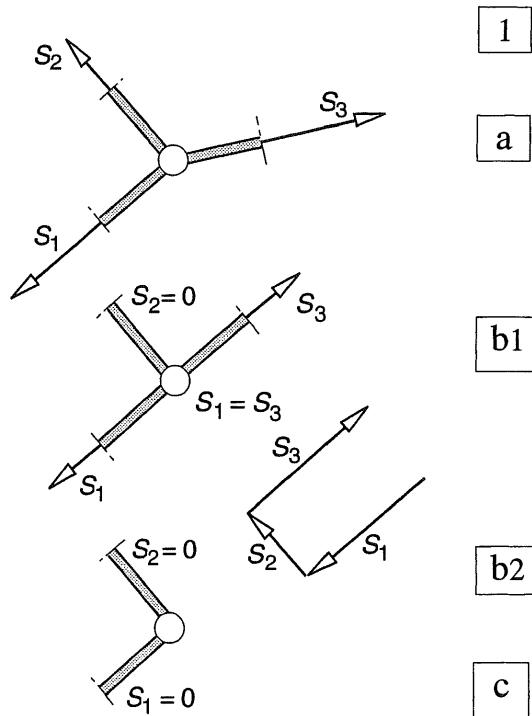


Fig. 1 Onbelast knooppunt
 a. Drie staven in willekeurige richtingen
 b. Twee van de drie staven in elkaars verlengde
 c. Twee staven

II Belaste knooppunten

Drie staven

- Indien drie staven in willekeurige richtingen samenkomen, dan kan geen uitsluitsel worden gegeven over de verdeling van de uitwendige kracht over de drie staven.
- Indien twee van de drie staven in elkaars verlengde liggen geldt dit evenzeer. Alleen als de uitwendige kracht aangrijpt in het verlengde van de derde staaf, dan wordt de uitwendige kracht geheel door deze derde staaf opgenomen, zie fig. 2a. De krachten in de eerstgenoemde staven zijn weer aan elkaar gelijk (en tegengesteld gericht) maar zullen een vooralsnog onbekende grootte bezitten.

Twee staven

- Indien twee staven in een knooppunt samenkomen, wordt de grootte van de staafkrachten eenduidig bepaald door de grootte van de uitwendige kracht en de richtingen van de twee staven, zie fig. 2b.
- Een bijzonder geval van het voorgaande treedt op, als de uitwendige kracht in het verlengde ligt van een van de staven. De uitwendige kracht wordt dan geheel door deze laatste staaf opgenomen en de andere staaf moet een nulstaaf zijn, zie fig. 2c.

III Diagrammen voor V en M bekend

- Bij vakwerkliggers wordt de dwarskracht uitsluitend overgebracht door diagonalen en verticalen, [330]. In een gebied waar geldt $V = 0$, moeten deze staafkrachten dus gelijk zijn aan nul. Let op bij de verticalen aan de rand van zo'n gebied, zie fig. 3a,b. Kijk gewoon welk zig-zag weggetje je via de aaneensluitende verticalen en diagonalen moet aflopen om de bijbehorende oplegging te bereiken. Raadpleeg voor een uitvoerige uitwerking de vraagstukkenbundel.
- Boven- of onderrandstaven kunnen alleen maar nulstaven zijn als precies ter plaatse van een knooppunt het buigend moment van de vakwerklijger gelijk is aan nul, zie fig. 4a,c. De staafkrachten van de boven- en onderrand worden immers bepaald door om deze punten het momenten-evenwicht op te maken.

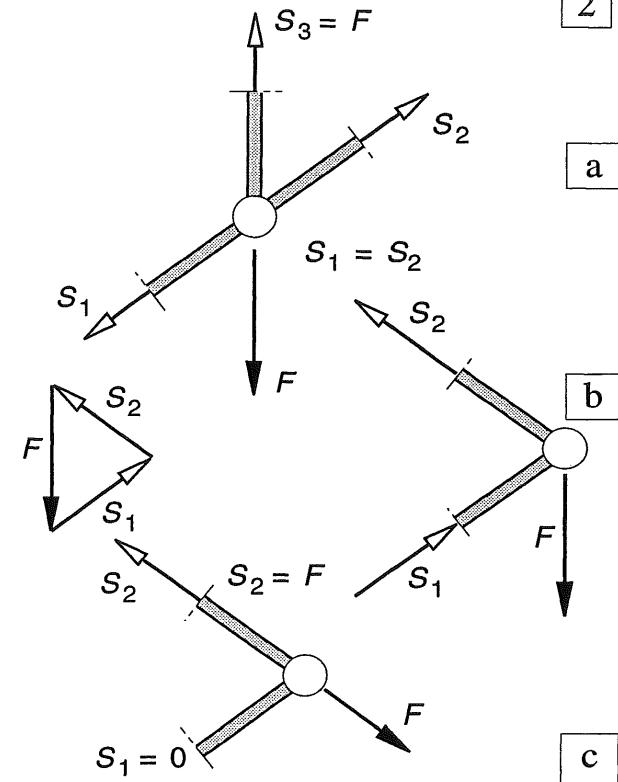


Fig. 2 Belast knooppunt

- Drie staven, waarvan twee in elkaars verlengde; uitwendige kracht in de richting van de derde staaf
- Twee staven met de uitwendige kracht in een willekeurige richting, met krachtendriehoek
- Twee staven; uitwendige kracht in het verlengde van één van de staven

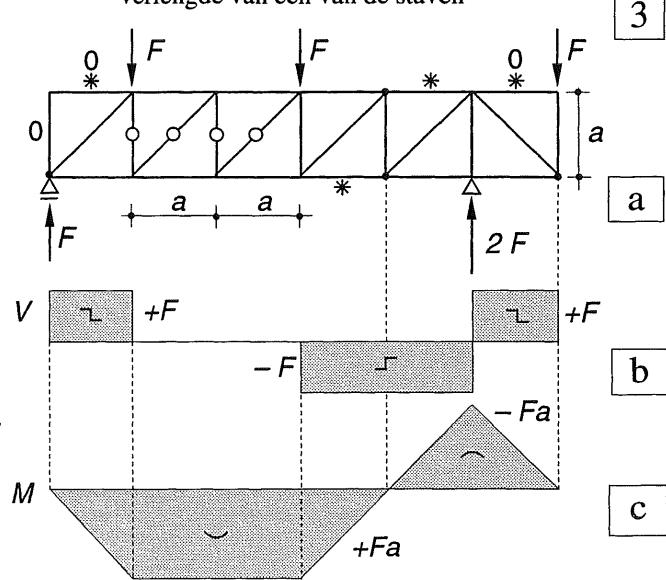


Fig. 3 Vakwerklijger met overstek

- Schema met reactiekrachten en nulstaven
- Dwarskrachtenlijn en momentenlijn met gebieden en punten waar deze grootheden gelijk zijn aan nul
- Nulstaaf veroorzaakt door $V = 0$
- Nulstaaf veroorzaakt door $M = 0$
- Nulstaaf bepaald volgens de gewone regels I of II

16.5.1 WERKWIJZE

In fig. 1a is het schema van het vakwerk weergegeven waarvan in [334-335] de berekening langs grafische weg is uitgevoerd. In fig. 1b is voor ditzelfde vakwerk het samenstel van krachtenveelhoeken getekend dat bekend staat onder de naam *Cremona*.

De Cremona is weergegeven voor het gehele vakwerk, terwijl in [334-335] is volstaan met de helft vanwege de symmetrie. Maar dáár moet voor elk knooppunt steeds weer opnieuw een afzonderlijke krachtenveelhoek worden getekend. Bij de Cremona daarentegen staan de opeenvolgende krachtenveelhoeken passend aan elkaar en behoeft geen enkele kracht meer dan één keer te worden getekend. Met enige moeite zijn de afzonderlijke krachtenveelhoeken van [334-336] in fig. 1b weer terug te vinden.

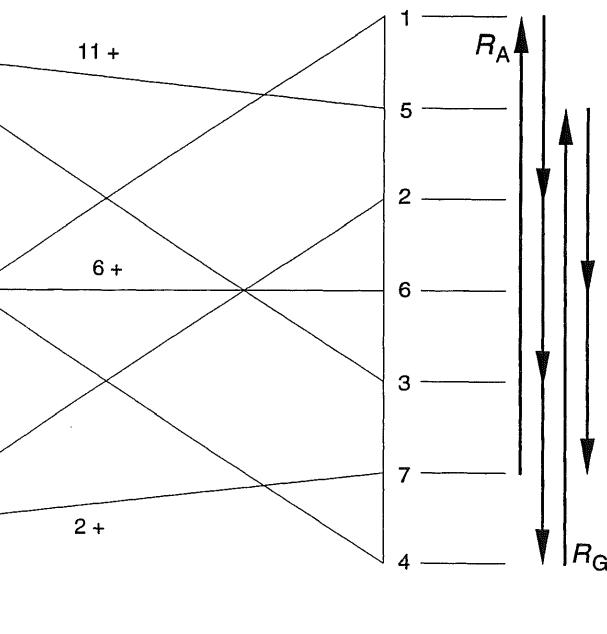
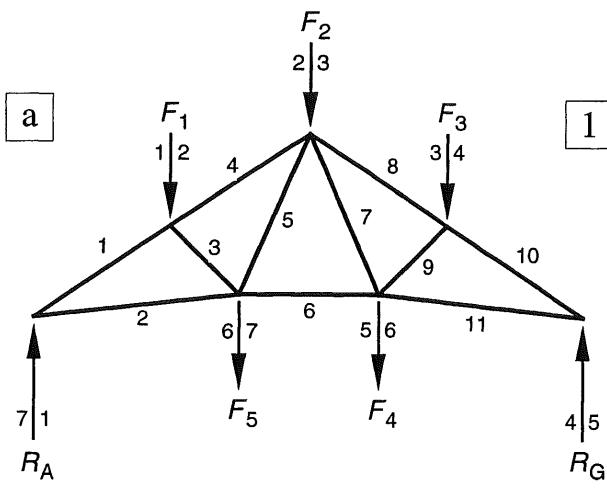
Fig. 1 Cremona

- a. Schema van het symmetrisch belaste vakwerk
- b. Samenstel van krachtenveelhoeken, bekend als *Cremona*

In de Cremona van fig. 1b is bij elke kracht het nummer van de bijbehorende staaf geschreven. Met een + of - teken is aangegeven of het een trek- of een drukstaaf is.

In de Cremona zelf worden geen pijlen getekend, aangezien de richting van de krachten steeds wisselt, afhankelijk van het knooppunt dat wordt beschouwd.

In deze paragraaf wordt het procédé beschreven waarmee een Cremona kan worden getekend. In 16.5.2 [342] wordt de Cremona stap voor stap opgebouwd voor een geval waarbij de belasting niet volledig symmetrisch is.



Schema voor het bepalen van een Cremona

- a. Teken het vakwerk nauwkeurig op schaal en nummer alle staven, zie fig. 1a.
- b. Teken de krachten op de knooppunten en zorg ervoor dat alle krachten worden getekend aan de *buitenzijde* van het vakwerk.
- c. Bepaal de oplegreacties.
- d. Alle uitwendige krachten zijn nu bekend
Nummer de krachten in een rechtsdraaiende volgorde met 1-2, 2-3, 3-4 op een overeenkomstige wijze als dat bij de poolfiguur en stangeneelhoek is behandeld; KW-1 [106].
- e. Zet alle uitwendige krachten achter elkaar uit in een rechtsdraaiende volgorde; begin bij kracht 1-2. Geef het begin- en eindpunt van elke kracht aan op de onder punt d. genoemde wijze, zie fig. 1b rechts.
- f. Start met het tekenen van de Cremona in een punt waar slechts twee staven samenkommen (bijv. het linker oplegpunt van het vakwerk).
- g. Begin bij de bekende kracht R_A ($7-8 = 7-1$) en teken de krachtendriehoek in een rechtsdraaiende volgorde: $R_A - S_1 - S_2$.
- h. Bepaal het teken van de staafkrachten.
Dit is een trekkracht als de kracht van het knooppunt af is gericht (S_2), en een drukkracht als de kracht naar het knooppunt toe is gericht (S_1), zie [334-335].
- i. Geef de krachten in de krachtendriehoek aan met hun staafnummer en hun teken (dus met 1-; 2+). Schrijf het teken van de staafkracht ook in de tekening van het vakwerk; het is dan direct duidelijk welke staafkrachten al bekend zijn en welke nog niet.
- j. Ga na bij welk aanliggend knooppunt niet meer dan twee onbekende staafkrachten voorkomen.
- k. Begin vanaf dit punt weer met in rechtsdraaiende volgorde de bekende staafkrachten en de (bekende) uitwendige krachten in een krachtenveelhoek uit te zetten. Sluit de krachtenveelhoek vervolgens – *nog steeds in een rechtsdraaiende volgorde* – met de twee nog onbekende staafkrachten.
- l. Vanaf hier herhaalt alles zich vanaf punt h.

Het is zinvol om bij het tekenen van de krachtenveelhoek voor elk nieuw knooppunt een of ander tekentje (een kruisje of een rondje) aan het beginpunt van de eerste kracht te zetten, zodat we er zeker van zijn dat we bij het sluiten van de krachtenveelhoek, ook weer in het beginpunt uitkomen. Het gebruik van verschillende kleuren voor de afzonderlijke krachtenveelhoeken kan eveneens verhelderend werken

Let op; bij de stapsgewijze opbouw van de Cremona in [342] zijn de bekende uitwendige krachten wegens ruimtegebrek niet allemaal van te voren uitgezet zoals in fig. 1b. Bij elke stap worden alleen de nieuw benodigde uitwendige krachten aan de Cremona toegevoegd.

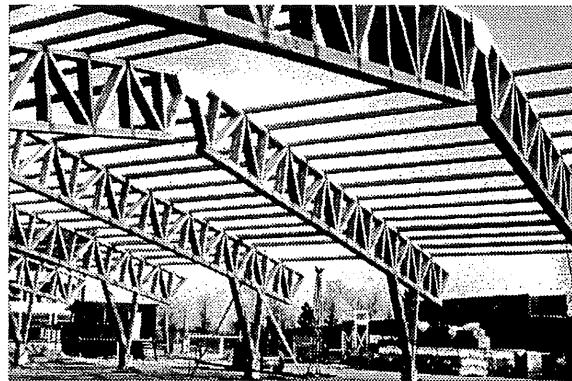


Fig. 2 Houten drieschansierspant uitgevoerd als vakwerkligger

Vakwerken als onderdeel van een drieschansierspant kunnen eveneens met behulp van een Cremona worden berekend. Hiertoe moeten eerst de reactiekrachten worden bepaald zoals in 18.4 [390-399] is behandeld. Verder verloopt de berekening precies eerder als op de volgende bladzijden is behandeld; ook bij het drieschansierspant kunnen achtereenvolgens de knooppunten worden afgewerkt waar maar twee onbekende staafkrachten voorkomen.

16.5.2 STAPSGEWIJZE OPBOUW VAN EEN CREMONA

Om de werkwijze die is beschreven in 16.5.1, wat inzichtelijker te maken, wordt in deze paragraaf een Cremona stap voor stap opgebouwd. Bij wijze van uitzondering kunnen hierbij de richtingen van de krachten voor elke afzonderlijke stap wèl in de figuren worden aangegeven.

Voor het vakwerk is dezelfde vorm aangehouden als in fig. [340-1a], maar de belasting is in dit geval niet meer geheel symmetrisch, zie fig. 1a. Bij de bepaling van het evenwicht van elk nieuw knooppunt wordt de Cremona weer een stap uitgebreid.

Bij elke stap zijn de benodigde krachten dik getekend. De reeds bekende krachten zijn getrokken en bezitten een zwarte pijlpunt, de twee te bepalen staafkrachten zijn gestippeld en bezitten een witte pijlpunt.

De krachten die voor het evenwicht van het beschouwde punt niet nodig zijn, worden dun getrokken weergegeven.

Bij elke afzonderlijke stap is in het vakwerk-schema aangegeven in welke richting de krachten op het betreffende knooppunt werken. Het is niet raadzaam dit voor alle knooppunten tegelijk te doen, omdat dit de indruk wekt dat de tussen-gelegen staven een tegengesteld teken bezitten.

Opbouw van de Cremona

Uitgangspunt:

- Teken het vakwerk op schaal en nummer alle staven (fig. 1a1).
- Teken alle uitwendige krachten aan de buitenzijde van het vakwerk (fig. 1a1).
- Bepaal de oplegreacties.
- Zet alle uitwendige krachten in een rechts-draaiend volgorde uit in een (meestal platgeslagen) krachtenveelhoek (fig. [340-1b]).
($R_A = 1,875 F$, $R_B = 2,125 F$, zoals volgt uit de afmetingen van fig. [333-1a].

Stap 1:

- Beschouw het schema, ga uit van de opleg-reactie R_A en teken in rechtsdraaiende volgorde de krachtendriehoek $R_A - S_1 - S_2$.
- In het schema is de kracht S_1 vanuit staaf 1 naar punt A toegericht en is dus een drukkracht. De kracht S_2 werkt vanuit staaf 2 van punt A af en is dus een trekkracht (vergelijk zonodig fig. [334-2]).
- Schrijf het staafnummer en het teken in de krachtendriehoek en geef ook het teken van de staafkrachten in het vakwerkschema aan (weergegeven bij stap 2).

Stap 2:

- Ga na hoeveel onbekende krachten er werken in de andere uiteinden van de staven 1 en 2.
- Punt B telt twee onbekende staafkrachten en kan dus aan de Cremona worden toegevoegd.
- Punt C telt drie onbekende staafkrachten en kan nog niet aan de Cremona worden toegevoegd.
- Teken de krachtenveelhoek voor punt B.
- Teken eerst in rechtsdraaiende volgorde de bekende krachten, dus S_1 en kracht 1-2, teken vervolgens de krachten S_4 en S_3 .
- Bij het nalopen van de richting van de krachten in het schema blijken zowel S_4 als S_3 drukkrachten te zijn.

Stap 3:

- Punt C kan aan de Cremona worden toegevoegd (er zijn nu nog maar 2 onbekende staafkrachten omdat S_3 intussen bekend is).
- Punt D kan niet aan de Cremona worden toegevoegd (drie onbekende staafkrachten).
- Teken de krachtenveelhoek voor punt C.
- Begin met de bekende krachten. De volgorde wordt dan: $S_2 - S_3 - S_5 - S_6$.
- Drukkrachten in de staven wijzen in de richting van punt C, trekkrachten juist er vanaf; dus S_5 en S_6 zijn trekkrachten.

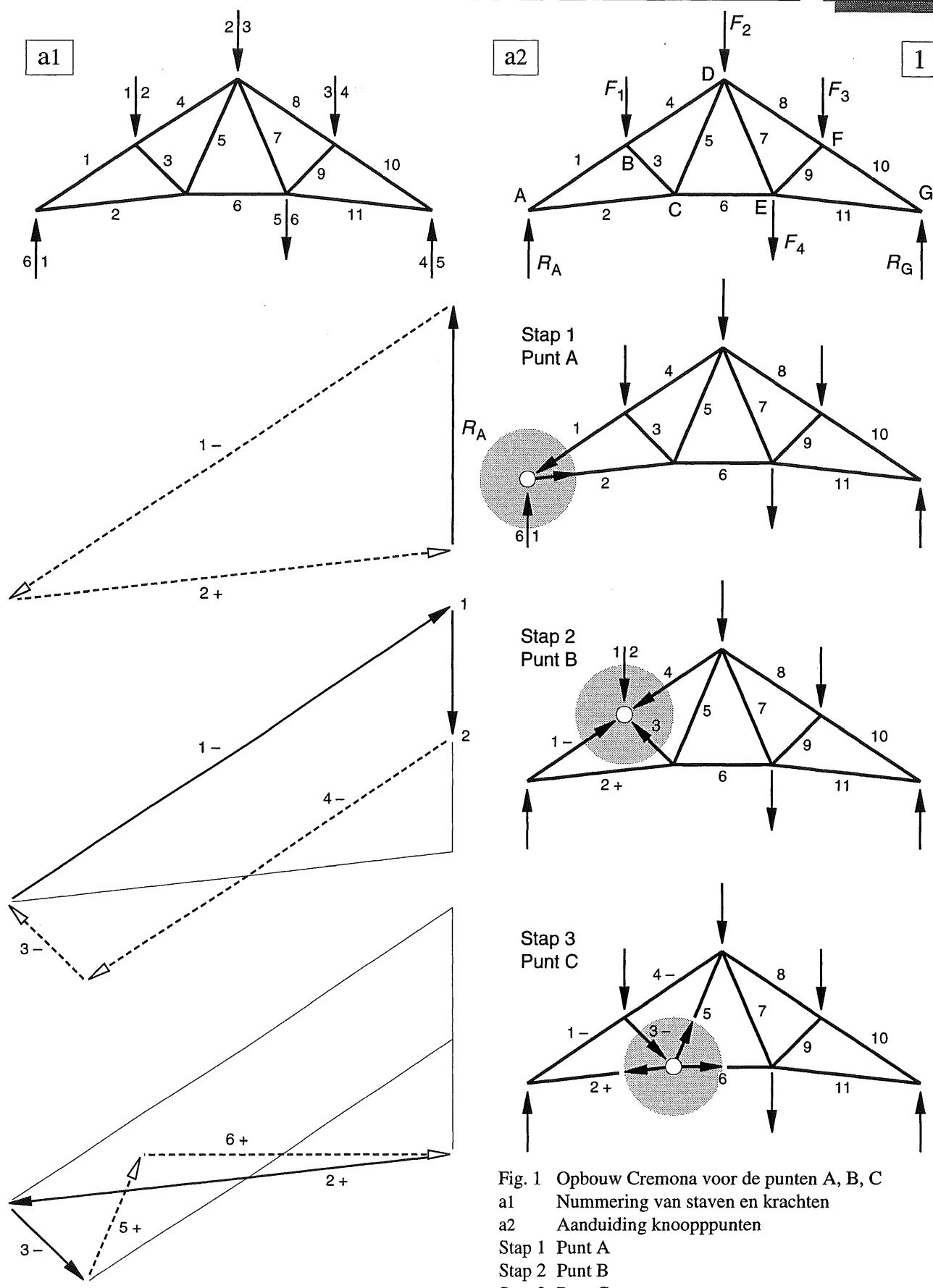


Fig. 1 Opbouw Cremona voor de punten A, B, C
 a1 Nummering van staven en krachten
 a2 Aanduiding knooppunten
 Stap 1 Punt A
 Stap 2 Punt B
 Stap 3 Punt C

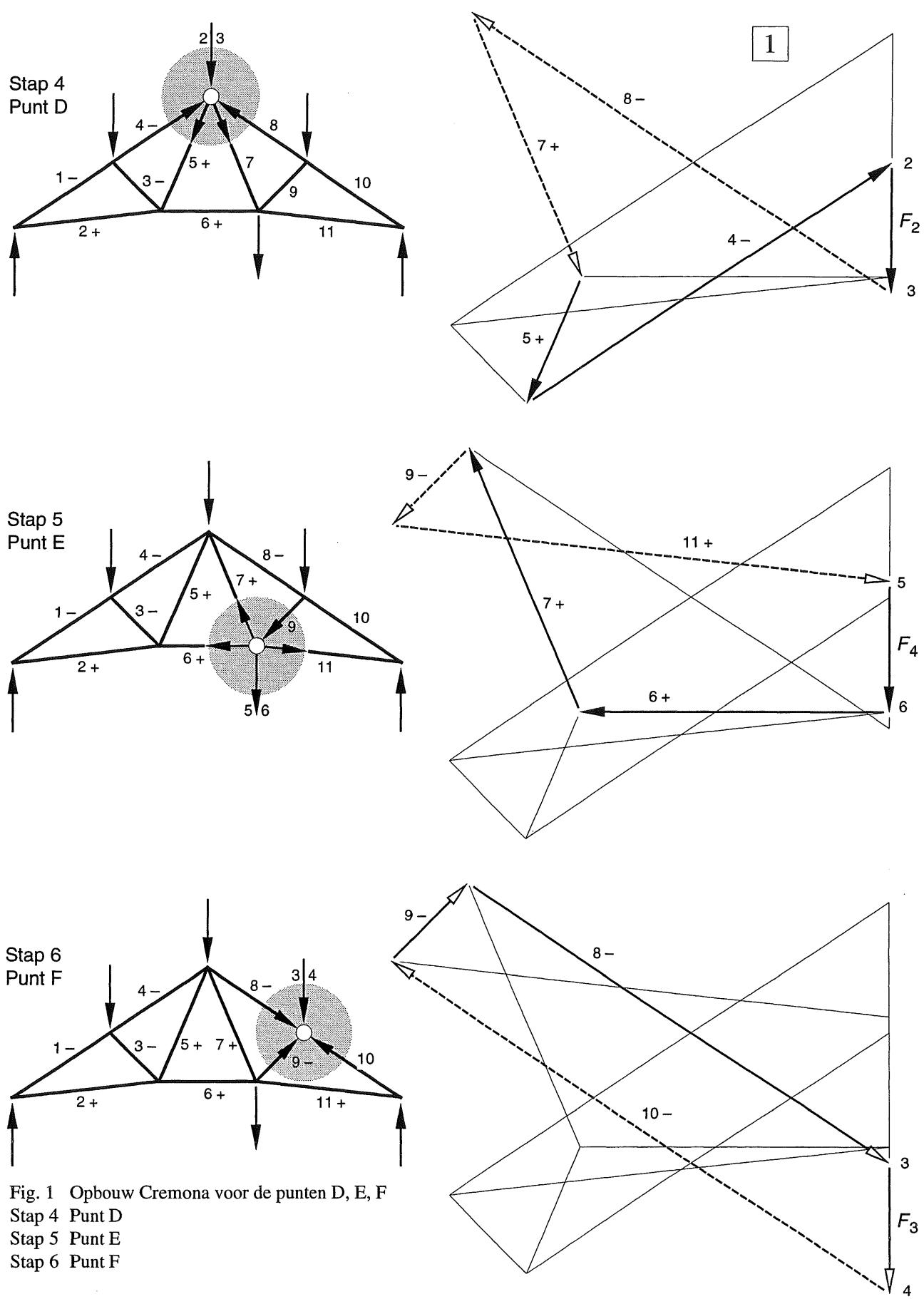


Fig. 1 Opbouw Cremona voor de punten D, E, F

Stap 4 Punt D

Stap 5 Punt E

Stap 6 Punt F

Stap 4:

- Punt D kan aan de Cremona worden toegevoegd.
- Uitgaande van de bekende krachten S_5 , S_4 en 2-3, kunnen ook S_8 en S_7 worden getekend (rechtsom blijven draaien, volgorde niet verwisselen). S_7 blijkt een trekkracht te zijn, S_8 een drukkracht.

Stap 5:

- Zowel punt E als punt F kan nu aan de Cremona worden toegevoegd, in beide gevallen zijn er maar twee onbekende staafkrachten. Het doet er niet toe welk knooppunt men kiest.
- In de schets is knooppunt E gekozen.
- In rechtsdraaiende volgorde worden eerst de bekende krachten uitgezet; 5-6 met S_6 en S_7 , de krachtenveelhoek wordt gesloten met de krachten S_9 en S_{11} . De kracht S_9 blijkt een drukkracht te zijn en S_{11} een trekkracht.

Stap 6:

- Punt F kan aan de Cremona worden toegevoegd, hier werkt nog maar één onbekende staafkracht S_{10} .
- Hierdoor krijgen we de eerste controle op onze teken-nauwkeurigheid.
- Als we de bekende krachten S_9 , S_8 en 3-4 achter elkaar hebben uitgezet, moet vanuit het eindpunt van 3-4 naar het beginpunt van S_9 een kracht lopen die precies evenwijdig is aan staaf 10 (en 8).

- Als dit helemaal niet klopt, dan is er onderweg een fout gemaakt en moet de voorgaande exercitie grondig worden gecontroleerd.
- Scheelt het niet veel, dan ligt het aan de nauwkeurigheid van tekenen; loop even alle richtingen na.

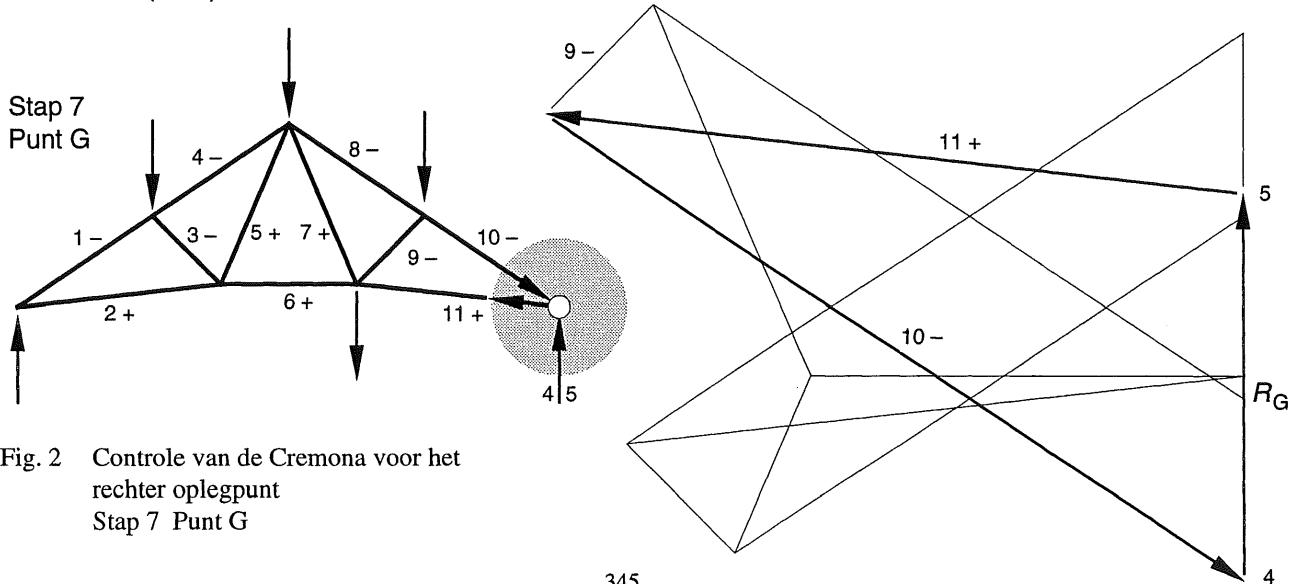
Stap 7:

- Als controle moeten in oplegpunkt G alle nu bekende staafkrachten een gesloten krachten-driehoek vormen.
- Volgorde: kracht 4-5 omhoog, S_{11} naar links (trek), S_{10} naar rechts (druk); zie bij stap 6.

Wellicht ten overvloede:

- Houdt consequent een rechtsdraaiende volgorde aan,
- Alle reeds bekende staven in de Cremona staan dan zowel in de goede volgorde als in de goede richting, overeenkomend met trek of druk voor elk knooppunt van het vakwerk
- Als dit niet klopt dan is er iets fout gegaan.
- Let er bij de controle op of de oplegreacties goed zijn bepaald en de uitwendige krachten correct zijn uitgezet.

2



16.6.1 ALGEMEEN

Na een analytische of grafische bepaling van de staafkrachten heeft men meestal geen flauw benul van de krachtswerking in het vakwerk, zolang de gegevens niet op een ordentelijke wijze zijn uitgezet. Om wat meer inzicht in de krachtswerking te verkrijgen zijn de staafkrachten voor een aantal veel voorkomende vakwerkvormen berekend en vervolgens gevisualiseerd.

Er is uitgegaan van een gelijkmatig verdeelde belasting en de staafkrachten zijn in zij-aanzicht van het vakwerk weergegeven. In de tekeningen is de hoogte van elke staaf evenredig gekozen met de optredende staafkracht. Bij een constante staafdikte zijn alle doorsneden van de staven dan evenredig met de kracht.

Let wel, zo kan er in de praktijk niet worden gewerkt, maar voor het inzicht is dit zeer illustratief. Anderzijds is vooral bij wat oudere bruggen duidelijk herkenbaar dat zwaar belaste staven een veel grotere doorsnede bezitten dan licht belaste staven, zie fig. 1.

Voor een goed overzicht zijn in alle tekeningen de drukstaven met een raster aangegeven. De trekstaven zijn blank gelaten.

Nulstaven zijn met een getrokken lijn aangegeven. Deze staven kunnen uiteraard niet worden weggeleggen in een vakwerk. Ze zorgen ervoor dat de vormvastheid behouden blijft en bij een wat andere belasting zullen ze weer wél krachten moeten overdragen.

Van de volgende vakwerkvormen zijn enkele varianten weergegeven:

- Vakwerkliggers met boven- en onderrand evenwijdig aan elkaar
- Paraboolvormige vakwerken
- Driehoekige vakwerken

Al deze vormen zijn onderworpen aan een gelijkmatig verdeelde belasting. In [352] zijn ook nog twee driehoekige vakwerken weergegeven onder invloed van slechts één puntlast.

Bij alle vakwerken zijn ook de bijbehorende Cremona's weergegeven. De vorm van een Cremona bij een bepaald vakwerk is voor de beginner nauwelijks te voorspellen. Als de lezer echter ter oefening een Cremona van een bepaald vakwerk zelf wil tekenen, dan kan hij aan de schets in het dictaat gauw genoeg zien of hij op de goede weg is of niet. Uiteraard vindt men bij een analytische berekening dezelfde resultaten.

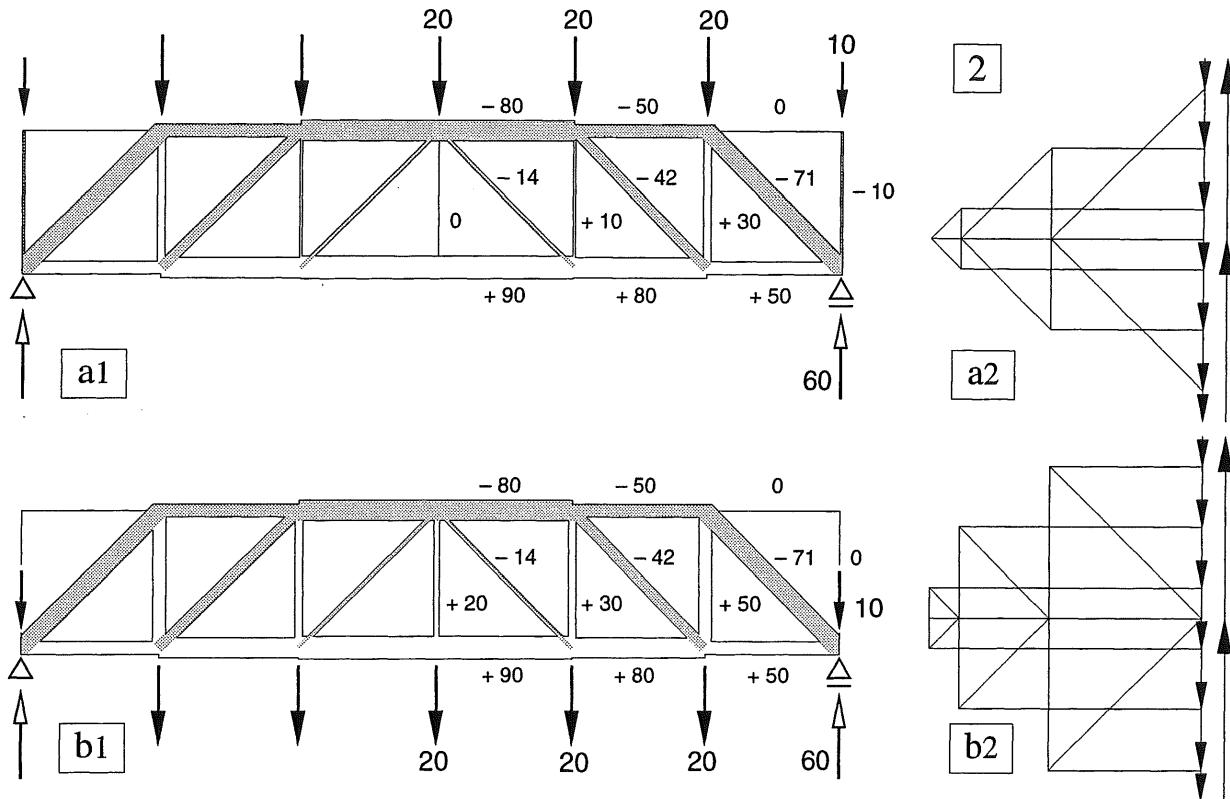


Fig. 1 Voormalige spoorbrug over de Rotte in Rotterdam Noord. Er treedt trek op in de vallende diagonalen waarvan de zwaarst belaste zijn uitgevoerd als brede strepen.

16.6.2 INVLOED AANGRIJPINGSPUNTEN VAN DE KRACHTEN

Zoals in [308] en [316] is besproken, worden alle belastingen van een vakwerk geconcentreerd gedacht in de knooppunten. Bij hallen zullen de dakbelastingen veelal in de bovenrand aangrijpen. In het algemeen wordt de belasting door het *eigen gewicht* van het vakwerk dan ook maar in de bovenrand aangebracht.

