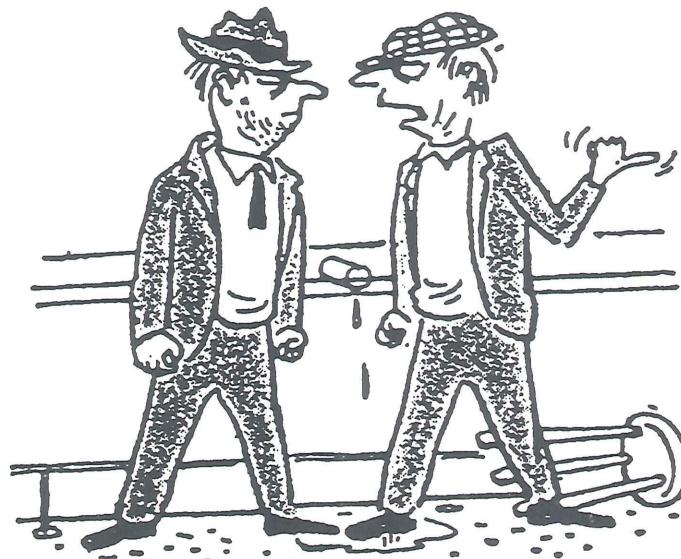


Prof. ir. W.J. Beranek

# KRACHTSWERKING

## Deel 4

### SPANNINGEN



# KRACHTSWERKING

## Deel 4

### SPANNINGEN

#### Spanningsverdeling in lineaire constructiedelen

Normaalkracht

Buiging

Doorsnede-grootheden

#### Spanningscombinaties

Buiging plus dwarskracht

Dubbele buiging

Buiging plus normaalkracht

Wringing

Prof. ir. W.J. Beranek

400

KRACHTSWERKING Deel 4  
SPANNINGEN  
Februari 1999 [401-405] + [400 - 499] +  
Trefwoordenlijst [T-01 – T-08]

Dit is een herziene uitgave van  
KRACHTSWERKING 2  
deel 1: Januari 1990 [300-407]  
zonder het hoofdstuk Vervormingen

401	HOOFDSTUK-INDELING
402	Hoofdstuk 19 Spannings verdeling in lineaire constructiedelen
403	Hoofdstuk 20 Spanningscombinaties
404	Lijst van symbolen

## 19 SPANNINGEN *Spanningsverdeling door Normaalkracht en Buiging in lineaire constructiedelen; Doorsnede-grootheden*

400	19.1	INLEIDING
	19.1.1	Noodzaak voor het invoeren van spanningen
401	19.1.2	Spanningen in gassen en vloeistoffen
402	19.1.3	Voorwerp in een vloeistof
404	19.1.4	Spanningen in steenachtige materialen
406	19.2	NORMAALSPANNINGEN EN SCHUIFSPANNINGEN
	19.2.1	Definitie van spanning
408	19.2.2	Overzicht
	19.2.3	Aanduiding van spanningen
410	19.3	SPANNINGEN DOOR NORMAALKRACHTEN
	19.3.1	Lijnspanningstoestand
412	19.3.2	Vlakte spanningstoestand
414	19.3.3	Vervormingen bij een lijnspanningstoestand <i>Recapitulatie</i>
416	19.3.4	Spanningsverdeling bij zuivere trek of druk
417	19.3.5	Excentrisch aangrijpende trek- of drukkrachten
418	19.4	SPANNINGEN DOOR BIJGRENDE MOMENTEN
	19.4.1	<i>Liggers met een verticaal symmetrievlak</i>
	19.4.1	Vervormingen bij zuivere buiging
420	19.4.2	Spanningsverdeling in een rechthoekige doorsnede
422	19.4.3	Algemene formules voor de vervormingen
424	19.4.4	Evenwichtsvoorwaarden
426	19.4.5	Spanningsverdeling
427	19.4.6	Weerstandsmoment
	19.4.7	Bepaling van de benodigde doorsnede
428	19.5	DOORSNED-GROOTHEDEN
	19.5.1	Algemeen
429	19.5.2	Lineair oppervlakte-moment en zwaartepunt
430	19.5.3	Kwadratisch oppervlakte-moment als functie van de afstand tot de as
431	19.5.4	Berekening met behulp van integraalrekening
432	19.5.5	Rechthoek
434	19.5.6	Driehoek
436	19.5.7	Cirkelvormige doorsneden
437	19.6	SAMENGESTELDE DOORSNED-VORMEN
	19.6.1	Doorsneden met twee of meer symmetrie-assen
438	19.6.2	Doorsneden met slechts één symmetrie-as
439	19.6.3	Algemene formulering
440	19.7	ASYMMETRISCHE DOORSNEDEN
	19.7.1	Inleiding tot de problematiek
441	19.7.2	Bepaling van $I$
442	19.7.3	Gebruik van tabellen
443	19.8	KWADRATISCH OPPERVLAKE-MOMENT <i>Visuele methode</i>
	19.8.1	Recapitulatie
444	19.8.2	Visualisering van het probleem
445	19.8.3	Zuiver buigend moment in een doorsnede
446	19.8.4	Bepaling van het moment uit het spanningsverloop
448	19.8.5	Bepaling kwadratisch oppervlakte-moment
450	19.8.6	Onderlinge vergelijking dunwandige profielen
451	19.8.7	Vereenvoudigde bepaling $I$ bij dunwandige profielen

452	20.1	INLEIDING
453	20.1.1	Definitie veerkrachtsgevallen
454	20.1.2	Teken van de veerkrachtsgevallen
454	20.1.3	Combinatie van een aantal veerkrachtsgevallen
456	20.2	BUIGING PLUS DWARSKRACHT
457	20.2.1	Algemeen
457	20.2.2	Berekening van de normaalspanningen ten gevolge van buiging
458	20.2.3	Spanningsverdeling T-balk
460	20.3	DUBBELE BUIGING
461	20.3.1	Overzicht
461	20.3.2	Horizontale en verticale belasting tezamen
462	20.3.3	Verticale belasting bij geroteerde hoofdassen van de doorsnede
464	20.4	BUIGING PLUS NORMAALKRACHT
465	20.4.1	Algemeen
465	20.4.2	Superponeren van normaalspanningen en buigspanningen
466	20.4.3	Kolom onder invloed van verticale en horizontale belasting
468	20.4.4	Introductie druklijn
470	20.4.5	Excentrisch belaste rechthoekige doorsnede
472	20.4.6	Bepaling van $M$ en $N$ uit het spanningsverloop
473	20.4.7	Rechthoek: bepaling van de kracht en de excentriciteit uit de spanningsverdeling
474	20.4.8	Excentrische kracht grijpt aan buiten de hoofdassen
475	20.5	EXCENTRISCH GEDRUKTE DOORSNEDEN
476	20.5.1	Algemeen
477	20.5.2	Kern bij een rechthoekige doorsnede
477	20.5.3	Gedeeltelijk meewerkende rechthoekige doorsnede
478	20.6	DWARSKRACHT
478	20.6.1	Algemeen
480	20.6.2	Evenwichtsbeschouwing op een ligger-elementje
481	20.6.3	Bepaling van de verticaal werkende schuifspanning
482	20.6.4	Schuifspanningsverloop rechthoekige doorsnede
484	20.6.5	Schuifspanningsverdeling bij dunwandige profielen
485	20.6.6	Vereenvoudigde schuifspanningsberekening
485	20.6.7	Belang van horizontale schuifspanningen
486	20.7	ZUIVERE WRINGING
487	20.7.1	Algemeen
488	20.7.2	Resultaten van de theorie van de St Venant
488	20.7.3	Stroomlijnen-analogie
489	20.7.4	Schuifspanningsverdeling in een brede strip
490	20.7.5	Moment-vervormings-relatie bij een brede strip
491	20.7.6	Wringstijfheid van dunwandige profielen
492	20.7.7	Axiaal-symmetrische doorsnede-vormen
494	20.7.8	Spanningsverdeling bij kokerprofielen
496	20.7.9	Membraan-analogie
498	20.8	WRINGING PLUS DWARSKRACHT
499	20.8.1	Dwarskrachtcentrum
499	20.8.2	Vervorming door buiging, dwarskracht en wringing
A 400	20.9	Appendix Vervorming door schuifspanningen (blz. 500)
T-01 – T-08		Trefwoordenlijst

## kleine letters

			HOOFDLETTERS	
$a$	versnelling	$[l t^{-2}]$	$A$	oppervlakte constante
$a, b, c$	afstanden	$[l]$	$C$	
$b$	breedte	$[l]$		
$d$	middellijn	$[l]$		
$e$	excentriciteit	$[l]$	$E$	elasticiteitsmodulus
$d, e, f$	afstanden	$[l]$	$F$	uitwendige kracht
$g$	versnelling zwaartekracht	$[l t^{-2}]$	$G$	glijdingsmodulus
$h$	hoogte	$[l]$	$H$	totale hoogte
$i$	oppervlakte-moment-arm	$[l]$	$I$	kwadr. oppervlaktemoment
			$I_t$	geometrische factor tegen wringing
$k$	kernstraal	$[l]$	$K$	uitwendig moment, koppel
$k$	veerstijfheid (veerconstante)	$[k l^{-1}]$	$L$	totale lengte
$l$	lengte, overspanning	$[l]$	$M$	buigend moment
$m$	massa	$[m]$	$M_t$	wringend moment
$n$	aantal	$[1]$	$N$	normaalkracht
$p$	kracht per oppervlakte	$[k l^{-2}]$	$R$	reactiekracht
$q$	kracht per lengte	$[k l^{-1}]$	$R$	kromtestraal
$r$	straal	$[l]$	$S$	lineair oppervlaktemoment
			$S$	staafkracht
$t$	tijd	$[t]$		
$t$	dikte	$[l]$		
$u$	verplaatsing	$[l]$		
$v$	snelheid	$[l t^{-1}]$	$V$	volume, inhoud
$w$	doorbuiging	$[l]$	$V$	dwarskracht
$x, y, z$	lengte-coördinaten	$[l]$	$W$	weerstandsmoment
$z_0$	inwendige hefboomsarm	$[l]$		

## Griekse lettertekens

$\alpha, \beta, \gamma$	hoeken	$[1]$
$\alpha$	lineaire uitzettingscoëfficiënt	$[T^{-1}]$
$\alpha$	coëfficiënt (wringing)	$[1]$
$\gamma$	kracht per volume	$[k l^{-3}]$
$\gamma$	verkleining rechte hoek	$[1]$
$\varepsilon$	rek, relatieve vervorming	$[1]$
$\vartheta$	hoekverdraaiing (wringing)	$[1]$
$\kappa$	kromming	$[l^{-1}]$
$\mu$	wrijvings-coëfficiënt	$[1]$
$\nu$	contractie-coëfficiënt	$[1]$
$\rho$	massa per volume	$[m l^{-3}]$
$\sigma$	(normaal)spanning	$[k l^{-2}]$
$\sigma'$	spanningsgradiënt $d\sigma/dz$	$[k l^{-3}]$
$\tau$	schuifspanning	$[k l^{-2}]$
$\varphi$	hoek (buiging)	$[1]$
$\phi$	rotatie	$[1]$
$\psi$	hoek (afschuiving)	$[1]$
$\Phi$	spanningsfunctie (wringing)	$[k l^{-1}]$

## Indices

v, V	verticaal	richting
h, H	horizontaal	
l, r	links, rechts	
max	maximum	krachten
min	minimum	
extr	extremum	
repr	representatief	belasting
mom	momentaan	
n, t	normaal, tangentiaal	assenkruis
p	polair	
	Dimensie	Eenheid
$[m]$	massa	kg
$[l]$	lengte	m mm
$[t]$	tijd	s
$[k]$	kracht	kN N
$[T]$	temperatuur	°C

405

## 19 SPANNINGEN

### *Spanningsverdeling door Normaalkracht en Buiging in lineaire constructiedelen; Doorsnede grootheden*

#### 19.1 INLEIDING

##### 19.1.1 NOODZAAK VOOR HET INVOEREN VAN SPANNINGEN

Bij de behandelde constructies in KW-1-2-3 hebben we ons vrijwel uitsluitend bezig gehouden met de snedekrachten, die in lineaire constructiedelen kunnen ontstaan ten gevolge van de uitwendige belastingen. Deze snedekrachten worden aangeduid als:

- Normaalkracht  $N$
- Dwarskracht  $V$
- Buigend moment  $M$

Het is echter niet mogelijk, om aan de hand van de grootte van de optredende krachten en momenten alléén, rechtstreeks de afmetingen te bepalen die de beschouwde constructiedelen moeten bezitten. Bepalend voor het gedrag van een materiaal, is namelijk de grootte van de kracht per eenheid van oppervlakte, en deze grootheid wordt aangeduid als *spanning*. Het bezwijken van een materiaal wordt dan ook bepaald door de numerieke waarde van de spanning.

Als een vrouw op blote voeten over een parketvloer wandelt, zal de vloer hiervan geen enkele schade ondervinden. Maar als ze schoenen met naaldhakken aandoet en haar volle gewicht alleen op de naaldhakken laat rusten, is er grote kans dat de houten vloer onherstelbaar wordt beschadigd. In beide gevallen is de uitgeoefende kracht op de vloer dezelfde gebleven, maar in het tweede geval is de kracht per eenheid van oppervlakte sterk toegenomen.

In de hoofdstukken 19 en 20 wordt besproken op welke wijze in lineaire constructiedelen de spanningen kunnen worden bepaald, die door normaalkrachten, dwarskrachten en buigende momenten worden veroorzaakt. Voorts wordt heel globaal ingegaan op de spanningsverdeling ten gevolge van wringende momenten.

Tevens wordt een eerste indicatie gegeven op welke wijze aan de hand van de optredende spanningen de afmetingen van constructie-onderdelen globaal kunnen worden bepaald.

De vervormingen die als gevolg van deze spanningen ontstaan, zullen pas worden behandeld in KW-5. Met behulp van deze gegevens kan worden gecontroleerd of de doorbuigingen niet te groot worden. Bovendien zijn deze vervormingen nodig om statisch onbepaalde constructies te kunnen berekenen in KW-5 en KW-6.

### 19.1.2 SPANNINGEN IN GASSEN EN VLOEISTOFFEN

In de natuurkunde wordt het begrip spanning voornamelijk gebruikt voor gassen en vloeistoffen. In beide gevallen is er in elk punt sprake van een alzijdige druk.

Als we een gas onder druk brengen, bijv. door het volume van een afgesloten ruimte te verkleinen (zuiger), dan heerst overal in dat gas één en dezelfde alzijdige druk. Bij de wanden van de afgesloten ruimte is deze druk dan ook loodrecht op elk wandgedeelte gericht, zie fig. 1a.

Als we een aquarium met water vullen, wordt op elk onderdeeltje van de wand waar het water mee in contact is, een druk uitgeoefend die weer loodrecht staat op het betreffende deel van de wand. Voorts is de druk in elk punt evenredig met de verticale afstand afstand van het beschouwde punt tot het wateroppervlak, zie fig. 1b.

De druk van gassen realiseren we ons over het algemeen pas als deze druk afwijkt van de atmosferische druk, bijv. bij het oppompen van een fietsband.

De atmosferische druk ontstaat door het gewicht van de luchtlagen boven ons ter plaatse van het aardoppervlak. Afhankelijk van de weersomstandigheden treden hier geringe fluctuaties in op.

De belangrijkste van de luchtdruk wordt pas zichtbaar als we kans zien de lucht uit een gesloten ruimte te verwijderen. Als we een gesloten blik met een vacuümpomp leegpompen, zal het blik door de luchtdruk worden verfrommeld, zie fig. 2.

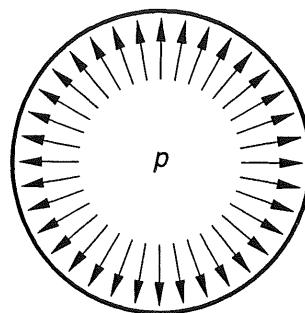
De soortelijke massa van lucht ter plaatse van het aardoppervlak bedraagt ongeveer:

$$\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$$

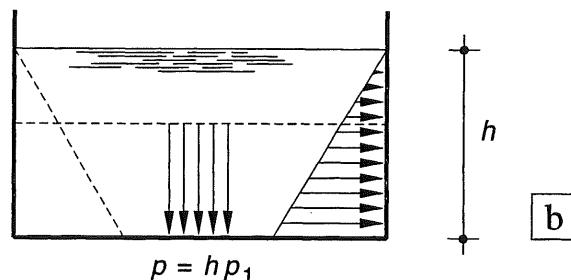
Omdat de lucht echter overal rondom ons aanwezig is en we de luchtdruk niet als zodanig ervaren, worden alle krachten en gewichten uitgedrukt ten opzichte van de atmosferische druk.

We doen voor onze statische berekeningen dus net of de (statische) luchtdruk niet aanwezig is. Met de dynamische luchtdruk (wind) hebben we uiteraard terdege rekening te houden.

*Het belangrijkste gegeven dat we aan de druk van vloeistoffen en gassen kunnen ontnemen, is het feit dat de druk ook op het allerkleinste onderdeeltje aanwezig is.*



1

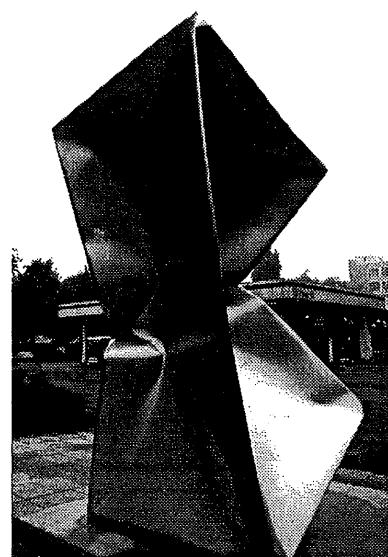


b

Fig. 1 De druk van gassen en vloeistoffen is altijd loodrecht op het wandoppervlak gericht

- a. gasdruk in een bol
- b. waterdruk op de wanden van een aquarium

NB  $p_1$  = vloeistofdruk op 1 m diepte;  
voor water geldt:  $p_1 = 10 \text{ kN/m}^2$



2

Fig. 2 'Kunstwerk' dat is ontstaan door een stalen doos' vacuum te zuigen. Mekelweg Delft

## 19.1.3 VOORWERP IN EEN VLOEISTOF

We beschouwen dit onderwerp in de eerste plaats om duidelijk te maken, dat ook in vaste stoffen spanningen in elke willekeurige richting kunnen optreden. In de tweede plaats hebben we er mee te maken als de kelders van een gebouw zich in het grondwater bevinden. De opdrijvende krachten op een gebouw mogen natuurlijk nooit groter zijn dan het gewicht van het gebouw en de wanden en vloeren moeten de waterdrukken ook kunnen weerstaan.

We dompelen een kubus van het een of andere materiaal in een vloeistof. Door de vloeistof, bijv. water, worden gelijkmatig verdeelde drukken op de zes zijvlakken van de kubus uitgeoefend, zie fig. 1a1. Deze drukken bezitten per zijvlak een resultante, zie fig. 1a2.

De resultante per zijvlak kan rechtstreeks door middel van integratie worden bepaald, zoals in fig. 1b1 is weergegeven, maar natuurlijk ook met behulp van regels, die op de resultaten van deze integratie zijn gebaseerd, zie fig. 1b2.

In horizontale richting houden de krachten in  $x$ - en  $y$ -richting elkaar in evenwicht. In verticale richting is de opwaarts gerichte waterdruk groter dan de neerwaarts gerichte waterdruk.

Het hangt van het gewicht van de kubus af, wat zal gebeuren. Als de neerwaarts gerichte kracht door het eigen gewicht groter is dan de resulterende opwaartse gerichte kracht van de verticale waterdrukken, zal het voorwerp zinken tot het de bodem bereikt. Zijn beide krachten even groot, dan zal het voorwerp in het water zweven.

Als de opwaarts gerichte kracht van het water groter is dan het eigen gewicht van de kubus, zal deze zich omhoog bewegen. Zodra een zodanig deel van de kubus boven water uitsteekt, dat de opwaarts gerichte waterdruk en het eigen gewicht  $F_g$  van de kubus in evenwicht zijn, zal de kubus deze stand behouden, zie fig. 1c.

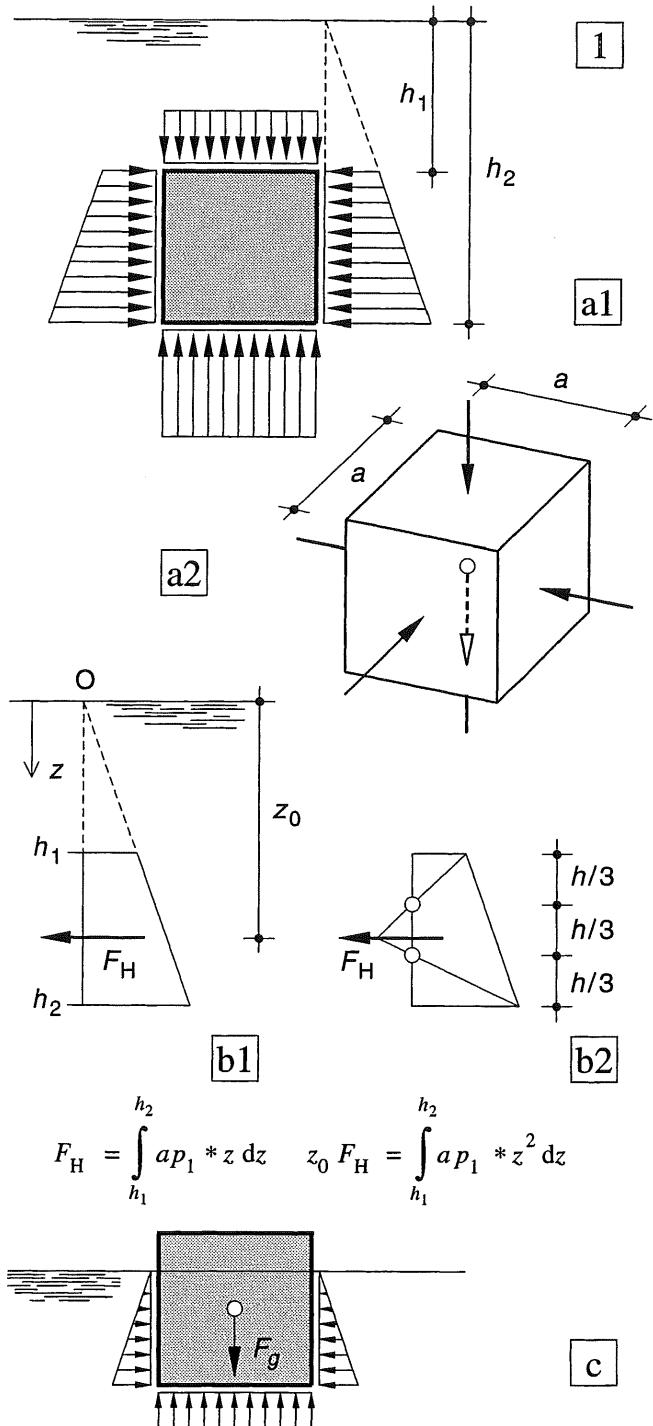


Fig. 1 Waterdruk op een kubus

- a1 Drukverloop op vier zijvlakken van de kubus
- a2 Resultante van de druk per zijvlak
- b1 Bepaling van de grootte en de ligging van de resultante met behulp van integraalrekening
- b2 Grafische bepaling van de ligging van de resultante [473]
- c Evenwicht van een drijvende kubus

Om de reactiekrachten te kunnen leveren die evenwicht maken met de waterdrukken, zal de kubus in geringe mate moeten indrukken. De vervormingen van de kubus zijn in dit geval zeer regelmatig verdeeld, zie fig. 2a1.

Als we nu als gedachtenmodel een verticale plak van de kubus afsnijden, dan moet die plak in evenwicht zijn; enerzijds onder invloed van de waterdruk en anderzijds door de spanningen die door het resterende deel van de kubus op de afgesneden plak worden uitgeoefend, zie fig. 2b.

Hieruit volgt dat in elk punt van de kubus spanningen optreden, die een continu verloop hebben over de gehele inhoud van de kubus.

Dit geldt zowel voor de  $x$ -richting als de  $y$ - en de  $z$ -richting. De spanningen in  $x$ - en  $y$ -richting zijn nu nog wel aan elkaar gelijk, maar de spanningen in  $z$ -richting vertonen daarvan afwijkende waarden door de invloed van het eigen gewicht van de kubus, zie fig. 2b. We kunnen in dat voorwerp dus niet meer van een alzijdige druk spreken. Gemakshalve worden de spanningen op de zijvlakken van een elementair deeltje van een lichaam meestal maar door één vector weergegeven, zie fig. 2c, in plaats van door een zeer groot aantal vectoren zoals in fig. 2a, b.

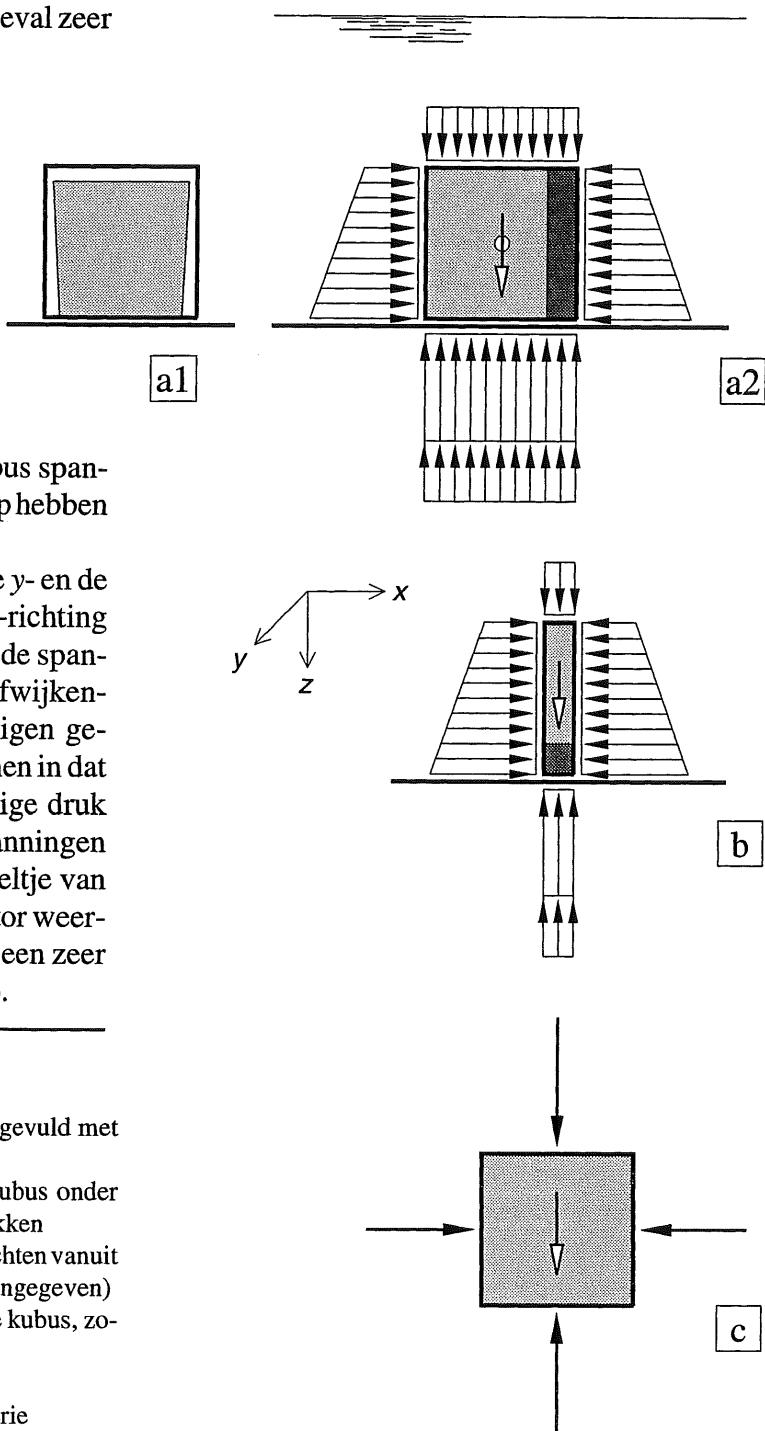


Fig. 2 Kubus op de bodem van een vat, dat is gevuld met een vloeistof

- a1 Sterk overdreven vervorming van de kubus onder invloed van de onder a2 genoemde drukken
- a2 Uitwendige waterdrukken en reactiekrachten vanuit de bodem (gewicht kubus gestyleerd aangegeven)
- b. Evenwicht van een verticale moot uit de kubus, zoals weergegeven in fig. a2  
rechts: waterdrukken  
links: drukspanningen vanuit de materie
- c. Evenwicht van een elementair deeltje van de moot aan de onderzijdige vlak boven de bodem, zoals weergegeven in fig. b.  
(het elementje is in fig. c vergroot weergegeven)

### 19.1.4 SPANNINGEN IN STEENACHTIGE MATERIALEN

De meest voorkomende bouwmaterialen zijn van steenachtige aard, zoals metselwerk en beton. De druksterkte van dergelijke materialen is aanmerkelijk groter dan de treksterkte. Om voor het ontstaan van scheuren en het bezwijken een aannemelijk verklaring te kunnen geven, moet rekening worden gehouden met de korrelstructuur die dergelijke materialen bezitten.