Bij bruggen daarentegen zal de verkeersbelasting vrijwel altijd op de onderrand aangrijpen. En hoewel deze belasting dikwijls verwaarloosbaar klein is ten opzichte van het eigen gewicht van de brug kan men toch overwegen om ook de belasting door eigen gewicht maar in de onderrand te laten aangrijpen. Uiteraard is het correcter om de krachten over alle knooppunten te verdelen zoals bijv. in fig. [308-1a] is gedaan, maar de invloed hiervan blijkt klein te zijn.



De krachten in de boven- en onderrandstaven worden niet beïnvloed door het feit of de krachten op de boven- of de onderrand aangrijpen. De verschillen in staafkracht bij de verticalen en de diagonalen blijven beperkt, zie fig. 2a1, b1. De vormen van de bijbehorende Cremona's wiken echter vrij sterk van elkaar af, zie fig. 2a2, b2.

Fig. 2 Staafkrachten bij een vakwerkligger met stijgende diagonalen

- a. Krachten aangrijpend op de bovenrand
- b. Krachten aangrijpend op de onderrand

LINKS: Staafkrachten gevisualiseerd
RECHTS: Cremona's

3

Invloed van het verplaatsen van een kracht

De geringe invloed van het verplaatsen van een kracht van de boven- naar de onderrand (en omgekeerd) is gemakkelijk in te zien aan de hand van fig. 3. We gebruiken weer het principe van het verplaatsen van een kracht volgens KW-0 [014]. We laten de (zwarte) kracht dus gewoon op de bovenrand staan, brengen vervolgens een (witte) kracht in dezelfde richting aan op de onderrand en heffen deze kracht ook weer op door het aanbrengen van een tegengesteld gerichte (zwarte) kracht, zie fig. 3b.

Voor evenwichtsbeschouwingen is de oorspronkelijke toestand dus onveranderd gebleven. We beschouwen de witte kracht nu als de verplaatste kracht op de onderrand, zie fig. 3c1. De twee zwarte krachten op de verticaal voorzien hierin een drukkracht maar hebben verder geen enkele invloed op de krachtwerving in alle andere staven, zie fig. 3c2. Hiermee is de invloed van het verplaatsen van de kracht dus bekend.

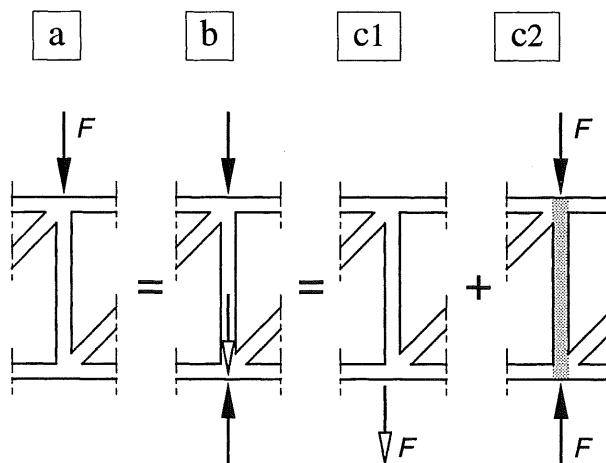


Fig. 3 Verplaatsen van een kracht van de bovenrand naar de onderrand

16.6.3 BESCHRIJVING TEKENINGEN

Alle liggers in de voorgaande en de volgende paragrafen, zijn onderworpen aan een gelijkmataig verdeelde belasting. Zoals gebruikelijk bij vakwerken, is deze belasting weer vervangen door een stelsel equivalente puntlasten. In de hierna volgende paragrafen zijn alle krachten meestal op de bovenrand aangebracht.

Alle vakwerken zijn in zes moten verdeeld en elke moet heeft een standaard gewicht van 20 eenheden, die verder niet zijn benoemd. De vakwerken zijn ondersteund als vrij opgelegde liggers. De beide oplegreacties zijn daardoor elk gelijk aan 60 eenheden. In één helft van het vakwerk zijn de staafkrachten bijgeschreven, uiteraard uitgedrukt in dezelfde eenheden.



Fig. 1 Houten vakwerk

Eenvoudige uitvoering met schetsplaat. De diagonalen zijn afwisselend vallend en stijgend (zoals in variant 4) en alleen boven de opleggingen zijn ter afsluiting verticalen aangebracht.

16.6.4 VAKWERKLIGGERS

De toename van de dwarskracht in de richting van de opleggingen is in fig. 1 duidelijk te zien aan de toenemende krachten in zowel de diagonalen als de verticalen.

Bij een constante hoogte van het vakwerk, blijft de inwendige hefboomsarm voor het constante moment-aandeel onveranderd. Een toenemend moment moet dan ook worden opgenomen door toenemende krachten in de boven- en onderrandstaven. Zoals bekend wordt het variërende deel van het moment verzorgd door de diagonalen. [328-329].

1. Vakwerk met stijgende diagonalen

In de diagonalen treedt altijd druk op.

In de verticalen treedt in principe trek op.

2. Vakwerk met vallende diagonalen

In de diagonalen treedt altijd trek op.

In de verticalen treedt altijd druk op.

3. Vakwerk met afwisselend stijgende en vallende diagonalen

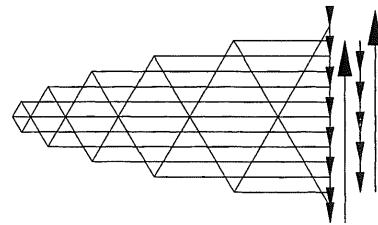
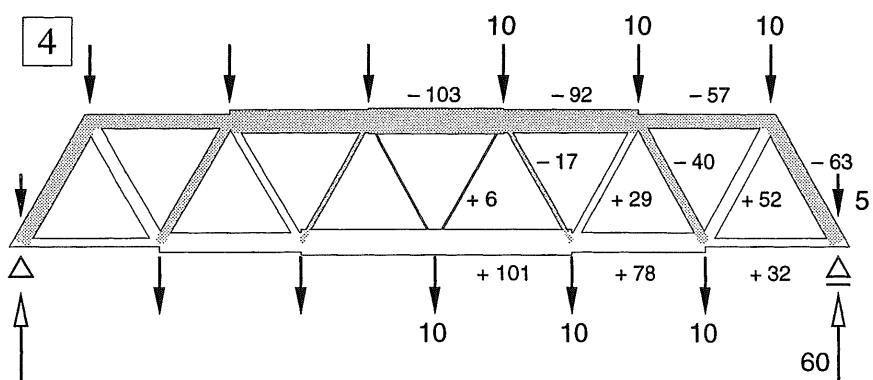
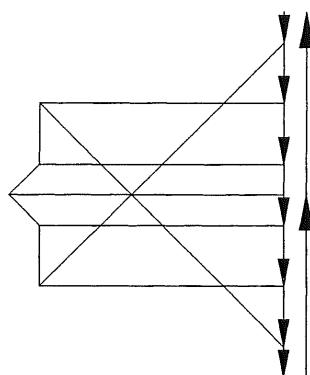
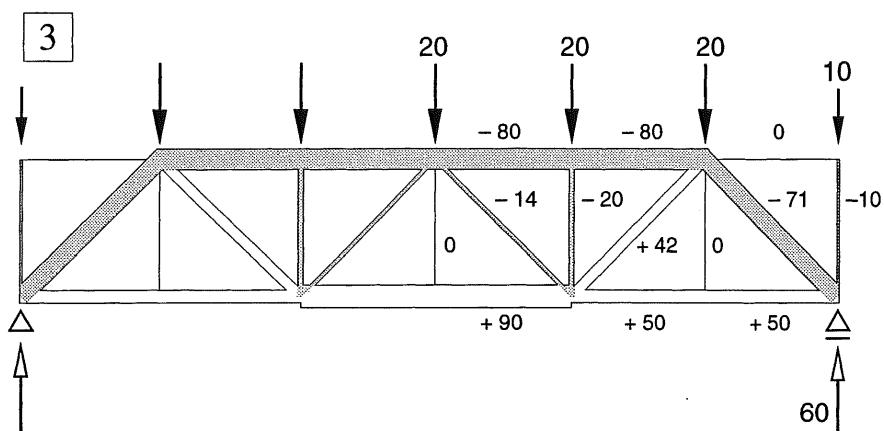
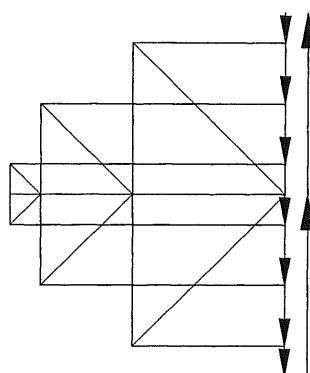
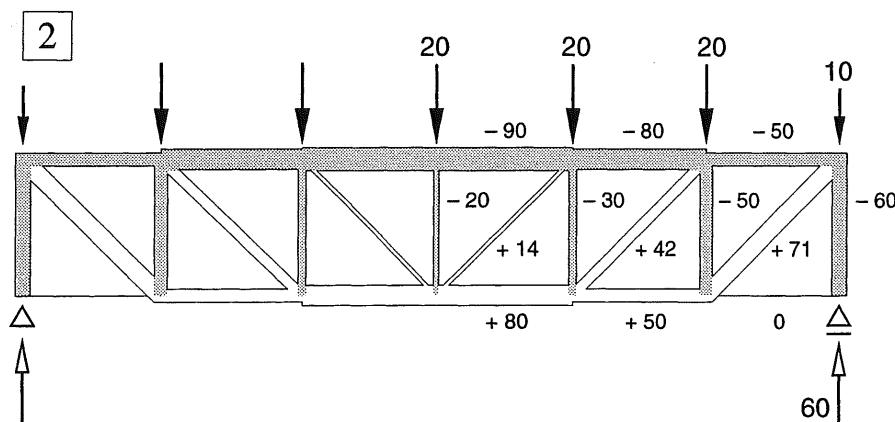
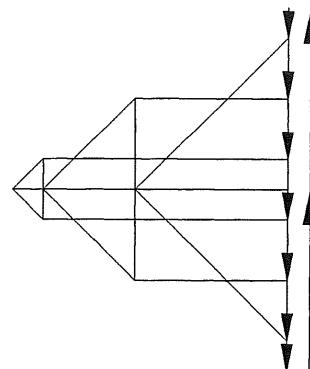
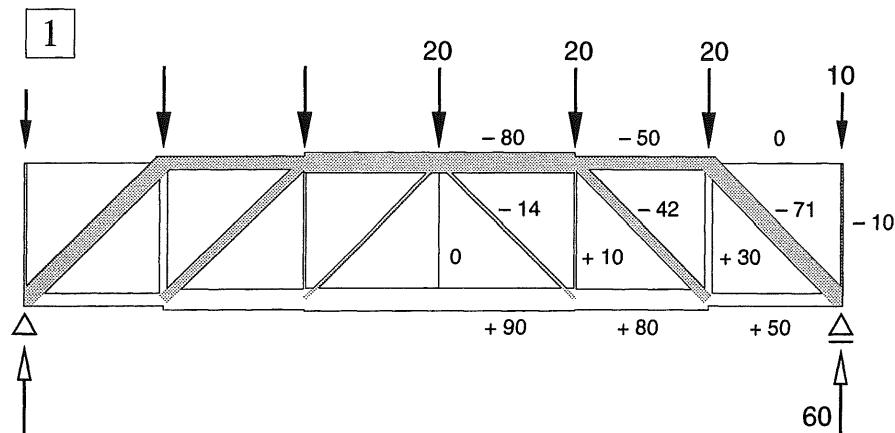
In de stijgende diagonalen treedt druk op, in de vallende diagonalen trek.

De invloed van de verticalen is duidelijk afgeno-
men. Ze brengen of één uitwendige kracht over
naar een knooppunt of het zijn nulstaven.

4. Vakwerk met afwisselend stijgende en vallende diagonalen ; waarbij verticalen ontbreken

Als de krachten zowel op de boven- als de onder-
rand aangrijpend worden gedacht, ontstaat een
zeer regelmatige krachtsafdracht.

Door de wat kleinere hoogte/lengte verhouding
ten opzichte van de andere vakwerken, zijn de
krachten in boven- en onderrand wat groter dan
in de voorgaande gevallen.



16.6.5 PARABOLISCHE VAKWERKEN

Als de inwendige hefboomsarm van een vakwerk evenredig verloopt met de grootte van het moment, zullen de krachten in boven- en onderrand – die tezamen het koppel vormen dat evenwicht maakt met het buigend moment – constant blijven. Aangezien een gelijkmatig verdeelde belasting bij een ligger op twee steunpunten een parabolisch momentenverloop veroorzaakt, is een parabolische vakwerkvorm voor een dergelijke belasting zeer voor de hand liggend.

De diagonalen en verticalen van het parabolische vakwerk zijn dan nodig voor de samenhang van het vakwerk en voor het overdragen van ongelijkmatig verdeelde belastingen.

Bij verkeersbruggen overheerst de gelijkmatig verdeelde belasting zodat deze paraboolvorm daar dan ook in velerlei varianten wordt aange troffen. Aangezien de diagonalen voor deze belasting maar zeer kleine krachten behoeven over te brengen, worden ze meestal weggelaten. Een buigvaste verbinding van de verticalen aan boven- en onderrand is dan wel noodzakelijk; niet alleen voor de praktische uitvoering van de brug, maar ook voor de berekening.

1. *Theoretisch ideale vorm*

Belasting op de bovenrand

De theoretisch ideale vorm is hier bepaald met behulp van een poolfiguur en stangenveelhoek. Deze figuur is dan tevens gelijk aan de bijbehorende Cremona.

De dwarskracht blijkt geheel te worden opgenomen door de bovenrand; het is de verticale ontbondene van de normaalkracht in de opeenvolgende bovenrandstaven.

In de onderrand heerst een constante trekkracht; deze maakt evenwicht met de horizontale component van de drukkracht vanuit de boog.

Alle diagonalen en verticalen zijn nulstaven, dus ook als ze met een Cremona worden nagerekend.

2. *Theoretisch ideale vorm*

Belasting op de onderrand

De krachten in boven- en onderrand zijn ten opzichte van 1. onveranderd gebleven.

De verticalen transporteren alleen de uitwendige krachten op de onderrand via trek naar de bovenrand.

De diagonalen zijn nulstaven

3. *Boog met een enigszins geknikte vorm*

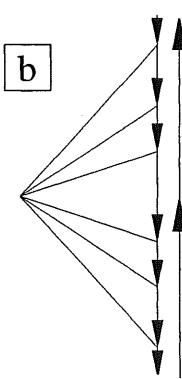
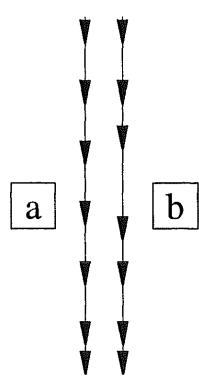
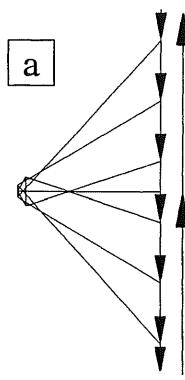
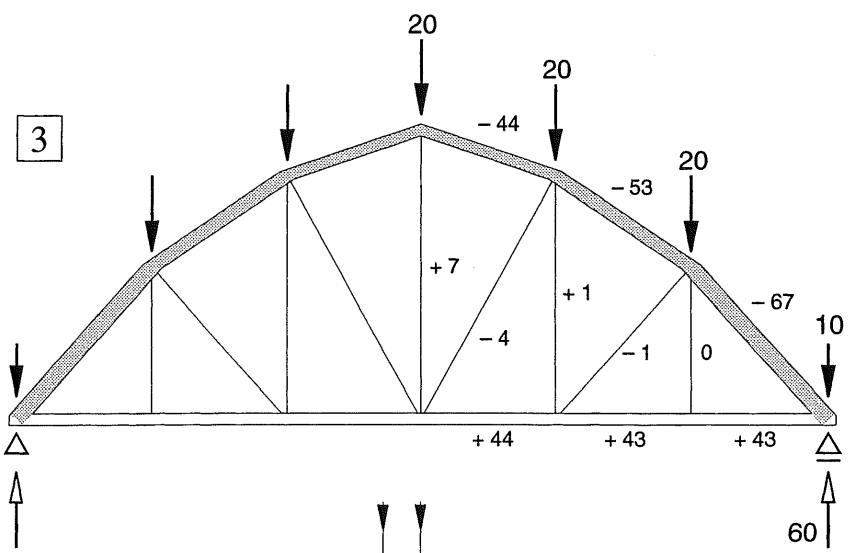
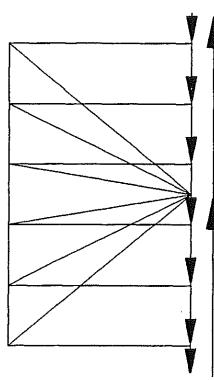
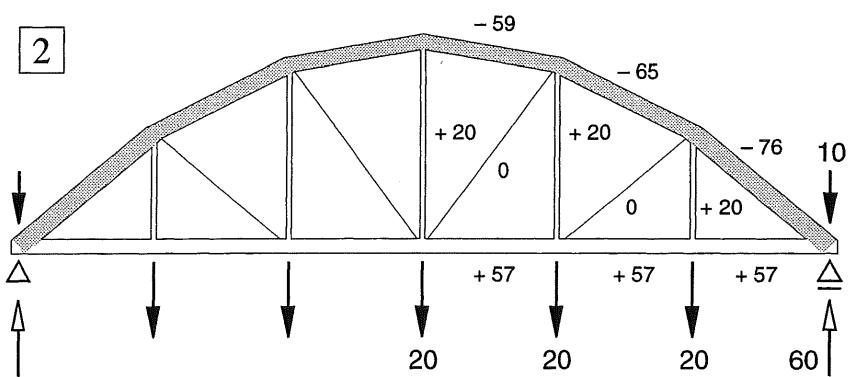
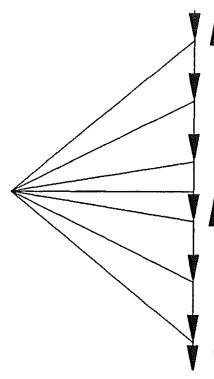
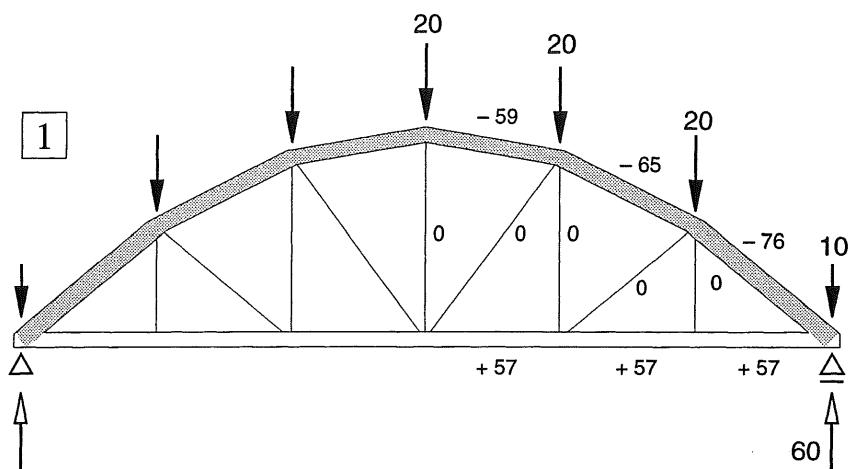
Krachten op de bovenrand

In variant 3. bezit de boog niet de ideale parabolische vorm. De krachten in de diagonalen en verticalen blijven echter van ondergeschikte betekenis, zoals blijkt uit de bijbehorende Cremona volgens a.

De figuur volgens b. is een poolfiguur, behorend bij een stangenveelhoek die samenvalt met de geknikte bovenrand.

Uit deze poolfiguur volgt dan de grootte van de verticale krachten die – aangebracht op de bovenrand van het vakwerk – tot gevolg zouden hebben dat alle diagonalen en verticalen weer nulstaven worden.

Ter vergelijking zijn de krachten volgens de poolfiguren a en b nogmaals naast elkaar onder het vakwerk geplaatst.



16.6.6 DRIEHOEKIGE VAKWERKEN

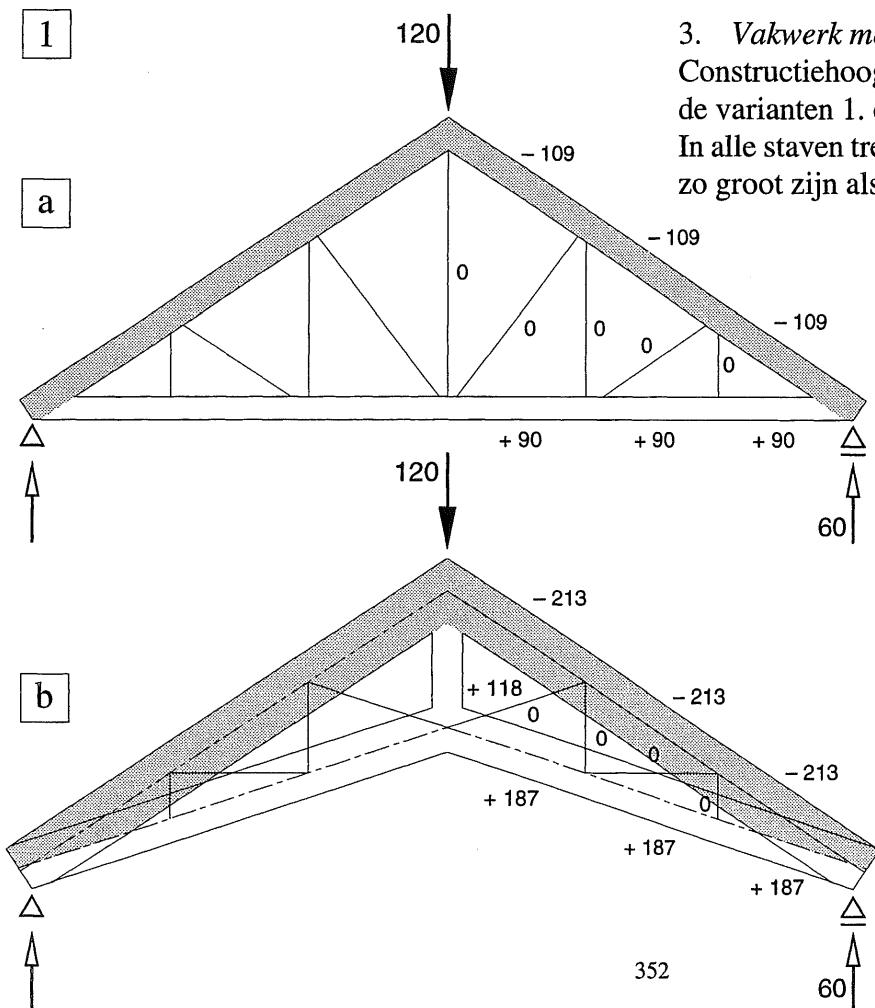
Als bij gebouwen schuine daken worden gewenst, zijn driehoekige vakwerken het meest voor de hand liggend. Bij het afdragen van een gelijkmatig verdeelde belasting is er echter een minder duidelijke functiesplitsing dan bij de voorheen besproken vakwerksvormen.

Als de hoofdvorm van het vakwerk een knik in de onderrand vertoont, dan veroorzaakt dit aanzienlijke krachten in de staaf die de knikpunten van de boven- en onderrand verbindt.

Eén puntlast op de bovenrand

Driehoekige vakwerken bezitten een ideale vorm voor het afdragen van een driehoekig momentenverloop, dus als één puntlast in het midden van de overspanning is geplaatst. Alle verticalen en diagonalen kunnen dan spanningsloos blijven en de boven- en onderrand tezamen leveren het volledige buigende moment, zie fig. 1a.

Bij een geknikte onderrand zoals in fig. 1b, ontstaat in de middelste verticaal een grote trekkracht.



Puntlasten op de bovenrand

1. Vakwerk met een rechte onderrand

Door de grote hoogte in het midden van de overspanning zijn de krachten in boven- en onderrand daar kleiner dan bij de opleggingen.

De inwendige hefboomsarm valt bij de oplegging weliswaar terug tot nul, maar de oplegreactie kan rechtstreeks worden ontbonden in de krachten langs de boven- en onderrandstaaf. Er treedt in de middelste verticaal een grote trekkracht op. Deze kracht is nodig om evenwicht te kunnen maken met de opwaarts gerichte resultante die wordt veroorzaakt door de drukkrachten in de bovenrandstaven.

2. Vakwerk met geknikte onderrand

Constructiehoogte als bij variant 1.

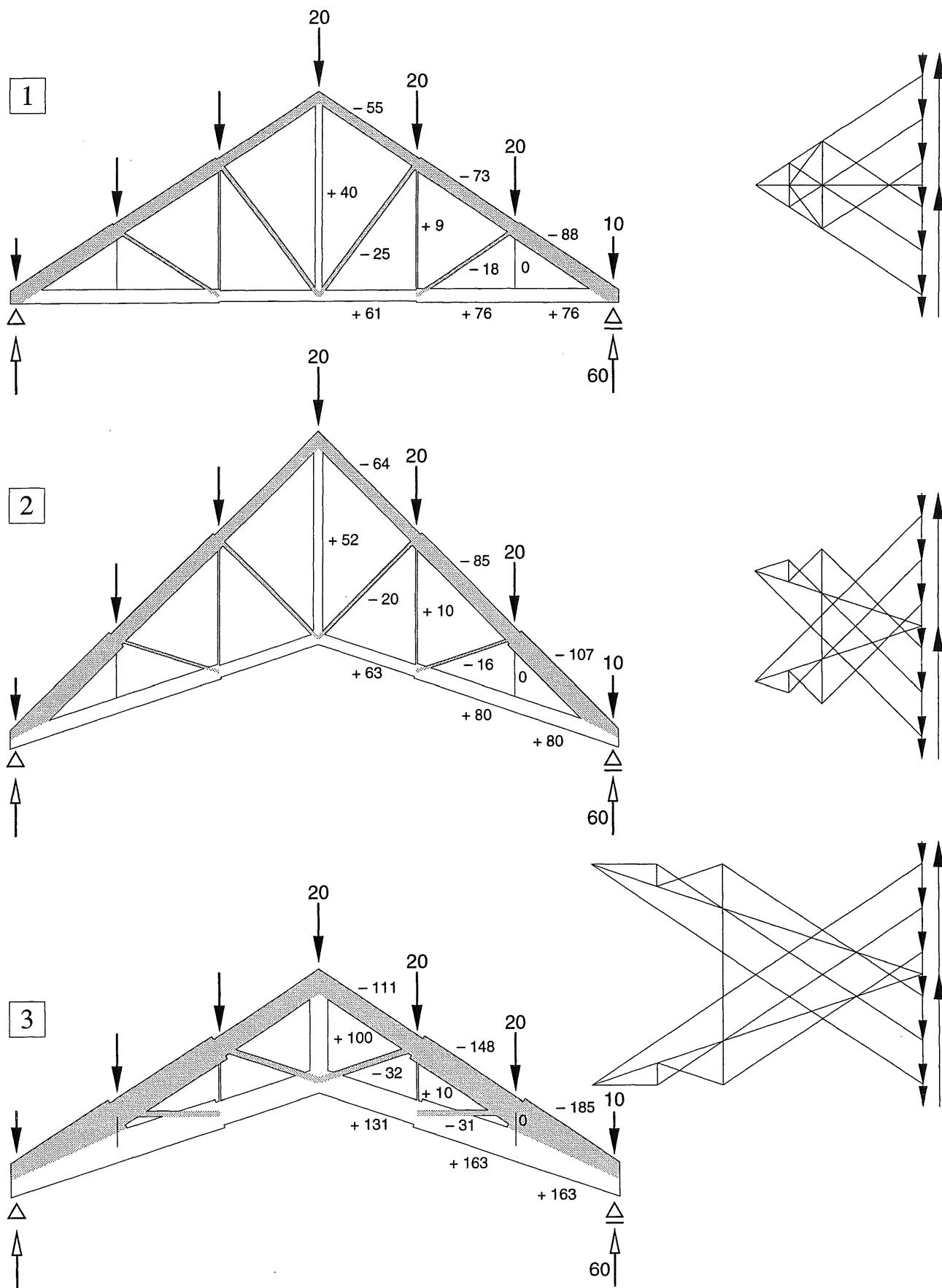
Door de knik in zowel de bovenrand als de onderrand zijn de krachten in de randstaven en de middelste verticaal groter dan bij variant 1.

3. Vakwerk met geknikte onderrand

Constructiehoogte gehalveerd ten opzichte van de varianten 1. en 2.

In alle staven treden krachten op die globaal $2 \times$ zo groot zijn als die bij de varianten 1. en 2.

Fig. 1
Driehoekige vakwerken
uitsluitend belast door
een puntlast in de top
a. Variant 1
b. Variant 3



17 STANDZEKERHEID

1e orde stabiliteit van eenvoudige bouwwerken

17.1 INLEIDING

17.1.1 BEGRIPPEN STANDZEKERHEID EN STABILITEIT

Bij het schematiseren in hoofdstuk 4 [KW-0] hebben we drie 'basisgeboden' voor een deugdelijk bouwwerk geïntroduceerd:

1. het moet voldoende sterk zijn
2. het moet voldoende stijf zijn
3. het moet stabiel zijn

Aan het woord stabiliteit worden verscheidene betekenissen toegekend, maar in dit verband houdt het alleen maar in: het gebouw – of een onderdeel daarvan – mag niet omvallen.

Deze betekenis kan ook worden omschreven als *standzekerheid*: het bouwwerk moet een zekere stand hebben.

In hoofdstuk 3 [KW-0] hebben we ons alleen maar bezig gehouden met los neergelegde blokken, waarop verticale en horizontale krachten kunnen aangrijpen. Onder de invloed van horizontale krachten kunnen die blokken zowel kantelen als verschuiven. In de praktijk blijkt het vrij gemakkelijk om horizontale verschuivingen van gebouw-onderdelen ten gevolge van horizontale krachten te voorkómen. Bij kantelen hangt het echter af van de verhouding tussen de hoogte en de lengte of breedte van het bouwdeel wat er zal gebeuren.

In eerste instantie houden we ons nog even bezig met het zuiver theoretische geval, waarbij het blok los op een vlakke ondergrond is geplaatst. Als bij zo'n continu ondersteund blok de hoogte kleiner is dan de lengte en de breedte, dan bevindt het zich in een toestand van stabiel evenwicht, zie ook KW-0 [037] en [043].

Als we dit toetsen door het blok een kleine zijdelingse uitwijking te geven, dan is de verticale verplaatsing van het zwaartepunt groter dan de horizontale verplaatsing. Onder invloed van het eigen gewicht zal het blok dan zijn oorspronkelijke stand willen hernemen, zie fig. 1a.

Door de uitwendige horizontale kracht wordt via het blok ook een koppel overgebracht op de ondergrond, zie fig. 1b en KW-0 [060].

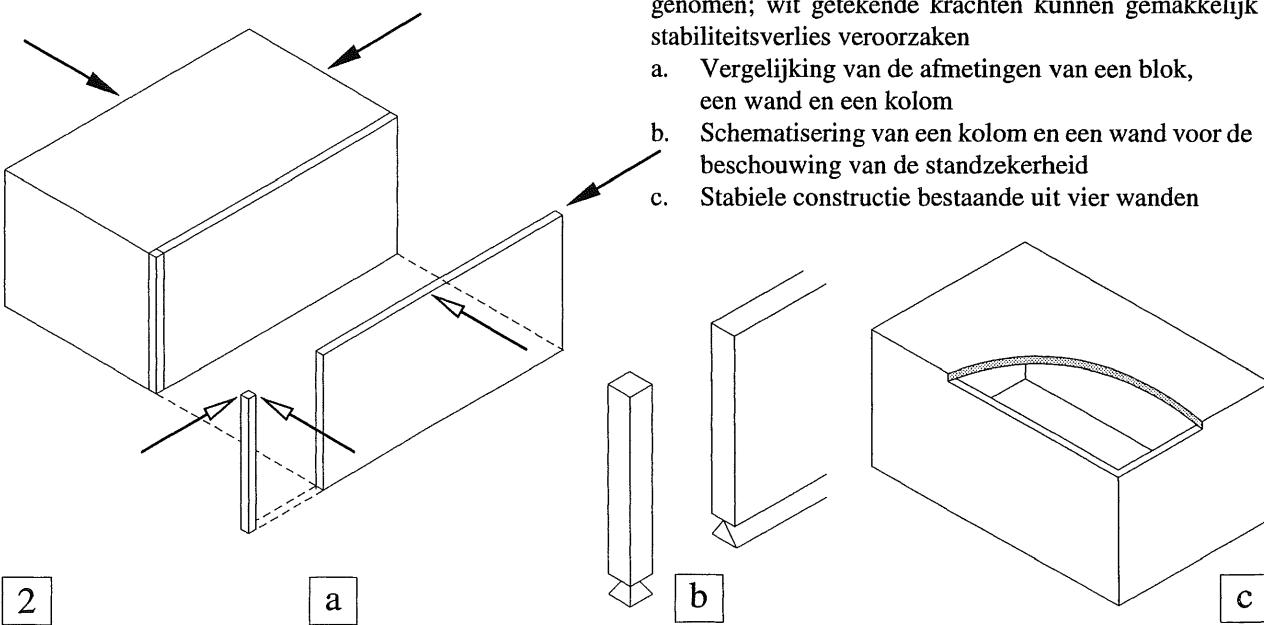
Enkel en alleen door het eigen gewicht van het blok wordt dus een 'inklemming' verkregen, die weer verloren gaat zodra het blok kantelt onder invloed van de horizontale kracht. Het blok hoeft hierbij niet massief te zijn. Als we een tafel beschouwen waar de vier poten stevig vastzitten aan het tafelblad – zodat ze in het tafelblad zijn ingeklemd – dan gedraagt de tafel zich even standzeker als het massieve blok, zie fig. 1c.

Als we van het 'liggende' blok in fig. 2a een dunne verticale plak afsnijden, dan zijn de hoogte en de lengte van die plak zeer veel groter dan de dikte. We hebben dan te maken met een wand of een muur, d.w.z. een vlak constructiedeel. Als we van de wand weer een reepje afsnijden, houden we een kolom over; een lineair constructiedeel.

Beschouwen we de stabiliteit van de *wand*, dan is deze in lengterichting even goed verzekerd als bij het massieve blok. De stabiliteit in de richting loodrecht op de wand is echter sterk verminderd. Zodra de resultante van de verticale en de horizontale kracht immers buiten het grondvlak van de wand terecht komt zal de wand moeten omvallen, zie KW-0 [054]. In deze richting bestaat er een '*unsafe*' stabiel evenwicht, dat gemakkelijk overgaat in labiel evenwicht.

Bij de *kolom* treedt in alle richtingen een *unsafe* stabiel evenwicht op, dat we maar beter als een labiel evenwicht kunnen beschouwen.

In onze schema's zullen we daarom van lijnvormige en puntvormige scharnieren uitgaan, zie fig. 2b. In fig. 2c is het massieve blok vervangen door vier wanden die een 'kamer' vormen (met of zonder plafond). Als de wanden aan de randen aan elkaar worden bevestigd, bijv. via lijnscharnieren, dan is weer een volkomen stabiele situatie ontstaan.



17.1.2 VOLLEDIGE INKLEMMING EN VERENDE INKLEMMING

Niemand zal het in zijn hoofd halen een paaltje recht overeind op de grond neer te zetten en er dan op rekenen dat het wel zal blijven staan. Maar als we het paaltje met een paar klappen een stukje de grond in slaan dan hebben we al een heel behoorlijke inklemming verkregen. Zoals reeds eerder werd vermeld, onderscheiden we volledige inklemmingen en verende inklemmingen. Het begrip *volledige inklemming* houdt in dat er geen rotatie bij de inklemming optreedt onder invloed van uitwendige krachten. Bij een *verende inklemming* kan wel enige rotatie optreden, zie ook KW-2 [207].

Om een inklemming in de grond te formeren van wat grotere lijnvormige constructie-onderdelen (zoals lantarenpalen of lichtmasten) worden ze meestal bevestigd aan een betonnen blok dat geheel of gedeeltelijk in de grond is ingegraven, zie fig. 1. We zullen dit soort inklemmingen eigenlijk altijd beschouwen als volledige inklemmingen, ook al is de grootte van het over te brengen inklemmingsmoment gelimiteerd.

Voor verticaal staande vlakke constructie-onderdelen gelden soortgelijke overwegingen als voor de lijnvormige onderdelen. Een tuinmuur of een schutting worden niet los op de grond geplaatst, maar worden over een zekere diepte ingegraven, zodat ook daar weer inklemmingen ontstaan, die we meestal weer als volledige inklemmingen zullen beschouwen, zie fig. 2.

Bij een zware storm kan blijken dat het leverbare inklemmingsmoment van de schutting te klein is, zodat de schutting omwaait. Bij een gemetselde muur is het ook mogelijk dat het inklemmingsmoment aan de voet van de muur zulke grote buigspanningen veroorzaakt, dat de buigtreksterkte (= hechtsterkte) van het metselwerk wordt overschreden. We hebben dan inderdaad te maken met een losstaande muur die zonder meer zal omvallen door de windkrachten.

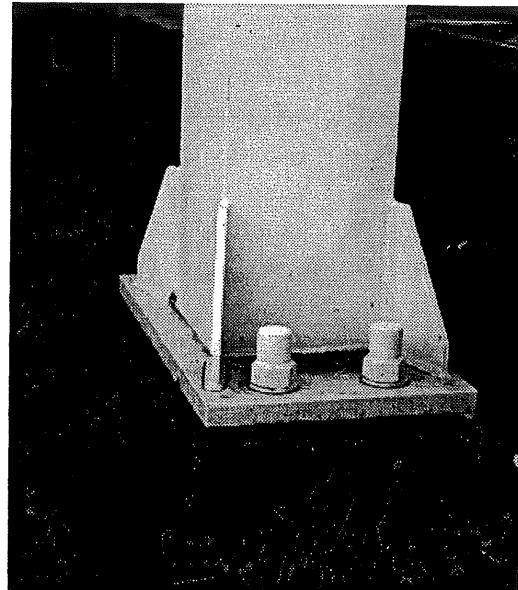


Fig. 1 Vrijwel volledige inklemming bij een lijnvormig constructiedeel (Portaal voor richtingsborden boven een rijksweg)

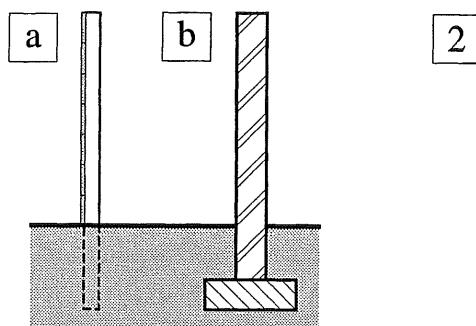


Fig. 2 Inklemmingen bij vlakke constructiedelen
a. Schutting
b. Gemetselde muur

In het eerstgenoemde geval van de schutting gaat de volledige inklemming onder invloed van de belasting geleidelijk over in een verende inklemming tot uiteindelijk kantelen optreedt. De constructie is dan instabiel geworden. In het tweede geval blijft de volledige inklemming gehandhaafd maar bezwijkt de muur door overschrijding van de sterkte. Het is natuurlijk ook mogelijk dat de muur zich als het ware loswikt en met voet en al omvalt.

Vergelijking met de natuur

In de natuur zien we overeenkomstige verschijnselen. Voor normale weersomstandigheden is de inklemming die het wortelstelsel aan een boom levert, voldoende groot. Bij zeer zware stormen kan deze inklemming onvoldoende blijken te zijn, zie fig. 3.

We roepen in herinnering dat het er bij het bouwen niet veel anders aan toegaat. We rekenen op van alles en nog wat, maar onder extreme omstandigheden, accepteren we het bezwijken van een bouwwerk, zie KW-0 [081].

Bij bouwwerken in staal en gewapend beton is het zeer wel mogelijk om er voor te zorgen dat de inklemmingen voldoende sterk en stijf zijn om alle optredende krachten zonder problemen naar de ondergrond te kunnen afvoeren.

De kosten kunnen door een dergelijke handelwijze soms onevenredig hoog oplopen. Daarom zullen we ook naar andere middelen omzien om de standzekerheid van lineaire en vlakke constructiedelen te handhaven.



Fig. 3 Bos na een zware storm

17.2.1 SAMENVOEGEN VAN CONSTRUCTIE-ONDERDELEN

In de voorgaande hoofdstukken hebben we ons vrijwel uitsluitend bezig gehouden met afzonderlijke constructie-onderdelen en hun geschematiseerde opleggingen. Om tot een gebouw te komen – hoe eenvoudig dan ook – zullen constructie-onderdelen moeten worden samengevoegd. Bouwen heeft als eerste doel het scheppen en ordenen van ruimten. Daartoe moeten deze ruimten op de een of andere wijze worden omsloten, zowel aan de zijkanten als aan de onderen bovenkant.

Horizontale afsluitingen ter plaatse van de begane grond worden meestal gevormd door vloeren. Deze kunnen continu zijn, bijv. een gewapend betonvloer, of zijn samengesteld uit lijnvormige elementen die weer op elkaar rusten, bijv. een houten vloer bestaande uit planken en balken. Op verdiepinghoogte moet zo'n vlak element of een samenstel van lijnvormige elementen echter worden ondersteund en we moeten zien dat we de opleggingen op hoogte krijgen.

In principe kunnen we daartoe kolommen en/of wanden in de begane grond inklemmen en aan de bovenzijde de balken of vloeren opleggen, zie fig. 1a. In ons rekenschema projecteren we de constructie zoals gebruikelijk op een verticaal vlak. Als we alleen naar de vloer kijken, kunnen we de echte opleggingen weer vervangen door een scharnier en een rol, zie fig. 1b1. De beide kolommen kunnen dan weer afzonderlijk worden beschouwd, zie fig. 1b2.

In werkelijkheid zullen we moeten zorgen dat *beide* opleggingen horizontale krachten kunnen overdragen, zodat een balk de twee oplegpunten ook bij elkaar houdt en er niet bij een verzakking gewoon van afvalt.

We hebben dan te maken met een portaal zoals is weergegeven in fig. 1c; een éénevoudig statisch onbepaalde constructie, zie KW-2 [204].

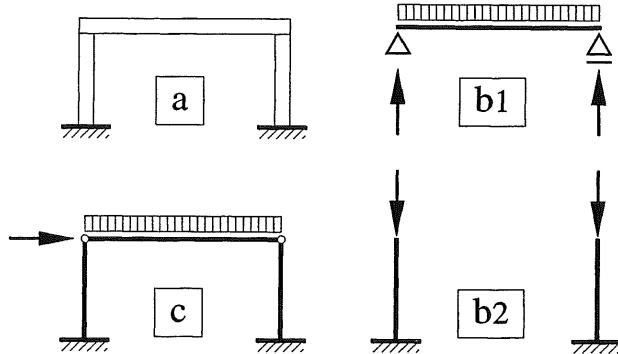


Fig. 1 Vloer op verdiepinghoogte, opgelegd op twee wanden, die zijn ingeklemd in de begane grondvloer

- a. Werkelijke constructie
- b. Schematisering als traditionele ligger; ondersteund door twee ingeklemde stijlen
- c. Schematisering als portaal; regel aan beide zijden scharnierend aan de ingeklemde stijlen bevestigd

Om ons van een en ander enige voorstelling te kunnen maken, keren we een tafel om en leggen het tafelblad op de grond met de vier poten omhoog, zie fig. 2. De vier poten kunnen dan als stijlen worden beschouwd die in een vlakke plaat zijn ingeklemd. Op deze vier poten kunnen we dan weer een los tafelblad neerleggen dat een horizontale afsluiting vormt van de ruimte tussen de vier poten. Alle verticale krachten kunnen zonder meer naar de ondergrond worden afgedragen KW-0 [053]. De poten kunnen door hun inklemming in het tafelblad ook horizontale krachten opnemen. We moeten alleen zorgen dat het losse tafelblad op de 'eerste verdieping' niet van de vier ondersteunende poten afschuift. In feite hebben we vier kolommen verend ingeklemd in een vloer. In aanzicht zien we hiervan dan maar twee kolommen.

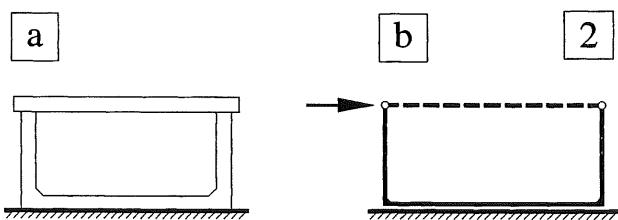


Fig. 2 Visualisering portaal

- a. Omgekeerde 'tafel' met extra los bovenblad
- b. Schematisering

17.2.2 PORTAAL ONDER HORIZONTALE BELASTING

Symmetrische portalen onder horizontale belasting kunnen worden berekend als statisch bepaalde constructies, omdat we een extra gegeven tot onze beschikking hebben: de horizontale belasting wordt namelijk gelijk over de twee opleggingen verdeeld, zodat in het midden van de bovenregel van het portaal een momentennulpunt moet optreden. Ter wille van het inzicht, zullen we dit afleiden via een omweg.

In fig. 3a is een symmetrische ligger met overstekken weergegeven, die keersymmetrisch is belast door twee verticale puntlasten F . Het momentenverloop voor deze ligger is weergegeven in fig. 3b. We klappen nu beide overstekken met de daarop werkende puntlasten naar boven en zorgen dat ze weer buigvast worden verbonden met de eigenlijke ligger, zie fig. 3c. We hebben in fig. 3c wel een heel andere oplegreactie-verdeling dan in fig. 3a, maar aan het momentenverloop verandert er niets, zie fig. 3d. We kunnen de overstekken met de bijbehorende momenten van fig. 3b dus ook gewoon 90° roteren.

In fig. 3e is de constructie van fig. 3c om de horizontale as gespiegeld, waarbij nu het uiteinde van elke poot (stijl) door een scharnier is ondersteund. Uit keersymmetrie-overwegingen veroorzaakt een belasting $2F$ in elke stijl een horizontale reactiekraag F . De bijbehorende momentenlijn is weergegeven in fig. 3f; deze komt volledig overeen met die van fig. 3d; uiteraard weer gespiegeld om de horizontale as.

De constructie van fig. 3e wordt aangeduid als portaal of twee-scharnierspant. Dit is een vrij eenvoudige oplossing omdat een verschuiving van de 'scharnieren' gemakkelijk is te verhinderen, terwijl er geen eisen worden gesteld aan de rotatie daar ter plaatse.

Voor de verticale belasting is zo'n eenvoudige berekening niet mogelijk, daar moeten we ook de vervormingen van de constructie beschouwen. De oplossing van dit vraagstuk wordt besproken in KW-5, maar in [378] zullen we vast aangeven tussen welke grenzen een en ander zich afspeelt. Voor de standzekerheid van het geheel levert de afdracht van de verticale belasting nauwelijks problemen.

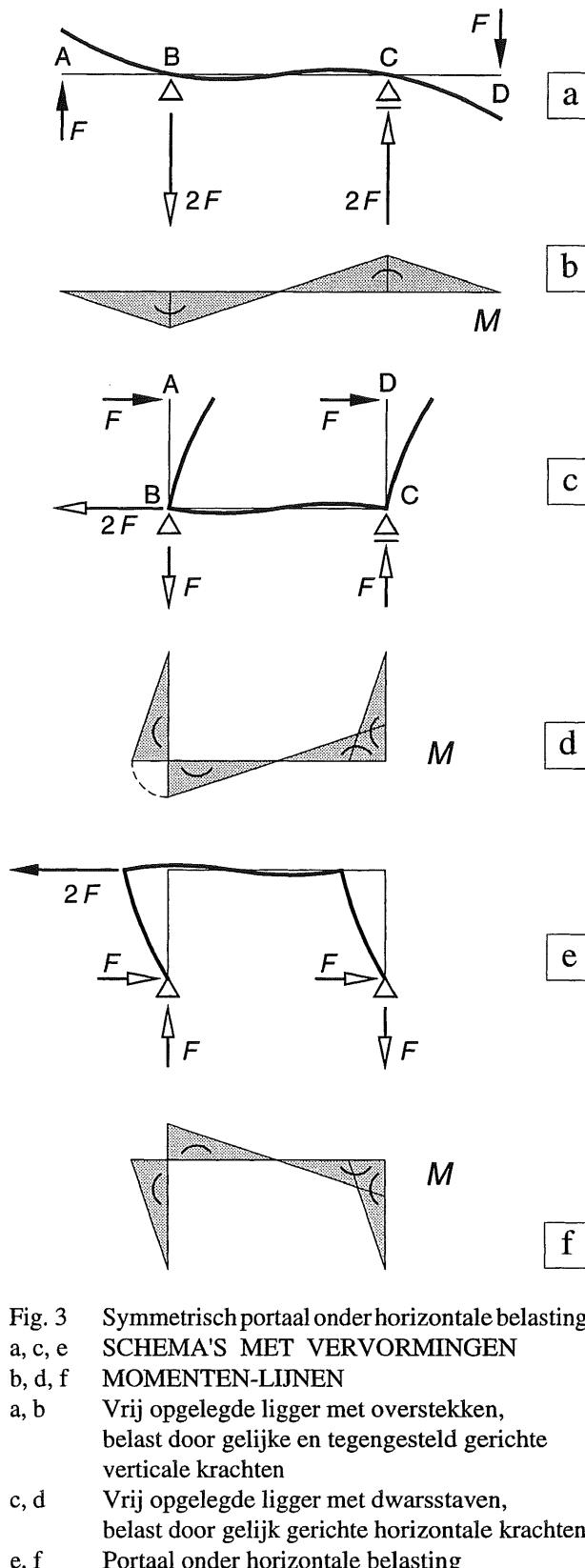


Fig. 3 Symmetrisch portaal onder horizontale belasting
SCHEMA'S MET VERVORMINGEN
MOMENTEN-LIJNEN
a, b Vrij opgelegde ligger met overstekken, belast door gelijke en tegengesteld gerichte verticale krachten
c, d Vrij opgelegde ligger met dwarsstaven, belast door gelijk gerichte horizontale krachten
e, f Portaal onder horizontale belasting

17.2.3 VERDIEPINGHOGE BOUW

Om met lineaire en vlakke constructie-onderdelen een gebouw van meerdere verdiepingen tot stand te brengen, hebben we een aantal mogelijkheden tot onze beschikking:

1. *Uitsluitend lineaire onderdelen*

Alle liggers worden op de kolommen gelegd zonder deze echt buigvast met elkaar te verbinden, zie fig. 1a. De vloeren worden gevormd door platen van de ene ligger naar de andere te laten lopen. Een dergelijk handelwijze is gebruikelijk als het gebouw wordt samengesteld uit betonnen geprefabriceerde elementen.

De stapeling is volkomen labiel in elke richting en kan alleen maar overeind worden gehouden door het geheel te laten steunen tegen een stijve kern, die is opgebouwd uit vlakke constructiedelen, zie fig. 2. Dit schema in het verticale vlak is hetzelfde als het schema voor de vormvastheid van het staafwerk dat in fig. [312-1a] is weergegeven.

2. *Uitsluitend vlakke onderdelen;*

evenwijdig aan twee coördinaatvlakken

Zowel de wanden als de vloeren zijn massief. De wanden kunnen van metselwerk of (ongewapend) beton zijn, zie fig. 1b.

De vloeren kunnen uit één stuk bestaan, zie fig. 1b (gewapend beton) of uit een aantal naast elkaar gelegde platen (eveneens van gewapend beton), zoals is weergegeven in fig. 1a. Vergelijk KW-0, fig. [015-2a].

Bij projectie in y-richting is er geen verschil met de voorgaande constructie. Evenals onder 1. nemen we veiligheidshalve aan dat alle onderdelen min of meer los op elkaar zijn gelegd.

In lengterichting van de wanden is de zaak dan in principe stabiel [355-2a], maar loodrecht op de wanden moeten we het geheel toch maar als een kaartenhuis beschouwen dat alleen overeind kan blijven door de aanwezigheid van een of meer stijve kernen.

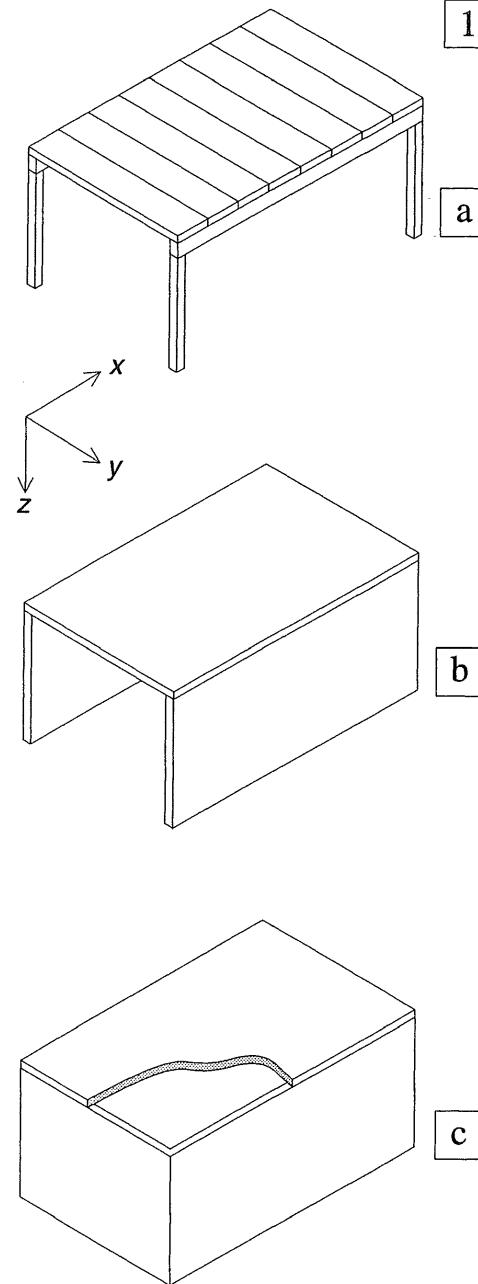


Fig. 1 Stapelingen van lineaire en vlakke elementen

- a. Uitsluitend lineaire elementen
- b. Uitsluitend vlakke elementen evenwijdig aan *twee coördinaatvlakken* (*x-y; x-z*)
- c. Uitsluitend vlakke elementen evenwijdig aan *drie coördinaatvlakken* (*x-y; x-z; y-z*)

3. Uitsluitend vlakke onderdelen;

evenwijdig aan de drie coördinaatvlakken
Deze situatie is weergegeven in fig. 1c. Zolang de onderdelen maar enigszins met elkaar zijn verbonden is de stabiliteit in langs- en dwarsrichting van het gebouw gewaarborgd.

Alleen bij situatie 3. – met vlakke elementen in drie richtingen – levert de stabiliteit dus geen problemen op. Maar voor de meeste gebouwen van enige omvang worden alleen maar in horizontale richting vlakke elementen toegepast (vloeren) en in verticale richting zo veel mogelijk lijnvormige elementen (kolommen).

Er bestaan echter mogelijkheden om het effect van een schijf te vervangen door een samenstel van lijnvormige elementen, die hetzelfde nuttig effect sorteren als deze schijf.

Als eerste kunnen we hierbij weer denken aan een vierhoek, die vormvast wordt gemaakt door het aanbrengen van een of twee diagonalen, zie fig. 3b; zie ook [306] en [367]. Bij de afdracht van horizontale belastingen treden dan in alle staven uitsluitend normaalkrachten op.

Als deze diagonalen in een van de gevets kunnen worden aangebracht zitten ze meestal niet in de weg, maar als ze dwars door het gebouw moeten lopen ligt dat geheel anders.

Als we zoveel mogelijk vrije ruimte ter beschikking willen hebben, zullen we een aantal verticale schijven moeten vervangen door portalen, zie fig. 3c. Dit zijn in principe statisch onbepaalde constructies omdat we twee scharnieren als ondersteuning gebruiken, zodat er vier onbekende oplegreacties zijn. Alleen bij een driescharnierspant, zoals in fig. 3c2 hebben we door het extra scharnier weer te maken met een statisch bepaalde constructie. De krachtwerking in driescharnierspannen wordt behandeld in paragraaf 18.4 [387].

Portalen kunnen zowel horizontale als verticale krachten afvoeren en dit gebeurt via normaalkrachten *plus* buigende momenten.

Terwijl we bij de varianten van fig. 3a en 3b ook zonder enige berekening wel kunnen aannemen dat de stabiliteit is verzekerd, zullen we bij de varianten zoals geschetst in fig. 3c, een berekening nauwelijks kunnen omzeilen.

Vooruitlopend op een uitgebreide behandeling van portalen in KW-6, zullen we in [379] en [380] globaal aangeven, binnen welke grenzen de krachtswerking zal blijven voor de volgende belastinggevallen:

1. de afdracht van een gelijkmatig verdeelde verticale belasting,
2. de afdracht van een horizontale puntlast ter plaatse van de bovenregel.

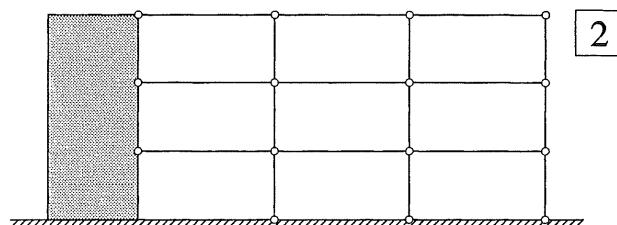
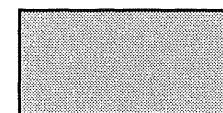
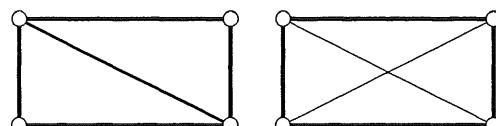


Fig. 2 Schematisering als staafwerk steunend tegen een stijve kern

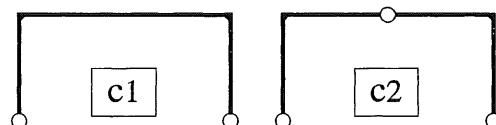


3

a



b



b

Fig. 3 Vervanging van een schijf door een min of meer gelijkwaardig stel andere onderdelen

- a. Stijve schijf
- b. Vormvaste vierhoeken
(een of twee diagonalen) [367]
- c. Portalen
- c1 Tweescharnierspant (éenvoudig statisch onbepaald)
- c2 Driescharnierspant (statisch bepaald)

17.3.1 INLEIDING

Bij vele gestapelde gebouwen moet voornamelijk het eigen gewicht ervoor zorgen dat horizontale krachten kunnen worden opgenomen.

Voor de controle van de standzekerheid van dergelijke gebouwen gaan we weer uit van het gedachtenmodel van fig. [355-2b], zie fig. 1b.

Hierbij beschouwen we een wand aan de onderzijde niet als ingeklemd of los op de bodem staand, maar ondersteund door een lijschansnijer in lengterichting van de wand, zie fig. 1b.

In lengterichting van de wand is dan geen verschuiving mogelijk, waardoor elke horizontale kracht in deze richting kan worden opgenomen, zie fig. 1a.

In dwarsrichting kan het lijschansnijer evenmin verschuiven, maar de wand is in die richting volkomen instabiel; hij valt zonder meer om.

Om een kolom in beide horizontale richtingen gelijk te behandelen, moeten we de kolom op een puntschansnijer plaatsen, waardoor hij dus in elke richting kan omvallen, zie fig. 1b.

Om enig gevoel voor de beweeglijkheid van dit soort aansluitingen te krijgen, kunnen we gebruik maken van modelletjes van polystyrene schuim. We plaatsen alle onderdelen op een grondvlak dat bestaat uit een vlakke plaat met doek bekleed. Aan de boven- en onderzijde van de kolommen en wanden van polystyrene schuim is klitteband aangebracht, zodat ze niet kunnen verplaatsen. Maar in hun instabiele richting(en) kunnen ze ook geen momenten van enige betekenis overbrengen. Onder invloed van het eigen gewicht kunnen ze net min of meer overeind blijven staan. Maar als we de kolommen en wanden in de juiste onderlinge stand plaatsen, met een stijve schijf als dakvlak, dan vormen ze een vrij stevig geheel, zie fig. 2.

Een tweede systeem wordt gevormd door staafjes en knooppunten te gebruiken die de fabrikant van MERO ruimtevakwerken in de handel heeft gebracht, om modellen van (zijn) ruimtevakwerken te vervaardigen.

We bevestigen een aantal van deze knopen op een stijve vloerplaat in een regelmatig stramien. Op deze punten kunnen we kolommen overeind zetten, die dan worden ondersteund door een ietwat stroef scharnier, zie fig. 3.

Met dit laatste systeem zullen we beginnen om de vormvastheid van een raamwerkachtige constructie te onderzoeken.

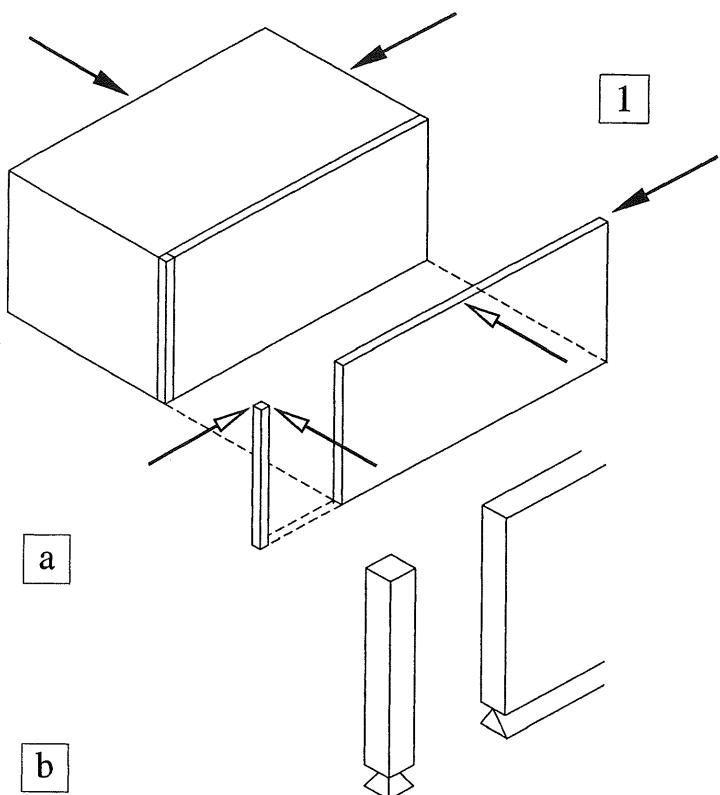


Fig. 1 Aannamen voor de ondersteuningen bij de bepaling van de standzekerheid van wanden en kolommen

- a. De krachten met de witte pijlpunten kunnen niet worden opgenomen
- b. Schematisering van kolommen en wanden

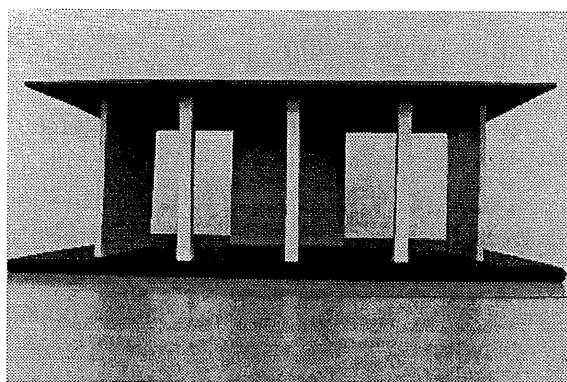


Fig. 2 Model van polystyrene schuim van een één verdieping hoog bouwwerk; opgebouwd uit lijnvormige en vlakke constructie-onderdelen

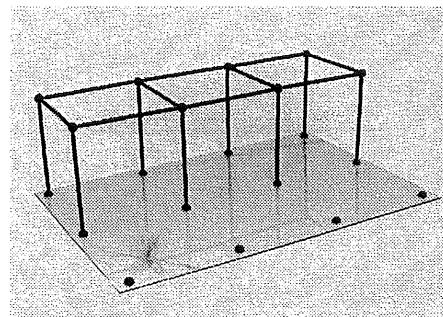
We onderzoeken allereerst de standzekerheid van een heel eenvoudig bouwwerkje.

De hoofddraagstructuur hiervan is weergegeven in fig. 3a. De stabiliteit van dit gebouwtje is nog op geen enkele manier verzekerd, omdat de verbindingen niet buigstijf zijn.

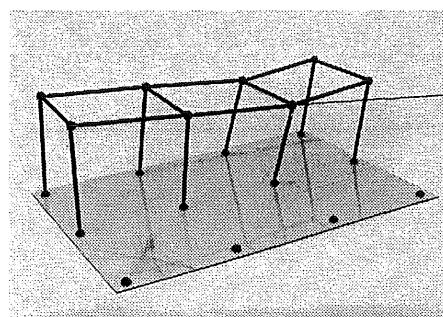
Er behoeft maar een geringe zijdelingse kracht te worden uitgeoefend om het geheel sterk te laten vervormen, zie fig. 3b. Om de standzekerheid te waarborgen, zullen schoorstaven moeten worden toegevoegd (= pendelstijlen).

Ter wille van het inzicht is de opbouw van een dergelijke structuur stap voor stap uiteengezet in [364 t/m 366]. Wie dit proces aandachtig volgt, kan eigenlijk nauwelijks meer problemen ondervinden bij de bepaling van de standzekerheid van dit soort draagstructuren.

Als we de onderste verdieping standzeker hebben gemaakt, kunnen we voor elke verdieping, die we daar bovenop plaatsen, op exact dezelfde wijze te werk gaan. Met andere woorden, we kunnen er een dupliaat bovenop plaatsen.



3



a

b

Fig. 3 Hoofddraagstructuur van een langwerpig gebouwtje

- Situatie bij afwezigheid van horizontale krachten
- Kleine horizontale krachten veroorzaken grote verplaatsingen

1

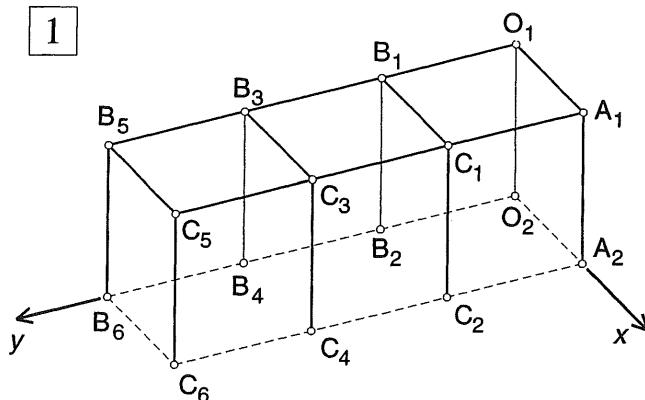


Fig. 1 Schema van de draagstructuur

17.3.2 DRAAGSTRUKTUUR BESTAANDE UIT LIJNVORMIGE ELEMENTEN

De gewenste draagstructuur – nog zonder schoeren – is weergegeven in fig. 1. De aanduiding van de staven is aan deze figuur te ontlezen. Bij de verdere beschrijving van de draagstructuur zijn in de foto's geen letters of cijfers vermeld.

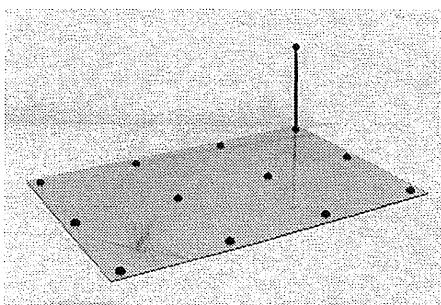
Eén vast punt op verdiepinghoogte

Om de draagstructuur op hoogte te krijgen, beginnen we met het overeind zetten van de eerste scharnierend ondersteunde kolom O₁-O₂, zie fig. 2a.

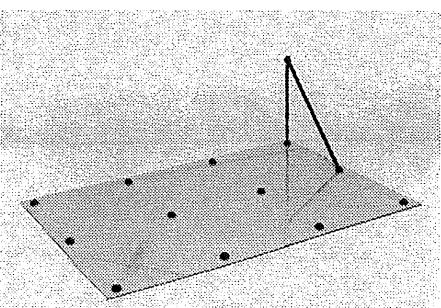
We steunen deze kolom zijdelings door het aanbrengen van de schoorstaaf O₁-A₂, gelegen in het x-z-vlak, zie fig. 2b1. We hebben dan een vormvaste driehoek O₁-O₂-A₂ gecreëerd.

Deze driehoek zorgt er dan voor, dat punt O₁ zich niet meer in x-richting kan verplaatsen. Maar in de y-richting valt deze driehoek nog gewoon om, zie fig. 2b2.

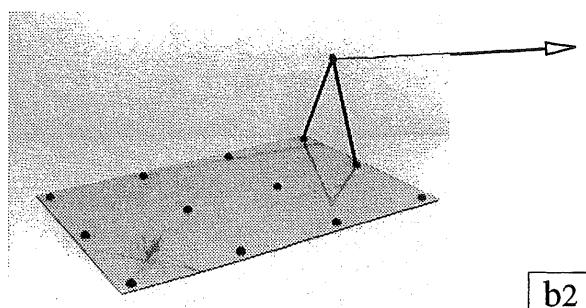
2



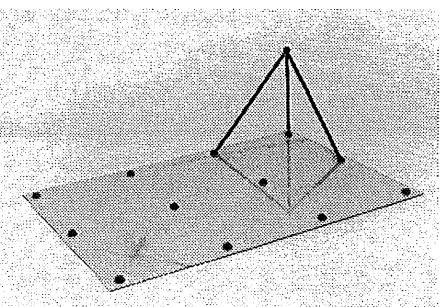
a



b1



b2



c

Fig. 2 Fixatie van één vast punt op verdiepinghoogte

Als volgende stap brengen we daarom een tweede schoorstaaf O₁-B₂ in het y-z-vlak aan, zie fig. 2c.

Punt O₁ kan dan door de vormvaste driehoek O₁-O₂-B₂ ook niet meer in y-richting verplaatsen. Het punt O₁ kan uiteraard ook niet verticaal verplaatsen door de aanwezigheid van de stijl O₁-O₂. We hebben nu één punt O₁ op verdiepinghoogte kunnen fixeren. We zullen vervolgens nagaan of we alle kolommen op een dergelijke manier moeten vastzetten, of dat er nog andere mogelijkheden zijn.

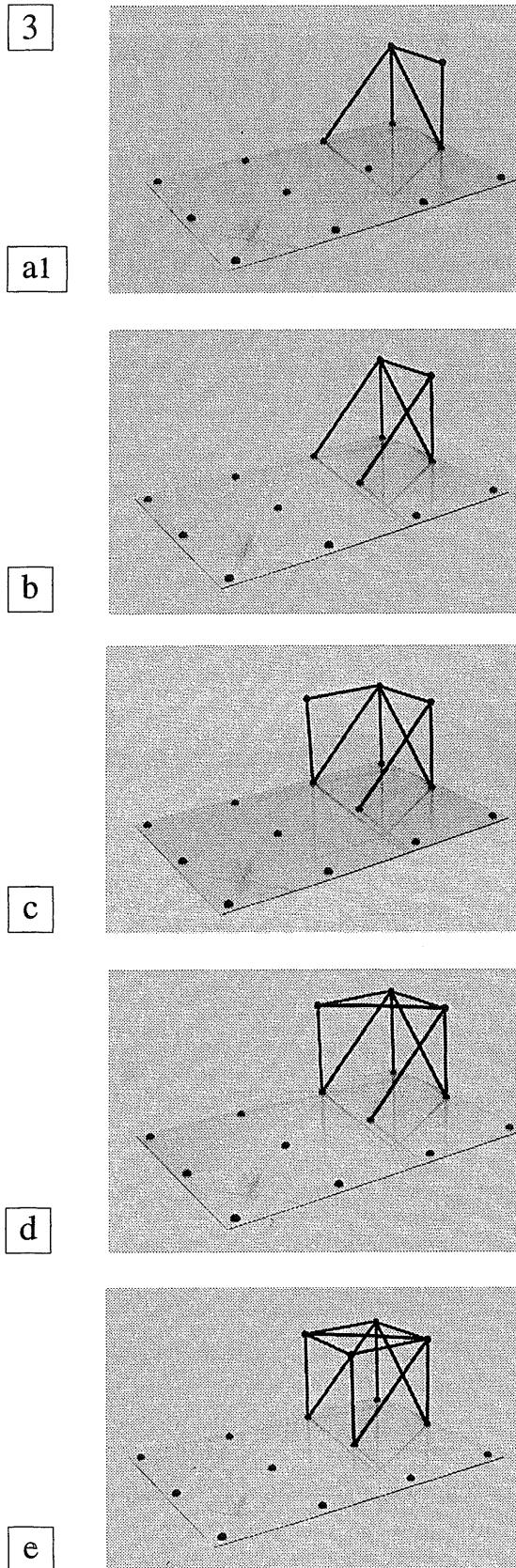
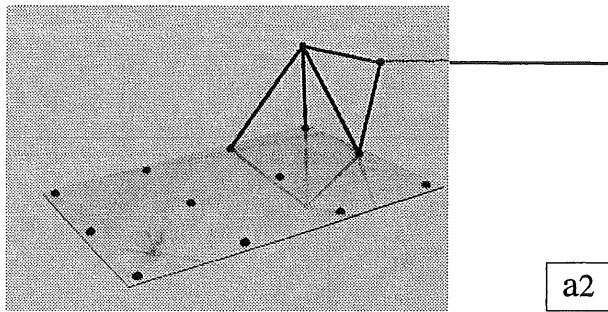


Fig. 3 Formatie van de stijve kern van de draagstructuur



17.3.3 VORMING STIJVE KERN

We zullen de meest gebruikelijke manier volgen waarbij we in A2 en B2 nieuwe kolommen oprichten, zie fig. 1. Gemakshalve nemen we aan dat de plattegrond in x -richting één travee breed is en in y -richting meerdere traveeën.

Om punt A1 in x -richting onverplaatsbaar te maken, kunnen we het aan O2 verbinden. Maar omdat we toch een verbinding tussen O1 en A1 zullen willen aanbrengen, kunnen we punt A1 ook rechtstreeks met O1 verbinden, zie fig. 3a1.