*Steenachtige materialen kunnen in principe worden beschouwd als loskorrelig materialen, die op het een of andere tijdstip aaneen zijn gekit, door natuurlijke of kunstmatige oorzaken.*

Voor de bepaling van de gedachte beschouwen we los grind, een van de basisbestanddelen van beton. Doordat het materiaal inwendige wrijving bezit, kunnen we er een heuvel van maken, zie fig. 1a. Als we het grind vervangen door glazen stuivers, dan komen we eigenlijk niet verder dan een uitgestrekte 'plas' ter hoogte van één laag, omdat dit materiaal géén inwendige wrijving bezit, zie fig. 1b. Als we zorgen dat de onderste laag op zijn plaats blijft, dan kunnen we van de stuivers wel pyramiden stapeletten, zie fig. 2a, waar een overeenkomstige stapeling van ping-pong ballen is weergegeven. Voor het tweedimensionale geval blijkt de tegendruk gelijkmatig verdeeld te zijn, omdat alle krachten diagonaalsgewijs moeten worden afgevoerd, zie fig. 2b. Dit geldt ook voor het drie-dimensionale geval.

Maar zodra we van de stuivers een prisma willen vormen, hebben we een mal nodig, zie fig. 3a. Als we die omhoog trekken, stromen de stuivers weg als een vloeistof. Maar als we de mal opvullen met een zachte en slappe vloeibare vulstof, zoals gelatine, dan vormen de stuivers na het stollen van de gelatine een samenhangend geheel dat relatief sterk is. Als we de woorden *stuivers en gelatine*, resp. vervangen door de woorden *grind en mortel*, dan is de werking van beton in hoofd trekken verklaard. Omdat bij deze aanpak de structuur van het materiaal is geïntroduceerd, spreken we van *Structuurmechanica* [407].

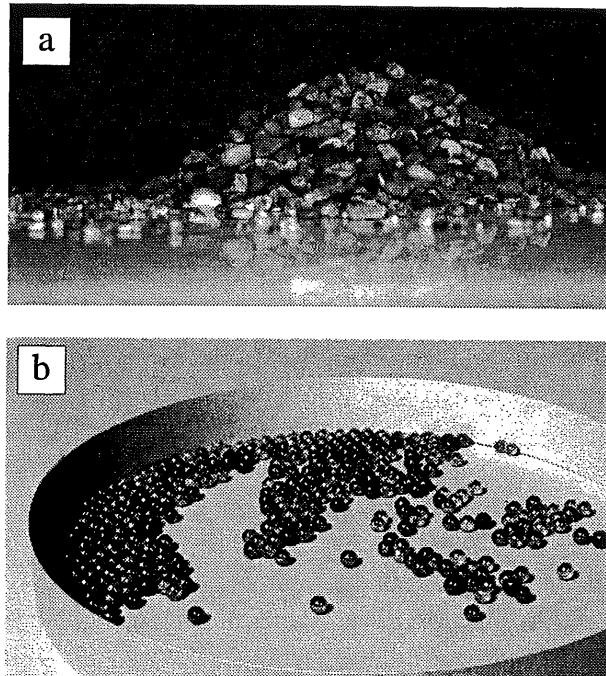
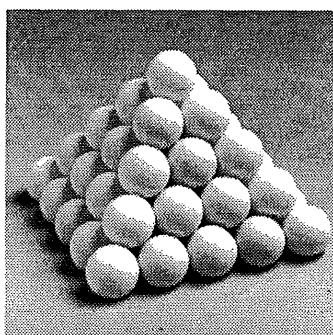


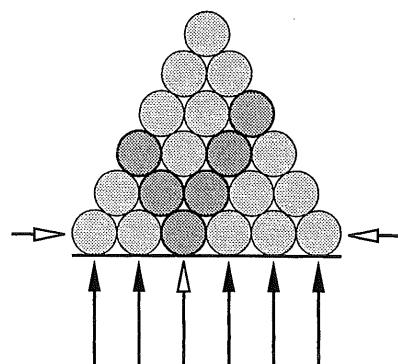
Fig. 1 Loskorrelige materialen

- a. Met inwendige wrijving: grind
- b. Zonder inwendige wrijving: glazen stuivers



2

a



b

Fig. 2 Pyramide van even grote bollen

- a. Drie-dimensionale stapeling
- b. Tegendruk voor het twee-dimensionale geval. Alleen de donker gekleurde bollen dragen hun gewicht af naar de witte verticale reactiekracht

Voor een analyse van de krachtsvering nemen we aan dat alle stuiters precies dezelfde bolvorm hebben en nauwkeurig passend in de mal zijn aangebracht. We verwaarlozen nu verder het eigen gewicht van de stuiters, en brengen in verticale richting een gelijkmatig verdeelde bovenbelasting aan. Alle krachten tussen de bollen kunnen alleen via de raakpunten worden overgebracht. Omdat de inwendige wrijving ontbreekt kunnen geen schuifkrachten worden overgedragen; alle krachten moeten dus ook door de middelpunten van de bollen gaan. De bovenbelasting moet dus zig-zaggend via de bollen naar de ondersteuning worden overgebracht, zoals voor één stelsel puntlasten is weergegeven in fig. 3b. De wanden van de mal kunnen dus worden verwijderd als ter plaatse van de halve bollen aan de rand, horizontale steunkrachten worden aangebracht. Deze drukkrachten kunnen op hun beurt weer vervallen, als we de ruimte tussen de bollen opvullen met een zacht vulmateriaal dat zich hecht aan de bollen en in staat is om trekkrachten over te brengen; fig. 3c.

In een verticale snede werken nu schuin gerichte drukkrachten en horizontale trekkrachten. De horizontale resultante van al deze krachten is gelijk aan nul, maar tussen de bollen onderling werken wel degelijk trek- en drukkrachten. De sterkte van het materiaal wordt dan ook bepaald door de sterkte van de 'lijmverbinding' tussen de bollen. En deze lijmverbinding bezwijkt veel eer bij uitwendige trek dan bij uitwendige druk.

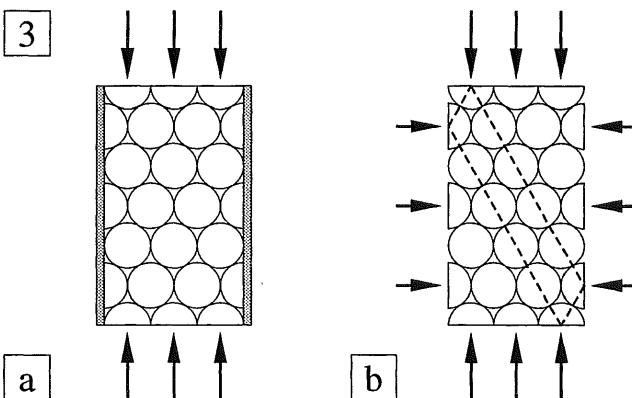


Fig. 3 Prisma van bollen zonder wrijving  
a. Zijwanden zijn nodig om de vorm te handhaven  
b. Wand vervangen door uitwendige krachten

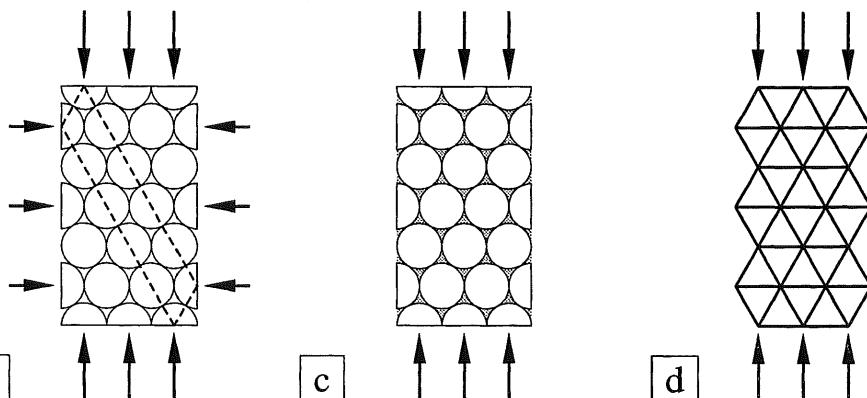
Voor de berekening tenslotte kan het bollenmodel worden vervangen door een staafwerkmodel volgens fig. 3d. In het werkelijke materiaalmodel voor metselwerk en beton kunnen de bollen zowel normaalkrachten als schuifkrachten overbrengen. Met behulp van computerberekeningen is dan ook de ontwikkeling van het scheurenpatroon na te gaan tot aan bezwijken. Dit is van belang omdat tegenwoordig wordt geëist dat voor de dimensionering van een constructie, de bezwijktoestand wordt berekend.

Voor de bepaling van de globale afmetingen van een constructie – ter controle van de gebruikte vuistregels – zullen we echter een eenvoudiger materiaalmodel gebruiken, waarbij wordt uitgegaan van het al in KW-0 genoemde 'ideale materiaal' met de volgende eigenschappen [095]:

- homogeen
- isotroop
- lineair elastisch

Aan dit materiaal wordt wel een treksterkte en een druksterkte toegekend, maar de ontwikkeling van de scheurvorming wordt niet beschouwd en de bezwijktoestand wordt sterk gesysteerd weergegeven.

*NB Alle berekeningen in KW-4 zijn bestemd om tot een reële dimensionering te komen, en niet om controlerende instanties er van te overtuigen dat de letter van de voorschriften exact is nageleefd.*



- c. Zacht vulmateriaal neemt de uitwendige horizontale drukkrachten over als inwendige trekkrachten
- d. Vervanging van de bollen door een driehoekig staafwerk

## 19.2.1 DEFINITIE VAN SPANNING

Zoals reeds in KW-0 [094-099] werd besproken, is de spanning gelijk aan de kracht per eenheid van oppervlakte:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1)$$

In feite moet de spanning wat zorgvuldiger worden gedefinieerd en wel als volgt, zie fig. 1:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1a)$$

In het algemeen zal de spanning immers van punt tot punt variëren, zodat slechts over een heel klein oppervlakje de spanning als constant mag worden beschouwd, zie bijv. fig. 402-1.

Slechts in een beperkt aantal gevallen zal de spanning over grote oppervlakken constant blijven, zoals bijv. in een horizontaal vlak van de daar beschouwde kubus.

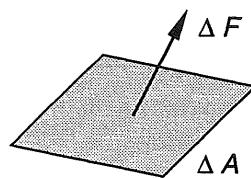
We beschouwen nu een willekeurig voorwerp (lichaam) dat zich in rust bevindt onder invloed van een aantal uitwendige krachten, zie fig. 2a. Het lichaam zorgt ervoor dat de uitwendige krachten met elkaar evenwicht kunnen maken, en zal daarbij moeten vervormen. Aangezien ook in de vervormde toestand alle punten van het lichaam aan elkaar blijven passen, zullen de vervormingen continu moeten verlopen en hetzelfde moet dan gelden voor de daarbij behorende spanningen.

We brengen weer een snede aan die het lichaam in tweeën verdeelt, zie fig. 2b. Uit evenwichts-overwegingen zal dan achtereenvolgens voor het linkerdeel en het rechterdeel moeten gelden:

$$\text{Links: } \sum F_{\text{links}} = \int_{\text{A}} \sigma_{\text{links}} dA$$

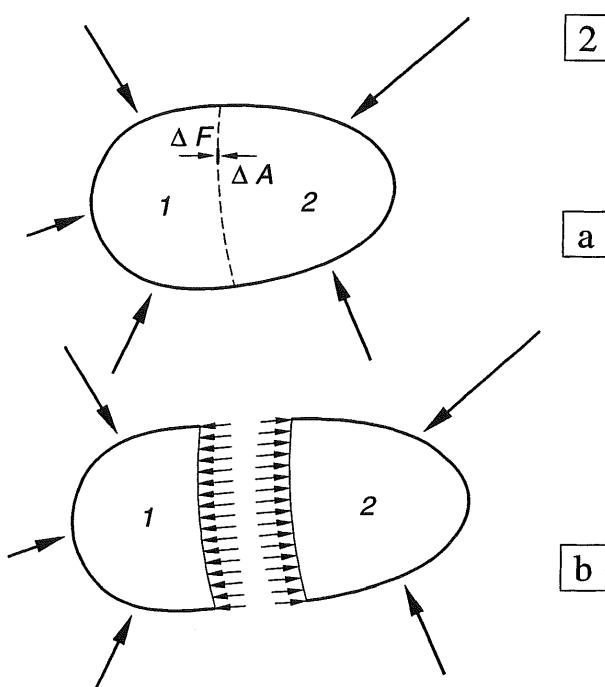
$$\text{Rechts: } \sum F_{\text{rechts}} = \int_{\text{A}} \sigma_{\text{rechts}} dA$$

Aangezien geldt:  $\sum F_{\text{links}} = \sum F_{\text{rechts}}$   
zullen ook de integralen gelijk moeten zijn.