In x -richting kan punt A1 dan nog vrijelijk heen en weer zwaaien, in feite roteert punt A1 om de as O1-A2, zie fig. 3a2. Zodra we echter de schoorstaaf A1-C2 aanbrengen, is ook punt A1 volledig gefixeerd, zie fig. 3b.

We brengen vervolgens de kolom B1-B2 aan. De staaf O1-B1 zorgt er voor dat punt B1 niet in y -richting kan verplaatsen, zie fig. 3c. Om verplaatsing in x -richting te voorkomen, moeten we zorgen dat punt B1 deel uitmaakt van twee vormvaste driehoeken die niet in hetzelfde verticale vlak van de zijwand liggen.

We zouden dan kunnen kiezen voor staaf B1-C2, maar we brengen dan wel een obstakel dwars door het gebouw aan. We kunnen daarom beter de schoorstaaf B1-A1 in het dakvlak aanbrengen, zie fig. 3d. De punten O1 en A1 zijn immers beide vaste punten; door de driehoek O1-A1-B1 geldt dit ook voor B1. De kolom C1-C2 kan dan in punt C1 worden vastgezet aan de twee vaste punten A1 en B1, zie fig. 3e. We hebben nu de stijve kern van de draagstructuur geformeerd, bestaande uit drie verticale buitenvlakken en één horizontaal vlak op verdiepinghoogte.

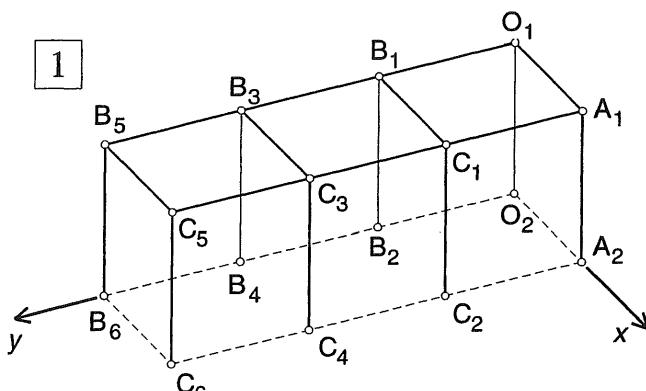
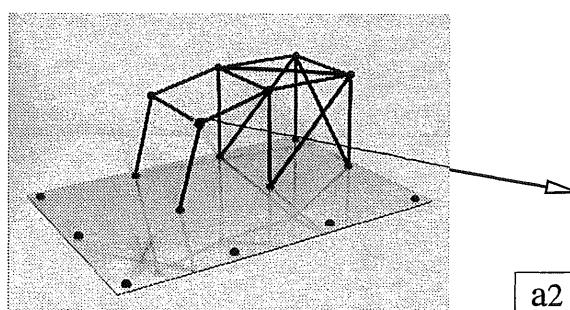
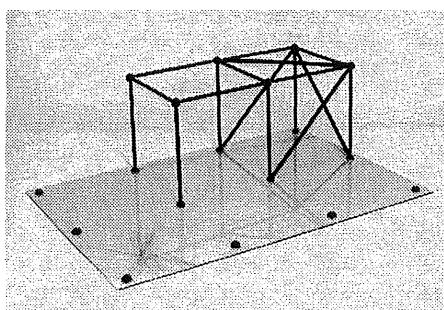


Fig. 1 Schema van de draagstructuur

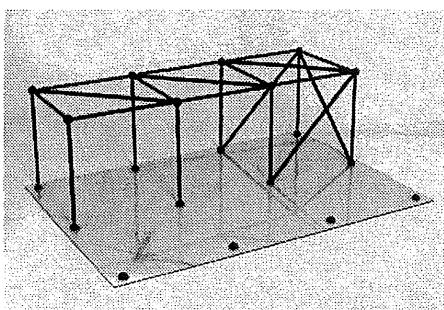
17.3.4 VERDERE UITBOUW VAN DE DRAAGSTRUCTUUR

Als we nu voortbouwen in *y*-richting met de stijlen B₃-B₄ en C₃-C₄ (zie fig. 1), dan behoeven we B₃ en C₃ enkel maar aan de bovenzijde te koppelen door de horizontale staven B₁-B₃ en C₁-C₃ om deze punten in *y*-richting onverplaatsbaar te maken, zie fig. 2a1. Het aanbrengen van schoren in deze verticale zijvlakken heeft verder geen nut.



a1

a2



b

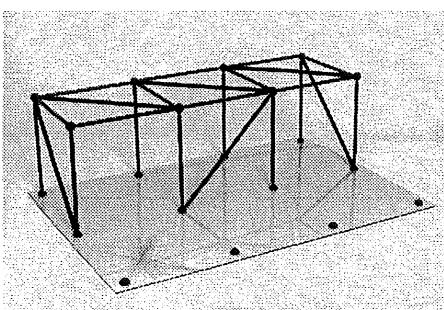


Fig. 2 Voltooiing van de draagstructuur tot een standzeker gebouwtje

In *x*-richting hebben beide punten nog wel bewegingsvrijheid, zie fig. 2a2. Voor het onverplaatsbaar maken van B₃ en C₃ in *x*-richting kunnen we een schoor toepassen in het bovenvlak, waarbij de richting verder niet ter zake doet (dus B₁-C₃, of C₁-B₃).

Op dezelfde wijze kunnen we de daaropvolgende traveeën hieraan vastzetten. Dus ook bij de laatste travee is alleen maar een schoor in het dakvlak nodig, maar niet in de drie zijvlakken, zie fig. 2b.

Een stabiel bouwwerk kan worden verkregen door het gehele dakvlak stijf te maken plus drie zijvlakken, die niet alle drie evenwijdig zijn.

In fig. 2c is een variant van het bovenstaande principe getoond, met verstijvingen in de beide korte zijwanden en een verstijving in één van de lange middenwanden.

Als je van beide varianten het model vervaardigt, zul je merken dat de laatste variant stijver is dan de eerste. Twee stijve schijven op grote afstand kunnen immers met relatief kleine krachten een koppel opnemen.

Verstijvingskruis

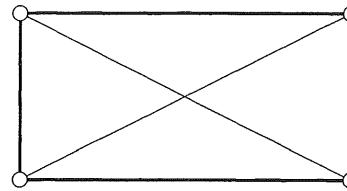
Dikwijls wordt een rechthoek vormvast gemaakt door er *twee* schoren in aan te brengen in de vorm van een kruis, zie fig. 3a. Als we ons deze staven als koorden voorstellen, dan hangt het van de richting van de uitwendige kracht af, welk koord strak zal gaan staan en welk koord er slap bijhangt. In principe kan steeds maar één van de twee koorden werkzaam zijn, zie fig. 3b.

Bij gebouwen worden deze kruisen dikwijls uitgevoerd met buigslappe strippen. Trek kunnen ze uitstekend opnemen, maar drukkrachten kunnen ze gemakkelijk ontwijken door zijdelings uit te buigen bij een vrijwel constant blijvende (relatief kleine) normaalkracht. Op dit zgn. knikverschijnsel wordt uitvoeriger ingegaan in KW-5.

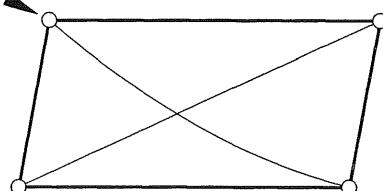
Voorbeeld

Een boekenkast die we zelf in elkaar zetten, vormt in lengterichting dikwijls maar een wiebelig geheel. Na het aanbrengen van zo'n verstijvingskruis is de beweeglijkheid geheel verdwenen. Een dunne plaat hardboard, die aan de achterzijde op een paar punten wordt vastgespijkerd kan even effectief zijn. Zo'n plaat is loodrecht op zijn vlak heel slap maar wordt in zijn eigen vlak gehouden door de stijve 'stijlen en regels' van de boekenplank. Hierdoor kan de plaat in zijn vlak als een stijf medium werken.

Indien een dakvlak in *x*- en *y*-richting uit meerdere traveen bestaat, zoals in fig. 4 is aangegeven, is het niet langer noodzakelijk om in elk vak een schoor aan te brengen. In principe is dan één verstijfde travee in *x*- en in *y*-richting voldoende, zoals uitvoerig is behandeld bij de vormvastheid van rechthoekige staafwerken in [312].



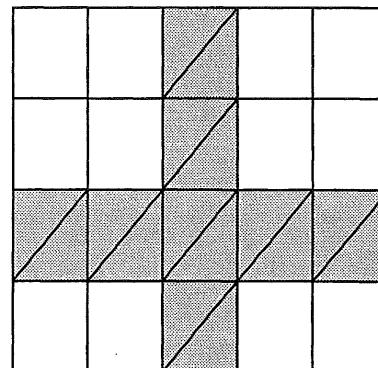
3



a

b

Fig. 3 Buigslappe schoren in de vorm van een kruis
 a. Schema
 b. Slechts één van beide schoren is werkzaam onder belasting



4

Fig. 4 Bij een dakvlak is een verstijving van twee loodrechte traveeën voldoende om een stijf geheel te krijgen

17.4.1 MOGELIJKHEDEN VOOR DE KRACHTSAFDRACHT

Als horizontale krachten op een stijf dakvlak aangrijpen gedraagt dit vlak zich als een stijve schijf, die in principe overal reactiekrachten kan afdragen, als wij de constructie daartoe maar de mogelijkheid geven. Als we dit kunnen bewerkstelligen via drie horizontale pendelstaven dan zijn de krachten in deze pendelstaven eenduidig te bepalen met behulp van de drie evenwichtsvoorwaarden, zie fig. 1a.

Nu komen we pendelstaven in deze vorm eigenlijk nooit tegen, maar we bezitten wel een alternatief dat hier sterk op lijkt. We kunnen zo'n dakvlak of vloervak immers ondersteunen door drie vlakke schijven, of door drie kolommen die maar in één richting zijn geschoord, of een combinatie van deze elementen, zie fig. 1b.

Deze drie lijnvormige ondersteuningen dragen hun krachten elk in een verticaal plat vlak af naar de ondergrond. In de richting van deze vlakken zijn de schijven stabiel zodat er vrijwel onbeperkt (wind)krachten kunnen worden afgedragen.

Loodrecht op deze vlakken is de stabiliteit echter zo gering dat we die net zo goed kunnen verwaarlozen. Op deze wijze zijn dus de werklijnen vastgelegd waارlangs de horizontale krachten kunnen worden afgedragen. De resulterende horizontale (wind)kracht F_H die op een dakvlak of vloervak werkt, kan dan volgens de regels van KW-0 [024] of [025], worden ontbonden in deze richtingen, zie fig. 2a. De reactiekrachten zijn dan gelijk en tegengesteld gericht aan de drie ontbondenen van de actiekracht, zie fig. 2b.

Vooral uit de grafische aanpak volgens [024] komt duidelijk naar voren dat het absoluut niet noodzakelijk is dat de schijven onderling loodrecht op elkaar staan. We moeten er echter voor waken om instabiele varianten toe te passen, zie [369].

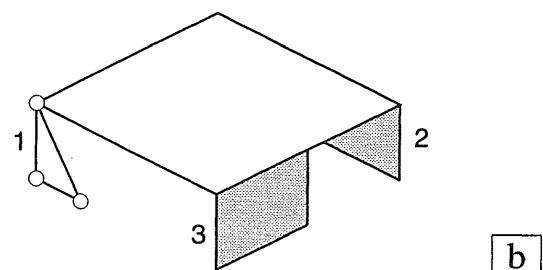
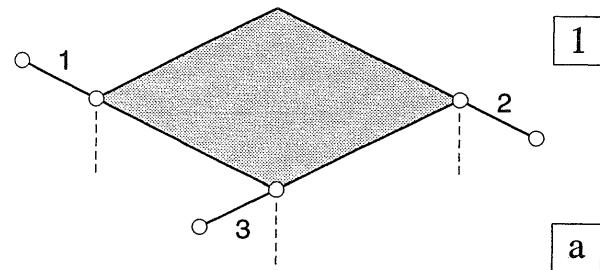


Fig. 1 Afdracht van een horizontale kracht
 a. Gedachtenmodel: afdracht via drie pendelstijlen 1, 2 en 3
 b. Ondersteuning door drie elementen die maar in één richting krachten kunnen afdragen
 1 eenzijdig geschoorde kolom
 2,3 verticale schijven

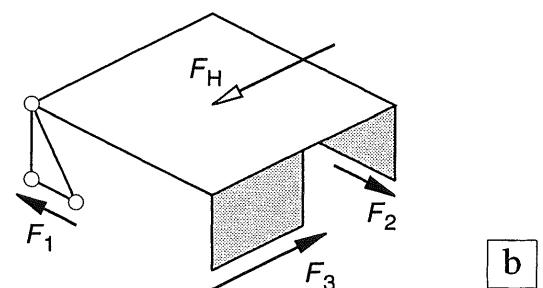
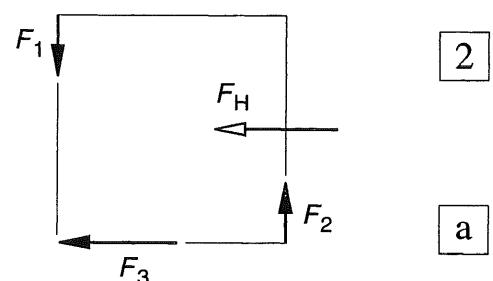


Fig. 2 Ontbinden van een kracht langs drie gegeven werklijnen
 a. Windkracht F_H ontbonden in F_1 , F_2 en F_3 langs de werklijnen l_1 , l_2 en l_3
 b. Reactiekrachten F_1 , F_2 en F_3 op de begane grond die evenwicht maken met F_H

Instabiele varianten

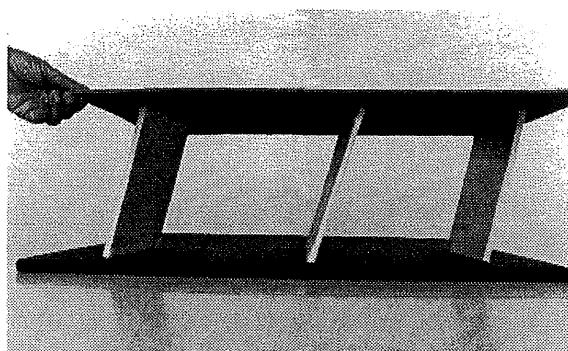
Bij de beschouwing van instabiele varianten valt de grote overeenkomst op met de ondersteuning van liggers door middel van pendelstijlen; KW-2 [210-211]. Na vergelijking van fig. 1a met fig. 1b behoeft dit nauwelijks verwondering te wekken.

De navolgende varianten moeten in ieder geval worden vermeden:

- Een ondersteuning door drie (of meer) evenwijdige schijven, zie fig. 3a.
- Een ondersteuning door twee loodrecht op elkaar staande schijven (ongeacht het aantal aanwezige kolommen).
- Een ondersteuning door drie schijven, gelegen in verticale vlakken, die elkaar in één en dezelfde lijn snijden, zie fig. 3c.

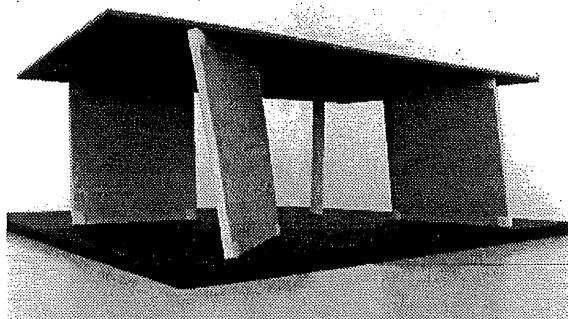
Bij variant a. verplaatsen de schijven zich wel (ze kantelen), maar ze vervormen niet (ze blijven dus vlak).

Bij de varianten b. en c. ontstaat door de rotatie van het bovenvlak een wringing van de schijven. Deze gaan de vervorming wel tegen, maar kunnen ze niet geheel belemmeren (de schijven zijn relatief slap loodrecht op hun vlak).

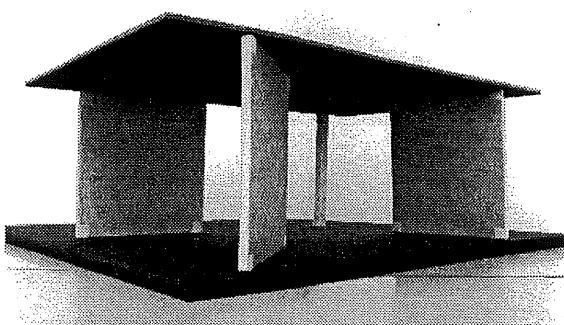


3

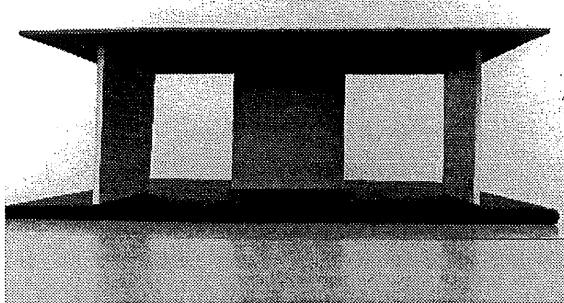
a2



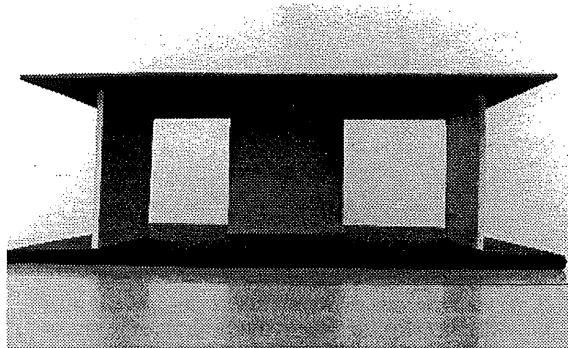
c2



c1



d1



d2

Fig. 3 Modellen van instabiele en stabiele varianten
links onbelaste toestand
rechts belast door een horizontale kracht

c1 Drie schijven die elkaar snijden in één verticale lijn (de kolom)

d1 Stabiele variant met drie loodrecht op elkaar staande schijven

a2 Het model met drie evenwijdige schijven valt zonder steun gewoon om

c2 Bij een horizontale belasting roteert het model om het snijpunt van de drie schijven, onverschillig of hier wel of niet een kolom staat

d2 Het model verplaatst niet en roteert niet

17.4.2 STATISCH ONBEPAALDE VARIANTEN

Als er meer dan drie schijven aanwezig zijn, kunnen we met de evenwichtsvoorwaarden alleén, de oplossing niet meer aangeven. Maar hoe meer schijven er aanwezig zijn hoe gemakkelijker de krachten ook over al deze schijven kunnen worden verdeeld.

Om toch enig inzicht in de orde van grootte van de optredende krachten te verkrijgen kan men de hierna volgende procedure toepassen die wel meer in de techniek wordt gebruikt.

Voor een bepaalde windrichting kiezen we twee of drie verticale schijven, die goed staan gesitueerd om deze windkracht af te voeren. De krachten in deze schijven kunnen dan op de gewone wijze worden berekend. Voor een andere windrichting kiezen we weer twee of drie schijven uit die de windkrachten zo gunstig mogelijk kunnen afvoeren en bepalen weer de krachten in de schijven. Als de gekozen schijven nu sterk en stijf genoeg zijn om de krachten naar de ondergrond te kunnen afvoeren, dan is het samenstel van alle schijven daartoe zeker in staat, zie fig. 1.

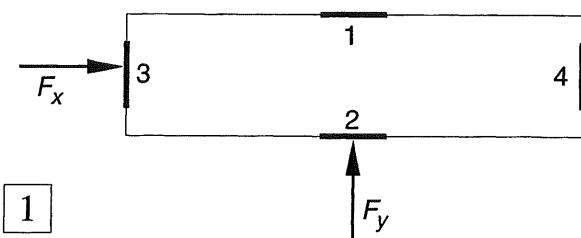


Fig. 1 Afdracht van de windbelasting via vier stijve schijven

We kunnen de windkracht F_x laten opnemen door de schijven 1 en 2 en op overeenkomstige wijze de windkracht F_y door de schijven 3 en 4. Elke schijf neemt dan de helft van de bijbehorende windkracht op.

17.4.3 AFDRACHT WINDBELASTING BIJ RECHTHOEKIGE GEBOUWEN

Als we bij een rechthoekige plattegrond drie geschikt geplaatste schijven aanbrengen – of uitkiezen volgens de procedure van 17.4.2 – dan kan de afdracht van de windkrachten heel eenvoudig worden bepaald. We kunnen dan uitgaan van het basisprincipe volgens KW-0 [014]; het verplaatsen van een kracht naar een punt buiten zijn werklijn.

Als voorbeeld kiezen we het rechthoekige gebouw van fig. 2 waarbij de drie schijven aan één kopeinde zijn geplaatst. Onverschillig of we nu een gebouwtje van één verdieping beschouwen of een van meer verdiepingen; de windkracht op een gevel zal evenredig zijn met het oppervlak van de beschouwde gevel waar de winddruk loodrecht op aangrijpt; KW-0 [078-2].

In x -richting dragen de drie verdiepingvloeren een totale kracht af ter grootte, zie fig. 2a:

$$F_x = (n - 1/2) b \Delta h p_h \quad (1a)$$

waarin Δh = verdiepingshoogte

n = aantal verdiepingen

p_h = winddruk

Deze kracht kan zonder meer via de evenwijdige schijven 1 en 3 elk voor de helft naar de ondergrond worden afgevoerd, zie fig. 2b.

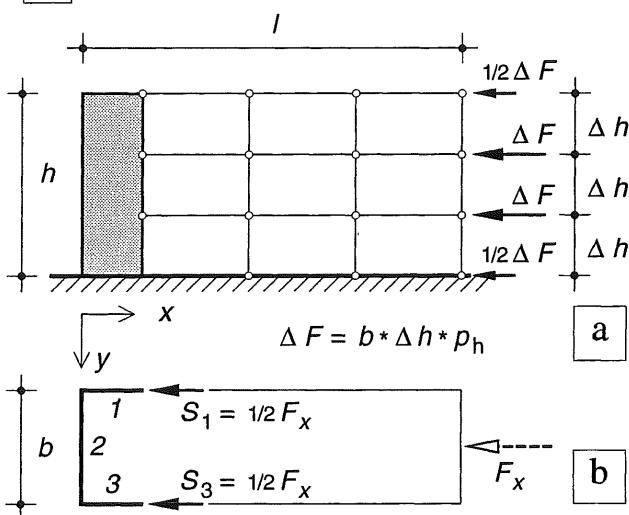
In y -richting dragen de verdiepingvloeren een totale windkracht af ter grootte, zie fig. 2c:

$$F_y = (n - 1/2) l \Delta h p_h \quad (1b)$$

Deze kracht kan nu niet zonder meer door twee evenwijdige schijven worden opgenomen. We verplaatsen de kracht F_y daarom eerst naar schijf 2 in y -richting onder invoering van een koppel ter grootte: $K = F_y * l/2$

De kracht zelf kan nu zonder meer worden afdragen via schijf 2, het koppel wordt echter opgenomen door de evenwijdige schijven 1 en 3. De horizontale schijfkrachten S_1 en S_3 volgen dan uit: $S * b = K = F_y * l/2$, zodat geldt: $S_1 = S_3 = l/2 b * F_y$

2

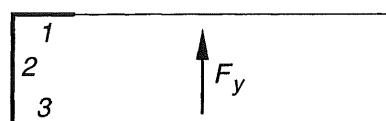


Invloed van de plaats van de drie schijven

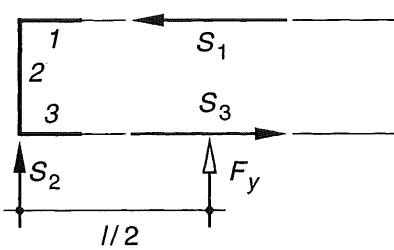
De schijfkrachten worden een stuk kleiner als de beide korte zijwanden van een schijf worden voorzien en de derde schijf in een van de lange zijwanden wordt geplaatst, zie fig. 3a. De windkracht op de lange zijde wordt nu over de schijven 4 en 6 verdeeld als een bij een ligger op twee steunpunten. De windkracht op de korte zijwand behoeft nu maar over de korte afstand $b/2$ te worden verplaatst en het daarbij ontstane koppel wordt opgenomen door twee schijven op grote afstand zodat de schijfkrachten klein blijven. In [372] is een numerieke uitwerking gegeven voor de gevallen van fig. 2 en 3. Hierbij is gebruik gemaakt van de formules (1a) en (1b). Het maakt echter weinig verschil als men gemakshalve van het totale geveloppervlak uitgaat:

$$F_x = bh p_h \quad (2a)$$

$$F_y = lh p_h \quad (2b)$$



c



d

Fig. 2 Afvoer van windkrachten via drie schijven
Evenwijdige schijven in de langsgevels

- a. Zijaanzicht van het gebouw
- b. Plattegrond met windkracht in langsrichting, opgenomen door de schijven 1 en 3
- c. Plattegrond met windkracht in dwarsrichting
- d. Verplaatsen van de kracht naar de daaraan evenwijdige schijf 2 onder invoering van een koppel, dat door de schijven 1 en 3 moet worden opgenomen

3

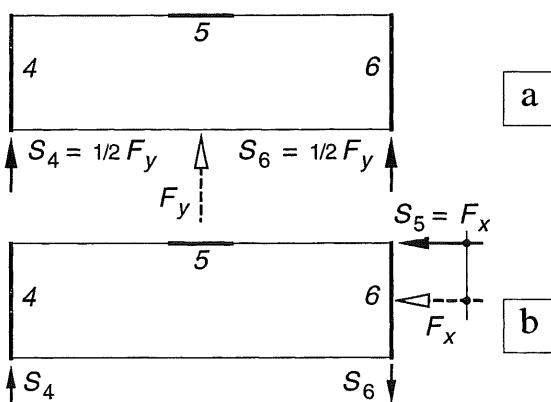


Fig. 3 Afvoer van windkrachten via drie schijven
Evenwijdige schijven in de kopgevels

- a. De windkracht F_y wordt opgenomen door de schijven 4 en 5
- b. De windkracht F_x wordt verplaatst naar schijf 5 onder invoering van een koppel, dat door de schijven 4 en 6 moet worden opgenomen

NB: de nummers van de schijven zijn cursief weergegeven (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6) om bij de numerieke uitwerking in [372] geen verwarring te krijgen met de numerieke waarden van de schijfkrachten.

17.4.4 AFDRACHT WINDKRACHTEN NUMERIEKE UITWERKING

Het betreffende gebouw staat in Delft in de bebouwde kom en is 30 m hoog. Zijaanzicht en plattegrond zijn weergegeven in fig. 1a, b. De meest noodzakelijke gegevens omtrent windbelasting zijn te ontleen aan KW-0 [078] en [079]. Stuwdruk aan de top, zie [079; fig. 3b en tabel 4]: Voor gebied II geldt: $p_e = 1,12 \text{ kN/m}^2$
 Winddruk: $p_d = 1,12 * 0,8 = 0,896$
 Windzuiging $p_z = 1,12 * 0,4 = 0,448$
 Totaal $p_h = 1,12 * 1,2 = 1,344$

De totale windkracht F_x volgens formule (1a) is dan gelijk aan:

$$F_x = F_{xd} + F_{xz} = (n - 1/2) b \Delta h p_h = \\ = (10 - 1/2) * 12 * 3 * 1,344 = 459,65 \text{ kN};$$

voor de verdere berekening afgerond op 460 kN.

De windkracht F_x wordt opgenomen door de schijven 1 en 3 en veroorzaakt in elke schijf een reactiekracht $R_1 = R_3 = 460/2 = 230 \text{ kN}$. In schijf 2 treedt geen reactiekracht op (fig. 1c).

De totale windkracht F_y volgens formule (1b) bedraagt:

$$F_y = F_{yd} + F_{yz} = (n - 1/2) l \Delta h p_h = \\ = (10 - 1/2) * 60 * 3 * 1,444 = 2300 \text{ kN}$$

De kracht F_y moet worden verplaatst naar de daaraan evenwijdige schijf 2 en wordt daar rechtstreeks opgenomen: $R_2 = 2300 \text{ kN}$.

Door dit verplaatsen ontstaat een koppel:

$$K = F_y * l/2 = 2300 * 30 = 69000 \text{ kNm}$$

Dit koppel levert in de schijven 1 en 3 de volgende reactiekrachten:

$$R_1 = R_3 = K/b = 69000/12 = 5750 \text{ kN}$$

Op overeenkomstige wijze vindt men voor de plaatsing van de schijven volgens fig. 2a:

De verplaatsing van F_x levert in schijf 5 een reactiekracht: $R_5 = F_x = 460 \text{ kN}$

Het koppel $K = F_x * b/2$ veroorzaakt in de schijven 4 en 6 als reactiekrachten:

$$R_4 = R_6 = K/l = 460 * 6/60 = 46 \text{ kN}$$

Voor de windkracht in y-richting volgt: $R_5 = 0$

$$R_4 = R_6 = F_y/2 = 2300/2 = 1150 \text{ kN}$$

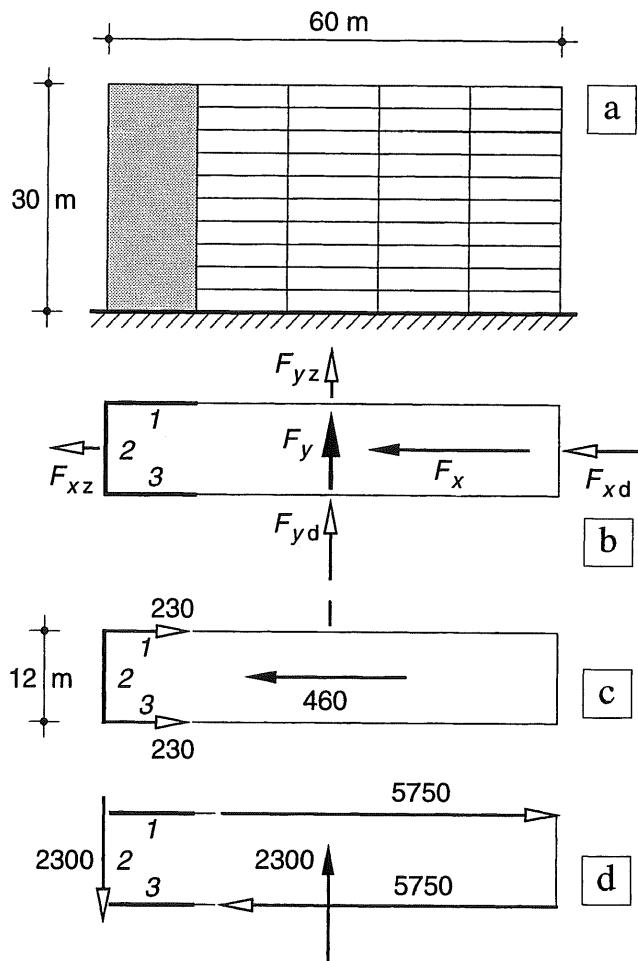


Fig. 1 Afvoer van de windkrachten op een rechthoekig gebouw
 a. Zijaanzicht
 b. Doorsnede met stijve kern aan de kopzijde
 c. Afdracht van F_x
 d. Afdracht van F_y

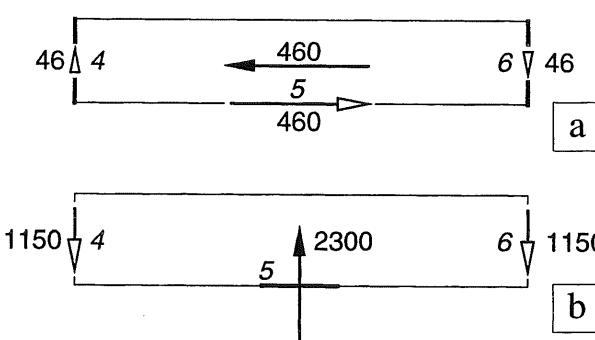


Fig. 2 Stijve schijven aan beide kopeinden

17.4.5 AFDRACHT HORIZONTALE EN VERTICALE KRACHTEN VIA SCHIJVEN

Als de schijf op staal is gefundeerd, dan is de afdracht van de verticale en horizontale belasting geheel overeenkomstig aan het behandelde in KW-0 [062]. De horizontale kracht kan dan als wrijvingskracht gelijkmatig langs de onderzijde van de schijf verdeeld worden gedacht. De reactiekachten zijn weergegeven in fig. 3a.

Bij een ondersteuning door twee heipalen worden de reactiekachten ten gevolge van de verticale belasting bepaald als bij een ligger op twee steunpunten. De horizontale belasting veroorzaakt gelijke en tegengesteld gerichte verticale krachten. De voorgaande uitkomsten komen geheel overeen met die van het star ondersteunde blok van KW-0 [050-051]. Verder is het voor de hand liggend om de horizontale krachten gelijk over beide heipalen te verdelen, vergelijk daartoe fig. [359-3e]. De reactiekachten zijn weergegeven in fig. 3b.

Als de schijf wordt vervangen door een vormvast staafwerk, zoals is weergegeven in fig. 3c, dan worden alle verticale belastingen rechtstreeks via de verticale stijlen afgevoerd en de horizontale belastingen via de schuine schoor. De horizontale component kan weer over beide heipalen worden verdeeld omdat deze door een horizontale staaf zijn verbonden. Door de zijdelingse steun van de grond of de aanwezigheid van een vloer die op de grond rust en beide steunpunten verbindt, zal de afdracht van de horizontale belasting vrijwel nooit moeilijkheden opleveren.

Het koppel dat als gevolg van de horizontale kracht ontstaat, zal zowel verticale drukkrachten als trekkrachten veroorzaken. De trekkrachten zullen in de meeste gevallen ruimschoots worden gecompenseerd door de drukkrachten ten gevolge van het eigen gewicht.

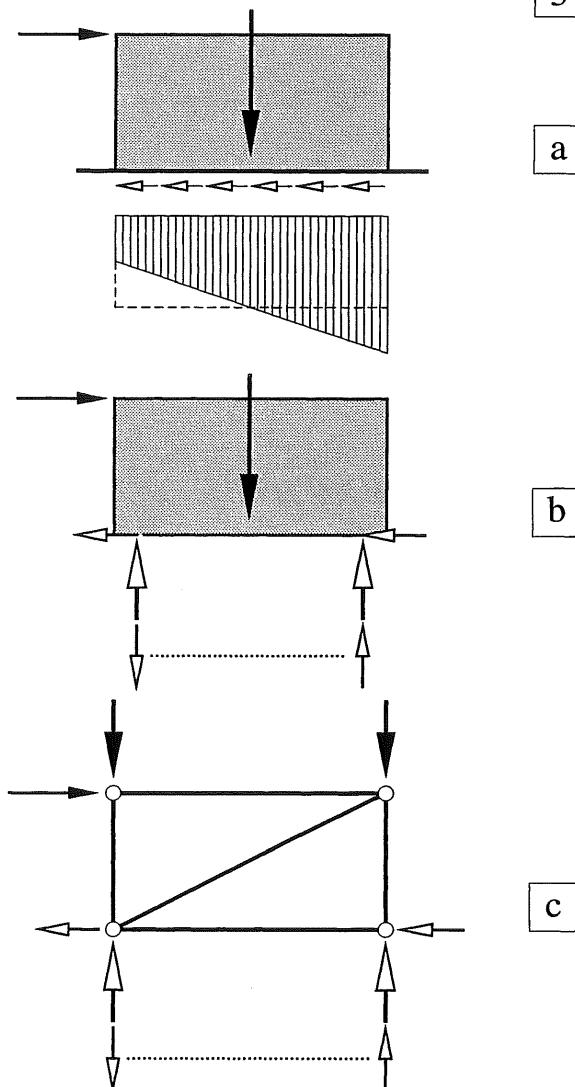


Fig. 3 Reactiekachten bij een schijf onder invloed van verticale en horizontale belastingen

- a. Fundering op staal
- b. Fundering op twee heipalen
- c. Vormvast staafwerk op twee heipalen

Grote pijlen: actie- en reactiekachten behorende bij de verticale belasting

Kleine pijlen: actie- en reactiekachten behorende bij de horizontale belasting; de stippe lijn geeft aan dat elk tweetal krachten een koppel vormt

18 GLOBALE ANALYSE VAN PORTALEN EN RAAMWERKEN

Berekening van driescharnierspanten

18.1 INLEIDING

18.1.1 FUNCTIE VAN PORTALEN

Bij de bepaling van de standzekerheid van gebouwen is in de voorgaande paragrafen veelal gebruik gemaakt van schijven of van rechthoekige staafwerken, die door middel van schoorstenen vormvast zijn gemaakt. In beide gevallen vormt het vlak van de schijf of de rechthoek een belemmering voor de doorgang [361-3a,b]. De functie van deze onderdelen kan echter ook worden overgenomen door portalen [361-3c], waarbij geen belemmeringen in de doorgang zullen optreden.

Over het algemeen zijn portalen statisch onbepaalde constructies, die alleen kunnen worden berekend door ook de vervormingen van de constructie in de beschouwingen te betrekken.

Vooruitlopend op de behandeling van portalen en raamwerken in KW-6, zullen we in dit hoofdstuk alvast een globale analyse geven van de krachtswerking in deze constructie-onderdelen, waarbij duidelijk wordt gemaakt binnen welke grenzen de krachtswerking zal blijven.

De werking van het portaal onder verticale en horizontale belasting wordt duidelijk gemaakt aan de hand van de vervormingen van enkele 'speelmodellen' [375]. Het momentenverloop in dergelijke portalen kan dan worden verklaard aan de hand van simpele berekeningen van liggers, die zijn voorzien van dwarsstaven aan de uiteinden [376-377].

Een raamwerk kan worden beschouwd als een stapeling van portalen. Zodra de krachtswerking in één portaal duidelijk is, biedt de krachtswerking in een raamwerk dan ook geen wezenlijke moeilijkheden meer.

Vooral voor hallen worden statisch bepaalde portalen toegepast, die worden aangeduid als driescharnierspanten. Omdat deze portalen kunnen worden berekend, uitgaande van het evenwicht alléén, en de berekeningsmethodiek sterk afwijkt van die voor de statisch onbepaalde portalen, wordt op de berekening van driescharnierspanten wat uitvoeriger ingegaan [387].

18.1.2 VERTICALE PUNTLAST OP EEN PORTAAL

We beschouwen een modelletje van een portaal dat in het midden van de bovenregel is belast door een verticale puntlast, zie fig. 1a.

Als eerste maken we de constructie statisch bepaald door het 'scharnier' aan de rechter zijde te vervangen door een 'rol'. We hebben dan een ligger op twee steunpunten 'op hoge poten'.

Ten gevolge van de belasting buigt de ligger door, zodat de uiteinden hoekverdraaiingen ondergaan, waardoor de stijlen op hun beurt ook zullen roteren. Hierbij kan natuurlijk alleen de 'rol' maar zijdelings verplaatsen, zie fig. 1b.

De overspanning van de bovenregel zelf blijft ongewijzigd, die van de bovenregel plus stijlen wordt groter. Omdat we de vervormingen zo sterk hebben overdreven, kunnen we dat laatste effect verwaarlozen. In de bovenregel treedt een driehoekig momentenverloop op als bij een ligger op twee steunpunten, zie fig. [379-1a]. In de twee stijlen treden alleen normaalkrachten op. Dat wil zeggen; als ze verticaal staan; en geringe dwarskrachten en buigende momenten als ze schuin staan zoals in fig. 1b. Zoals reeds gezegd wordt bij dit soort constructies de invloed van de *vervormingen* op de krachtswerking eigenlijk altijd verwaarloosd, zoals ook bij de momentenlijnen in fig. [379-1] is gedaan.

Om de rol weer op zijn oorspronkelijke plaats te krijgen, moeten we hier een horizontale kracht op uitoefenen, waardoor in het scharnier een even grote reactiekraft ontstaat, zie fig. 1c.

Deze beide horizontale krachten veroorzaken een momentenverloop, zoals in [379-1b] wordt behandeld. De superpositie van beide momentenlijnen is weergegeven in fig. [379-1c].

Zolang we geen middelen hebben om de verplaatsing te berekenen, kunnen we ook de grootte van de horizontale krachten niet bepalen en evenmin de grootte van het ontlastende moment op de bovenregel. Een en ander hangt af van de stijfheidsverhouding tussen de bovenregel en de beide stijlen. Als inleiding op het verschijnsel zijn in [376] en [377] enkele berekeningen uitgevoerd van liggers met oversteekken.

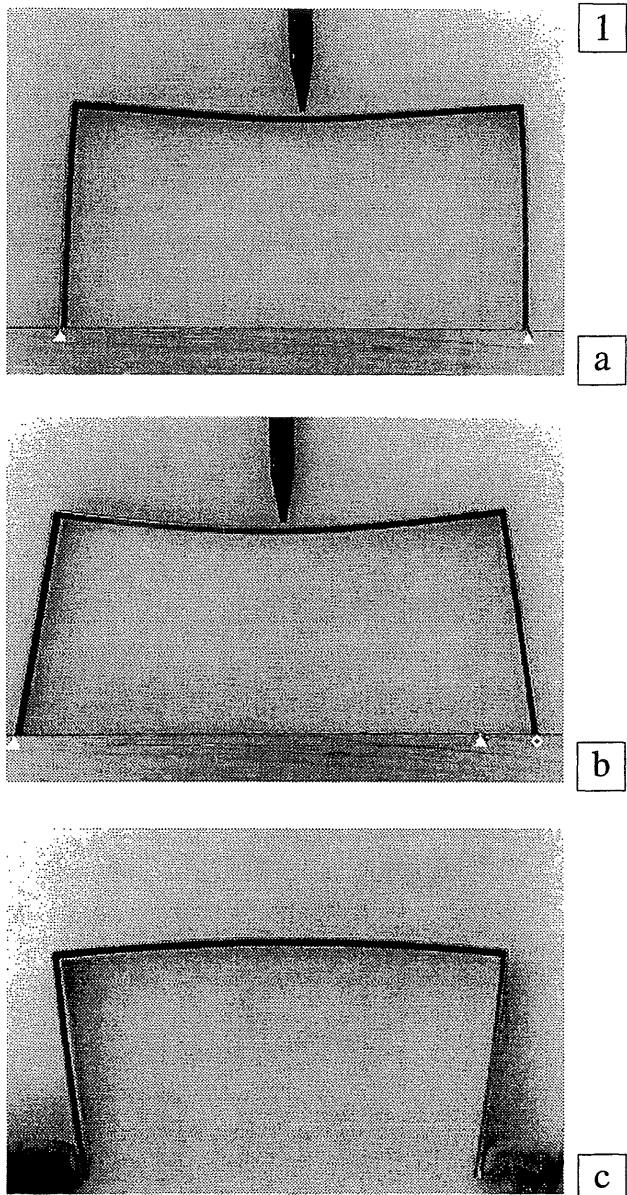


Fig. 1 Werking van een portaal, gedemonstreerd aan een modelletje van plaatstaal.

- a. Tweescharnierspant belast door een puntlast.
De 'scharnieren' zijn twee groefjes in een houten plankje.
- b. Vervanging van één 'scharnier' door een 'rol'. De rechterstijl wordt uit het groefje gehaald en kan glijden over het gladde plankje (wrijving verwaarloosd).
- c. Door het terugdrukken van de rol (ook weer overdreven voorgesteld) ontstaat een opbuigend moment in de bovenregel.

NB In fig. 1b zijn de opleggingen 15 % verder uit elkaar gekomen; bij een overspanning van 6 m betekent dit een toename van de overspanning met 0,9 m. Zulke grote verplaatsingen zijn in de praktijk beslist ontoelaatbaar.

18.1.3 LIGGER MET OVERSTEKKEN

Keersymmetrische belasting

In fig. 1a is alleen een keersymmetrische belasting aangebracht op de overstekken. De oplegreacties zijn eenvoudig te bepalen; vanwege het verticale evenwicht moeten ze gelijk zijn en tegengesteld gericht. Voorts moet het koppel van de oplegreacties evenwichtig maken met het koppel van de uitwendige krachten.

De bijbehorende dwarskrachtenlijn en momentenlijn zijn weergegeven in fig. 1b, c.

1

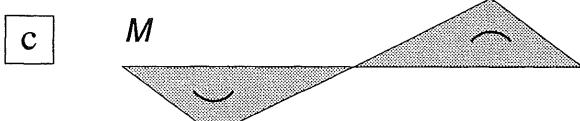
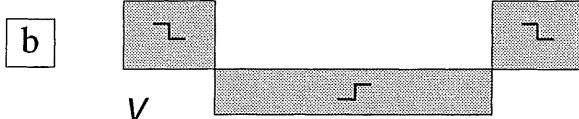
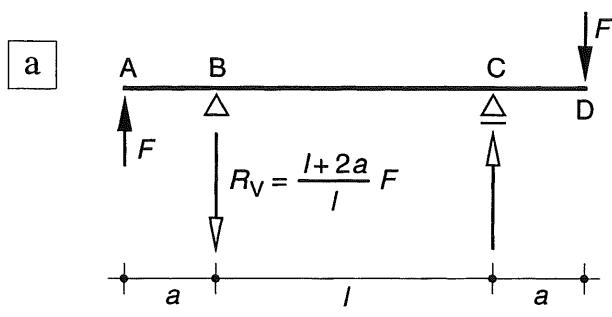


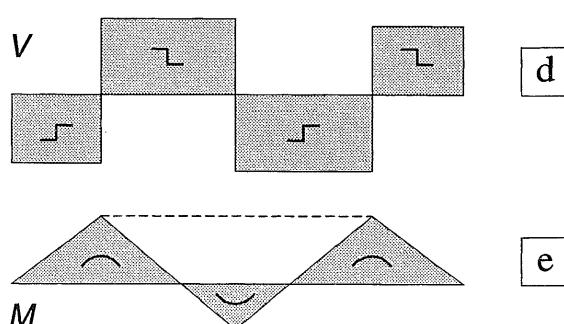
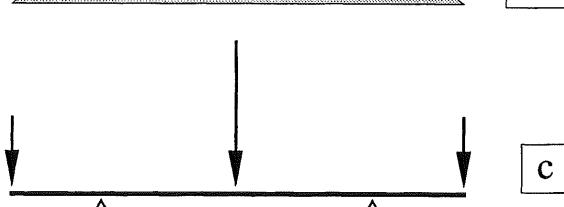
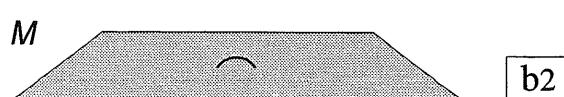
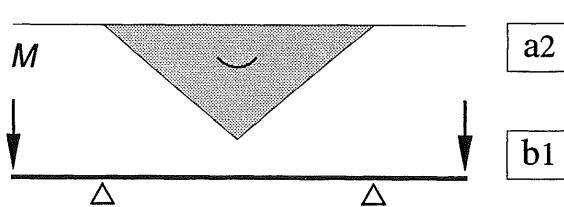
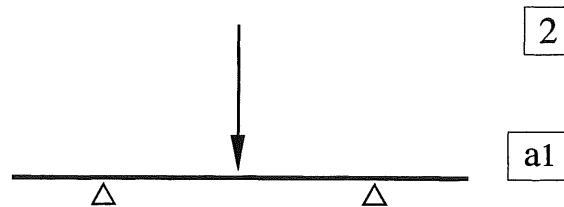
Fig. 1 Keersymmetrisch belaste ligger met overstekken
a. Schema
b. Dwarskrachtenlijn (symmetrisch)
c. Momentenlijn (keersymmetrisch)

Fig. 2 Symmetrisch belaste ligger met overstekken
a. Schema met één punlast; momentenlijn
b. Punlasten op de overstekken; momentenlijn
c. Schema met drie punlasten; (geval a. + geval b.)
d. Dwarskrachtenlijn
e. Momentenlijn

Symmetrische belasting

In fig. 2a1 is een symmetrische ligger met overstekken belast door een puntlast in het midden. Het bijbehorende momentenverloop is weergegeven in fig. 2a2. In fig. 2b1 is deze ligger alleen belast door gelijk gerichte puntlasten op de overstekken; het momentenverloop is weergegeven in fig. 2b2. De superpositie van beide belasting gevallen is weergegeven in fig. 2c, met de bijbehorende dwarskrachtenlijn en momentenlijn in fig. 2d, e. Hierbij is het positieve moment aan de negatieve momentenlijn 'opgehangen', op een manier zoals dat in KW-2 [283-3 en -4] is gedaan voor een parabolisch momentenverloop.

2



18.1.4 LIGGER MET HAAKSE OVERSTEKKEN

Keersymmetrische belasting

Om een vorm te krijgen die rechtstreeks overeenkomt met die van een portaal, zijn de overstekken van fig. 1a – inclusief de puntlasten – over 90° naar beneden geroteerd en daarna weer buigvast met de ligger verbonden, zie fig. 3a. Daarom zijn de opleggingen – bij wijze van uitzondering – aan de bovenzijde van de ligger weergegeven. De uitwendige krachten grijpen dus in horizontale richting aan. Uit de voorwaarde $\sum F_x = 0$ volgt dat in het scharnier een horizontale reactiekracht moet werken ter grootte $2F$. De verticale reactiekrachten zijn gelijk en tegengesteld gericht; ze volgen uit het momentenevenwicht: $2F * a = R_V * l$. In de figuren 3b, 3c en 3d zijn de snedekrachten uitgezet.

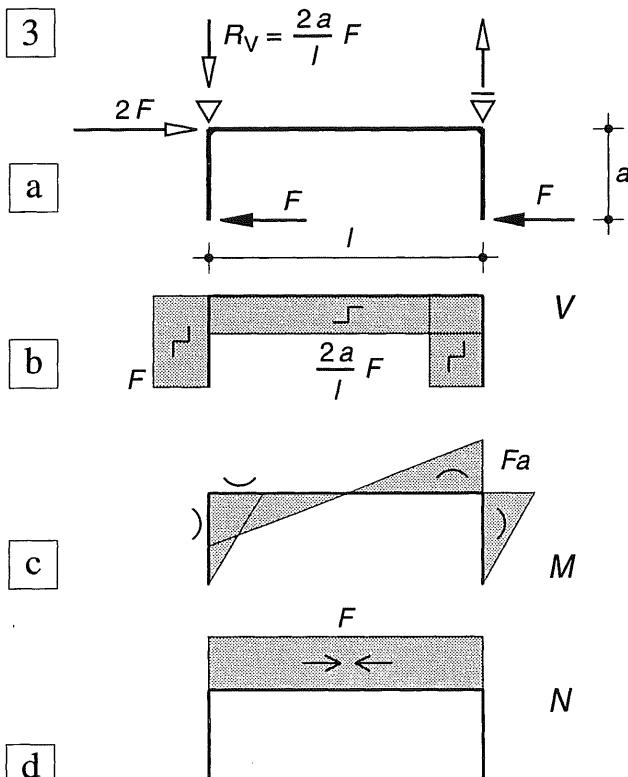


Fig. 3 Vrij opgelegde ligger met verticale dwarsstaven
 a. Schema
 b. Normaalkrachtenlijn
 c. Dwarskrachtenlijn
 d. Momentenlijn

Symmetrische belasting

Op overeenkomstige wijze zijn de overstekken van fig. 2a – inclusief de puntlasten – weer naar beneden omgeklapt en is de ligger aan de bovenzijde ondersteund, zie fig. 4a1. De overstekken kunnen dan als volledig ingeklemd in de ligger worden beschouwd. Op de horizontale ligger werken dan twee horizontale krachten en twee koppels, zie fig. 4a2. De grootte en richting hiervan volgen uit fig. 4a1 door toepassing van het beginsel: *actie = reactie*. Het verloop van de snedekrachten is weergegeven in de fig. 4b, c, d.

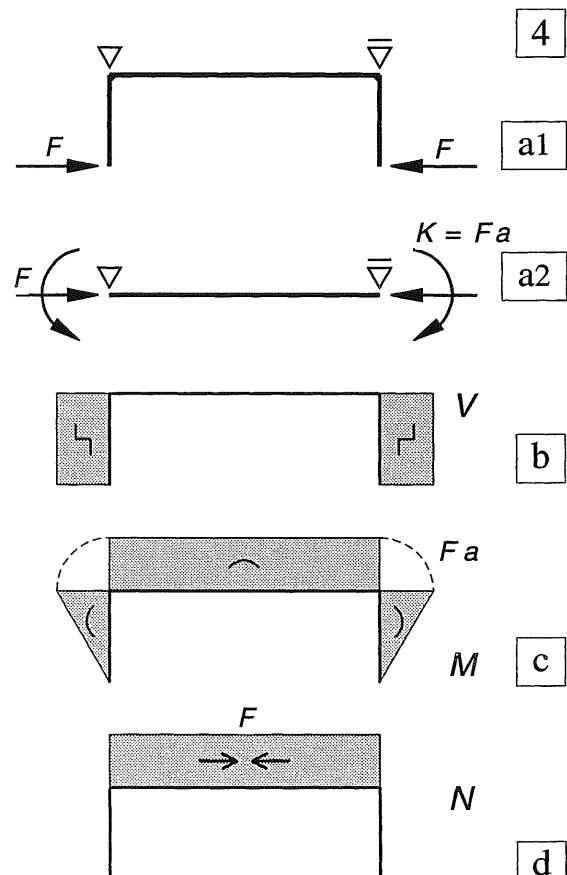


Fig. 4 Vrij opgelegde ligger met verticale dwarsstaven
 a. Schema
 b. Normaalkrachtenlijn
 c. Dwarskrachtenlijn
 d. Momentenlijn

18.2.1 VERTICALE PUNTLAST IN HET MIDDEN VAN DE BOVENREGEL

Aan de hand van de berekeningen in [376-377] voor het symmetrische geval, tezamen met de beschouwingen in [375], kan de vorm van de momentenlijn direct worden weergegeven, vergelijk daar toe fig. [377-4c] met fig. 1b2. Het enige verschil is dat de rol en het scharnier nu van de bovenregel zijn verplaatst naar de onderzijde van de stijlen. Eén uitwendige horizontale kracht ter plaatse van de rol levert dan een even grote tegengesteld gerichte reactiekracht ter plaatse van het scharnier. We vinden dus in beide figuren hetzelfde krachtenspel. Als we beide stijlen door een scharnier ondersteunen, dan ontstaan deze symmetrische reactiekrachten pas ten gevolge van een verticale belasting, zie fig. 1c. Zoals reeds eerder is vermeld, kan de grootte van deze krachten pas uit een berekening volgen, waarin ook de vervormingen worden beschouwd.

In fig. 1 is het een en ander nader uitgewerkt voor enkele varianten, waarbij vrijwel uitsluitend het momentenverloop is beschouwd. In fig. 1a1 is een statisch bepaalde variant weergegeven, waarbij de stijlen zijn ondersteund door een scharnier en een rol. In fig. 1a3 zijn beide stijlen ondersteund door een scharnier, maar is in de rechterbovenhoek een extra scharnier aangebracht, waardoor ook deze vorm statisch bepaald is, vergelijk zonodig KW-2 [204].

Als in het midden van de overspanning alleen een puntlast aangrijpt, dan geldt voor beide varianten het momentenverloop van fig. 1a2.

We beschouwen voorlopig alleen de variant van fig. 1a1. Door het momentenverloop verplaatsen de opleggingen uit elkaar; fig. [375-1b]. Er zijn dan twee gelijke en tegengesteld gerichte horizontale krachten nodig volgens fig. 1b1 om de opleggingen weer op hun oorspronkelijke plaats te krijgen. Het momentenverloop is weergegeven in fig. 1b2. In de figuren 1c2, d2 is de superpositie weergegeven van beide momentenlijnen voor twee gevallen.

Als de stijlen relatief slap zijn ten opzichte van de bovenregel, is het onlastend moment betrekkelijk gering, zie fig. 1c1 en c2.

Als de stijlen oneindig stijf worden verondersteld, dan is het onlastend moment gelijk aan de helft van het maximale positieve moment, zie fig. 1d1 en d2.

De plaats van de momentennulpunten is dus afhankelijk van de stijfheidsverhouding tussen regel en stijlen. De momentennulpunten worden bepaald door de snijpunten van de werklijnen van de reactiekrachten met de bovenregel. Als we daar ter plaatse immers een snede aanbrengen, dan werkt op het buitenste afgesneden deel alleen maar de reactiekracht en die levert in de beschouwde snede een moment dat gelijk is aan nul; zie ook het onderwerp druklijn in [395].

We kunnen de plaats van de momentennulpunten in de bovenregel echter forceren door op één gewenste punt een scharnier aan te brengen. Hierdoor wordt de constructie statisch bepaald en spreken we van een driescharnierspant, zie fig. 1a3 en verder de figuren 1c3 t/m 1e3. We mogen in geen geval ter plaatse van *beide* momentennulpunten een scharnier aanbrengen, want dan wordt de constructie labiel.

Bij de momentenlijnen van fig. 1a2, c2 en d2 zijn de links en rechts daarvan getekende schema's beide van toepassing.

Als we het scharnier bij het driescharnierspant echter nog verder naar het midden verplaatsen, is er geen tweescharnierspant meer mogelijk dat overeenkomstige resultaten geeft. Bij de driescharnierspanten zal in het algemeen een knik in het doorbuigingsverloop optreden, die niet aanwezig kan zijn bij een twee-scharnierspant; zie fig. [380-f1].

In alle gevallen snijden de 'actiekracht' F en de twee reactiekrachten R elkaar in één punt.

1

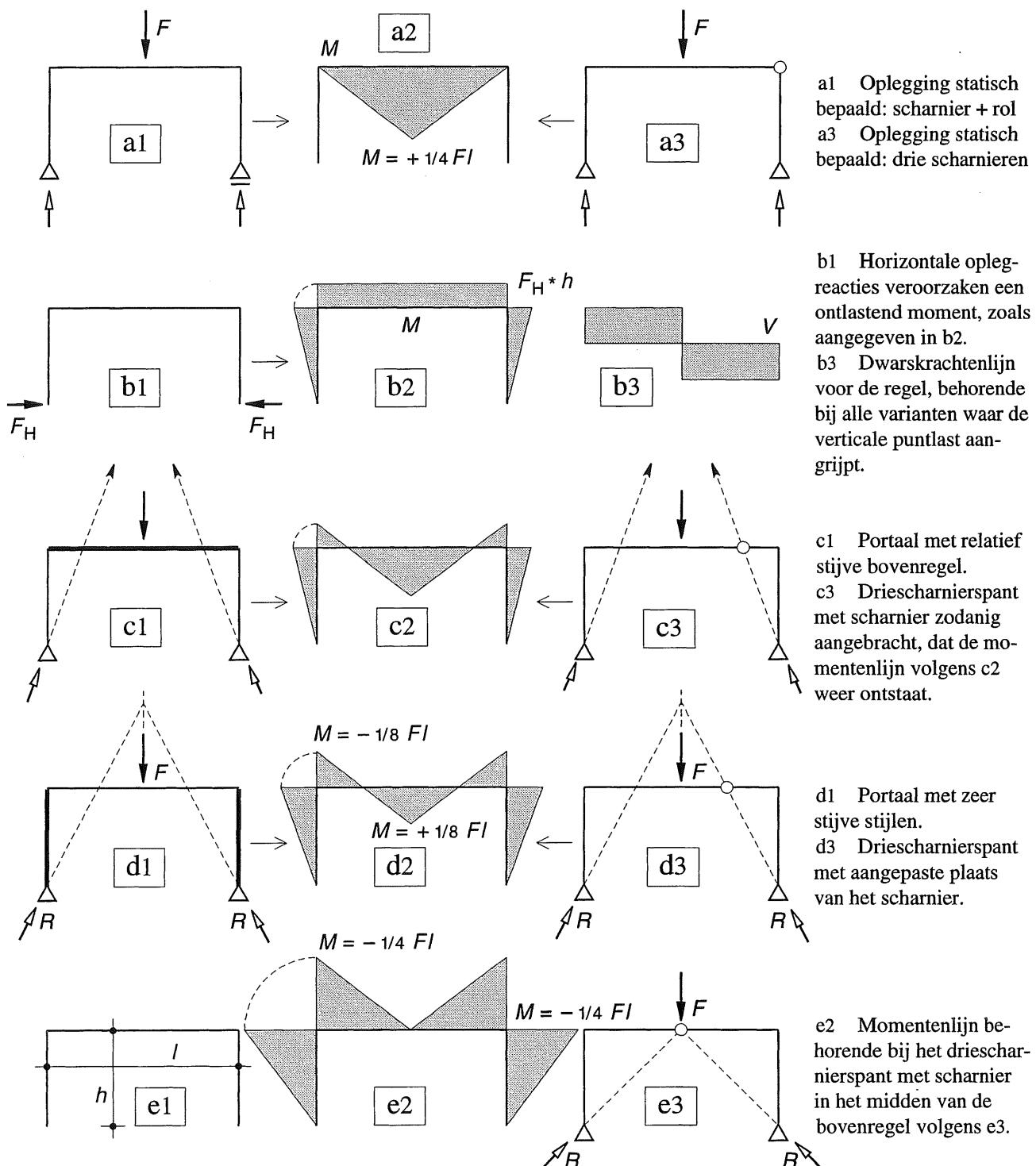


Fig. 1

Momentenlijnen bij twee- en drieschansierspanten,
belast door een puntlast in het midden van de bovenregel
($h/l = 1/2$)

18.2.2 GELIJKMATIG VERDEELED BELASTING OP DE BOVENREGEL

1

Bij een gelijkmatig verdeelde verticale belasting op de bovenregel van het portaal, verloopt het procédé op overeenkomstige wijze.

Als de stijlen relatief slap zijn ten opzichte van de bovenregel, is het ontlastend moment betrekkelijk gering. Als extreem geval zijn in fig. 1a1 en fig. 1b1 dezelfde twee statisch bepaalde varianten weergegeven van [379], waarbij het ontlastende moment dus gelijk aan nul moet zijn. Beide varianten vertonen het momentenverloop van een vrij opgelegde ligger volgens fig. 1b2. De vervormingen zijn echter relatief groot.

In fig. 1c1 en d1 zijn de schema's van de 'echte' statisch onbepaalde portalen weergegeven. In het geval van fig. 1c1 is de verhouding van de stijfthes tussen regel en stijlen zodanig gekozen, dat het maximale negatieve moment juist gelijk is aan het maximale positieve moment (dus elk gelijk aan $1/16 ql^2$); zie KW-5 [555].

In fig. 1d1 zijn de stijlen oneindig stijf verondersteld; het ontlastende moment blijkt dan gelijk te zijn aan: $M_{\text{neg}} = 2/3 * 1/8 ql^2 = 1/12 ql^2$ zodat het bijbehorende positieve moment gelijk is aan: $M_{\text{pos}} = 1/3 * 1/8 ql^2 = 1/24 ql^2$

De doorbuigingen en verplaatsingen zijn nu veel kleiner dan bij de statisch bepaalde varianten van fig. 1a1 en b1.

Hiermee zijn de uiterste mogelijkheden voor de momentenverdeling van het portaal vastgelegd. Het positieve moment kan dus variëren tussen: $M_{\text{pos}} = 1/8 ql^2$ en $M_{\text{pos}} = 1/24 ql^2$

Bij het (statisch bepaalde) driescharnierspant volgens fig. 1e, f treden uitsluitend negatieve momenten op in de bovenregel (en in de stijlen). Ter plaatse van het scharnier ontstaat een duidelijke knik in de doorbuigingslijn; de zakking daar ter plaatse is ongeveer even groot als die in fig. 1a1 en b1. Driescharnierspannen in de vorm van fig. [387-1] genieten daarom de voorkeur, de doorbuiging is daar veel kleiner en minder goed zichtbaar dan bij een horizontale bovenregel.

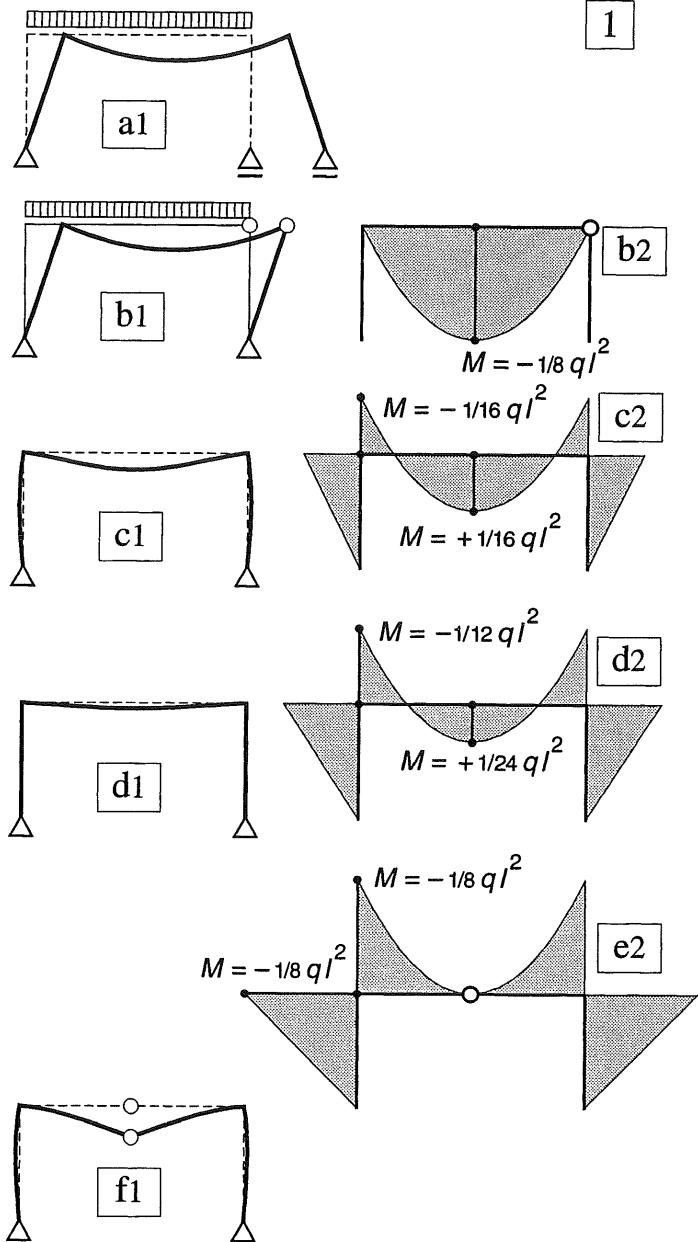


Fig. 1 Portalen onder gelijkmatig verdeelde belasting
a1-f1 Schema's + vervormingen ($h/l = 1/2$)
b2-e2 Momentenlijnen

- a1 Schema portaal met rol en scharnier
- b1 Schema asymmetrisch driescharnierspant
- b2 Momentenverloop voor beide varianten
- c. Tweescharnierspant: $EI_{\text{stijl}} = EI_{\text{regel}}$
Tweescharnierspant: $EI_{\text{stijl}} = \infty$
- e2 Momentenlijn symmetrisch driescharnierspant
- f1 Schema + vervormingen van een symmetrisch driescharnierspant

18.2.3 STAPELING VAN PORTALEN

Om een gebouw van meer verdiepingen te formeren, gaan we als gedachtenexperiment uit van een stapeling van portalen volgens fig. 2a1.

Het zal duidelijk zijn dat de momentenverdeling per portaal hetzelfde blijft als bij de overeenkomstige portalen van fig. 1. De normaalkrachten in de stijlen nemen sprongsgewijs toe en zijn per verdieping constant als het eigen gewicht van de kolommen wordt verwaarloosd. De horizontale reactiekrachten in de scharnieren maken via trek in de bovenregels evenwicht met elkaar.

Bij een werkelijk gebouw van staal of gewapend beton zullen alle onderdelen meestal buigvast met elkaar zijn verbonden, zie fig. 2a2.

Om toch enig inzicht in de krachtswerking te kunnen verkrijgen, denken we alle regels (d.w.z. de horizontale elementen) aan de uiteinden scharnierend ondersteund en snijden we alle stijlen door ter halverhoogte van de verdieping, zie fig. 2b1. Ten gevolge van de belasting zullen de regels doorbuigen, zodat ze ter plaatse van de opleggingen een hoekverdraaiing vertonen. De aan deze punten verbonden stukken stijl zullen dezelfde hoekverdraaiing moeten ondergaan.

Om de zaak weer aan elkaar te laten passen, behoeven we alleen maar gelijke en tegengesteld gerichte krachten op de doorgesneden staafuiteinden aan te brengen volgens fig. 2b2.

In de stukken stijl boven en beneden de beschouwde regel ontstaan dan *buigende* momenten die tegengesteld van teken zijn, maar elkaar versterken als *uitwendig* koppel op de regel, zie fig. 2c2. Als we de afzonderlijke regels met de aangrenzende stukken stijl boven en beneden elke regel weer op elkaar plaatsen, dan houden de horizontale krachten in de aansluitingen elkaar precies in evenwicht terwijl de stukken stijl ook precies passend op elkaar aansluiten. De verticale belasting wordt dan weer gewoon via de stijlen afgedragen en we kunnen de scharnieren van fig. 2b verwijderen.

Dus ook als we de stijlen weer buigvast met elkaar hebben verbonden, blijft daar ter plaatse toch een momentennulpunt bestaan. Enkel bij het dakportaal en de begane grondvloer treden geringe afwijkingen op in dit patroon, zie KW-6.

2

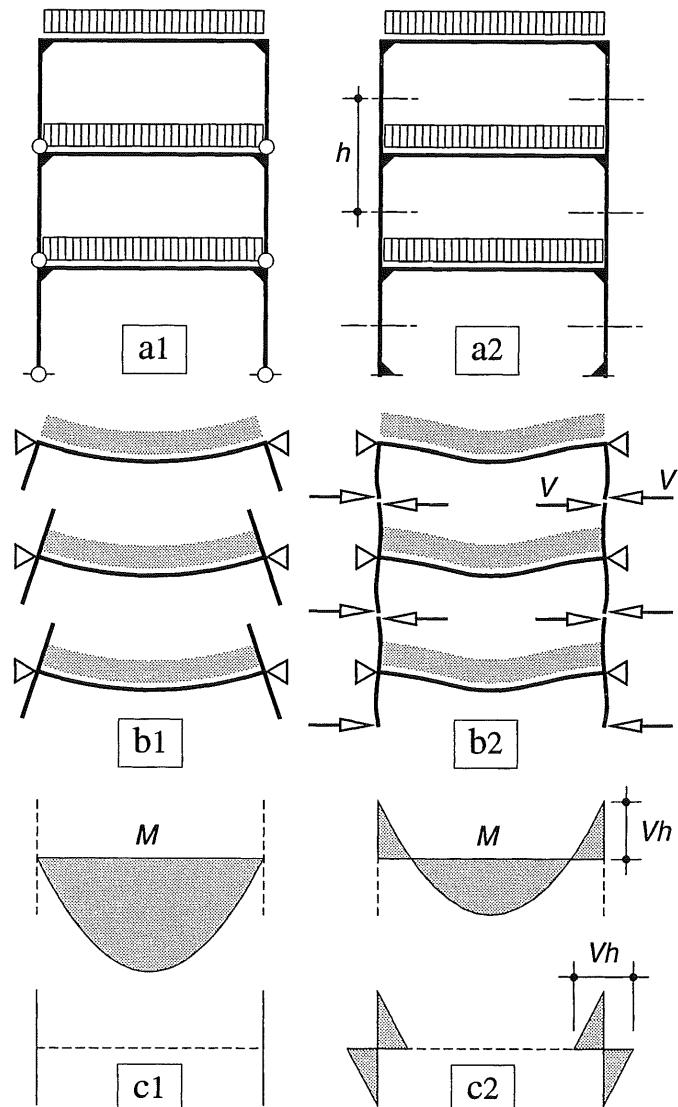


Fig. 2 Krachtswerking in een éénbeukig raamwerk
 a1 Stapeling van portalen
 a2 Buigvast raamwerk met sneden in de stijlen
 b1 Vervorming van de afzonderlijk beschouwde verdiepingen
 b2 Krachten ter plaatse van de aangebrachte sneden om de stijlen weer aaneen te sluiten
 c1,2 Momentenverloop in regels en stijlen behorende bij b1 resp. b2

18.2.4 MEERBEUKIG PORTAAL

Hallen worden meer dan eens uitgevoerd als meerbeukige portalen, zie fig. 1. Na de behandeling van het éénbeukige portaal in [375 en 380] en de doorgaande ligger in KW-2 [289-290] behoeft het meerbeukige portaal nauwelijks meer moeilijkheden op te leveren.

We beschouwen het meerbeukige portaal met gelijke overspanningen, daartoe als een horizontale aaneenschakeling van enkele portalen. De stijlen in het middengedeelte van het portaal behoeven dan geen momenten meer over te brengen. De momenten in de aangrenzende regels houden elkaar immers in evenwicht, zie fig. 1b. Dit is te meer duidelijk, omdat de doorgaande bovenregel ter plaatse van de ondersteuningen geen verplaatsing en geen hoekverdraaiing ondergaat, zie KW-2, fig. [293-3].

De stijlen (kolommen) behoeven dan ook geen buigvervormingen te ondergaan, zodat ze ook geen momenten zullen overbrengen.