1

Fig. 1 Definitie van spanning



2

a

b

Fig. 2 Lichaam onder invloed van een aantal krachten

- De krachten maken via het lichaam evenwicht met elkaar
- Evenwicht van elk deel van het lichaam, dat door een fictieve snede in tweeën is verdeeld

Voor elk onderdeeltje van de beschouwde doorsnede zullen de spanningen links en rechts dan ook aan elkaar gelijk moeten zijn.

*Spanningen treden net als snedekräfte altijd paarsgewijs op en er geldt het beginsel: actie = reactie*

Zolang er tenminste één kracht op een afgesneden deel werkt, zullen er in de snede spanningen ontstaan, onverschillig hoe de snede verder door het lichaam verloopt.

Structuur-mechanica

Beschouwen we het materiaalmodel met de stuuters van fig. [405-4] dan moeten we het beschouwde vlakje  $\Delta A$  zo groot kiezen dat we een voldoend groot aantal trek- en drukkrachtjes aantreffen om van een gemiddelde spanning te mogen spreken. Zoals reeds eerder is betoogd zijn deze gemiddelde spanningen bij steenachtige materialen minder effectief om scheurvorming te kunnen voorspellen dan de individuele krachtjes tussen de bollen. Omdat de krachten die tussen de bollen worden overgedragen gemakkelijk in richting en grootte zijn te visualiseren, is de krachtswerking voor twee gedrongen liggers – voor het ongescheurde stadium – weergegeven in fig. 3.

In fig. 3a is een vrij opgelegde ligger weergegeven, die is belast door een gelijkmatig verdeelde belasting op de bovenrand. In het middendeel van de ligger blijven vlakke doorsneden vlak en komt de spanningsverdeling in hoofdtrekken overeen met de elementaire theorie [420].

Nabij de linker- en rechtersrand buigen de drukkrachten vrij plotseling af naar de opleggingen. De trekkrachten zijn min of meer verankerd in deze drukzone.

In fig. 3b worden de ondersteuningen gevormd door twee scharnieren en is het eigen gewicht per bol ingevoerd. Doordat de verlenging van de onderrand wordt belemmerd, kan een duidelijke drukboog worden waargenomen. De trekband is nu over grote afstanden in deze drukboog verankerd en alleen in het middengebied van de ligger treedt een spanningsverdeling op die te verwachten is bij een zuiver buigend moment plus een drukkracht [465]. Als de vrij opgelegde ligger van fig. 3a in gewapend beton wordt uitgevoerd, dan neemt na scheurvorming de onderwapening de trekkrachten van het beton over en vertoont het spanningsbeeld veel meer gelijkenis met het spanningsbeeld van fig. 3b. Uiteraard is de totale trekkraft dan vrijwel geheel geconcentreerd ter plaatse van de wapening

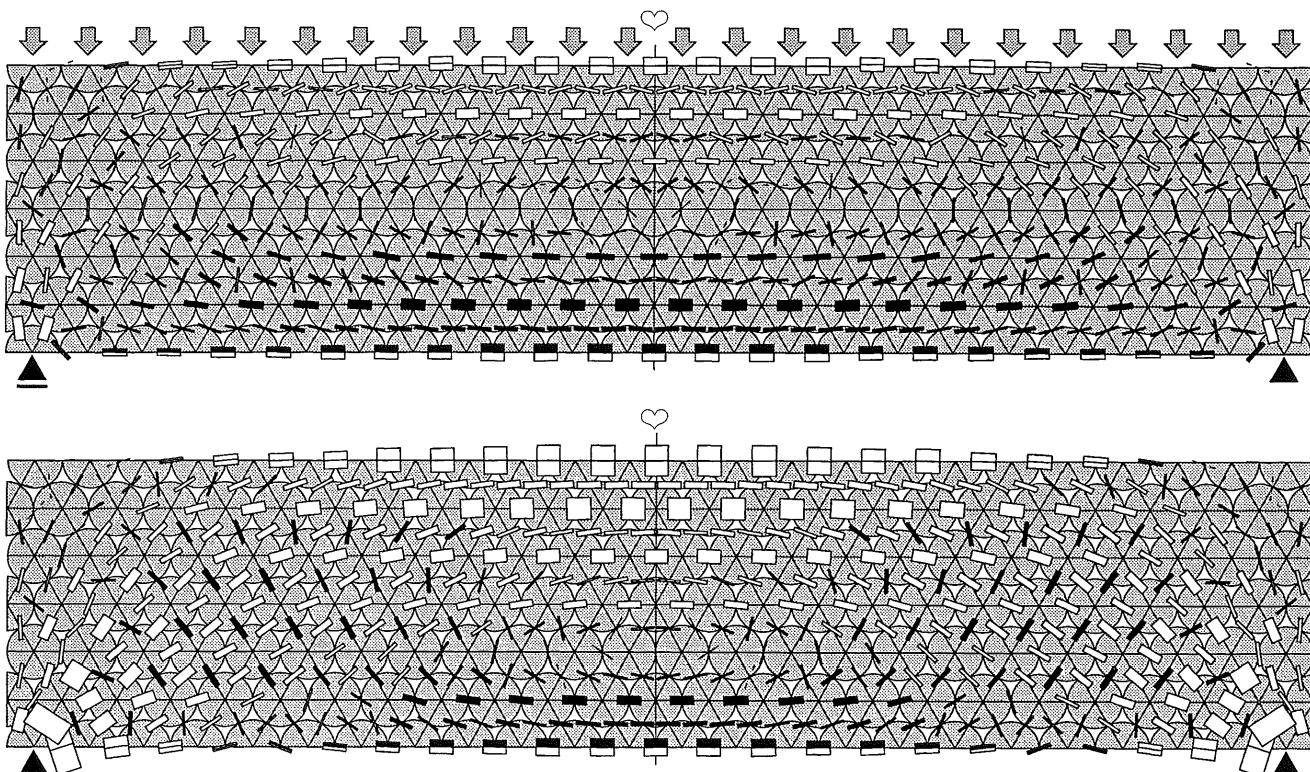


Fig. 3  
Berekening met behulp van de Structuur-Mechanica  
Liggers op twee steunpunten onder een  $q$ -last  
a. Vrij opgelegd (rol + scharnier)  
b. Ondersteuning door twee scharnieren  
De totale belasting in fig. 3b is  $2,5 \times$  zo groot als in fig. 3a, maar de maximale trekspanningen in de onderrand zijn in beide gevallen gelijk.

De richtingen van de blokjes geven de richtingen van de krachten tussen de bollen weer en de breedte van de blokjes de grootte van de krachten. Alle combinaties van normaalkrachten en schuifkrachten zijn hierbij mogelijk. Verder geldt: wit = druk; zwart = trek. Alle krachten kunnen worden geïnterpreteerd als spanningen. Alleen aan de buitenranden worden de *krachten* weergegeven door de halve blokjes en de *spanningen* door de hele blokjes, die dus gedeeltelijk buiten de boven- en onderrand uitsteken.

## 19.2.2 OVERZICHT

Een spanning wordt – evenals een kracht – door een pijl weergegeven, die de grootte en richting van de spanning aangeeft.

Toch worden spanningen niet als *vectoren* aangeduid maar als *tensoren*. Behalve met de grootte en de richting van de spanning hebben we ook nog rekening te houden met de stand van het vlakje waarop de spanning werkt. Beschouwen we fig. [403-2b] dan blijkt immers al dat in één punt van de materie spanningen in allerlei richtingen kunnen werken. Het zal later blijken dat de onderlinge grootte van deze spanningen aan zekere wetmatigheden is gebonden. Deze materie behoort tot de Spanningsleer, die in KW-7 wordt behandeld.

In hoofdstuk 19 houden we ons alleen bezig met spanningen die optreden in lijnformige elementen, die worden onderworpen aan normaalkrachten en constante buigende momenten.

Hierbij beperken we ons dan weer voornamelijk tot de zgn. normale doorsneden, dat wil zeggen; doorsneden loodrecht op de liggeras.

Soms is het zinvol om ook doorsneden te beschouwen die niet loodrecht op de liggeras staan. Dit wordt behandeld in [410] t/m [413]. Bij een eerste lezing kunnen deze onderdelen worden overgeslagen. In hoofdstuk 20 moet echter wel op enkele uitkomsten worden teruggegrepen.

In hoofdstuk 20 worden een aantal spanningscombinaties behandeld:

- Buiging plus dwarskracht [456]; [478]
- Dubbele buiging [460]
- Buiging plus normaalkracht [464]

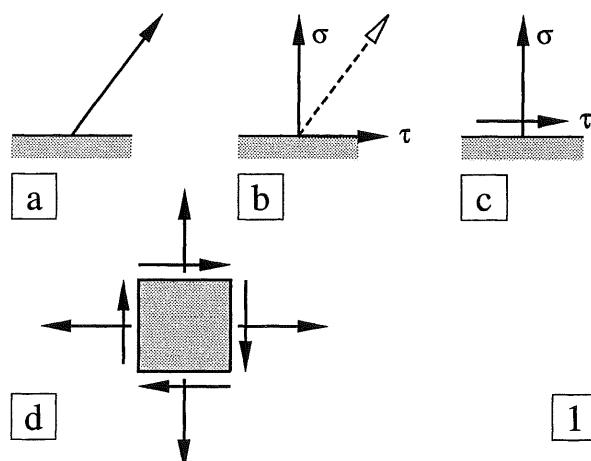
Lijnvormige elementen kunnen ook worden onderworpen aan wringing. Voor de spanningsverdeling die hierdoor ontstaat, worden geen afleidingen verstrekt, omdat deze buiten het kader van KW-4 vallen. Er worden in 20.7 [486 e.v.] echter voldoende gegevens verstrekt om een alleszins redelijke indruk van de spanningsverdeling te kunnen verkrijgen.

## 19.2.3 AANDUIDING VAN SPANNINGEN

In fig. 1a is de gelijkmatig verdeelde spanning, die op een willekeurig vlakje werkt, weergegeven door één enkele pijl. Een dergelijke spanning wordt eigenlijk altijd direct weer ontbonden in een component loodrecht op het beschouwde vlakje en een component in het beschouwde vlakje, zie fig. 1b. De eerste spanning wordt aangeduid als de normaalspanning  $\sigma$  (sigma) en de tweede als de schuifspanning  $\tau$  (tau); vergelijk de normaalkrachten en schuifkrachten in KW-0 [047-048]. Alhoewel de schuifspanning in het beschouwde vlakje ligt, is het toch gebruikelijk om de schuifspanning een stukje buiten het betreffende vlakje te tekenen, zie fig. 1c.

### Teken van de spanningen:

In het twee-dimensionale geval worden normaalspanningen positief gerekend als ze vanuit het vlakje bezien naar buiten werken; schuifspanningen worden positieve gerekend als ze vanuit het vlakje bezien naar rechts werken. Voor het vierkante elementje van fig. 1d betekent dit dat alle schuifspanningen elkaar 'naloopen'. Deze tekenaafspraak is gehanteerd in [410-413].



1

Fig. 1 Normaalspanning en schuifspanning  
 a. Resulterende spanning op een vlakje  
 b. Resulterende spanning ontbonden in een normaalspanning  $\sigma$  en een schuifspanning  $\tau$   
 c. Gebruikelijke aanduiding van normaalspanning en schuifspanning  
 d. Positieve spanningen op een vierkant elementje

### Drie-dimensionaal geval

In het drie-dimensionale geval wordt een ietwat afwijkende notatie gebruikt. Hierbij wordt uitgegaan van een rechtsdraaiend  $x$ - $y$ - $z$ -assenkruis;  $x$ -as naar rechts,  $y$ -as naar voren en  $z$ -as verticaal omlaag, zie fig. 2a. Voor de bepaling van het teken wordt een vergelijkings-elementje zodanig in het eerste kwadrant geplaatst, dat drie zijvlakken van het elementje samenvallen met de drie coördinaatvlakken, zoals is weergegeven in fig. 2a.

Op de drie zijvlakjes die samenvallen met een coördinaatvlak, worden de spanningen positief gerekend als ze werken in de richting van de negatieve assen. Op de drie zijvlakjes die *niet* samenvallen, worden ze positief gerekend als ze werken in de positieve asrichtingen, zie fig. 2b. Alle spanningen zijn hier als positieve grootheden aangegeven. De schuifspanningen werken nu ten opzichte van elkaar in de juiste richting (naar dezelfde hoek van het elementje toegericht of juist er vanaf, zie fig. 2b).

In principe wordt de  $x$ -as langs, of in de richting van de as van het lijnvormige element gelegd en de  $z$ -as loodrecht hierop omlaag.

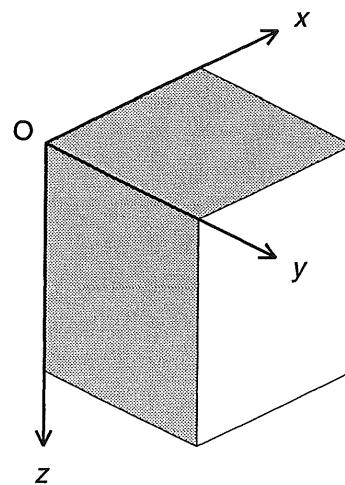
Alle mogelijke spanningen kunnen op universele wijze met het symbool  $\sigma$  worden aangegeven als we twee indices gebruiken. De eerste index geeft hierbij de richting aan van de *normaal* (= de loodlijn) van het beschouwde vlakje, de tweede index geeft dan de richting aan van de beschouwde *spanning* op dit vlakje, zie fig. 2b.

Als gemakshalve maar één index wordt gebruikt, geeft die altijd de richting van de spanning weer. Alleen bij twee gelijke indices is dit systeem eenduidig. Schuifspanningen worden altijd met dubbele indices weergegeven, onverschillig of men het symbool  $\sigma$  of  $\tau$  gebruikt.

Samengevat:

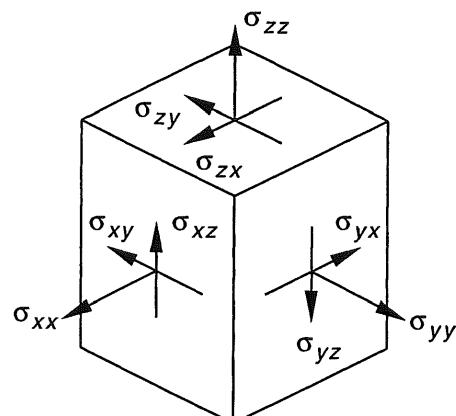
$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \sigma$$

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy} = \tau$$



2

a



b

Fig. 2 Aanduiding van spanningen

- a. Positionering van het vergelijkings-elementje in de oorsprong O
  - Een gerasterd vlakje valt samen met één van de coördinaatvlakken
  - Een wit vlakje valt *niet* samen met één van de coördinaatvlakken
- b. Aanduiding van spanningen met twee indices (het teken blijft hierbij buiten beschouwing)
  - Alle getekende spanningen werken in de positieve richting

## 19.3.1 LIJNSPANNINGSTOESTAND

Indien een staaf wordt onderworpen aan centrische trek- of drukkrachten, hebben we te maken met een *lijnspanningstoestand*; de resulterende spanning op elk willekeurig gekozen vlakje is steeds evenwijdig aan één lijn: de staafas.

In fig. 1a is zo'n staaf weergegeven. Op enige afstand van de aangrijpingspunten van de beide krachten blijkt de spanning volkomen gelijkmatig verdeeld te zijn over de normale doorsnede van het staafje, zie fig. 1b.

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A} \quad (2)$$

□ Vervolgens brengen we een snede aan, die een hoek  $\alpha$  maakt met de normale doorsnede, zie fig. 1c. De kracht blijft gelijk, het oppervlak neemt toe en de spanning in deze doorsnede is dan gelijk aan:

$$\sigma_{nx} = \frac{F_x}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F_x}{A} \cos \alpha = \sigma_{xx} \cos \alpha \quad (3)$$

Deze resulterende spanning  $\sigma_{nx}$  kan dan weer worden ontbonden in de richting loodrecht op het beschouwde vlakje en de richting evenwijdig aan dit vlakje (normale en tangentiale richting). We vinden dan, zie fig. 2:

$$\sigma_{nn} = +\sigma_{nx} \cos \alpha = +\sigma_{xx} \cos^2 \alpha \quad (4a,b)$$

$$\sigma_{nt} = -\sigma_{nx} \sin \alpha = -\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha$$

Brengen we een snede aan die loodrecht op de vorige staat, zodat  $\beta = \alpha + \pi/2$   
dan vinden we in deze snede als spanningen:

$$\sigma_{tt} = +\sigma_{xx} \cos^2 \beta = +\sigma_{xx} \sin^2 \alpha \quad (5a,b)$$

$$\sigma_{tn} = -\sigma_{xx} \sin \beta \cos \beta = +\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha$$

In fig. 3 is een vierkant elementje in de trekstaaf beschouwd waarvan de zijden loodlijnen bezitten in de  $n$ - en de  $t$ -richting. Op deze zijden zijn de normaal- en schuifspanningen uitgezet volgens de formules (4) en (5).

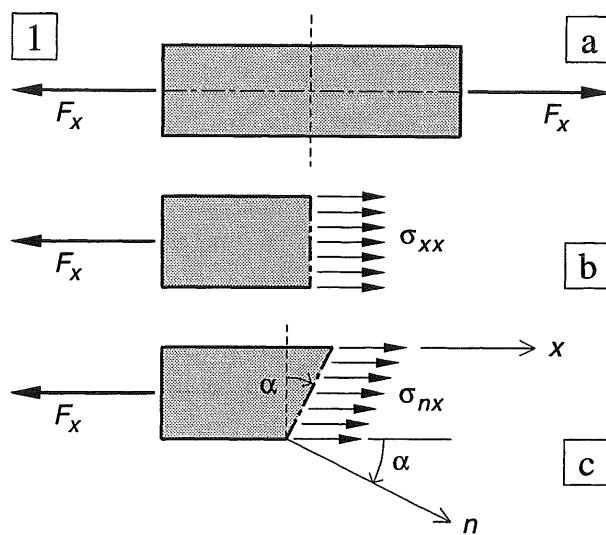


Fig. 1 Spanningen in een trekstaaf

- a . Staafje onderworpen aan centrische trek
- b . Spanningen in de normale doorsnede
- c . Spanningen in een schuine doorsnede

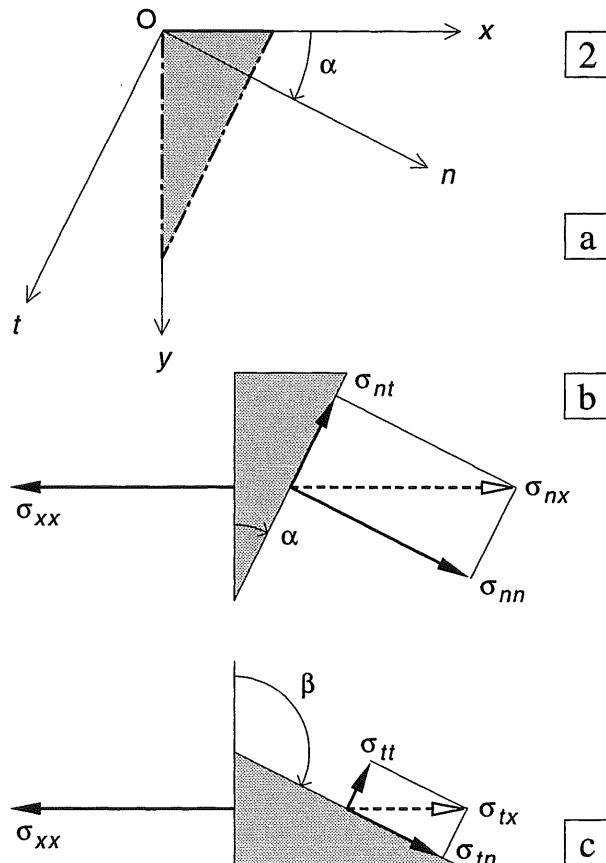


Fig. 2 Ontbinden van de resulterende spanning in een normaalspanning en een schuifspanning

- a. Mootje van de staaf met assenkruisen
- b. Normaal- en schuifspanning (hoek  $\alpha$ )
- c. idem voor een hoek  $\beta = \alpha + \pi/2$

Uit de formules (4) en (5) blijkt het volgende:  
De normaalspanningen op onderling loodrechte vlakjes zijn ongelijk groot maar de algebraïsche som van  $\sigma_{nn}$  en  $\sigma_{tt}$  blijft gelijk aan  $\sigma_{xx}$ , er geldt immers:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} + \sigma_{tt} &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{xx} \sin^2 \alpha = \\ &= \sigma_{xx}\end{aligned}\quad (6)$$

De schuifspanningen zijn gelijk maar tegengesteld gericht:

$$\sigma_{tn} = -\sigma_{nt} \quad (7)$$

### Regel

*Schuifspanningen die op onderling loodrechte vlakjes werken, zijn altijd gelijk en tegengesteld gericht. De pijlpunten wijzen dus naar dezelfde hoek toe of juist er vanaf. Vanuit het vlakje gezien werken positieve spanningen naar rechts.*

De noodzaak hiervan volgt uit een evenwichtsbeschouwing van een rechthoekig elementje, zie fig. 4.  
De normaalspanningen gaan door punt M, maken twee aan twee evenwicht met elkaar en leveren dus geen aandeel aan het moment, zie fig. 4a.

De schuifspanningen vormen echter twee aan twee een koppel. Beide koppels zullen elkaar moeten opheffen, zoals is afgeleid in fig. 4b.

Als we zeggen dat in een centrisch gedrukte of getrokken staaf geen schuifspanningen optreden, bedoelen we dat in de *normale doorsnede* geen schuifspanningen optreden.

In feite treden in alle willekeurig gerichte doorsneden schuifspanningen op die enkel maar gelijk zijn aan nul voor de waarden:

$$\alpha = 0 \text{ en } \alpha = \pi/2.$$

In het laatste geval is ook de normaalspanning gelijk aan nul.

### Regel

*Schuifspanningen en normaalspanningen die op hetzelfde vlakje werken, mogen vectorieel worden opgeteld, net als krachten. We noemen zo'n vector de resulterende spanning*

*Spanningen die op verschillende vlakjes werken mogen nooit worden opgeteld.*

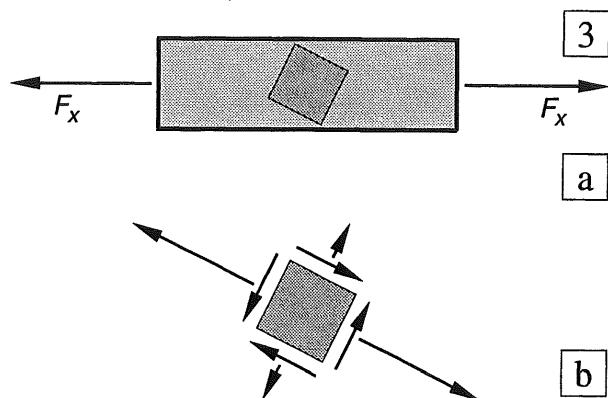


Fig. 3 Trekstaaf met spanningen op een vierkant elementje, dat over een hoek  $\alpha$  is geroteerd ten opzichte van het x-y-assenkruis

- a. Ligging van het beschouwde elementje
- b. Spanningen op het vergroot weergegeven elementje (gegevens volgens fig. 2b, c)

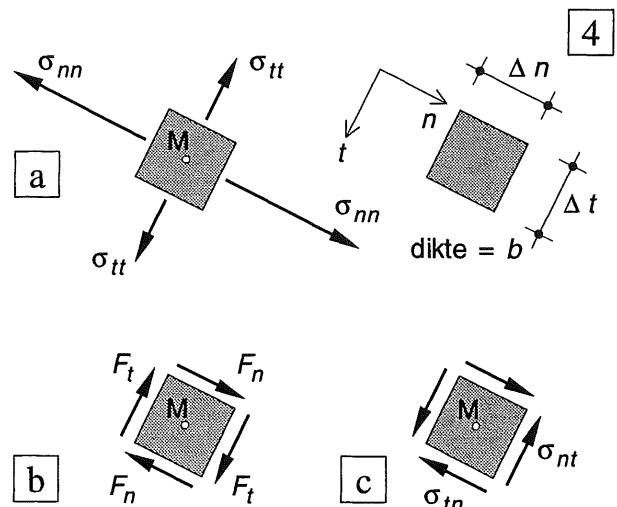


Fig. 4 Evenwichtsbeschouwingen op een elementje  
Let op: Bij evenwichtsbeschouwingen moeten spanningen altijd eerst worden herleid tot krachten!

- a. Normaalspanningen op onderling loodrechte vlakjes zijn onafhankelijk van elkaar
- b. Momenten-evenwicht van de schuifkrachten; hierbij zijn alle schuifkrachten (dus ook de bijbehorende schuifspanningen) als positieve grootheden weergegeven)  
 $+ F_n * \Delta t + F_t * \Delta n = 0$  ofwel  
 $+ (\sigma_{tn} * b \Delta n) \Delta t + (\sigma_{nt} * b \Delta t) \Delta n = 0$   
zodat:  $\sigma_{tn} = -\sigma_{nt}$
- c. Werkelijke richting van de schuifspanningen

## 19.3.2 VLAKKE SPANNINGSTOESTAND

□ Bij een vlakke spanningstoestand zijn alle resulterende spanningen op een vlakje evenwijdig aan één plat vlak. Zo'n spanningstoestand zal dus optreden als zowel in  $x$ - als in  $y$ -richting spanningen op de zijden van een elementje aangrijpen. We zullen hierbij slechts twee bijzondere gevallen behandelen, zie fig. 1a, b:

$$\text{I} \quad \sigma_{xx} = +\sigma_{yy} = -\sigma \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

$$\text{II} \quad \sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

In de figuren 2 en 3 zijn beide vlakke spannings-toestanden opgevat als de superpositie van twee lijnspanningstoestanden. Voor belastinggeval 1 blijkt uit fig. 2, dat zowel in  $n$ - als in  $t$ -richting de som van beide normaalspanningen weer gelijk is aan  $\sigma$ , terwijl de beide schuifspanningen op elk vlakje elkaar juist opheffen (vergelijk hiertoe de formules [411-(6) en (7)].

Voor alle vlakjes die loodrecht staan op de zijvlakken van het schijfvormige elementje, geldt dus een spanningstoestand die is te vergelijken met de alzijdige spanningsstoestand bij gassen of vloeistoffen. Brennen we echter een snede aan die niet loodrecht staat op de genoemde zijvlakken, dan geldt deze regel niet, zie fig. 3.