1

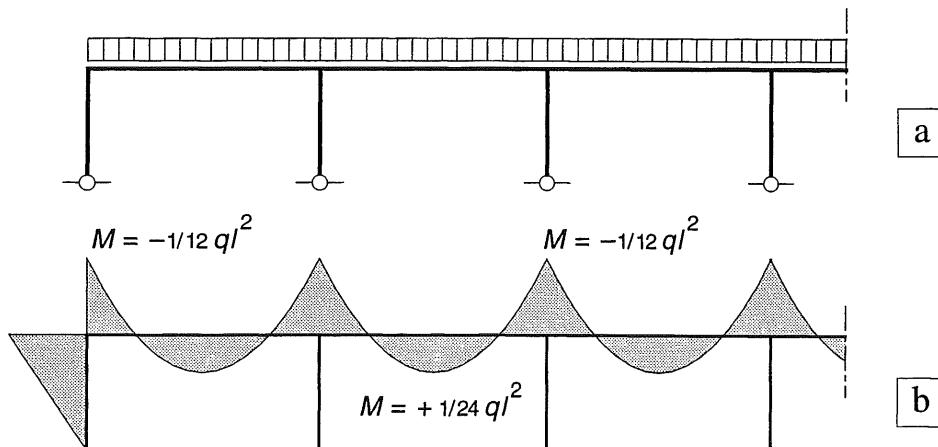


Fig. 1 Meerbeukig portaal
a. Schema
b. Momentenverloop

Alleen bij de eindportalen zullen de buitenste stijlen een inklemmingsmoment aan de regel moeten leveren, zie fig. 1a, b. Ter wille van de eenvoud is daar uitgegaan van een buitenstijl die als oneindig stijf mag worden beschouwd, zodat het inklemmingsmoment van de regel in de buitenstijl gelijk is aan $M = -1/12 ql^2$

Bij een eindige stijfheid zal het inklemmingsmoment bij de buitenstijl wat lager zijn. De negatieve momenten ter plaatse van de overige ondersteuningen worden hierdoor hoegenaamd niet beïnvloed en behouden de waarde:

$$M = -1/12 ql^2$$

Als we de momentenverdeling van de doorgaande ligger willen handhaven, maar buigende momenten in de buitenstijl willen vermijden, staan ons twee mogelijkheden ter beschikking:

- We passen een oversteek toe met een zodanig gekozen lengte, dat hierdoor ter plaatse van de eerste ondersteuning een moment optreedt ter grootte $M = -1/12 ql^2$.
- We maken het eindportaal korter en voeren de buitenste stijl uit als pendelstijl; vergelijk KW-2, fig. [289-1, rechts].

Toelichting bij b:
Bij een binnenstijl wordt het negatieve aansluitingsmoment verzorgd door de aangrenzende regel
Bij een buitenstijl levert deze zelf het negatieve aansluitingsmoment

18.3.1 HORIZONTALE BELASTING OP DE BOVENREGEL

In principe kan ook op de stijl van het portaal een horizontale gelijkmatig verdeelde belasting aangrijpen. Om een overzichtelijke berekening te verkrijgen, is het echter zeer gebruikelijk om zo'n gelijkmatig verdeelde belasting weer te vervangen door een stelsel equivalente puntlasten ter plaatse van de regels. Vergelijk hiertoe bijv. fig. [371-2a]. We gaan dan op een overeenkomstige wijze te werk als bij de berekening van vakkervelen; fig. [328-1].

In de navolgende berekeningen zullen we gemakshalve uitgaan van een kracht $2F$ ter plaatse van de bovenregel van het portaal zie fig. 1a. Zoals reeds in [359] en [377] is besproken, ontstaat er een keersymmetrisch belastinggeval. Hierbij draagt elke stijl de helft van de horizontale belasting af naar het bijbehorende scharnier. Aangezien er in het midden van de bovenregel een momentennulpunt ontstaat – wat een extra evenwichtsvoorraarde oplevert – kan de zaak verder als een statisch bepaalde constructie worden behandeld. De stijfheidsverhouding tussen stijl en regel heeft dan verder geen invloed op de momentenverdeling. De reactiekrachten en de momentenlijn voor dit belastinggeval zijn weergegeven in fig. 1b [359-3].

In fig. 2 is het vervormingsbeeld van een dergelijk belastinggeval gedemonstreerd aan de hand van een plaatstaal modelletje. In beide stijlen is het vervormingsverloop geheel gelijkvormig; in het midden van de bovenregels is het momentennulpunt allezins redelijk te herkennen.

Houdt er bij het schetsen van een dergelijk vervormingsverloop rekening mee, dat de rechte hoeken van het portaal recht blijven.

Als we twee portalen boven op elkaar plaatsen waarbij alleen op het bovenste portaal een puntlast aangrijpt, dan ondervindt het onderste portaal krachten, die gelijk en tegengesteld zijn aan de reactiekrachten van fig. 1a. Dus een horizontale kracht $2F$ naar rechts plus twee verticale actiekrachten

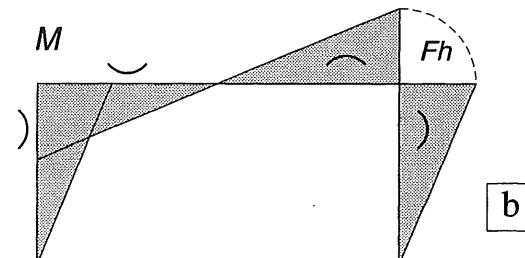
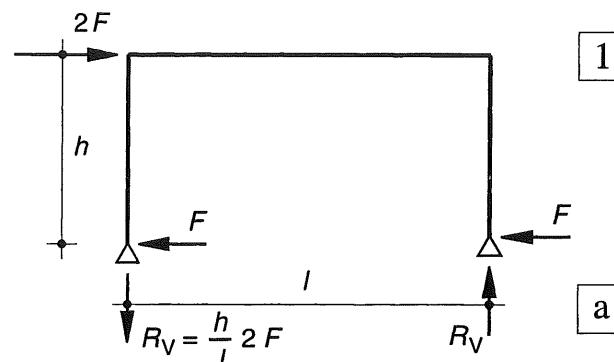


Fig. 1 Momentenverdeling in een portaal dat wordt belast door een horizontale puntlast

- a. Schema
- b. Momentenlijn

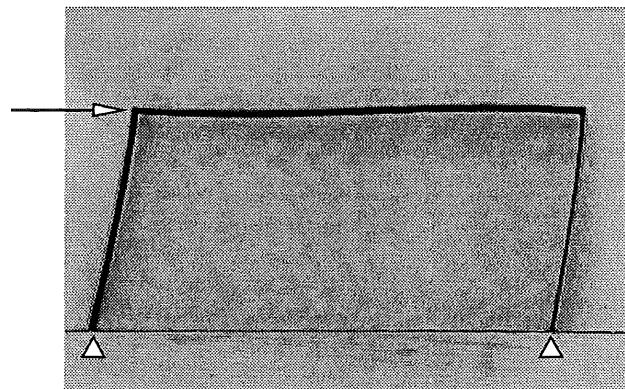


Fig. 2 Vervorming van een portaal gedemonstreerd aan een modelletje van plaatstaal

Het verloop van het buigend moment in de regel en de stijlen van het onderste portaal is dan volkomen gelijk aan dat van het bovenste portaal. Alleen de normaalkrachten in de stijlen zijn tweemaal zo groot geworden.

18.3.2 STAPELING VAN PORTALEN

Ter vergelijking is in fig. 1 het krachtenspel beschouwd in vier constructie-elementen: een ligger (c.q. een schijf), een vakwerk, een stapeling van portalen en een raamwerk; alle belast door één puntlast in de top. Het schema en de momentenlijn van fig. 1a voor het totale uitwendige moment gelden voor alle varianten.

In de ligger (schijf) treedt dus hetzelfde driehoekige momentenverloop op, zie fig. 1b.

In het vakwerk moet in elke horizontale snede uiteraard hetzelfde moment worden overgebracht als in de schijf, zie fig. 1c (zie zo nodig ook [328-329]). We weten dat de buitenrandstaven van het vakwerk een constant deel van het totale buigende moment overbrengen – dat per vak sprongsgewijs varieert – en de diagonalen het lineair verlopende deel. In de figuur zijn de aandelen van de genoemde staven met stippelijntjes aangegeven.

Bij de stapeling van portalen in fig. 1d verzorgen de normaalkrachten in de stijlen weer het constante aandeel van het buigende moment, dat uiteraard alleen sprongsgewijs kan variëren. Het variërende deel van het moment moet nu echter worden geleverd door de buigende momenten in de stijlen zelf, zie fig. 1d. Hierdoor wordt het buigende moment vanuit de stijlen dus weer verminderd.

Als alle regels en stijlen weer buigvast met elkaar zijn verbonden zodat een raamwerk is ontstaan, zullen de momentennulpunten weer ter halverhoogte van de stijlen optreden. De gelijke en tegengestelde normaalkrachten in elk tweetal stijlen vormen nu een koppel dat het constante aandeel van het totale uitwendige moment levert. De verschillen tussen fig. 1c en 1e blijken gering te zijn.

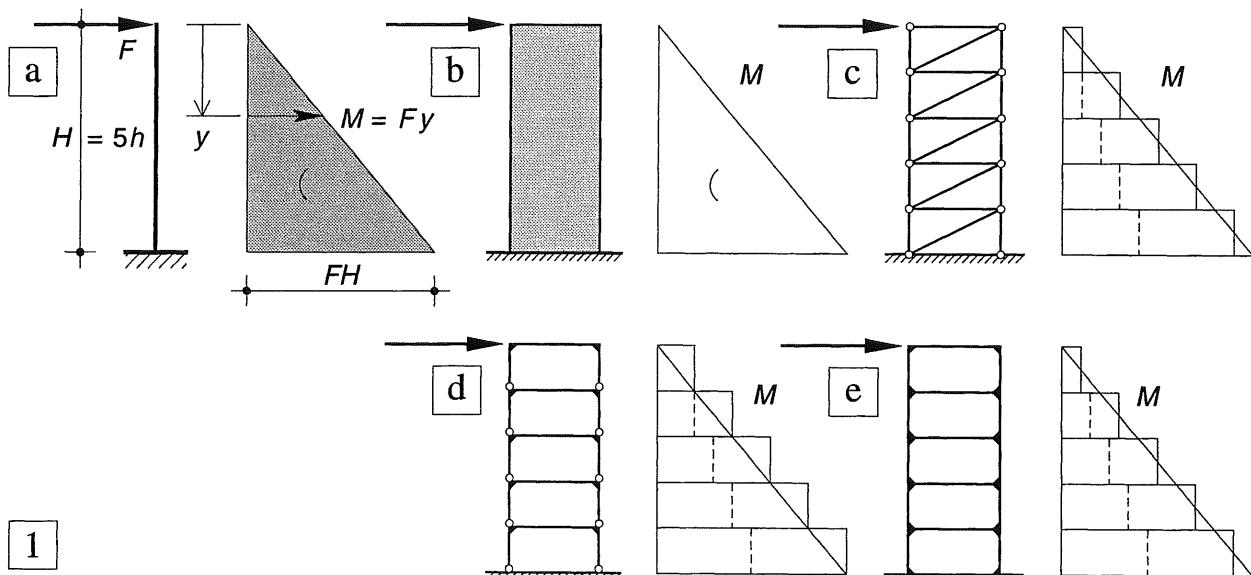


Fig. 1 Krachtenspel in een éénzijdig ingeklemde ligger, belast door een puntlast in de top

- a Schema met momentenlijn: $M_y = F * y$
geldig voor alle varianten
- b Homogene schijf met momentenlijn
- c Vakwerk als uitkragende ligger beschouwd met de aandelen die de randstaven en de diagonalen leveren aan het totale uitwendige moment

- d Stapeling van portalen als uitkragende ligger beschouwd, met de aandelen die de stijlen leveren aan het totale uitwendige momen
- e Eenbeukig raamwerk als uitkragende ligger beschouwd met de aandelen die de stijlen leveren aan het totale uitwendige moment

Gelijkmatig verdeelde horizontale belasting

In fig. 2a is voor het basis-systeem – de uitkragende ligger – het momentenverloop weergegeven bij een gelijkmatig verdeelde (horizontale) belasting over de gehele hoogte. In fig. 2c, d, e is voor dezelfde staafwerken als in fig. 1 eveneens het momentenverloop weergegeven. De gelijkmatig verdeelde belasting is hierbij weer vervangen door een stelsel equivalente puntlasten. Ook bij toenemende dwarskracht over de hoogte blijkt evenals voorheen, dat bij de raamwerken alleen het variërende deel van het moment door buiging van de stijlen wordt opgenomen.

Verifiëer dat bij fig. 1d en fig. 2d het momentenaandeel dat de normaalkrachten in de stijlen leveren, groter is dan het totale uitwendige moment. Door de tegengesteld gerichte buiging van de stijlen zelf wordt dan toch aan het uitwendig evenwicht voldaan. Hetzelfde verschijnsel doet zich voor bij fig. 1e en fig. 2e, het verschijnsel spreekt daar echter minder tot de verbeelding.



Fig. 3 John Hancock Building Chicago in aanbouw
Amerikaanse wolkenkrabbers zijn in principe stalen raamwerken. Ter verstijving zijn in dit geval ook vakwerkdiagonale aangebracht.
Appartementen met een diagonaal langs het raam zijn duurder dan appartementen zonder diagonaal !

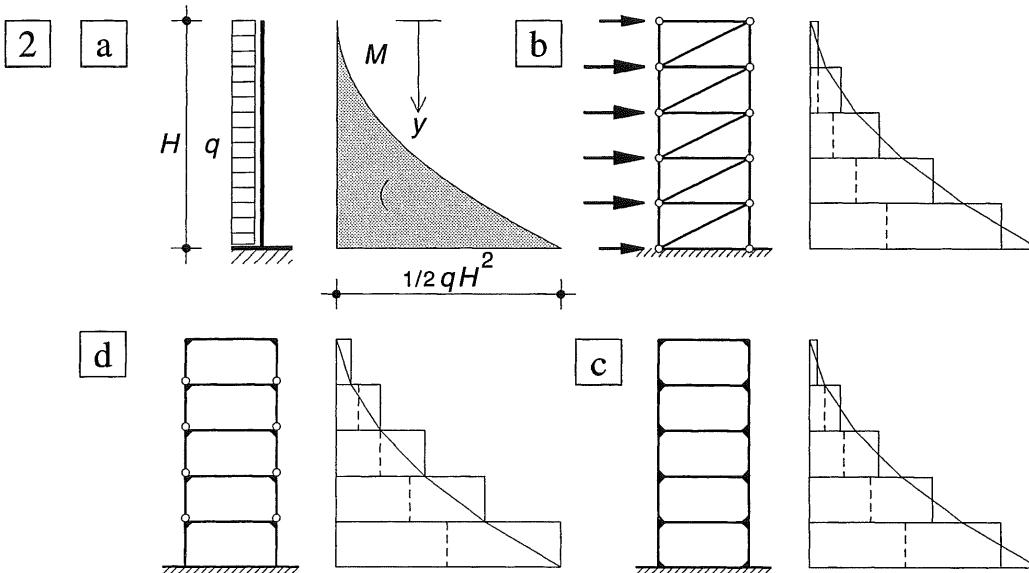


Fig. 2 Krachtenspel in een éénzijdig ingeklemde ligger, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting

- a. Schema met parabolisch momentenverloop
 $M = 1/2 qy^2$
- c. Vakwerk als uitkragende ligger beschouwd met de aandelen die de randstaven en de diagonale leveren aan het totale uitwendige moment
- d. Stapeling van portalen als uitkragende ligger beschouwd met de aandelen die de stijlen leveren aan het totale uitwendige moment
- e. Eenbeukig raamwerk als uitkragende ligger beschouwd met de aandelen die de stijlen leveren aan het totale uitwendige moment

18.3.3 MEERBEUKIG PORTAAL

Beschouwing als een aaneenschakeling van afzonderlijke portalen

Zoals we in [385-1d] een verticale stapeling van afzonderlijke portalen hebben bedacht, zo kunnen we de afzonderlijke portalen ook naast elkaar plaatsen en de bovenregels koppelen door middel van scharnieren, zie fig. 1a.

Als we weer een horizontale kracht in de top laten aangrijpen dan verplaatsen alle bovenregels evenveel naar rechts, omdat de normaalkrachtvervormingen in de bovenregels volkomen te verwaarlozen zijn ten opzichte van de buigvervormingen van de stijlen. De vervormde stijlen passen hierbij precies aan elkaar, vergelijk hier toe fig. [383-2].

Dit betekent dat de horizontale kracht volkomen gelijk wordt verdeeld over het aantal portalen. In fig. 1b zijn voor twee dichtbij elkaar liggende portalen de reactiekrachten weergegeven. Als we deze portalen direct naast elkaar plaatsen dan oefent elk tweetal naast elkaar gelegen poten, even grote en tegengesteld gerichte verticale krachten uit op de ondergrond.

Deze krachten neutraliseren elkaar en het koppel dat lijkt te ontstaan heeft in feite geen arm van betekenis en valt dus weg. De beide horizontale krachten versterken elkaar echter.

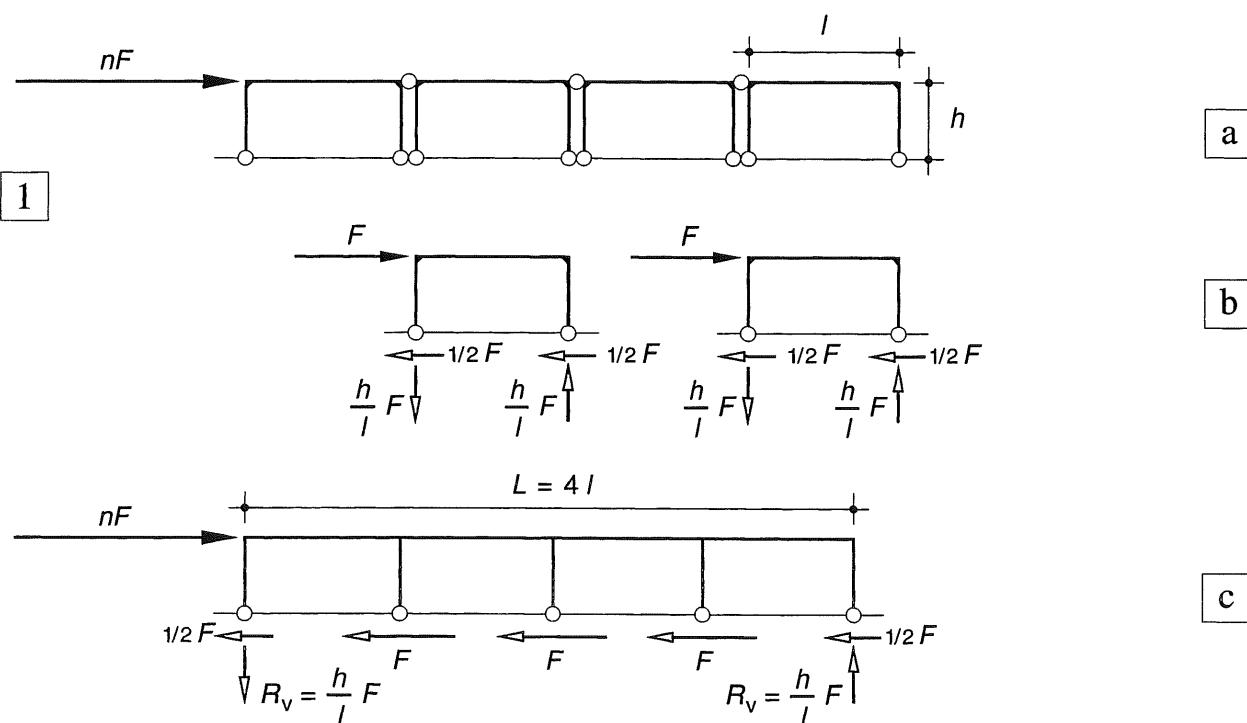
We zien dan dat alleen de verticale krachten in de buitenste stijlen van het aaneengeschakelde portaal maar overblijven en evenwicht maken met het moment ten gevolge van de uitwendige horizontale kracht, zie fig. 1c.

Er geldt dus:

$$(nF) * h = R_V * L \quad (1)$$

De horizontale reactiekrachten zijn gelijkmatig verdeeld over de stijlen van het raamwerk, met dien verstande dat de twee buitenstijlen gezamenlijk dezelfde kracht opnemen als één binnenstijl. De buigstijfheden van de buitenstijlen zouden dan eigenlijk de helft moeten bedragen van die van de binnenstijlen.

Fig. 1 Meerbeukig portaal beschouwd als een aaneenschakeling van afzonderlijke portalen
a. Schema
b. Krachten op afzonderlijke portalen
c. Superpositie van de krachten op alle afzonderlijke portalen



2

18.4.1 ALGEMEEN

Driescharnierspanten zijn statisch *bepaalde* constructies; voor de bepaling van de krachtsverdeling kan worden volstaan met het toepassen van de evenwichtsvoorwaarden. Dit heeft tot gevolg dat de berekening anders verloopt dan bij de statisch *onbepaalde* varianten die in KW-5 en KW-6 worden behandeld, zoals tweescharnierspanten en volledig ingeklemde portalen; fig.2. In [380-1] is het vervormingsgedrag weergegeven van een aantal portaalconstructies onder een gelijkmatig verdeelde belasting op de bovenregel. Hieruit blijkt dat driescharnierspanten met een horizontale bovenregel in het algemeen opvallend grote vervormingen vertonen.

We zullen zien dat bij hellende dakvlakken zowel het doorbuigingsverloop (KW-5 [581]) als de momentenverdeling [396] een stuk gunstiger wordt. Driescharnierspanten worden daarom vooral voorloodsen en hallen met een hellend dakvlak toegepast en we zullen ons in de berekening op deze vorm concentreren.

Voor een indicatie van de momentenverdeling bij een horizontale bovenregel zijn in [380] enige gegevens verstrekt.

Dimensionering

Voor de dimensionering van een spant is het verloop van het buigende moment verreweg het belangrijkste. De dwarskrachten kunnen vrijwel altijd moeiteloos worden overgebracht. Het wordt aangeraden om het momentenverloop in een spant steeds te bepalen met behulp van de snede-methode, en niet door grafische integratie van het dwarskrachtenvlak, zoals dat bij liggers nog steeds gebruikelijk is. Vooral bij een schuine bovenregel is het tekenen van een dwarskrachtenlijn een weinig plezierige bezigheid. Hetzelfde geldt voor een normaalkrachtenlijn. Vooruitlopend op de berekening van de momentenlijnen is in 18.4.3 aangegeven op welke wijze een *N*-en een *V*-lijn het beste kan worden bepaald. Hierbij is er vanuit gegaan dat de grootte van de oplegreacties al berekend is [390-391].

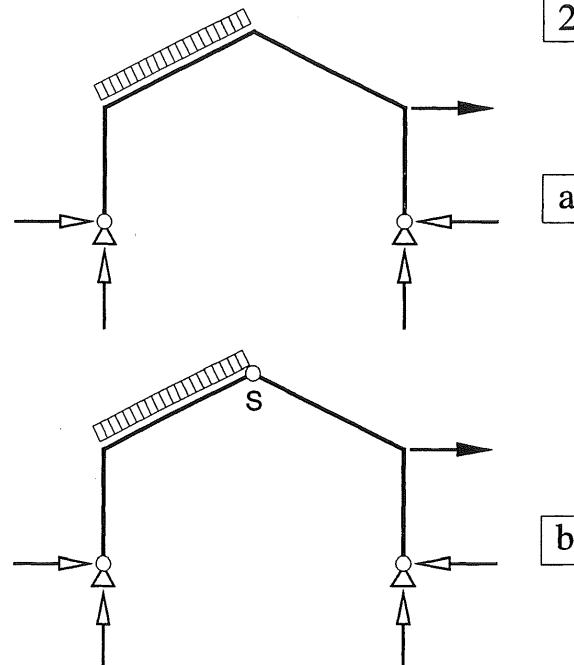


Fig. 2 Vergelijking van een tweescharnierspant met een driescharnierspant

- a. Tweescharnierspant
Twee onbekende oplegreacties per oplegging leveren 4 onbekenden.
Beschikbaar: 3 evenwichtsvoorwaarden
- b. Driescharnierspant
Twee onbekende oplegreacties per oplegging leveren 4 onbekenden
Beschikbaar: 3 evenwichtsvoorwaarden + de extra vergelijking dat het buigend moment ter plaatse van het scharnier in de top gelijk aan nul moet zijn



Fig. 3 Driescharnierspanten met vakwerkliggers
De spanten zijn van gelijmd hout met een kleine boven- en onderflens. Dit soort flenzen wordt tegenwoordig vanwege de arbeidskosten niet meer toegepast.
De houten vakwerken (DSB-Träger) worden in Duitsland veelvuldig toegepast, in Nederland nauwelijks.

18.4.2 NORMAALKRACHTEN EN DWARSKRACHTEN

Als men – om wat voor reden dan ook – in een punt de normaalkracht en de dwarskracht wil weten gaat men als volgt te werk.

Men brengt in het gewenste punt P een snede aan, zie fig. 1a. Alle uitwendige krachten op het afgesneden stuk worden naar deze snede verplaatst, zie fig. 1b; de daartoe benodigde momenten behoeven we hierbij niet te beschouwen. We zetten alle krachten in een krachtenveelhoek achter elkaar uit en bepalen de resultante F_R , zie fig. 1c.

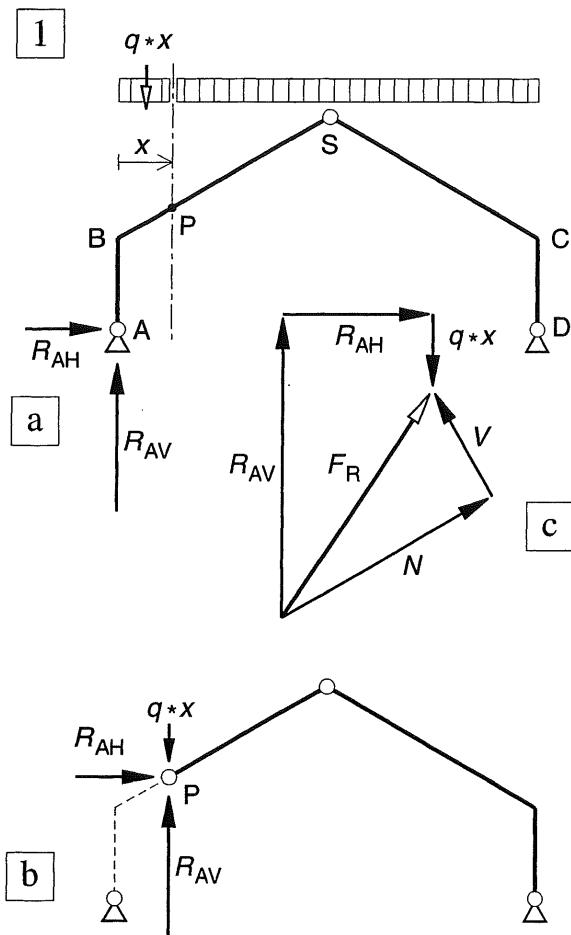


Fig. 1 Bepaling van normaalkracht en dwarskracht

- Schema van een symmetrisch spant
- Verplaatsen naar punt P van alle uitwendige krachten die op het afgesneden stuk werken
- Ontbinden van de resultante in een normaalkracht en een dwarskracht

Deze resultante ontbinden we vervolgens weer langs de staafas en loodrecht op de staafas, zie fig. 1c. We hebben dan de normaalkracht N en de dwarskracht V gevonden zoals deze op het overblijvende rechter gedeelte werken. Uiteraard kunnen de uitwendige krachten ook stuk voor stuk worden ontbonden in N - en V -richting

Als we N en V op enkele markante punten bepalen, kunnen we ook de gehele normaalkrachtenlijn en dwarskrachtenlijn tekenen.

Bij puntlasten zullen deze lijnen sprongsgewijs moeten variëren, bij een gelijkmatig verdeelde belasting verlopen deze lijnen lineair.

In fig. 2 zijn de N - en de V -lijn voor beide gevallen weergegeven.

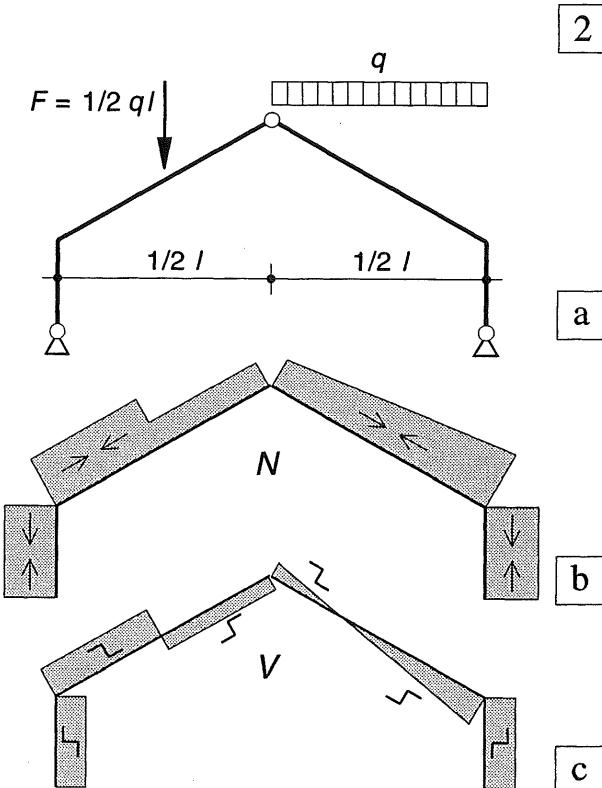


Fig. 2 Normaalkrachtenlijn en dwarskrachtenlijn voor een symmetrisch belast spant

- links: puntlast op de bovenregel
- rechts: gelijkmatig verdeelde belasting
- a. Schema ($F = ql/2$)
- b. Normaalkrachtenlijn
- c. Dwarskrachtenlijn

18.4.3 MOMENTENVERLOOP IN EEN LIGGER ONDER EEN HELLING

Verreweg de belangrijkste belasting voor een spant is de permanente belasting op de (schuine) bovenregel (eigen gewicht) en de veranderlijke belasting (sneeuw, wind) op dit onderdeel. Ter bepaling van de gedachte wordt het momentenverloop beschouwd in een ligger op twee steunpunten, die onder een helling α is geplaatst. Bij windbelastingen wordt aangenomen dat de belasting loodrecht op het dakvlak aangrijpt. Dit moment kan op de gebruikelijke wijze worden berekend, zie fig. 3a.

Voor de bepaling van de permanente belasting (eigen gewicht regel en bijv. de belasting door dakplaten) moet q (kN/m^2) langs het schuine vlak worden gemeten; maar de kracht werkt wel verticaal.

Als we de horizontale projectie van de ligger aangegeven met l , is de lengte van de schuine zijde gelijk aan, zie fig. 3b:

$$l_1 = \frac{l}{\cos \alpha}$$

Het maximale moment bedraagt dan:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q l_1 l = \frac{1}{8} q l^2 \frac{1}{\cos \alpha} \quad (2)$$

In de berekeningen zullen we vrijwel altijd gebruik maken van de geprojecteerde belasting op een horizontaal vlak, die we dan ook horizontaal boven de schuine ligger aangegeven, zie fig. 3c

$$q_v = q / \cos \alpha,$$

Het maximale moment in zo'n hellende ligger bedraagt dan:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q_v l^2 \quad (2a)$$

Bij verticaal werkende puntlasten wordt de arm van elk koppel bepaald door de geprojecteerde lengten, zoals is aangegeven in fig. 3d.

In het vervolg zullen we q_v altijd horizontaal tekenen zoals in fig. 3c is weergegeven, maar de index v verder weglaten.

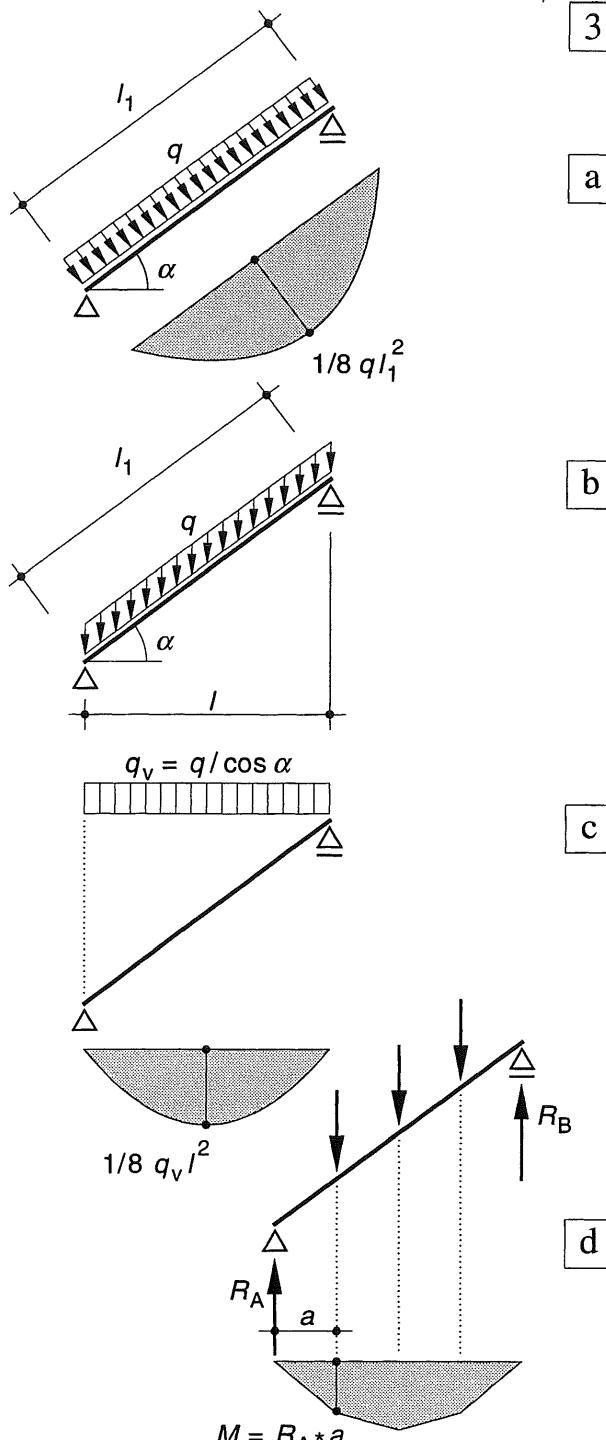


Fig. 3 Momentenverloop in een ligger op twee steunpunten, geplaatst onder een helling

- a. Belasting loodrecht op de liggeras; schema met momentenverloop
- b. Verticaal werkende belasting
- c. Projectie van de belasting op een horizontaal vlak met momentenverloop
- d. Momentenverloop bij puntlasten

18.4.4 GELIJKMATIG VERDEELED VERTICALE BELASTING

In fig. 1a is een driescharnierspant weergegeven dat uitsluitend is belast door een gelijkmatig verdeelde verticale belasting.

In de ondersteuningen A en D worden de nog onbekende oplegreacties aangebracht; de verticale omhoog gericht, de horizontale naar binnen, zie fig. 1b. In het scharnier S kan uit symmetrieverwegingen uitsluitend een horizontale kracht worden overgebracht; de twee spanthelften rusten daar tegen elkaar, zie fig. 1c. Elke spanthelft wil onder invloed van de belasting immers om zijn oplegpunt (A of D) roteren. De beide steunkrachten in S (actie = reactie) verhinderen dat.