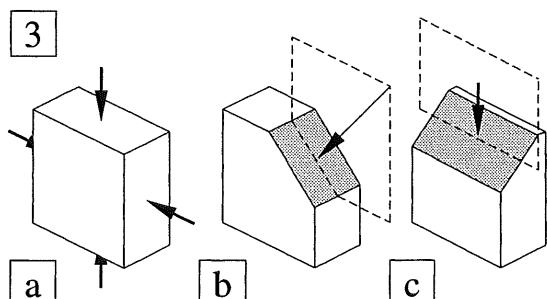


Fig. 3 Gelijke drukspanningen in  $x$ - en  $y$ -richting

- Spanningen op een elementje
- Het schuine vlak (loodrecht op de zijvlakken) ondervindt géén schuifspanningen
- Het schuine vlak (niet loodrecht op de zijvlakken) ondervindt wèl schuifspanningen, omdat de resulterende spanning altijd in het middenvlak ligt

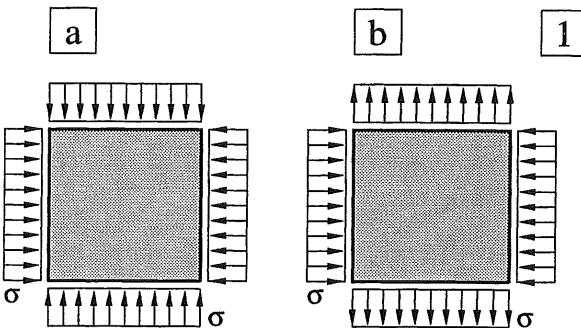


Fig. 1 Twee bijzondere vlakke spanningstoestanden

I Gelijke drukspanningen in  $x$ - en  $y$ -richting

II Even grote drukspanningen in  $x$ -richting als trekspanningen in  $y$ -richting

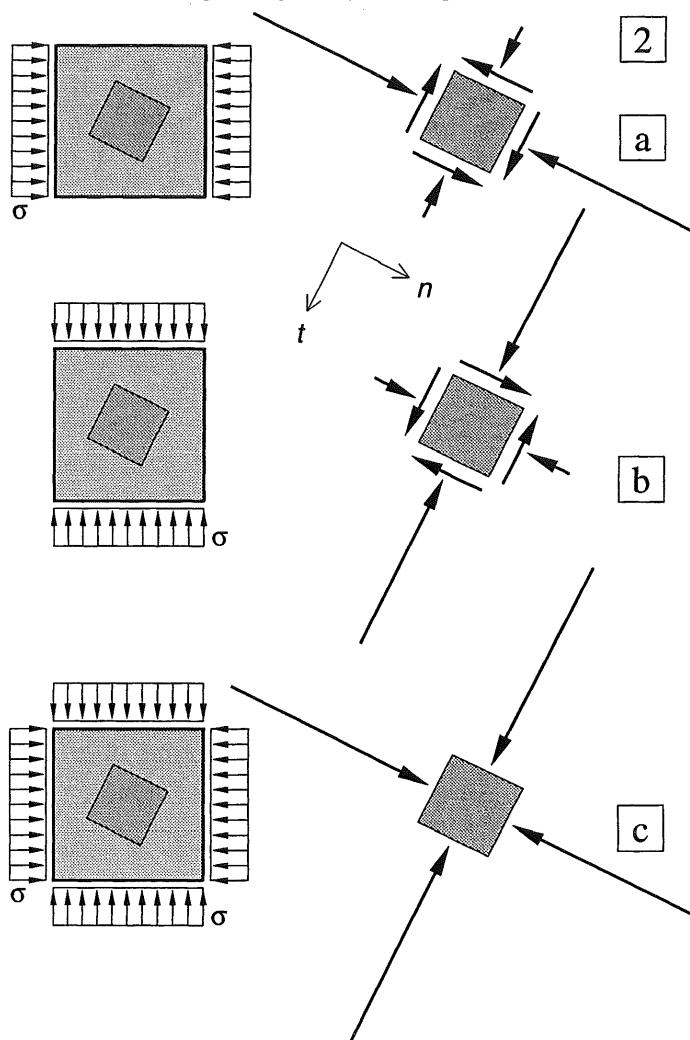


Fig. 2 Vlakke spanningstoestand met gelijke normaalspanningen in  $x$ - en  $y$ -richting, bepaald door superpositie

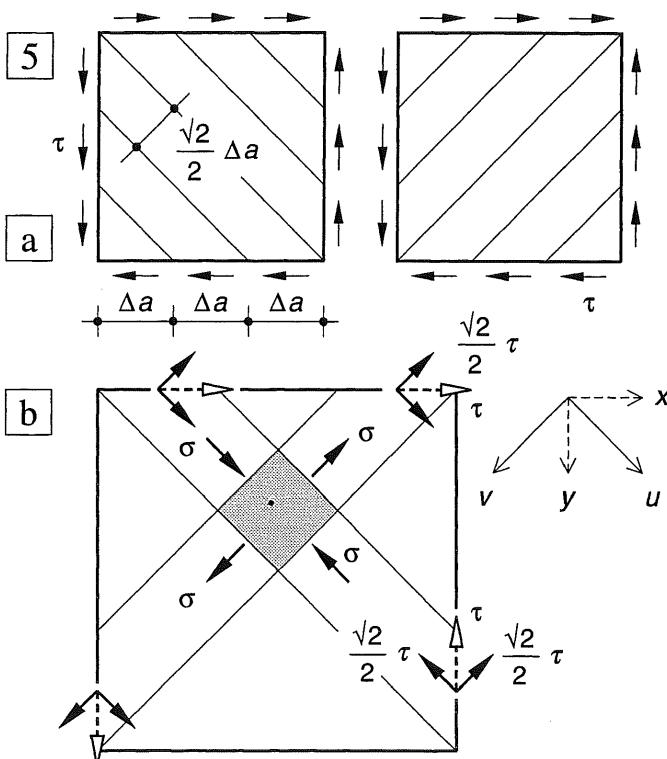
- Lijnspanningstoestand in  $x$ -richting (druk)
- Lijnspanningstoestand in  $y$ -richting (druk)
- Superpositie van beide lijnspanningstoestanden

- Voor belastinggeval II waarbij de spanningen op onderling loodrechte vlakjes gelijk en tegengesteld van teken zijn, zullen we alleen maar de spanningstoestand onder  $45^\circ$  met de  $x$ - en  $y$ -richting beschouwen. Uit fig. 4 blijkt dat in deze vlakken alleen maar schuifspanningen werken en dat de normaalspanningen gelijk moeten zijn aan nul.

Als we omgekeerd in  $x$ - en  $y$ -richting alleen maar schuifspanningen laten aangrijpen, zullen onder  $45^\circ$  in de ééne richting alleen trekspanningen optreden en in de andere richting alleen drukspanningen, zie fig. 5a, b.

Met behulp van de evenwichtsbeschouwing in fig. 5b is een en ander gemakkelijk na te gaan. We denken het elementje daartoe verdeeld in evenwijdige moten in  $u$ -en  $v$ -richting en ontbinden elk schuifspanningskrachtje langs de rand ook in deze richtingen. Alle evenwijdige moten ondervinden dan dezelfde trekkende of drukkracht.

We zullen later zien dat dit soort spannings-toestanden in liggers optreedt juist ter plaatse van de neutrale lijn en dat bij betonnen liggers de richting van de scheuren loodrecht staat op de richting van deze trekspanningen.



413

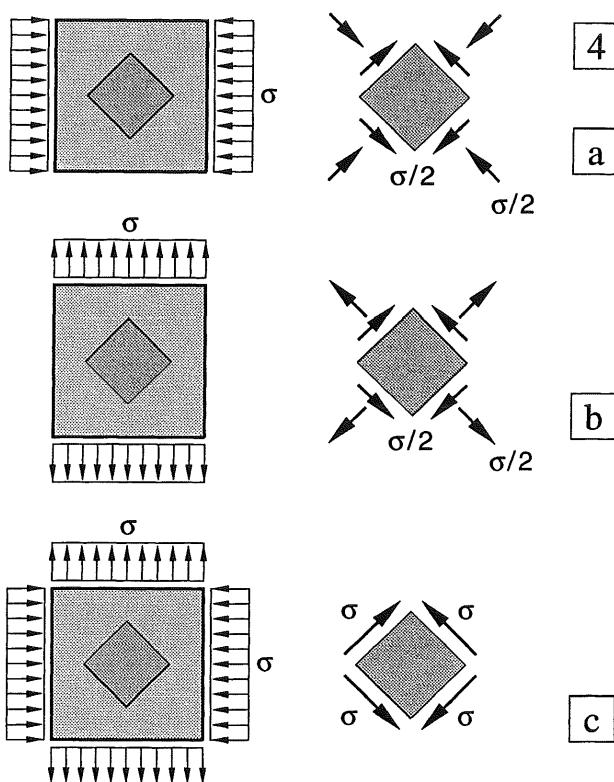


Fig. 4

Vlakke spanningstoestand met gelijke maar tegengesteld gerichte spanningen in  $x$ - en  $y$ -richting, bepaald door superpositie

- Lijnspanningstoestand in  $x$ -richting (druk)
- Lijnspanningstoestand in  $y$ -richting (trek)
- Superpositie van a. en b.

NB De spanningen zijn op een afwijkende schaal weergegeven t.o.v. fig. 2

Fig. 5

Vlakke spanningstoestand met alleen maar schuifspanningen in  $x$ - en  $y$ -richting

- Element in moten verdeeld in de  $u$ - en  $v$ -richting
- Ontbinden van schuifspanningskrachtjes in  $u$ - en  $v$ -richting levert even grote druk- en trekspanningen in moten onder  $45^\circ$ .

$$\sigma = \pm \frac{\frac{1}{2} \tau \sqrt{2} \Delta a}{\frac{1}{2} \sqrt{2} \Delta a} = \pm \tau$$

### 19.3.3 VERVORMINGEN BIJ EEN LIJNSPANNINGSTOEStAND RECAPITULATIE

De vervormingen die ontstaan bij zuivere trek of druk van een prismatische staaf, zijn behandeld in KW-0 [094-096], zie fig. 1.

De *rek*  $\varepsilon$  (epsilon) wordt gedefinieerd als:

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_1}{l_1} \quad (8)$$

De rek is gelijk aan de toename van de lengte, gedeeld door de oorspronkelijke lengte. De rek is dus een dimensieloze grootheid.

De dwarscontractie-coëfficiënt  $\nu$  (nu) geeft de verhouding aan tussen de (negatieve) dwarsrek en de (positieve) langsrek, zie ook KW-0 [096].

$$\nu = -\frac{\Delta b_1 / b_1}{\Delta l_1 / l_1}$$

#### Wet van Hooke

De spanning is recht evenredig met de langsrek. De evenredigheidsconstante wordt de elasticiteitsmodulus  $E$  genoemd (de dwarsrek wordt spanningsloos verondersteld).

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (9)$$

Aangezien de rek dimensieloos is, heeft de  $E$  dezelfde dimensie als een spanning ( $N/mm^2$ ).

#### Spannings-rek-diagram

In werkelijkheid is het verband tussen spanning en rek alleen maar lineair zolang de spanningen niet te groot worden (zie KW-0, fig. [094-1]). Bij de *lineaire elasticiteitstheorie* wordt echter uitgegaan van een volkomen rechtlijnig diagram volgens fig. 2. Het materiaalgedrag komt dan alleen tot uiting in de numerieke waarde van de elasticiteits-modulus  $E$  en eventueel (op een bescheiden wijze) in de waarde van de contractie-coëfficiënt  $\nu$  (zie KW-0 [095]).

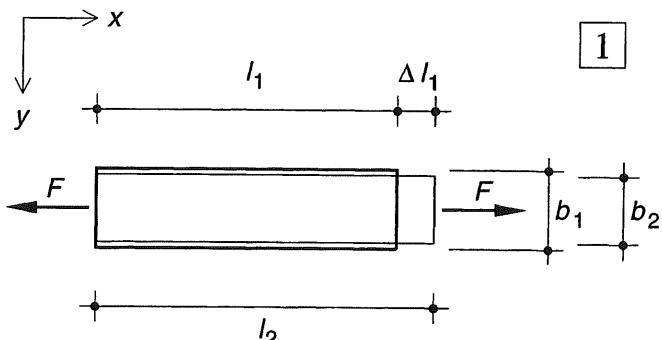
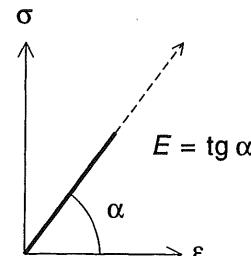


Fig. 1 Definitie van rek



2

Fig. 2 Verband tussen spanning en vervorming bij een lineair elastisch materiaal

#### Verlenging en verkorting van staven

De verlenging van een staaf (bij trek) of de verkorting (bij druk) vindt men door in (9) de volgende waarden te substitueren:

$\sigma = F/A$  en  $\varepsilon = \Delta l/l$ . Hieruit volgt:

$$\Delta l = \frac{F l}{E A} \quad (10)$$

De factor  $E A$  wordt hierbij aangeduid als de *rekstijfheid*. De spanningsloze dwarsvervormingen (bij zo'n trek- of drukproef) treden op in  $y$ - en  $z$ -richting. Ze worden bij lineaire constructie-onderdelen meestal buiten beschouwing gelaten.

In KW-7 wordt aangegeven hoe op vrij eenvoudige wijze ook plastische verschijnselen in de berekening kunnen worden verdisconteerd.

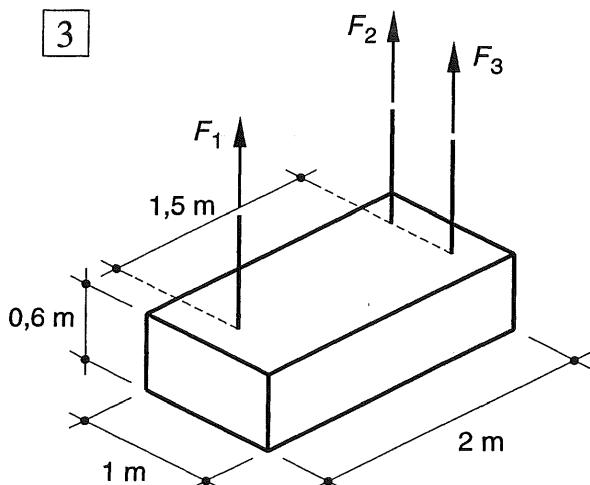


Fig. 3 Blok opgehangen aan drie kabels

**Voorbeeld 1 Blok aan drie kabels**

Een blok beton is opgehangen aan drie even dikke staalkabels van 3,50 m lengte, zie fig. 3.