De verticale reactie R_{AV} wordt bepaald door van het gehele spant het statisch moment om punt D op te maken, zie fig. 1b. De horizontale oplegreacties vallen dan uit de vergelijking weg en we vinden dezelfde reactie als voor een ligger AD onder de gegeven q -last, zie fig. 1d. We vinden dus:

$$R_{AV} = R_{DV} = \frac{1}{2} ql$$

Uit het horizontale evenwicht volgt:

$$R_{AH} = R_{DH}$$

Indien bij een driescharnierspant

- uitsluitend verticale belastingen werken,*
- de opleggingen in een horizontaal plat vlak zijn gelegen,*

geldt het volgende:

- *de verticale oplegreacties zijn gelijk aan die van een overeenkomstig belaste vrij opgelegde ligger.*
- *de horizontale reacties zijn gelijk en tegengesteld gericht (naar binnen)*

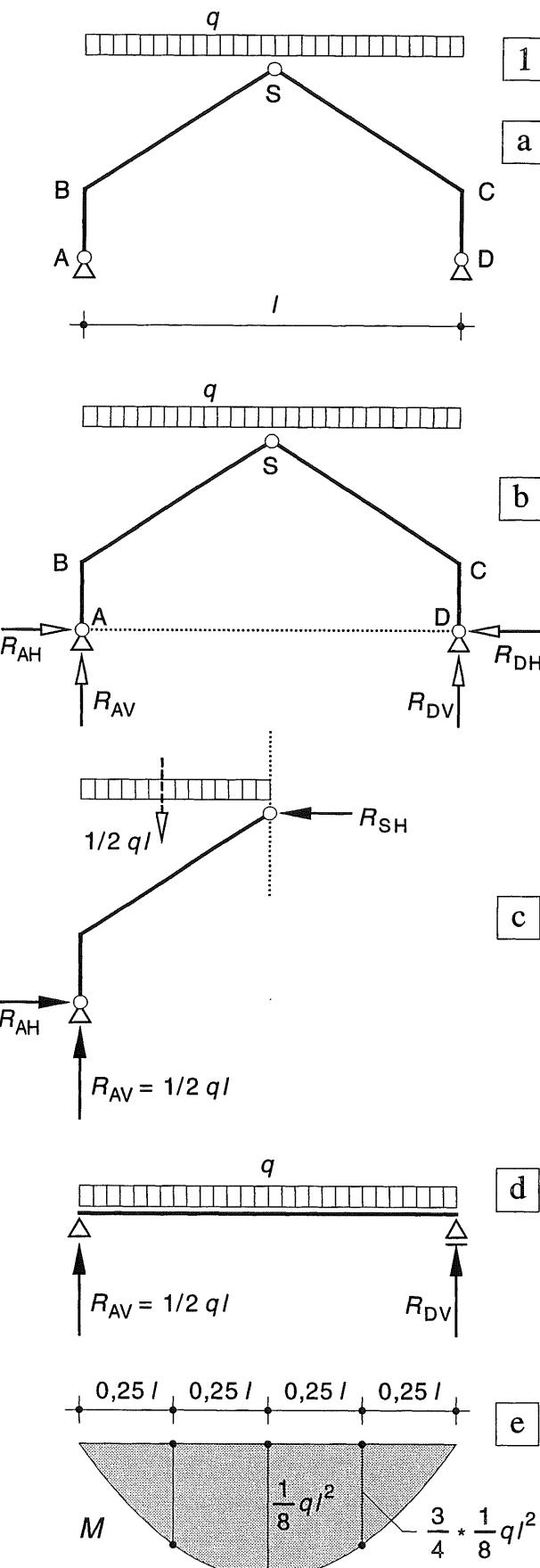
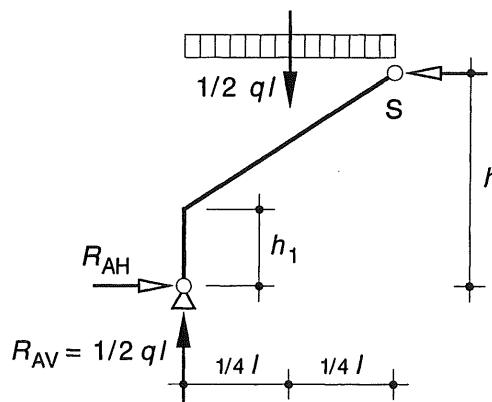


Fig. 1 Driescharnierspant

- Schema
- Oplegreacties
- Evenwicht spanthelft
- Overeenkomstig belaste ligger met momentenlijn

2

a



Om de horizontale oplegreacties te vinden, beschouwen we één spanthelft (links of rechts) en stellen dat het statisch moment van alle krachten op die helft ten opzichte van het scharnier S gelijk moet zijn aan nul, zie fig. 2a.

$$+\frac{1}{2} q l * \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} q l * \frac{1}{4} l - R_{AH} * h = 0 \quad (3)$$

Hieruit volgt

$$R_{AH} = \frac{1}{h} * \frac{1}{8} q l^2 \quad (3a)$$

Het maximale moment in punt S – uitsluitend ten gevolge van alle verticale actie- en reactiekrachten – wordt dus opgeheven door het moment ten gevolge van de horizontale reactiekracht.

$$M_{\max} = 1/8 q l^2 = R_{AH} * h$$

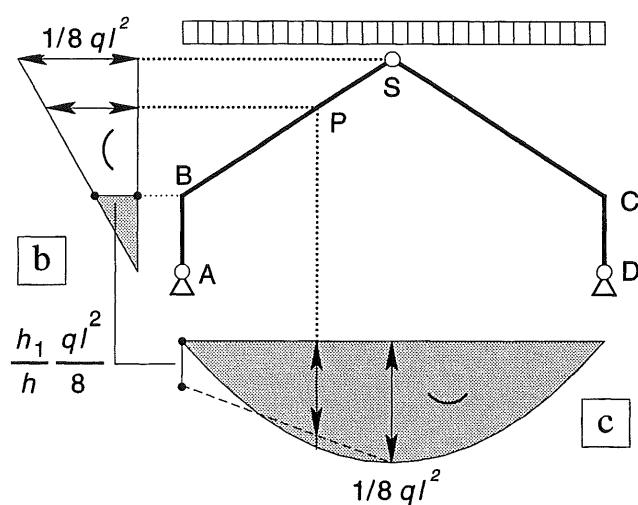
In fig. 2c is het momentenaandeel van alle verticale krachten langs een horizontale lijn uitgezet. Dit levert een positief parabolisch momentenverloop met als maximum: $M_{\max} = 1/8 q l^2$. In fig. 2b (links) is het momentenverloop van de horizontale kracht langs een verticale lijn uitgezet. Dit levert een negatief driehoekig momentenverloop met hetzelfde maximale moment ter hoogte van het scharnier S.

Voor een willekeurig punt P op de bovenregel zijn dan beide momenten-aandelen bekend, zie fig. 2b, c.

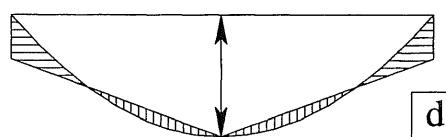
Dit houdt in dat de stijlen uitsluitend aan een driehoekig verlopend moment worden onderworpen. Voor de bovenregel is het ontlastende moment in B en S direct aan te geven; tussen beide punten verloopt dit moment lineair.

Het momentenverloop in de bovenregel volgt dan door superpositie, zie fig. 2d.

Hoewel deze weergave eigenlijk de meest simpele en overzichtelijke is, wordt de momentenlijn meestal langs de hartlijnen van stijlen en regel uitgezet. Dit wordt besproken in [392].



b



c

Fig. 2 Aandelen van de verticale en horizontale krachten afzonderlijk beschouwd

- R_{AH} volgt uit de volgende voorwaarde: het statisch moment om het scharnier S van alle krachten op één spanthelft is gelijk aan nul.
- Schema van het spant en het momentenverloop ten gevolge van R_{AH}
- Momentenverloop ten gevolge van alléén de verticale krachten
- Superpositie van de momenten volgens b. en c. voor de regel

18.4.5 MOMENTENLIJN UITGEZET LANGS DE SYSTEEMLIJNEN

We beschouwen een soortgelijk spant als is besproken in [391]. Het schema en de oplegreacties zijn weergegeven in fig. 1a.

Voor het tekenen van de momentenlijn in het spant beschouwen we eerst de stijl AB. De reactiekracht R_{AH} veroorzaakt in AB alleen een normaalkracht $N(-)$. De reactiekracht R_{AV} veroorzaakt een lineair momentenverloop tussen A en B met als maximum, zie fig. 1a, b:

$$M_B = -R_{AH} * h_1 = -\frac{h_1}{h} * \frac{1}{8} q l^2 \quad (4)$$

In de regel tussen B en S moet het moment parabolisch verlopen. Het moment in B is hierboven berekend, het moment in S is gelijk aan nul.

Als we nog één extra punt van de parabool berekenen dan kan deze met goede benadering worden getekend. We kiezen hiervoor het punt M midden tussen B en S. Dit is weer het moment van de overeenkomstig belaste ligger volgens fig. [390-1d] plus het moment ten gevolge van R_{AH} , zie fig. 1b. Gebruik makend van de eigenschappen van een parabool volgt:

$$M_M = \frac{3}{4} * \frac{1}{8} q l^2 - \frac{h_2}{h} * \frac{1}{8} q l^2 \quad (4a)$$

De momentenlijn is weergegeven in fig. 1c.

Het moment kan ook term voor term worden berekend uit de aangrijpende krachten, zie fig. 1b. Voor punt M volgt dan:

$$M_M = +\frac{1}{2} q l * \frac{1}{4} l - \frac{q l^2}{8 h} h_2 - \frac{1}{4} q l * \frac{1}{8} l \quad (4b)$$

Wie bij deze tweede manier het aandeel van de gelijkmatig verdeelde belasting op de bovenregel vergeet, mag niet verwachten de juiste uitkomst te vinden!

Wie vertrouwd is geraakt met het tekenen van momentenlijnen volgens KW-2 [242-253], kan het moment behorende bij de halve overspanning, uitzetten ten opzichte van de verbindinglijn van M_S en M_C , zie fig. 1d rechts.

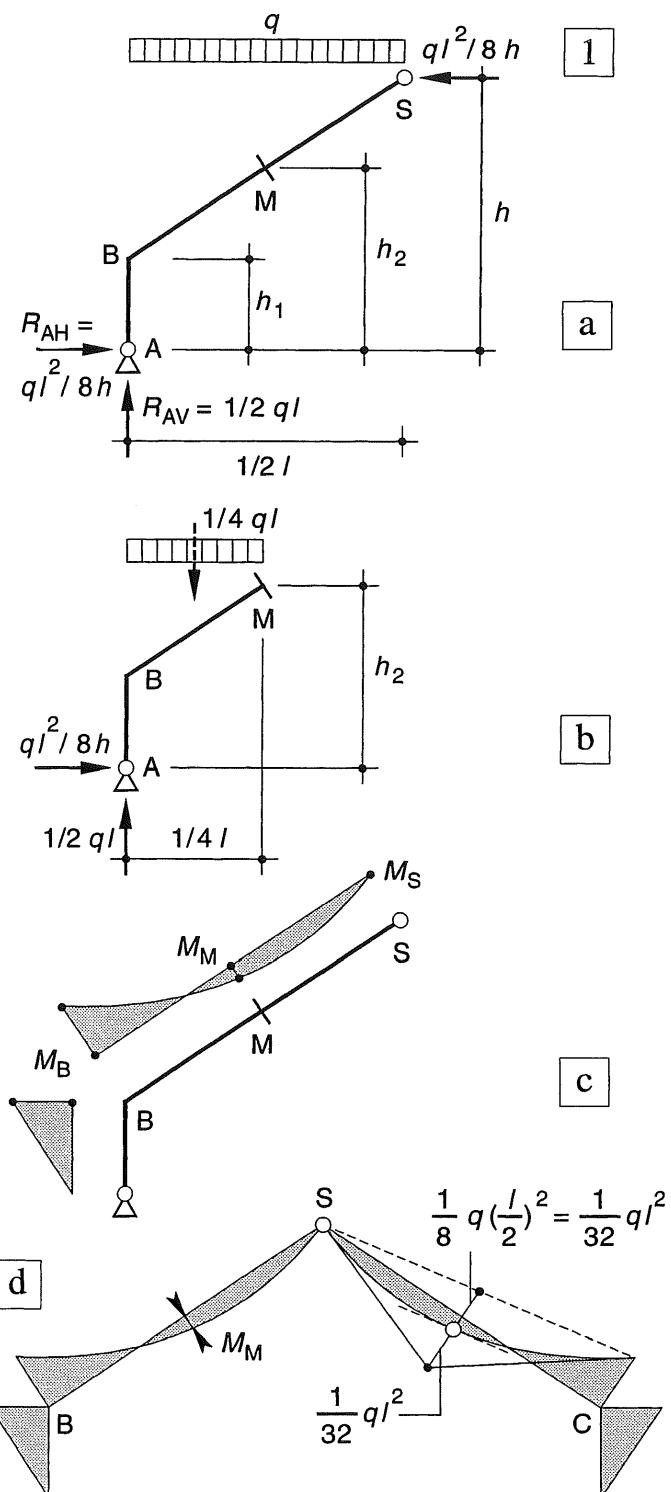


Fig. 1 Momentenverloop in het spant

- a. Schema met oplegreacties
- b. Bepaling van het moment in punt M
- c. Momentenverloop in de linker spanthelft, uitgezet naast de systeemlijnen
- d. Momentenverloop voor het gehele spant, uitgezet langs de systeemlijnen

Numeriek uitgewerkt voorbeeld

Voor het tekenen van de momentenlijn voor de gelijkmatig verdeelde belaste regel, is hier gebruik gemaakt van de procedure die in KW-2 [242-243] is beschreven.

Voor elke spanthelft vervangen we de gelijkmatig verdeelde belasting door zijn resultante, zie fig. 2a, b. De oplegreacties en het momentenverloop in de beide stijlen veranderen hierdoor niet. Het momentenverloop in de regel is daardoor echter lineair geworden met een knik ter plaatse van de puntlast, zoals is weergegeven in fig. 2c. Volgens de regels van [242] kunnen we het lineaire verloop dan weer vervangen door een parabolisch verloop, zie fig. 2d.

Berekening

$$\text{Totale belasting: } q * l = 8 * 12 = 96 \text{ kN}$$

Verticale oplegreacties:

$$R_{AV} = R_{DV} = 1/2 ql = 1/2 * 96 = 48 \text{ kN}$$

De voorwaarde $\sum K_S = 0$ voor de linker spanthelft levert de horizontale reacties:

$$+R_{AV} * 6 - R_{AH} * 6 - 48 * 3 = 0 \text{ ofwel:}$$

$$+48 * 6 - 48 * 3 = 6 * R_{AH}$$

$$R_{AH} = 24 \text{ kN}$$

Buigend moment in punt B:

$$M_B = R_{AH} * h_1 = -24 * 4,5 = -108 \text{ kNm}$$

Buigend moment in punt M onder de puntlast:

$$\begin{aligned} M_M &= +R_{AV} * l/4 - R_{AH} * h_2 = \\ &= +48 * 3 - 24 * 5,25 = +144 - 126 = +18 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Moment in punt M als de puntlasten op de regel weer worden vervangen door de gelijkmatig verdeelde belasting:

De afstand tussen M_M en de stippellijn tussen M_B en M_S moet eerst worden bepaald. Halvering van dit lijnstuk levert een punt van de momentenlijn voor de gelijkmatig verdeelde belasting. Een van de manieren om deze afstand te bepalen is hieronder zonder verder commentaar weergegeven.

$$108/2 = 54$$

$$54 + 18 = 72$$

$$1/2 * 72 = 36$$

$$+18 - 36 = -18$$

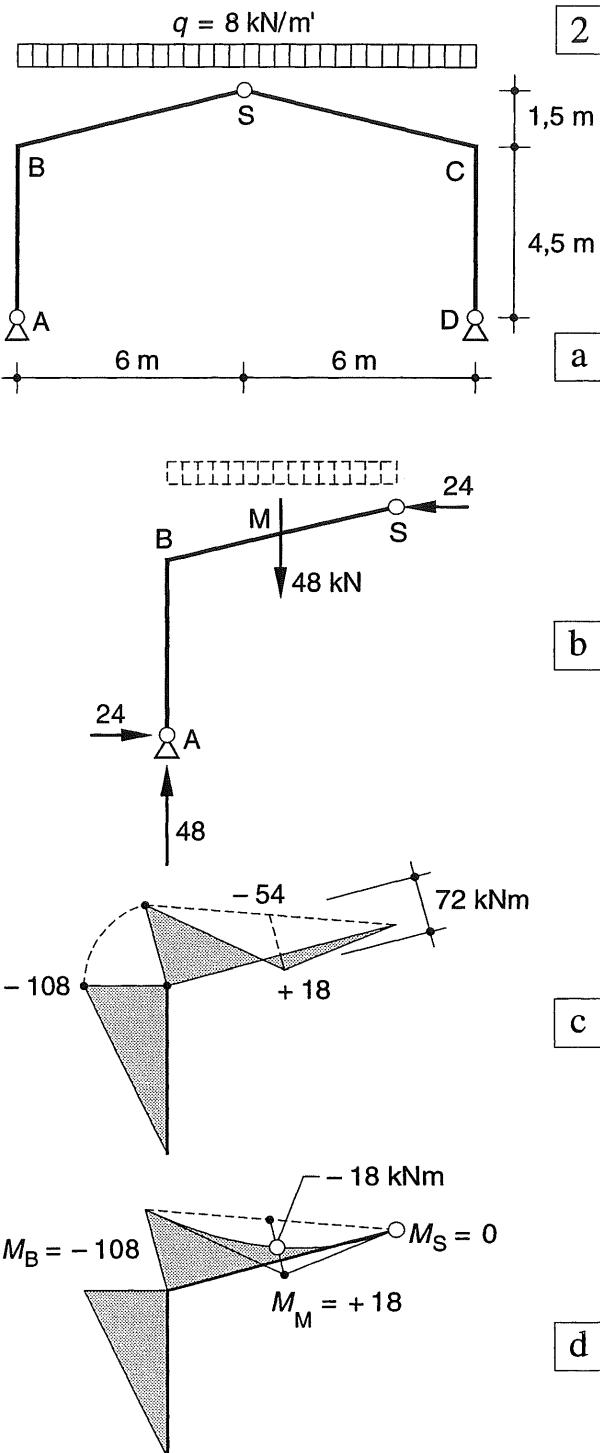


Fig. 2 Driescharnierspant onder gelijkmatig verdeelde belasting

- a. Schema
- b. Belasting per spanthelft vervangen door de resultante, met de numerieke waarde van alle krachten
- c. Momentenlijn voor de belasting volgens b.
- d. Momentenlijn voor de q -last, afgeleid uit de momentenlijn volgens c.

18.4.6 ASYMMETRISCHE VERTICALE BELASTING

In fig. 1a is een spant weergegeven waarvan alleen de linkerhelft gelijkmatig verdeeld is belast. In fig. 1b is hiervoor de equivalente puntlast ingevoerd. De verticale oplegreacties zijn dan gemakkelijk te bepalen (namelijk $3/4 F$ en $1/4 F$, waarbij geldt: $F = 1/2 ql$).

We bepalen R_{AH} door het statisch moment van de linkerhelft van het spant op te maken om het punt S en de uitkomst gelijk aan nul te stellen.

$$+ \frac{3}{4} F * \frac{1}{2} l - F * \frac{1}{4} l - R_{AH} * h = 0 \quad (5)$$

ofwel

$$R_{AH} = \frac{l}{8h} F = \frac{ql^2}{16h} \quad (5a)$$

In fig. 1b zijn de reactiekrachten op schaal getekend, zoals ze volgen uit de aangenomen afmetingen en belastingen. In de onbelaste rechter spanthelft, zal de werklijn van de resulterende reactiekracht door het scharnier S moeten gaan. Dit is immers de enige manier waarop dit onderdeel in evenwicht kan zijn.

Bij een onbelast spantdeel (links of rechts van het scharnier S), is de horizontale reactiekracht dus direct te berekenen als de verticale component bekend is. Voorts moeten de werklijnen van beide reactiekrachten en de werklijn van de uitwendige kracht F elkaar in één punt T snijden, om weer evenwicht met elkaar te kunnen maken, zoals eveneens volgt uit fig. 1b.

Wellicht ten overvloede is in fig. 1b ook de bijbehorende krachtendriehoek weergegeven.

Indien er maar één verticale puntlast op één van beide spanthelften aangrijpt zijn er dus meerdere controle-mogelijkheden voor de juistheid van de oplossing.

In fig. 1c is de momentenlijn getekend voor het geval dat de equivalente puntlast aangrijpt en in fig. 1d is de momentenlijn weer aangepast aan de gelijkmatig verdeelde belasting volgens de regels van KW-2 [242].

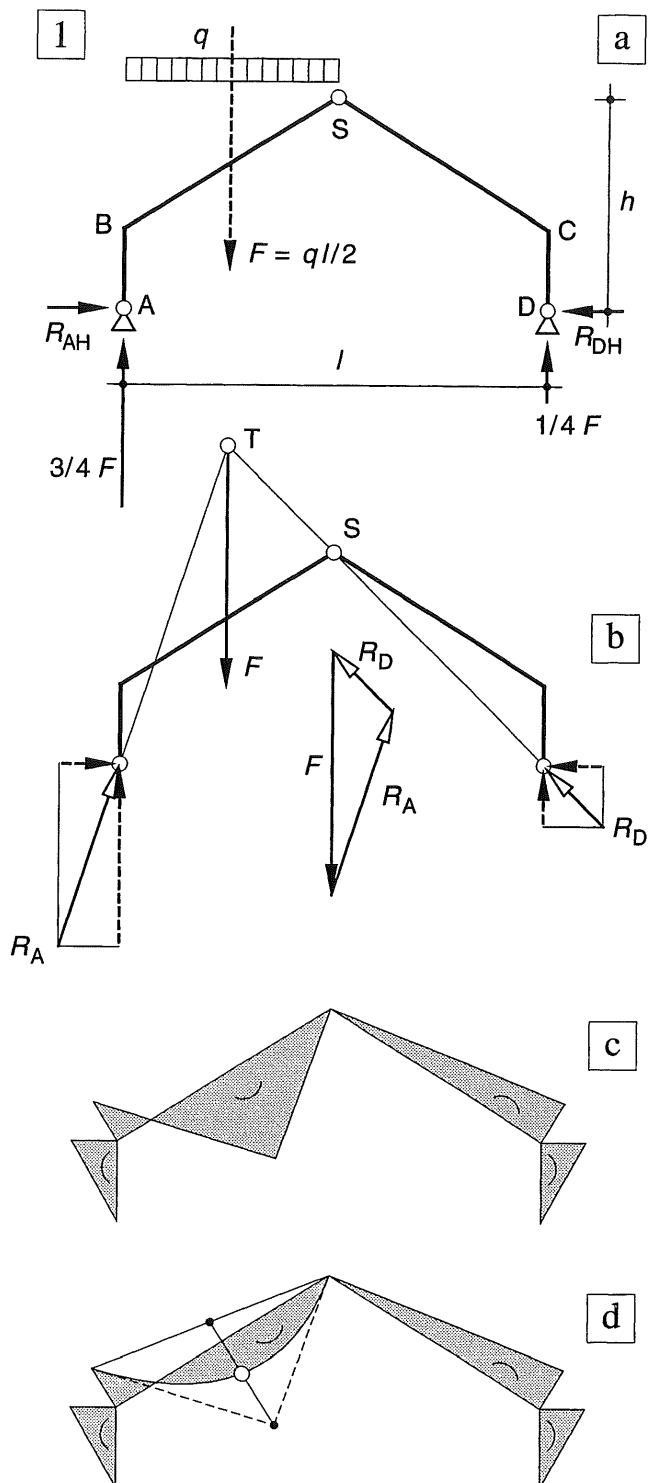


Fig. 1 Asymmetrisch belast driescharnierspant
a. Schema met gelijkmatig verdeelde belasting
b. Schema met equivalente puntlast; de werklijnen van de reactiekrachten en van de puntlast snijden elkaar in één punt
c. Momentenlijn voor de equivalente puntlast
d. Momentenlijn aangepast aan de gelijkmatig verdeelde belasting

Druklijn bij één puntlast

We beschouwen nogmaals het spant dat is weergegeven in fig. 1b. Als we links van de puntlast F ergens een snede aanbrengen, dan werkt op het afgesneden deel uitsluitend de resulterende oplegreactie R_A . Het buigend moment in zo'n snede is dus gelijk aan, zie fig. 2a1:

$$M = R_A * e \quad (6)$$

waarin e de lengte voorstelt van de loodlijn die vanuit de beschouwde snede op de werklijn van R_A wordt neergelaten.

Het wijd gearceerde vlak van fig. 2a2 geeft dus – zij het op een wat vreemdsoortige schaal – het momentenvlak weer links van de puntlast. Op overeenkomstige wijze kunnen we ook rechts van de puntlast te werk gaan. Voor het dichter gearceerde vlak geldt immers:

$$M = R_D * e \quad (7)$$

De schalen van beide 'momentenlijnen' zijn echter niet gelijk omdat de oplegreacties R_A en R_D ongelijk groot zijn. Maar als de afstand e gelijk is aan nul – dus als de werklijn van een van beide oplegreacties de hartlijn van het portaal snijdt – dan moet het buigend moment daar ook gelijk zijn aan nul.

In fig. 2b1 is voor de linker *stijl* een oplossing aangegeven met een horizontale excentriciteit :

$$M = -R_{AV} * e_h \quad (8a)$$

Voor de *regel* in fig. 2c1 maken we gebruik van de verticale excentriciteit:

$$M = +R_{AH} * e_v \quad (8b)$$

Op deze wijze vallen de werklijnen van R_A en R_D dus samen met de druklijn zoals die indertijd in KW-1 [136] is gedefinieerd. Aangezien geldt $R_{AH} = R_{DH}$, is de momentenschaal voor de *regel* nu constant. De schaal voor de stijlen is onderling afwijkend en bovendien afwijkend van die voor de regels. Hoe dichter de druklijn de aslijn van het portaal nadert, des te kleiner zijn de buigende momenten. Dit geeft ons een mogelijkheid om de vorm van het spant zodanig aan te passen dat de buigende momenten aanzienlijk worden verminderd.

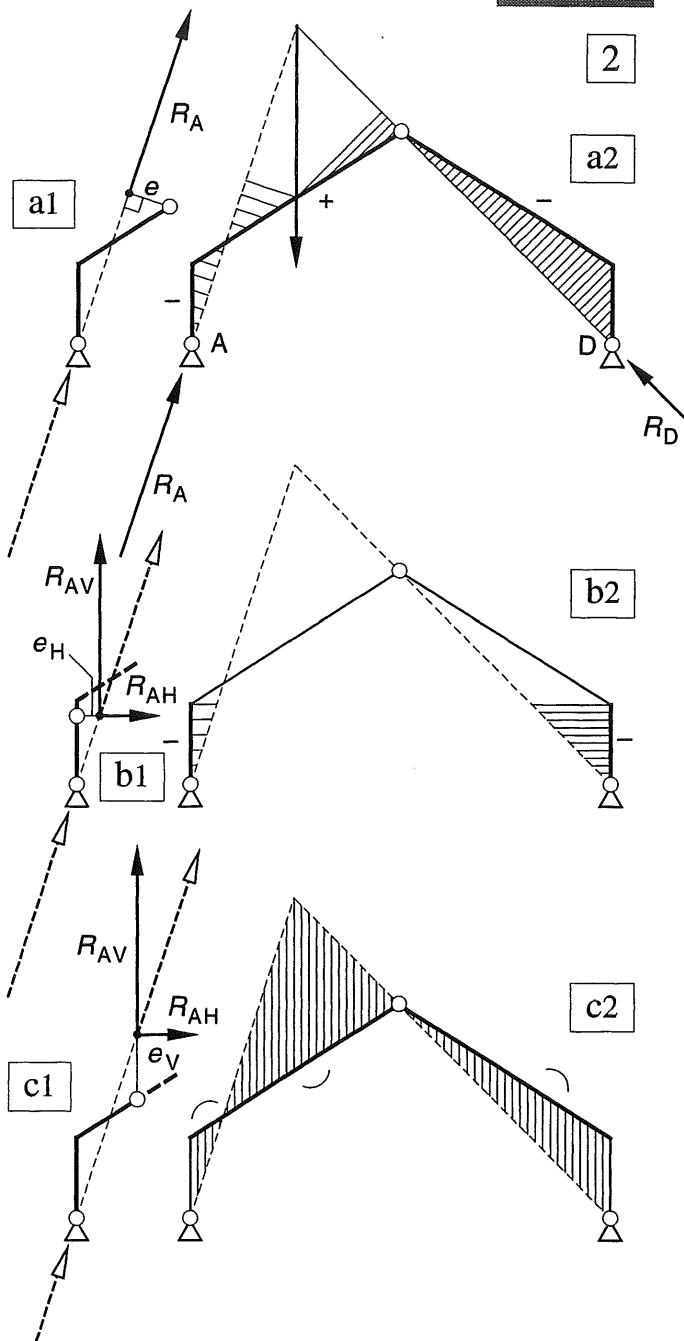


Fig. 2 Druklijn

- a. Indicatie van het momentenverloop links en rechts van de puntlast (schalen verschillend)
- b. Momentenverloop voor de stijlen (ongelijk schalen bij horizontale excentriciteit)
- c. Momentenverloop voor de regels (gelijke schalen bij verticale excentriciteit)

Gebruik maken van de druklijn is voornamelijk van belang voor de permanente verticaal werkende belasting. Het heeft nauwelijc zin voor horizontaal werkende belasting. Een en ander is nader uitgewerkt in [396] voor een q-last.

18.4.7 DRUKLIJN VOOR DE REGEL

Bij het driescharnierspant van fig. 1a is de gelijkmatig verdeelde belasting geconcentreerd gedacht ter plaatse van de gordingen. Voor de regel wordt de druklijn dan gevormd door de stangenveelhoek bij de gegeven uitwendige krachten, die door de punten A, S en D moet gaan; fig. 1b. Lees of herlees zonodig KW-1 [115] en [116]. De geknikte stangenveelhoek gaat voor een gelijkmatig verdeelde belasting weer over in een parabool, zie fig. 2a. De excentriciteit ten opzichte van de regel wordt verticaal gemeten.

NB: Voor de stijlen AB en DC gelden aparte druklijnen. In beide gevallen geldt voor elke snede in een stijl, dat op het afgesneden deel uitsluitend de resulterende reactiekrachten R_A c.q. R_D werkt. De stijlen hebben dus aparte druklijnen, die samenvallen met de werklijnen van deze reactiekrachten (stippellijnen in fig. 1b en 2a). De excentriciteit tussen stijl en druklijn wordt horizontaal gemeten.

De hoogte van de stijl doet voor de parabolvorm van de druklijn niet ter zake, zolang de belasting q_V links en rechts van het scharnier S even groot is, zie fig. 2a. Bij het tekenen van de momentenlijn moet de plaats van de momentennulpunten wel overeenkomen, zie fig. 2b.

Als we dus eerst een parabool tekenen door de punten A, S en D, dan kunnen we vervolgens spantvormen ontwerpen, waarvan de aslijn dicht in de buurt komt van deze parabool, zie fig. 3. De 'ideale' vorm – wat buiging betreft althans – is bereikt als de druklijn geheel samenvalt met de aslijn van het spant, zie fig. 3c.

- Fig. 3 Spantvormen die de druklijn goed benaderen
 a. Geknikte vorm met verticale stijlen
 b. Geknikte vorm met scheefstaande stijlen
 c. Parabolische vorm

3

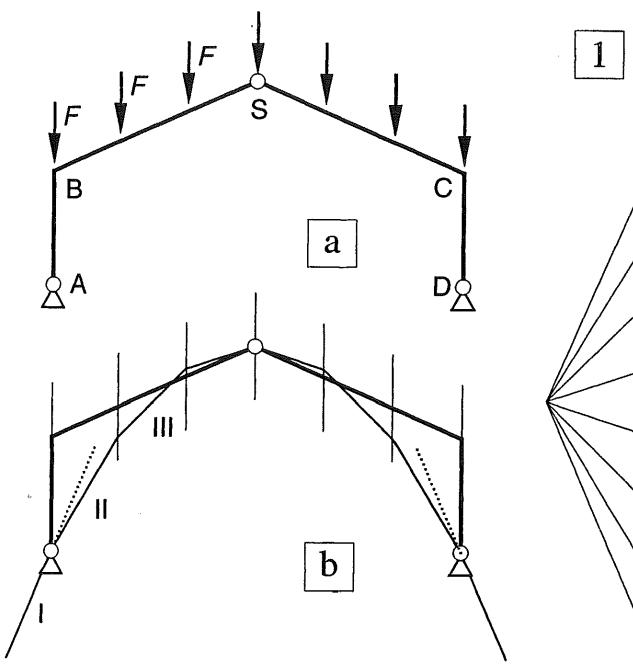
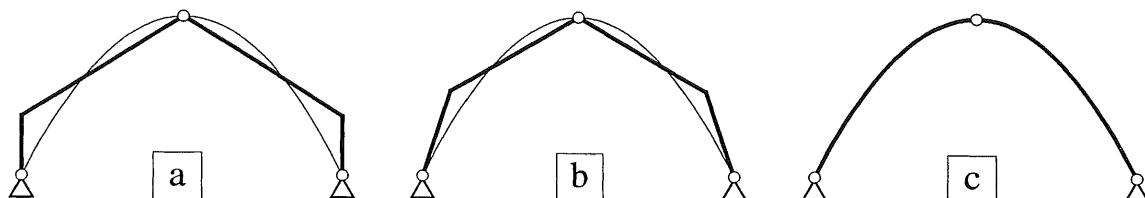


Fig. 1 Druklijn voor de regel bij krachten die zijn geconcentreerd ter plaatse van de gordingen

- a. Schema
 b. Stangenveelhoek en poolfiguur

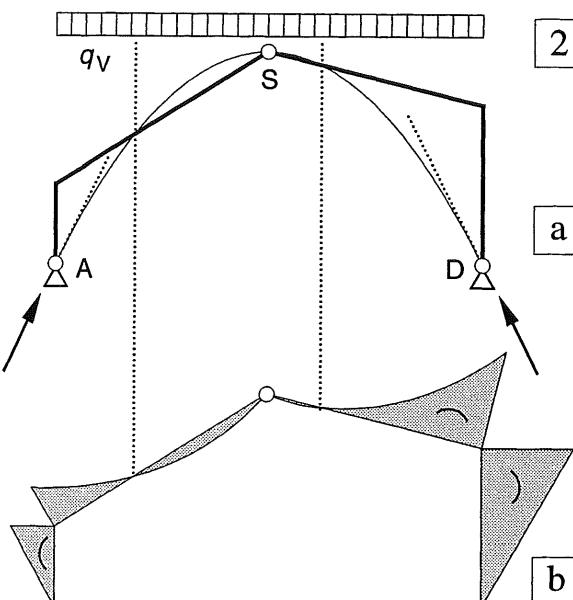


Fig. 2 Druklijnen bij gelijkmatig verdeelde belasting links lage stijl; rechts hoge stijl

- a. Druklijn voor de bovenregel
 b. Momentenlijn voor het driescharnierspant

18.4.8 HORIZONTALE BELASTING

Indien alleen een horizontale belasting op het spant aangrijpt, zullen de horizontale reactiekrachten tezamen evenwicht moeten maken met de uitwendige belasting. De verticale reactiekrachten zullen dan gelijk en tegengesteld van teken moeten zijn.

We beschouwen een driescharnierspant dat is belast door één horizontale puntlast ter plaatse van de bovenzijde van de stijl, zie fig. 4a.

De horizontale reactiekrachten wijzen beide naar links, de verticale reactiekrachten zijn gelijk en tegengesteld gericht; ze werken tegen de draairichting in die door de horizontale kracht F_H wordt veroorzaakt, zie fig. 4b

Berekening oplegreacties:

$$\text{Moment om D: } \sum K_D = 0$$

$$-R_{AV} * l + F_H * h_1 = 0$$

$$R_{AV} = \frac{h_1}{l} F_H \quad (9)$$

$$\text{Moment van de linker spanthelft om S, zie fig. 1b} \\ \sum K_S = 0 : \\ -R_{AV} * \frac{l}{2} + R_{AH} * h - F_H * (h - h_1) = 0$$

Substitutie van (9) in bovenstaande uitdrukking levert:

$$R_{AH} = \frac{h - \frac{h_1}{2}}{h} F_H \quad (10a)$$

R_{DH} volgt dan uit de horizontale evenwichtsvoorraarde $\sum F_x = 0 :$

$$+F_H - R_{AH} - R_{DH} = 0$$

Hieruit volgt:

$$R_{DH} = \frac{\frac{h_1}{2}}{2h} F_H \quad (10b)$$

In punt D is de helling van de reactiekracht gelijk aan :

$$\tan \beta = \frac{R_{DV}}{R_{DH}} = \frac{h}{l/2} \quad (11)$$

Dit laatste resultaat was te verwachten. In de spanthelft zonder uitwendige belasting moet de werklijn van de reactiekracht door het scharnier S gaan. In fig. 4c zijn de numerieke waarden alle reactiekrachten weergegeven.

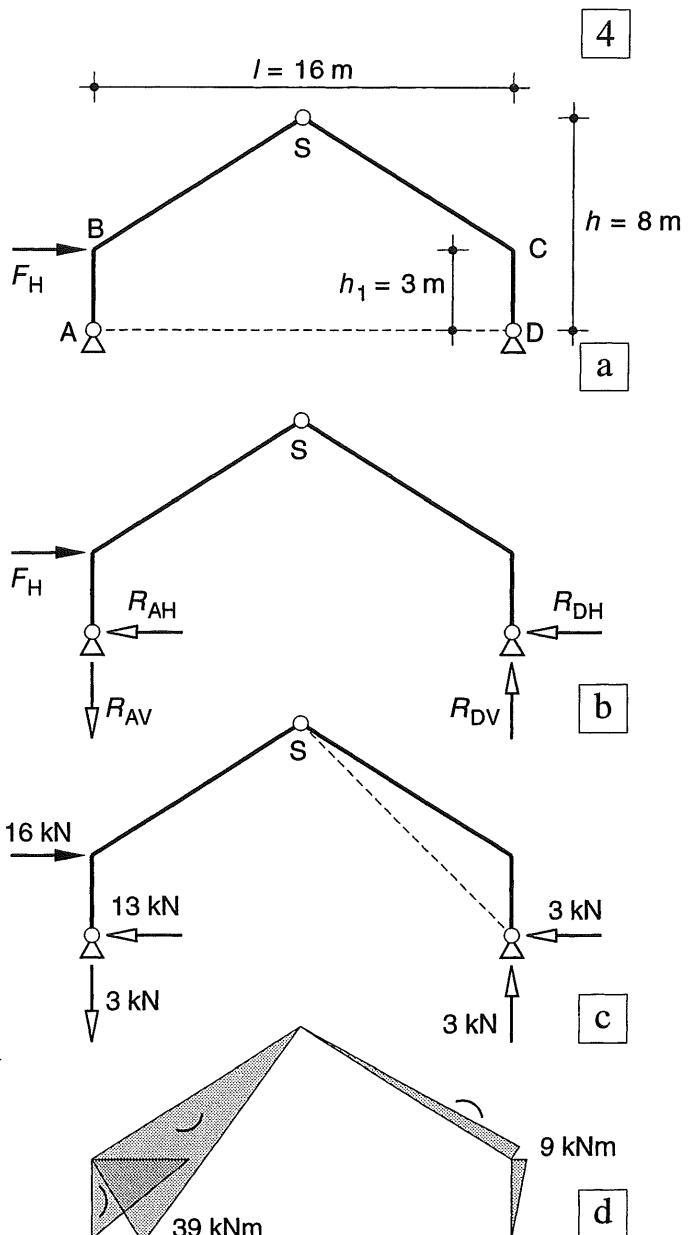


Fig. 4 Horizontale kracht op een driescharnierspant

- a. Schema
- b. Oplegreacties in algemene notatie
- c. Oplegreacties numeriek
- d. Momentenlijn

Als de oplegreacties eenmaal bekend zijn, kan de momentenlijn gemakkelijk worden getekend, zie fig. 4d. Let hierbij op de tekenafspraken, zoals die zijn vastgelegd in KW-2 [229-2].