Afmetingen blok:  $b \times l \times h = 1 \times 2 \times 0,6 \text{ m}^3$   
Volume blok:  $V = 1,2 \text{ m}^3$

Het gewicht van het blok bedraagt:

$$F_g = V * \gamma = 1,2 \times 24 = 28,8 \text{ kN}$$

De grootte van de krachten in de kabels is gelijk aan:  
 $F_1 = 0,5 F_g$ ,  $F_2 = F_3 = 0,25 F_g$   
(zie KW-0 [044])

De krachten in de staaldraden bedragen dan:  
 $F_1 = 14,4 \text{ kN}$ ,  $F_2 = F_3 = 7,2 \text{ kN}$

Elke staaldraad heeft een doorsnede van  $50 \text{ mm}^2$

De normaalspanningen in de draden bedragen dan:

$$\sigma_1 = F_1 / A = 14\,400 \text{ N} / 50 \text{ mm}^2 =$$

$$= 288 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 144 \text{ N/mm}^2$$

De staaldraden worden geacht te bezwijken bij een spanning van  $500 \text{ N/mm}^2$ . Voor het beschreven geval mogen de werkelijk optredende spanningen hoogsten 75 % van deze waarde bedragen ( $375 \text{ N/mm}^2$ ). Bij alle draden blijven we ruim binnen deze marge.

De verlenging van draad 1 is gelijk aan:

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{E A} = \frac{14\,400 * 3500}{210\,000 * 50} = 4,8 \text{ mm}$$

De verlenging van de twee andere draden bedraagt elk de helft van deze waarde:  $\Delta l_2 = \Delta l_3 = 2,4 \text{ mm}$ .

Bij een exact gelijke lengte van de drie staaldraden gaat het blok dus licht scheef hangen (2,4 mm over 1,5 m).

Als we de kabels 2 en 3 elk een doorsnede van 25 mm geven, zijn de spanningen in de drie kabels weer gelijk, dus ook de verlengingen. Het blok hangt dan weer recht.

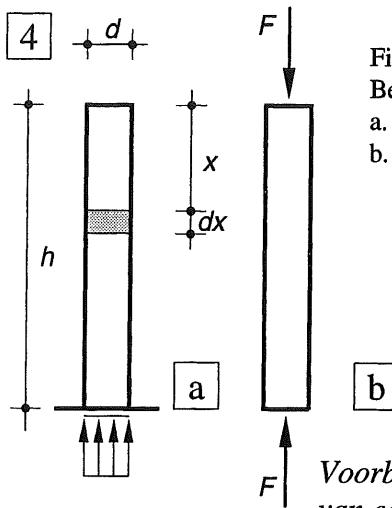


Fig. 4

Betonkolommen

- a. Onder eigen gewicht
- b. Onder een verticale uitwendige belasting

**Voorbeeld 2 Verkorting van een betonkolom****Eigen gewicht:**

We beschouwen een kolom met een doorsnede:

$$d \times d = 400 \times 400 \text{ mm}^2 \text{ en een hoogte } h = 3,00 \text{ m}$$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{F_x dx}{EA} = \int_0^h \frac{d^2 * x \gamma dx}{Ed^2} = \frac{\gamma}{E} \int_0^h x dx$$

$$\Delta h = \left[ \frac{\gamma x^2}{2E} \right]_0^h = \frac{\gamma h^2}{2E}$$

Controleer bij een dergelijke oplossing eerst of de dimensie van de formule klopt (de zakkering zal een lengtemaat moeten zijn) en ga zorgvuldig na of alle eenheden hetzelfde zijn (N en mm).

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3 = 24 * 10^{-6} \text{ N/mm}^3$$

$$h = 3,00 \text{ m} = 3000 \text{ mm}$$

$$E = 30\,000 \text{ N/mm}^2$$

De verkorting van de kolom onder eigen gewicht bedraagt:

$$\Delta h = \frac{\gamma h^2}{2E} = \frac{24 * 10^{-6} * 9 * 10^6}{2 * 3 * 10^4} = 36 * 10^{-4} \text{ mm}$$

Uiteindelijk kan deze verkorting door kruipinvloeden ca. 3 x zo groot worden, maar bedraagt toch maar 1/100 mm.

**Uitwendige belasting**

Door de belasting van bovenliggende kolommen en vloeren zullen de krachten op kolommen veelal aanmerkelijk groter zijn. Bij een spanning van bijv.  $5 \text{ N/mm}^2$  bedraagt de kracht die door de doorsnede wordt overgebracht:

$$F_x = 400 * 400 * 5 = 80 * 10^4 \text{ N}$$

De verkorting ten gevolge van deze kracht is gelijk aan:

$$\Delta h = \frac{F h}{EA} = \frac{8 * 10^5 * 3 * 10^3}{3 * 10^4 * 400 * 400} = 0,5 \text{ mm}$$

In de loop van de tijd kan dit dus door kruipinvloeden toenemen tot  $3 * 0,5 = 1,5 \text{ mm}$ .

### 19.3.4 SPANNINGSVERDELING BIJ ZUIVERE TREK OF DRUK

Men spreekt van *zuivere trek* of *zuivere druk*, als de trek- of drukspanningen bij een prismatische staaf volkomen gelijkmatig zijn verdeeld over de normale doorsnede  $A$  van de staaf, zoals is weergegeven in fig. 1. Men spreekt ook wel van *centrische* trek of druk.

Aangezien de som van de gezamenlijke spanningskrachtjes in de doorsnede gelijk is aan de normaalkracht  $N$  ter plaatse, moet de werklijn van de normaalkracht samenvallen met de werklijn van de resultante van de spanningskrachtjes. Hieruit volgt dat de normaalkracht  $N$  door het zwaartepunt  $O$  van de doorsnede moet gaan, zodat de werklijn van  $N$  samenvalt met de aslijn van de staaf, zie ook [429].

De algemene formule luidt dus:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2a)$$

Bij trekkrachten behoeft men maar op twee dingen te letten:

1. De vervormingen mogen niet te groot worden, zie KW-5.
2. De optredende spanningen moeten voldoende ver verwijderd blijven van de breuk- of vloeispanning, zie KW-7.

Bij drukkrachten geldt hetzelfde als voor trekkrachten, maar bovendien is nog een derde verschijnsel van belang:

3. Er mag geen knik optreden, zie fig. 2c en KW-5.

Indien bij centrisch gedrukte staven de normale doorsnede betrekkelijk gering is ten opzichte van de lengte van de staaf, blijkt de staaf boven een bepaalde belasting de krachten behalve door druk, tegelijkertijd ook door buiging over te brengen.

Bij statisch bepaald opgelegde staven is bezwijken dan onafwendbaar, omdat de uitbuiging bij langzaam toenemende belasting plotseling zeer sterk toeneemt, zie fig. 3.

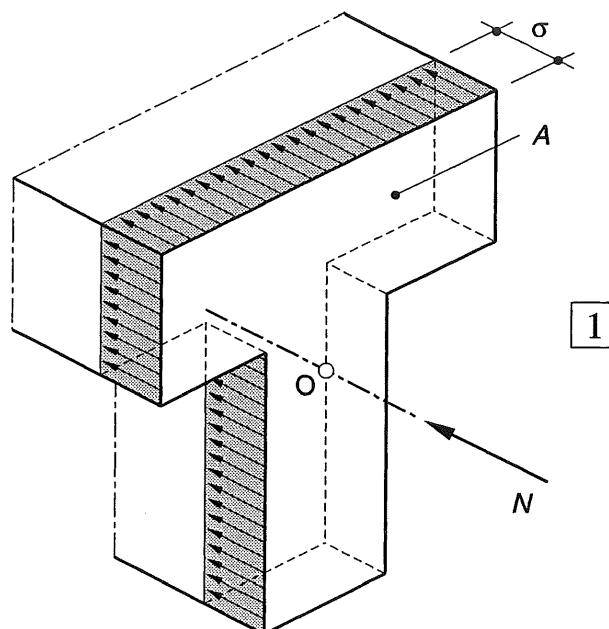


Fig. 1 Spanningsverdeling ten gevolge van een centrische drukkracht  
Prismatische staaf met een T-vormige dwarsdoorsnede (met oppervlakte  $A$ )

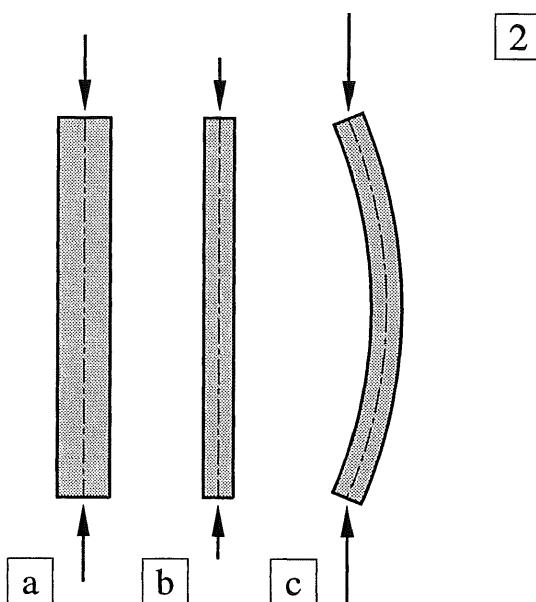


Fig. 2 Twee centrisch belaste drukstaven met dezelfde lengte, maar met verschillende rechthoekige dwarsdoorsneden

- a. Krachten worden uitsluitend overgedragen door normaalkrachten (druk)
- b. Bij kleine drukkrachten treden nog uitsluitend normaalkrachten op
- c. Boven een bepaalde kritische drukkracht wordt deze uitwendige kracht niet alleen overgedragen door een normaalkracht, maar bovendien door buigende momenten

### 19.3.5 EXCENTRISCH AANGRIJPENDE TREK- OF DRUKKRACHTEN

Indien de normaalkracht niet in het zwaartepunt van de doorsnede aangrijpt, spreken we van excentrisch getrokken of gedrukte staven. In zo'n geval worden tevens buigende momenten in de staaf overgebracht. Dit is gemakkelijk in te zien door de beide normaalkrachten naar het zwaartepunt van de doorsnede te verplaatsen onder invloed van een koppel aan elk staafuiteinde, zie fig. 4 (KW-0; [014]). Beide koppels zorgen er dan voor dat de staaf bovendien ook nog aan een zuiver buigend moment wordt onderworpen.

Vóór het verplaatsen van de uitwendige kracht naar het zwaartepunt, zoals is weergegeven in fig. 4a2, b1, spreken we van een excentrische drukkracht  $F$ .

Ná verplaatsing is de drukkracht even groot gebleven, maar nu pas mogen we deze kracht ook als normaalkracht  $N (= F)$  betitelen; fig. 4b2.

Ook bij excentrisch gedrukte staven kan knik optreden, de buigvervorming is immers al ingeleid en gaat bij het naderen van de knikkracht zeer sterk toenemen. Maar in hoofdstuk 19 gaan we er vanuit dat de omstandigheden zodanig zijn, dat geen knik kan optreden. Het knikverschijnsel wordt besproken in KW-5.

3

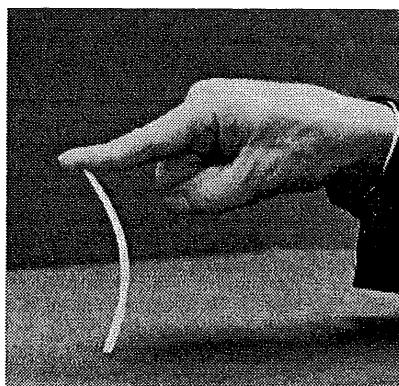


Fig. 3 Knik

Het knikverschijnsel kan gemakkelijk worden gedemonstreerd aan de plastic staafjes die worden gebruikt om de koffie om te roeren. Hoe we ook ons best doen om centrisch te drukken, al snel zal het staafje sterk zijdelings uitbuigen

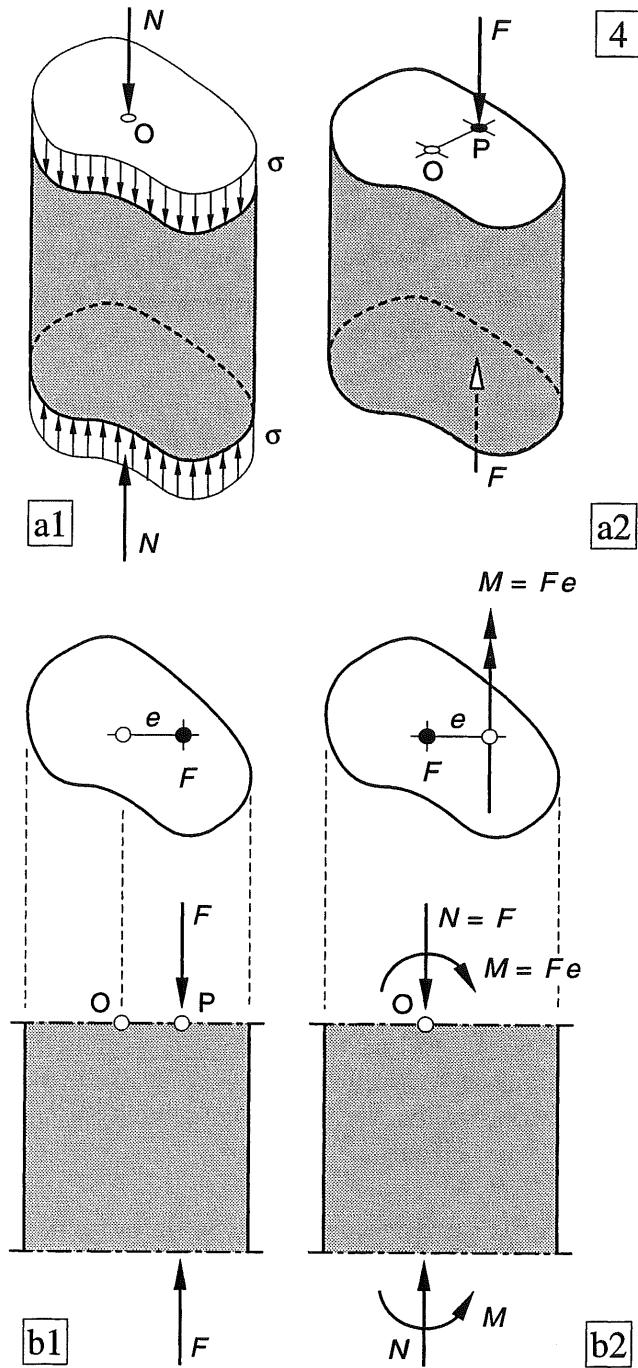


Fig. 4 Excentrisch aangrijpende trek- of drukkrachten worden verplaatst naar het zwaartepunt O van de doorsnede en veroorzaken daardoor een koppel op de uiteinden van de staaf

- a. Centrisch en excentrisch gedrukte staaf ruimtelijk weergegeven
- b. Toestand vóór en na verplaatsen van de excentrische krachten in boven- en zij-aanzicht

## 19.4.1 VERVORMINGEN BIJ ZUIVERE BUIGING

We spreken van zuivere buiging als het buigend moment over een (deel van een) ligger constant is. De dwarskracht moet over dat deel van de ligger dan gelijk zijn aan nul (KW-2 [269-1]). De meest eenvoudige manier om dit te bereiken is het beladen van een ligger door middel van een zogenaamde vierpuntsbuigproef, volgens het schema van fig. 1a.