18.4.9 WILLEKEURIG BELASTE ASYMMETRISCHE SPANTEN

Opleggingen op gelijke hoogte

In fig. 1a is een asymmetrische spantvorm weergegeven onder willekeurige belastingen.

Zolang de steunpunten op dezelfde hoogte liggen, kan de berekeningsgang worden gevuld zoals die in [392-393] is beschreven:

1. Bepaling van het momentenevenwicht om de punten A en D van het gehele spant.
2. Bepaling van het momentenevenwicht van één spanthelft om het scharnier S.

Bij een willekeurig variërende belasting kan het voordelig zijn om voor elke stijl en regel eerst de resulterende kracht te bepalen en deze zonodig in een verticale en een horizontale component te ontbinden, zie fig. 1b. Het opstellen van de evenwichtsvergelijkingen zal dan nauwelijks moeilijkheden opleveren.

Zodra de reactiekrachten bekend zijn kan met behulp van de snedemethode het buigend moment weer in een aantal karakteristieke punten worden bepaald en kan de momentenlijn worden getekend, zie fig. 1c en 1d.

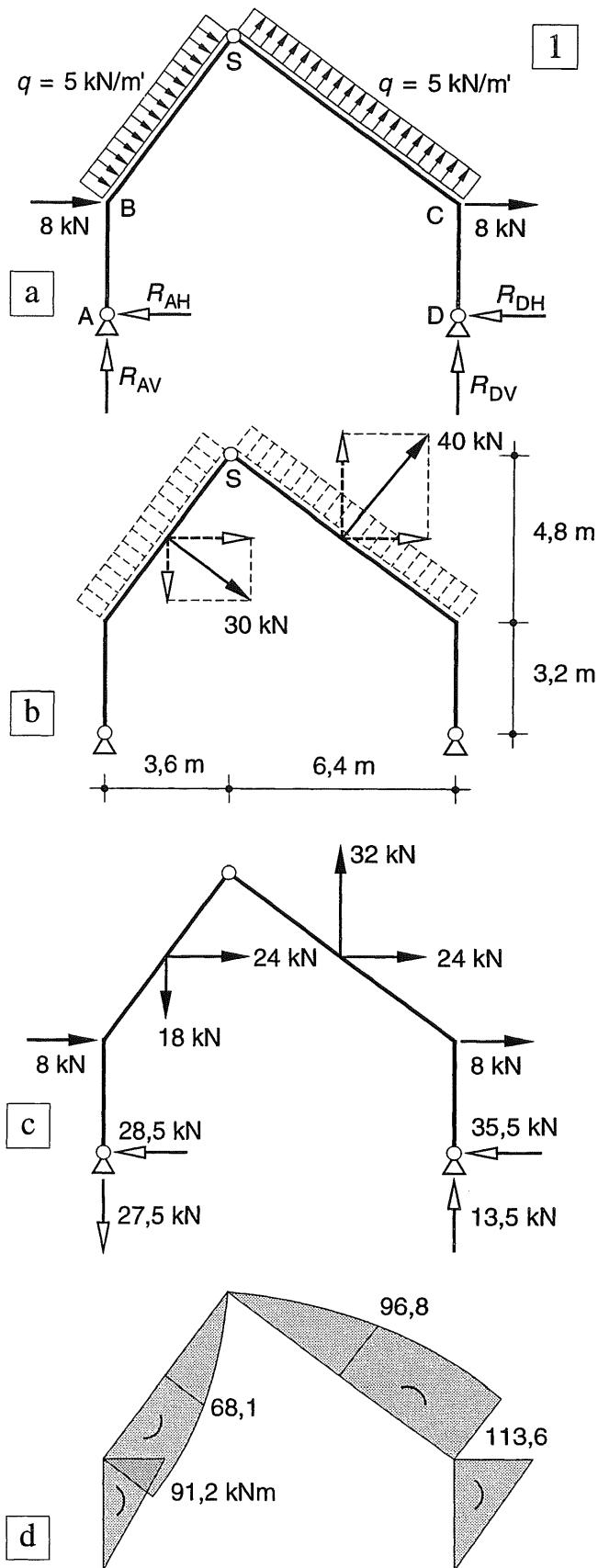


Fig. 1 Asymmetrisch driescharnierspant onder een willekeurige belasting
(opleggingen op gelijke hoogte)

- a. Schema met alle belastingen en reactiekrachten
- b. Krachten per stijl en regel ontbonden in een horizontale en een verticale component
- c. Numerieke waarden van alle actie- en reactiekrachten bij alleen windbelasting
- d. Momentenlijn

Opleggingen op ongelijke hoogte

Zodra de opleggingen zich niet meer op gelijke hoogte bevinden, moeten we wat anders te werk gaan. We ontbinden de onbekende oplegreacties R nu niet langer in een verticale en een horizontale component zoals in fig. 2a, maar in een verticale component R_1 plus een tweede component R_2 langs de verbindingslijn van de opleggingen, volgens fig. 2b. In deze laatste component is dus al een deel van de verticale reactiekragt verdisscondeerd. We kunnen dan weer op de gewone wijze het momentenevenwicht opmaken om de punten A en D; de schuin lopende reactiekragten R_2 vallen immers weg uit de vergelijking.

Bij de bepaling van het evenwicht van de linker of rechter spanthelft maken we het evenwicht weer gewoon op om het scharnier S, maar we verplaatsen de betreffende reactiekragt R_{A2} c.q. R_{D2} naar het punt T dat loodrecht onder S ligt op de verbindingslijn A-D, zie fig. 2b, c.

Als we deze kracht R_2 ontbinden in zijn verticale en horizontale component R_{2V} en R_{2H} volgens fig. 2d, dan valt R_{2V} weg uit de vergelijking en kunnen we R_{2H} rechtstreeks bepalen, omdat de reactiekragten R_{AV} en R_{DV} immers al berekend zijn, vergelijk KW-1 [126]. Uit de helling van de lijn A-D volgt dan de grootte van R_{2V} .

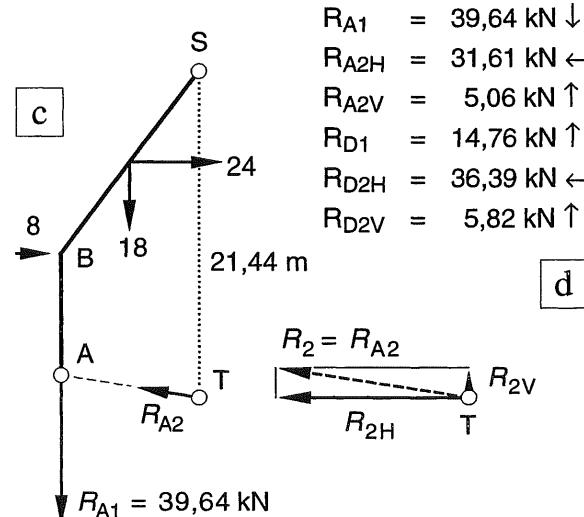
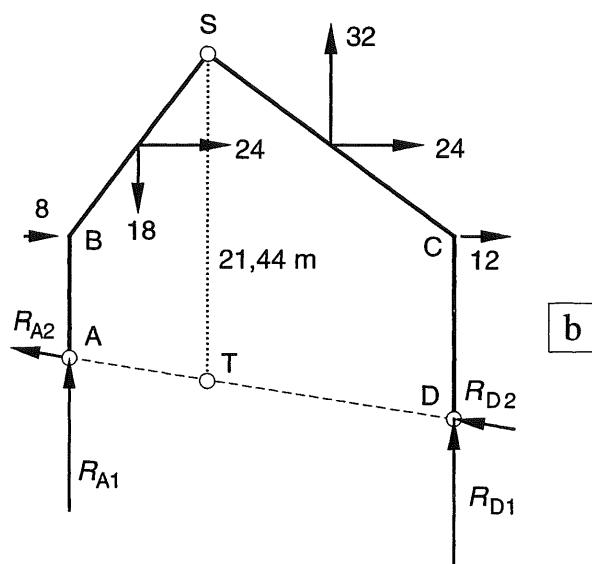
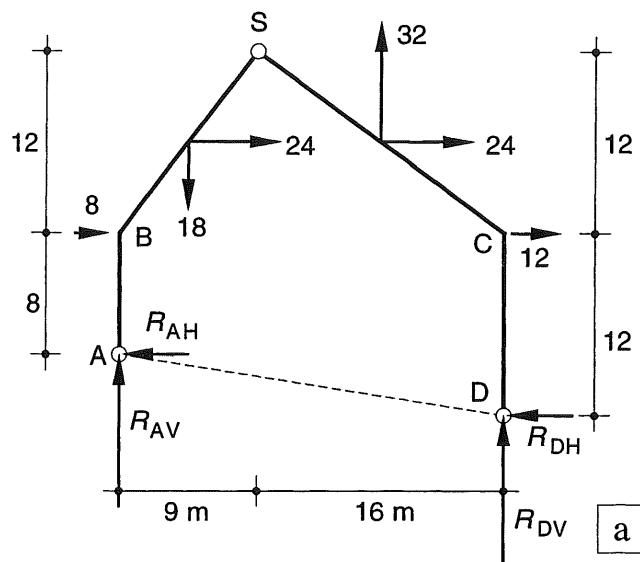
Bedenk dat de horizontale reactiekragten R_{A2V} en R_{D2V} in het algemeen niet even groot zullen zijn en veelal ook niet tegengesteld gericht.

Dit is alleen het geval als uitsluitend verticale krachten op het spant aangrijpen.

Controleer na dergelijke berekeningen in ieder geval het verticale en horizontale evenwicht en vergeet hierbij de verticale component van de krachten R_2 niet!

Fig. 2 Asymmetrisch driescharnierspant onder windbelasting (opleggingen op ongelijke hoogte)

- Schema met alle belastingen (actiekragten in A en D weggelaten)
- Richtingen van de reactiekragten
- Momentenevenwicht van de linker spanthelft opgemaakt om punt S
- Numerieke waarden van alle reactiekragten bij alleen windbelasting



$$\begin{aligned}
 R_{A1} &= 39,64 \text{ kN} \downarrow \\
 R_{A2H} &= 31,61 \text{ kN} \leftarrow \\
 R_{A2V} &= 5,06 \text{ kN} \uparrow \\
 R_{D1} &= 14,76 \text{ kN} \uparrow \\
 R_{D2H} &= 36,39 \text{ kN} \leftarrow \\
 R_{D2V} &= 5,82 \text{ kN} \uparrow
 \end{aligned}$$

INLEIDING

De trefwoordenlijst van April 1999 heeft betrekking op de volgende delen:

- 0 BASISKENNIS
- 2 LIGGERS
- 3 VAKWERKEN , STANDZEKERHEID
- 4 SPANNINGEN
- 5 VERVORMINGEN

Deel 1 is in bewerking en (nog) niet verkrijgbaar in de bouwshop. Het omvat enkele elementaire mechanica-modellen, waarbij de hoofdkrachtafdraagt voornamelijk plaats vindt via normaalkrachten. Hierbij zijn twee hoofdbestanddelen te onderscheiden:

- 1 De grafische constructie met poolfiguur en stangenveelhoek, voor koorden, bogen, koepercels en gewelven .
- 2 De Stapelsteen-mechanica voor metselwerk

De combinatie van 1 en 2 geeft een goed inzicht in de hoofdkrachtswerking van historische gemetselde of gestapelde gebouwen zoals kathedralen of tempels uit de oudheid. Met behulp van 1 is eveneens inzicht te verkrijgen in enkele moderne constructievormen, zoals kabelconstructies.

In de andere dictaten wordt incidenteel verwezen naar deel 1. Studenten kunnen bij de leerstoel Krachtswerking die onderdelen verkrijgen waarvan ze gebruik willen of moeten maken.

Hetzelfde geldt voor de onderstaande delen, waarvan de opzet momenteel wordt gewijzigd :

- 6 Portalen en Raamwerken
- 7 Spanningsleer

Zoals vermeld heeft de voorliggende trefwoordenlijst uitsluitend betrekking op de volgende delen: 0 - 2 - 3 - 4 - 5.

Ze wordt in principe aan alle nieuwe drukken van de dictaten toegevoegd en zonodig aangevuld en uitgebreid.

TOELICHTING TREFWOORDENLIJST

Het eerste cijfer van elke pagina waarnaar wordt verwezen geeft het betreffende deel aan.

In deel 5 liggen de pagina's dan tussen 500 en 599. Een cursieve nummering – bijv. 504 – heeft betrekking op het voorwerk aan het begin van deel 5, terwijl een notatie als A-504 betrekking heeft op de appendix aan het eind van dat deel.

Voor een goed overzicht zijn de bladzijde-nummers die op hetzelfde deel betrekking hebben, zoveel mogelijk onder elkaar geplaatst.

De hoofdtrefwoorden beginnen steeds met een hoofdletter en zijn alfabetisch geordend.

Bij diverse hoofdtrefwoorden is gebruik gemaakt van een onderverdeling, beginnend met een streepje en dan de omschrijving beginnend met een kleine letter in een kleiner lettertype, bijv.

Actie = Reactie

- voor uitwendige krachten
- voor inwendige krachten

Bij deze onderverdeling is meestal een systematische opbouw gebruikt en geen alfabetische. Kijk dus even wat er staat.

Bij sommige uitgebreide opsommingen is het hoofdtrefwoord weergegeven in hoofdletters, de primaire onderverdeling met 1, 2, 3 De secundaire onderverdeling wordt dan aangegeven met één streepje en de tertiare met twee streepjes.

BEREKENING LIGGERS

- 1 Vrij opgelegde ligger
- belasting één puntlast
- belasting meer puntlasten
- - idem grafisch

Als hetzelfde hoofdtrefwoord meer dan eens wordt genoemd, omdat er in de onderverdeling andere aspecten worden behandeld, dan wordt dat met romeinse cijfers aangegeven

VERVORMINGEN I

.....

VERVORMINGEN II

.....

Actie = Reactie	031		Cremona (Vakwerken)	340
- voor uitwendige krachten	213		- werkwijze algemeen	340-341
- voor snedekrachten	221		- uitgewerkt voorbeeld	342-345
Assenkruis (rechtsdraaiend)	009			
- bij liggers	216	428		
Basis-belastinggevallen	244		De St. Venant	486
BASIS-LIGGERS		508-511	Deuvels	485
Diagrammen voor M, V, φ, w		512-519	Diagrammen snedekrachten ($V - M$)	
- Liggers op twee steunpunten, q -last		512-513	1 Liggers	
- Eéenzijdig ingeklemde liggers, resp.			- belasting door puntlasten	228-235
belast door K, F, q (vergeet-me-nietjes)		514-515	- - $N-V-M$ bij pendelstijlen	213
- Liggers op twee steunpunten,			- belasting door q -last	238-240
belast door randmomenten		518-519	- belasting lineair variërend	241
Beddingsmodulus	056		- belasting: puntlasten + q -last	242-253
Belasting I			Differentiaal-rekening	
- permanent (eigen gewicht)	074-075		- grondbeginsele	255
- veranderlijk (personen,			- differentiëren	256-257
meubilair, sneeuw)	076-077		Dimensies (omschrijving) 011	
- wind	078-079		Dimensioneren:	
- bijzondere belastingen	080		- op normaalkracht (voorbeelden)	415
- opgelegde vervormingen	082		- op buiging (voorbeeld)	427
- invloed temperatuur	097		Doorbuiging liggers	509
Belasting II (nomenclatuur)			Doorgaande ligger	530-534
- bezwijk- belasting			[zie ook: LIGGER]	
= breukbelasting	071		- principe van de berekening	530-531
- rekenwaarde v.d. belasting	071		- berekening bij een q -last	532-533
- representatieve belasting			- - gelijke overspanningen	534-535
= extreme belasting	076		- - invloed randvelden	536-539
- momentane belasting			- - afwisselend belaste velden	537
= gemiddelde belasting	076		- - - vuistregel doorgaande ligger	539
Belasting-afdracht (systematisch)	213		DOORSNEDE-GROOTHEDEN	
- afvoer windkrachten via stijve schijven	368-370		1 Analytische afleiding algemeen:	
- - voorbeeld analytisch	371		- oppervlakte A	428
- - voorbeeld numeriek	372		- lineair oppervlakte-moment S	429
- afvoer verticale en horizontale krachten	373		- kwadratisch oppervlakte-moment I :	
Belasting op liggers			- - berekening via integraalrekening	430-436
- symmetrisch en keersymmetrisch	376-377		- - berekening via het spanningsverloop	443-447
Bollenmodel	405		- oppervlakte-product I	430
Buigend moment	218		- weerstandsmoment W	421; 427
Buigspanning	426		- zwaartepunt	429
Buigsterkte (hout)	427		2 Gebruik van tabellen	442
Buigstijfheid	425		Driehoekige vakwerken	352
Centrische druk of trek	416		DRIE-SCHARNIERSPANT	387
[zie ook: SPANNINGSVERDELING]			- definitie	203
Cirkel van Mohr	441		- vergelijking met tweec-scharnierspant	380
Constructiedelen:			- bepaling snedekrachten:	
- blok- en lijnvormig, vlak	084-085		- - N en V	388
Constructieve vormgeving			- - M bij een regel onder een helling	389
- omschrijving vakgebied	017		- - M bij een verticale q -last	390-393
Contractie-coëfficiënt			- - - M bij een asymmetrische q -last	394-395
- definitie	095-096	414	- - M bij een horizontale puntlast	397
- numerieke waarden	096		- R en M bij willekeurige belastingen	398-399
			Druk; drukkracht	309 416-417

Druklijn	396	468-471	Hoofdassen	425
– definitie		468	Horizontale belasting	
– toepassing bij driescharnierspannen	395-396		– op portalen	383
– toepassing bij kolommen	468-471		– op een driescharnierspant	397
Drukpunt	469			
Dubbele buiging	460-463			
Dwarscontractie	095	414; 422	Incasseringvermogen	081
Dwarscontractie-coëfficiënt =			Ingeklemde ligger	209
= contractie-coëfficiënt	095	414	Inklemming	356
– numerieke waarden	096		– verend	207 356-357
Dwarskracht	218		– volledig	207-209 356-357
Dwarskrachtcentrum	498		– invloed ligging oplegreacties	208
Dwarskrachtenlijn	228-235		Integraal-rekening:	
[zie ook: Diagrammen snedekräfte (Liggers)]			– grondbeginselen	258-259
Eenheden (omschrijving)	011		– bepaalde integraal	260
Eenzijdig ingeklemde ligger	207; 270	514	– integreren	
Eigen gewicht	075		(analytisch en grafisch)	261
Elasticitetsmodulus	094; 096	414	Inwendige hefboomsarm	420
– numerieke waarden	096			
Evenwicht			Kantelen	052
– indifferent	037		Keersymmetrie [zie: Symmetrie]	
– labiel	037; 042-043		KERN	
– stabiel	037; 042-043; 052-053		1 Voor spanningsberekening	
– overgang stabiel → labiel	066-067		– bij rechthoekige doorsnede	475-476
Evenwichtbeschouwingen liggers	217		– – volledig meewerkende dsn	476
Evenwichtsvoorwaarden	026-029		– – gedeeltelijk meewerkende dsn	477
– in het platte vlak	034		2 Onderdeel constructie	
– in de ruimte	036		= Stijve kern	365
Excentriciteit	471		KNIK	416 582
Excentrisch belaste doorsnede	470		– omschrijving	582
Excentrische druk of trek	417; 475		– invloed vervormingen	583
[zie ook: Buiging plus normaalkracht]			– berekening volgens Euler	584-585
Excentrische dwarskracht			– verklaring knikverschijnsel	586
[zie: Wringing plus dwarskracht]	498		1 Basis-belastinggevallen	
Flens	485		– ongeschoorde portalen	590
Fundering	055		– geschoerde portalen	591
– op staal	055		2 Knik in onderling loodrechte richtingen	594
– op palen	055		3 Knik bij buiging + normaalkracht	596
– schematisering ondergrond	056-057		– buigbelasting sinusvormig	597-598
Gaatvergelijkingen	533		Knikkracht	584
Gedeeltelijk meewerkende dsn	475		Kniklengte	585; 587
Geknikte ligger:			– schetsen van kniklijnen	589
– L-vorm	542		Knikspanning	592
– T-vorm	543		– algemene formulering	595
– spanningsverdeling in de knik	544-545		– globale dimensionering (voorbeeld)	592-593
Geometrische liggerstijfheid	549		– – bij $N + M$ (voorbeeld)	599
Geometrische stijfheidsverhouding	541		Kolom	466
Gereduceerd momentenvlak	573		Koord	300-301
Glijdingsmodulus (afleiding)	499A		Koppel	004
Gravitatiuwet	030		Krachten-methode	529
Grond (eigenschappen)	057			

KRACHT			
[zie ook: SAMENSTELLEN,			
Verplaatsen, Ontbinden van krachten]			
– omschrijving 000-001			
– definitie volgens Newton 032			
– actie = reactie 031; 041			
– evenwichtmakende kracht 010			
– ontbondene van een kracht =			
component van een kracht 007			
– resulterende kracht 010			
– tekenafspraken 012			
– weergave:			
– grafisch 008;001			
– analytisch 001			
Krachten op liggers:			
– actie-krachten (uitwendige kr.) 207-209; 214			
– reactiekachten 214			
– – tekenafspraken 216			
– verwisselen actie- en reactiekr. 214; 236			
– inwendige krachten (spanningen) 209			
Krachtendriehoek 007			
Krachtenveelhoek 011			
Krachtswerking			
(omschrijving vakgebied) 016			
Kromming 423 504-505			
Kromtestraal 419; 423			
Kwadratisch oppervlaktemoment 425; 428; 448			
– van een driehoek 435			
– van een rechthoek 432			
– van een cirkelvormige dsn 436			
– van een parallelogram 435			
– van dunwandige profielen 449			
 L-vormige ligger 542			
Labiel evenwicht 042			
LIGGER			
– definitie 202 301-302			
– vrij opgelegd (rol + scharnier) 206	568		
– vrij opgelegd met overstek 232; 273			
– eenzijdig ingeklemd 207; 209; 225			
– over meer steunpunten 535			
– – extra inwendige scharnieren 210; 212; 289-291			
– – zonder inwendige scharnieren 290-291			
– ondersteund door pendelstijlen 210			
– – berekening oplegreacties 212-213			
– – instabiele varianten 211			
Lijf 485			
Lijnvormige elementen:			
– koorden, liggers, staven 300-301			
Lijnspanningstoestand 410-411			
Lineair oppervlakte-moment 424, 428; 479			
Lineair variërende belasting 241			
Lineaire uitzettingscoëffic. 097			
 MATERIAAL EIGENSCHAPPEN			
1 constructiemateriaal 094			
2 ideaal materiaal (definitie) 095			
– contractie-coëfficiënt 095-096			
– elasticiteitsmodulus 095-096			
– uitzettingscoëfficiënt 097			
Mechanica (definitie) 016			
Meerbeukig portaal 382			
Meewerkende doorsnede 477			
Membraan-analogie 496			
Methode Cross 548			
Moment 004			
– definitie statisch moment 004			
– definitie buigend moment 218			
– tekenafspraken 033			
MOMENTENLIJN LIGGER			
[zie ook: LIGGERS]			
1 Basis-belastinggevallen:			
– vrij opgelegde ligger met 1 puntlast 244-246			
– vrij opgelegde ligger met q -last 244-247			
– uitkragende ligger met één puntlast 245			
– uitkragende ligger met q -last 245			
2 Variërende belasting			
– Max. en minimum M -lijnen			
– – q -last 286			
– – verplaatsbare puntlast 287			
3 Visualisering van de vorm m.b.v. een coörd	296-299		
Momentensom 527			
Momentenvlak-methode 574			
– methode I (vrij opgelegde ligger) 568-572			
– methode II (éénzijdig ingeklemde ligger) 574-575			
 Neutrale lijn 418			
Newton 032			
Normaalkracht 098 417			
Normaalkracht + buigend moment 464			
Normaalspanning 408; 426			
Normale doorsnede 408; 411			
Nulstaven (vakwerk) 338-339			
 ONDERSTEUNINGEN			
[zie ook: OPLEGGINGEN]			
1 Ondersteuningen I			
– continu 039			
– lijnvormig 039			
– puntvormig 039			
– star 040			
– verend 040; 055-068			
2 Ondersteuningen II			
– inklemming 207-209			
– pendelstijl 210-211			
– rol 206-208			
– scharnier 206-208			

ONDERSTEUNINGEN**3 Ondersteuning rechthoekig blok (3D)**

- in één punt (koord) 040-041
- in drie punten (star) 044-046
- continu door de ondergrond
- alleen verticale belasting (e.g.) 059
- alleen horizontale belasting (wind) 060
- verticale + horizontale belasting 062-063
- gedeeltelijk meewerkend grondvlak 064-065

Ontbinden van krachten**1 In het platte vlak:**

- inleiding eenvoudige gevallen 022-023
- langs drie gegeven werklijnen 024-025

2 In de ruimte

- Ontbondenen (van een kracht) 008

OPLEGGINGEN**1 Ideale opleggingen:**

- rol, scharnier, volledige inklemming
- ruimtelijk 088
- in het platte vlak 089

2 Realistische opleggingen

- voorbeelden 090

Oplegreacties ligger (berekening):

- vrij opgelegde ligger 219
- éénzijdig ingeklemde ligger 225

Oppervlakte**Oppervlakte-moment;**

[zie ook: Doorsnede grootheden]

Oppervlakte-produkt;

[zie ook: Doorsnede grootheden]

Optimaliseren ligger:

- door verplaatsen v.d. opleggingen 288

Overgangsmoment**Paraboolvormige vakwerken****Parallellogram v. krachten****Pendelstijl****Permanente belastingen****Polonceauspant****Poolfiguur****PORATAAL****1 omschrijving**

- eenbeukig, meerbeukig 203
- globale analyse 378-380 546-547

2 Berekening

- onder een verticale q -last

- vergelijking met doorgaande ligger 546-547

- berekening doorgaande liggers 548-549

- twee-scharnierspant 550-551

- onder een horizontale puntlast 359; 383

- ligger op twee ingeklemde stijlen 552

- volledig ingeklemd portaal 554-555

- algemene formules portalen 555

Raamwerk (omschrijving)

- éénbeukig raamwerk = stapeling van portalen

- verticale belasting 381

- horizontale belasting 383-385

Randvoorwaarden

- 091 259; 270

- invloed op verplaatsingen ligger 237

Rechthoekige staafwerken

- 312

Regel (constructiedeel; definitie)

- 202 540

Regel van Steiner

- 430-433

Rek

- 414; 423 557

Rekstijfheid

- 414 557

Relatie buigend moment - vervorming

- ($M - \kappa$) diagram 502

Relatie vervorming en belasting ($\varphi, w - q$)

- 506-507

Resultante

- 008

- van twee krachten 010

Rol, Roloplegging

- 088

SAMENSTELLEN VAN:**1 Krachten**

- Twee krachten door één punt:

- analytische oplossing 008

- krachtendriehoek (grafisch) 007

- parallellogram van krachten 007

- Meer krachten door één punt:

- krachtenveelhoek (grafisch) 011

- Krachten niet door één punt:

- inleidende beschouwingen 013

- analytische opl. (bewerkelijk) 017-019

- grafische oplossing 016

- Krachten zijn evenwijdig:

- analytische oplossing 020-021

2 Kracht + koppel**3 Momenten****Scharnier****Schematiseren, Inleiding****Schematiseren van:**

- de constructie 083

- constructie-onderdelen 086

- materiaal-eigenschappen 094-095

- opleggingen 087; 091-093

Schijven

- 368; 371-373

Schoren

- 367

Schuifspanning algemeen

- 408; 411

Schuifspanningsverloop

- ten gevolge van dwarskracht 480-485

- ten gevolge van wringing 487-494

Snede-krachten (definitie)

- 218

- Buigend moment M 218

- Dwarskracht V 218

- Normaalkracht N 218

- Tekenafspraken N, V, M 224-225

- Tekenen v. diagram. N, V, M 226-235

Sneeuwbelasting	077		Stabiel evenwicht	042
Soortelijke massa van lucht	401		Stabiliteit	037; 070 354
SPANNING I			Stabiliteit (constructie-eis)	073
1 Algemeen	401; 406		- 1e orde stabiliteit; [zie: Standzekerheid]	
- in gassen en vloeistoffen	401		- 2e orde stabiliteit; [zie: Knik]	
- in vaste stoffen	402-403		Standzekerheid (omschrijving)	354-355
- in steenachtige materialen	404-407		Stangenvelhoek	293
2 In een ideaal materiaal			Stapelbouw 3D	
- definitie	406		- verschillende wijzen van stapelen	360-361
- notatie	408-409		- standzekerheid	362-363
- teken (2D)	408		- - opbouw uit lijnformige elementen	364-366
- teken (3D)	409		- - opbouw uit vlakke elementen	368-369
SPANNING II (naamgeving)			Stapeling van portalen	381
1 Buigspanning =			Statisch bepaald hoofdsysteem	530
= lineair verlopende normaalspanning	426; 465		Statisch bepaalde constructie	
- formules	426-427		- omschrijving	204 528
2 Normaalspanning (constante spanning)	408; 426; 465		- berekening statisch bepaalde ligger	502
3 Resulterende spanning	408		Statisch bepaalde staafwerken	
4 Schuifspanning t.g.v. dwarskracht bij:	408; 456		en vakwerken	308
- een rechthoekige dsn	481		Statisch moment	
- een samengestelde rechthoekige dsn	478-480		(= lineair oppervlakte-moment)	428
- dunwandige profielen	482-483		Statisch onbepaalde constructies	
- - vereenvoudigde berekening	484		- omschrijving	204 529
5 Schuifspanning t.g.v. wringing	487-493		- berekening statisch onbep. ligger	205 503
6 Belang horizontale schuifsp. bij buiging	485		Steenachtige materialen ?	404
Spannings-rek-diagram	414		Sterkte (constructie-eis)	071
Spanningscombinaties [zie: SPANNINGSVERDELING II]			Stijfheid (constructie-eis)	072
SPANNINGSVERDELING I			- Cross-stijfheid (= liggerstijfheid)	541
1 Bij één basisbelastinggeval			- Staaf-stijfheid	541
- t.g.v. Buigende momenten	418-426		Stijl (constructie-onderdeel;	
- t.g.v. Dwarskrachten	478-484		- definitie	202 540
- t.g.v. Normaalkrachten	094	416-417	Stijve kern	365
- t.g.v. Wringende momenten		486-497	Stroomlijnen-analogie	487
- - bij kokerprofielen		494-497	Structuur-Mechanica	404-407
SPANNINGSVERDELING II			Stuik	557
2 Spanningscombinaties	452		Stuwdruck (wind)	078
- teken van de veerkrachtsgevallen	453		- numerieke waarden	079
3 Combinaties van veerkrachtsgevallen	454-455		Stijgende diagonalen	327
- buiging + dwarskracht	456		SUPERPONEREN VAN	
- - buiging om de y-as of de z-as	458-459		MOMENTENLIJNEN LIGGERS	215-239
- - dubbele buiging	460-463		Overzicht methoden I, II, III	278
- buiging + normaalkracht	464-467		I Splitsen van de belasting	
- - invoering druklijn	468-469		- momenten van gelijk teken	279
- - excentrisch belaste rechth. dsn.	470-471		- momenten van ongelijk teken	280
- - dubbele buiging + normaalkracht	474		- voorbeelden	281
Spant			II Splitsen van de ligger in moten	282
- omschrijving	203	308	- combinatie van I en II	283
- twee-scharnierspant	203		III Verplaatsen v. d. opleggingen	284
- drie-scharnierspant	203	407	- combinatie van II en III	285
Staaf (definitie)	202	300-301	Symbolen	
Staafwerk		300-313	- omschrijving	010
- driehoekig stramien		302	- lijst van symbolen	012
- rechthoekig stramien		303	Symmetrie en Keersymmetrie	
- - buigvaste verbinding staven		304	- belasting op koorden	297 560
			- belasting op liggers	296-297

Tekenafspraken vervormingen:			
- helling	505		
- kromming	505		
- zakking	505		
Teken van snedekrachten	224		
- tekenafspraken	431		
Temperatuur	097		
Tensor	408		
Traagheidsmoment	428		
[zie: Kwadratisch oppervlakte-moment]			
Trek, trekkracht (vakwerk)	309		
Twee-scharnierspant	378	540; 550	
 Uitzettings-coëfficiënt	097		
Vakwerken (omschrijving)	203	314	
- vakwerkvormen	315		
- schematisering	316		
Vakwerklijger	203	314	
Vakwerkspant	203	315	
Vallende diagonalen		327	
Variërende buigstijfheid		573	
Vector			
- kracht-vector	008 001		
- moment-vector	033		
Veerkrachtsgevallen		452-455	
Veerstijfheid	064		
Veranderlijke belastingen	074		
- op vloeren	076		
Verende inklemming	207		
Veren-model			
- voor een buigend moment op een staaf	099		
- voor een normaalkracht op een staaf	098		
- voor de ondergrond	056-057		
- - gedeeltelijk meewerkend grondvlak	065		
Vergeet-me-nietjes		517; 576	
- toepassingen	520-521		
- controle basis-belastinggevallen	524-525		
Verplaatsen van een kracht			
- langs de werklijn	001		
- buiten de werklijn	014		
Verplaatsingsmethode		529	
Versterkte balken		564	
Verstijvingskruis		367	
Verticale schijven		368	
 VERVORMINGEN I			
1 Principe			
- bij een lijnspanningstoestand	414		
- bij zuivere buiging	418		
- bij wringing + dwarskracht	499		
- bij zuivere afschuiving			
- - bepaling glijdingsmodulus	A-400		
 2 Oorzaak vervormingen bij liggers			
- door buigende momenten	565		
- door normaalkracht	558		
- door schuifspanningen			A-400
3 Constructie-type			
- vrij opgelegde ligger	233		
- - invloed randvoorwaarden	237		
 VERVORMINGEN II : Rekenmethodiek bij:			
1 Normaalkrachten			556-564
- bij twee geschoorde staven	558-559		
- bij een symmetrisch belast koord	561		
- bij vakwerken (Williot)	563		
- bij een versterkte balk	564		
2 Buigende momenten analytisch			565
- benodigde differentiaalvergelijking			565
- splitsen van de differentiaalvergelijking	566-567		
3 Buigende momenten grafisch:			
Momentenvlak-methode I ,			
- voor vrij opgelegde liggers	558-569		
- - belast door een puntlast	570-571		
- - belast door een q -last	572		
4 Buigende momenten grafisch:			
Momentenvlak-methode II,			
- voor éénzijdig ingeklemde liggers	574-578		
- - recapitulatie vergeet-me-nietjes	576-577		
- - algemene toepassing	578		
- - willekeurig gekromde ligger	579		
- volledig ingeklemd portaal	580		
- drie-scharnierspant	581		
Verwelving			486
Vlak staafwerk			308
Vlakke spanningstoestand			412-413
Vlakke doorsneden blijven vlak			418
Volledig ingeklemd portaal			554
Volledige inklemming	088-089	209	
Volumegewicht		075	
Voorschriften:			
- inleiding	070		
- overzicht TGB 1990	070		
Vormvastheid staafwerken			305-307
- driehoekig stramien	310-311		
- rechthoekig stramien	312-313		
Vrij opgelegde ligger		206; 270	
 Waterdruk			402
Weerstandsmoment			421; 427-428
Werklijn			007
Wet van Hooke		009	414
Wetten van Newton:			557
1 Gravitatiwet		030	
2 Bewegingswetten		031	
- wet van de traagheid	031		
- kracht = massa \times versnelling	031		
- actie = reactie	031		
3 Relatie kracht - massa		032	

T-08

W - (X - Y) - Z

Williot diagram	562-563
Windbelasting	078
- winddruk	079
- windzuiging	079
- windvormfactoren	079
Wrijving	047
- bij een horizontaal contactvlak	047
- bij een hellend contactvlak	048
- wrijvingscoëfficiënt	047
Wringing plus dwarskracht	498
WRINGSTIJFHEID	
1 Massieve profielen	
- rechthoekig profiel	488
- cirkelvormig profiel	492-493
2 Dunwandige profielen	
- enkelvoudig samenhangend	491
- meervoudig samenhangend	494-495
- -- visualisatie via de membraan-analogie	496-497
Zeepvlies-analogie (wringing)	487
Zuiver buigend moment	424
Zuivere buiging	418
Zuivere druk of trek	416
Zuivere wringing	486
Zwaartelijn	429
Zwaartepunt (rechth. blok)	038 424; 429



012771-01