Als men de vervormingen van de ligger nauwkeurig observeert, blijkt het middendeel een zuivere cirkelvorm aan te nemen (vergelijk ook het 'verenmodel' in KW-0 van fig. [099-4]). Alle doorsneden loodrecht op de staafas blijven ook na vervormingen loodrecht op de staafas gericht. Dit wordt omschreven met de uitdrukking: 'vlakke doorsneden blijven vlak'.

In eerste instantie beschouwen we een prismaatische balk met een rechthoekige doorsnede, zoals is weergegeven in fig. 2a. Na vervorming is de middelste vezel n-n precies even lang gebleven, zie fig. 2b. Hier moet de spanning dus gelijk zijn aan nul. We noemen dit de *neutrale lijn*.

Doordat de vezel is gebogen, is de projectie in feite iets kortscher geworden (vergelijk hiertoe ook KW-0, fig. [099-4]). Maar omdat de werkelijke vervormingen zo klein blijven, houden we hier nooit rekening mee, vergelijk daartoe de figuren 2a en 2b met elkaar.

Zoals reeds werd vermeld, blijven de normale doorsneden ook in de vervormde toestand loodrecht op de cirkelvormige neutrale lijn n-n staan, zie fig. 2b. De vezels boven de neutrale lijn worden dus korter en brengen drukspanningen over, de vezels beneden de neutrale lijn worden langer en brengen dus trekspanningen over.

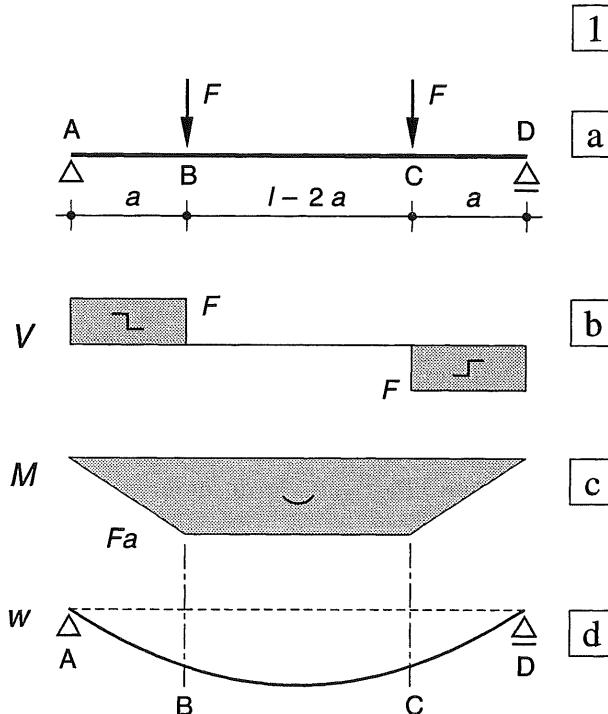


Fig. 1 Een vierpuntsbuigproef veroorzaakt een zuivere buigend moment in het middendeel van de ligger

- a. Schema
- b. Dwarskrachtenlijn
- c. Momentenlijn
- d. Doorbuiging (cirkelvorm tussen B en C)

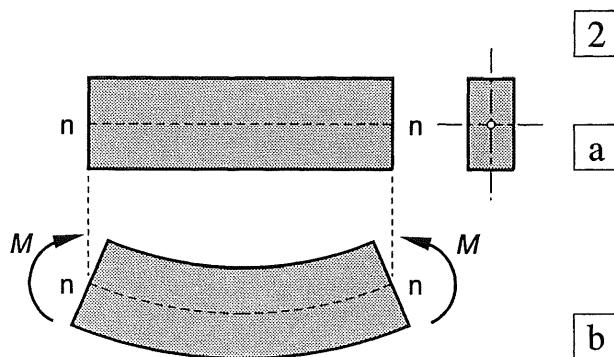


Fig. 2 Vervormingen bij zuivere buiging

- a. Onbelaste rechthoekige balk met doorsnede
- b. Balkvorm na belasting  
(sterk overdreven vervormingen)

In fig. 3 is het vervormde balkgedeelte uit fig. 2b nogmaals weergegeven. De begrenzingslijnen aan de linker- en rechterzijde zijn nu doorgetrokken tot ze elkaar in een punt M snijden; het middelpunt van de cirkelbogen. De afstand  $R$  van punt M tot de neutrale lijn n-n wordt hierbij aangeduid als de *kromtestraal*.

De lengte van zowel de bovenvezel b-b als van de ondervezel o-o van dit cirkelvormige balkgedeelte kan dan gemakkelijk worden berekend. De hoek  $\varphi$  wordt hierbij weergegeven in radianen.

$$\text{lengte (b-b): } (R - h/2) * \varphi$$

$$\text{lengte (n-n): } R * \varphi$$

$$\text{lengte (o-o): } (R + h/2) * \varphi$$

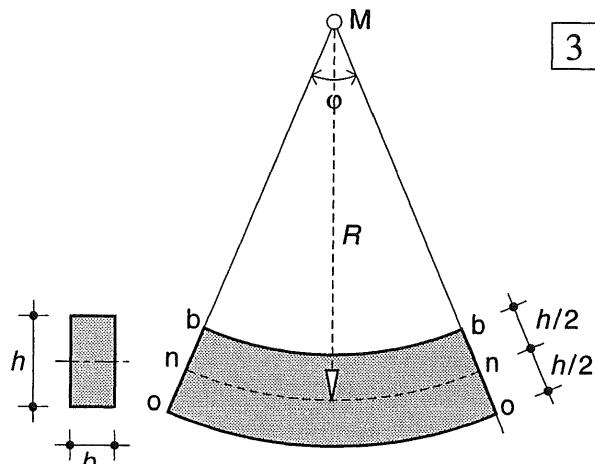
De rekken in deze drie vezels volgen dan uit de definitie van rek volgens formule [414-(8)]:

$$\varepsilon_{(b-b)} = \frac{\{(R - h/2) - R\} * \varphi}{R * \varphi} = - \frac{h/2}{R}$$

$$\varepsilon_{(n-n)} = \frac{\{R - R\} * \varphi}{R * \varphi} = 0$$

$$\varepsilon_{(o-o)} = \frac{\{(R + h/2) - R\} * \varphi}{R * \varphi} = + \frac{h/2}{R}$$

De rekken verlopen dus lineair over de hoogte van de balk en zijn omgekeerd evenredig met de grootte van de kromtestraal  $R$ .



3

Fig. 3 Bepaling van de vervormingen bij een mocht van een balk die is onderworpen aan een constant buigend moment, waardoor de balk een cirkelvorm aanneemt

### 19.4.2 SPANNINGSVERDELING IN EEN RECHTHOEKIGE DOORSNEDE

Als de rekken lineair over de hoogte verlopen, volgt uit formule [414-(9)], dat ook de spanningen lineair over de hoogte moeten verlopen, zoals is weergegeven in fig. 1a.

Ook bij zuivere buiging van een ligger of staaf hebben we te maken met een lijnspanningstoestand; alle resulterende spanningen zijn weer evenwijdig aan één lijn: de staafas [410].

De grootte van de spanningen kan worden bepaald uit de voorwaarde dat het koppel dat alle spanningskrachtkjes tezamen leveren, gelijk zal moeten zijn aan het buigend moment  $M$ .

We beginnen met de eenvoudige afleiding voor een rechthoekige doorsnede (dus met twee symmetrie-assen), op een geheel overeenkomstige manier als bij het verend ondersteunde blok in KW-0 [060-061].

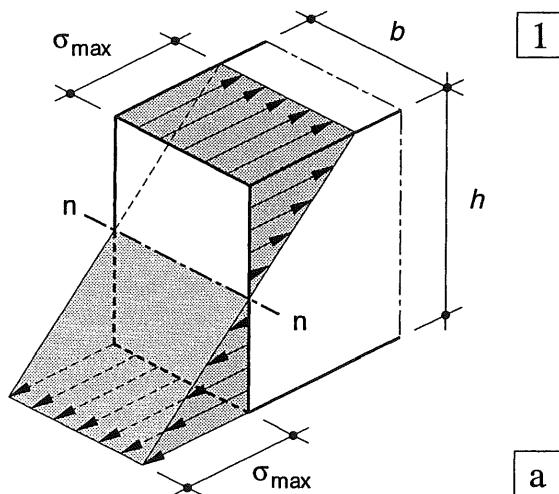
Voor doorsneden, die één of meer symmetrieassen bezitten wordt in [422-426] een formele afleiding gegeven die geldig is voor alle doorsnedenvormen. In [443-451] daarentegen wordt een meer visuele methode besproken, die nauw verband houdt met de aanpak in [420-421].

De laatste methode geldt echter alleen voor samengestelde *rechthoekige* doorsneden.

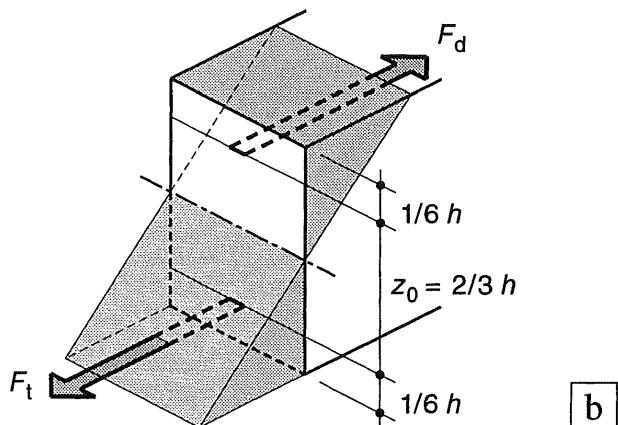
Allereerst bepalen we uit de spanningsfiguur de totale grootte van de resulterende druk- en trekkracht. Deze krachten volgen uit de inhouden van de desbetreffende spanningsfiguren boven en beneden de neutrale lijn n-n, zie fig. 1a,b.

$$F_d = F_t = \frac{1}{2} \sigma_{\max} b \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \sigma_{\max} bh \quad (11)$$

De resulterende druk- en trekkracht gaan door de zwaartepunten van de bijbehorende spanningsfiguren; ze grijpen aan op  $1/3$  van de halve hoogte vanaf de neutrale lijn, dus op afstanden  $h/6$  vanaf de boven- en onderzijde van de doorsnede, zie fig 1b en fig. 2a, b. De afstand tussen beide krachten bedraagt dan  $z_0 = 2/3 h$ . Deze afstand  $z_0$  wordt de *inwendige hefboomsarm* genoemd.



1



b

Fig. 1 Spanningsverdeling in een rechthoekige doorsnede bij zuivere buiging  
 a. Verloop van de spanningen op een liggermootje  
 b. Koppel dat door de spanningen wordt geleverd

Beide krachten leveren tezamen een koppel  $K$ , dat gelijk moet zijn aan het buigend moment  $M$ , dat door alle spanningskrachjes tezamen wordt geleverd. We vinden dan met  $F_d = F_t = F$  volgens formule (11), zie fig. 2:

$$\begin{aligned} K &= F * \frac{2}{3} h = \frac{1}{4} \sigma_{\max} b h * \frac{2}{3} h = \\ &= \frac{1}{6} \sigma_{\max} b h^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Aangezien geldt:  $M = K$   
volgt uit formule (12):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{\frac{1}{6} b h^2} = \frac{M}{W} \quad (13)$$

De term  $1/6 b h^2$  wordt aangeduid als:

Weerstandsmoment  $W$ .

Het is de grootheid waardoor we het buigend moment  $M$  moeten delen om de spanningen in de uiterste vezels te vinden.

De waarde  $W = 1/6 b h^2$  geldt alleen voor een rechthoek met zijden  $b$  en  $h$ , waarbij de spanningen in de  $b$ -richting constant blijven en in de  $h$ -richting lineair verlopen.

De formules voor de maximale spanning ten gevolge van normaalkracht en buiging hebben nu een vergelijkbare opbouw gekregen:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \quad \sigma_b = \frac{M}{W}$$

Beide snedekrachten moeten door hun bijbehorende doorsnede-grootheid worden gedeeld om de maximale spanning te vinden.

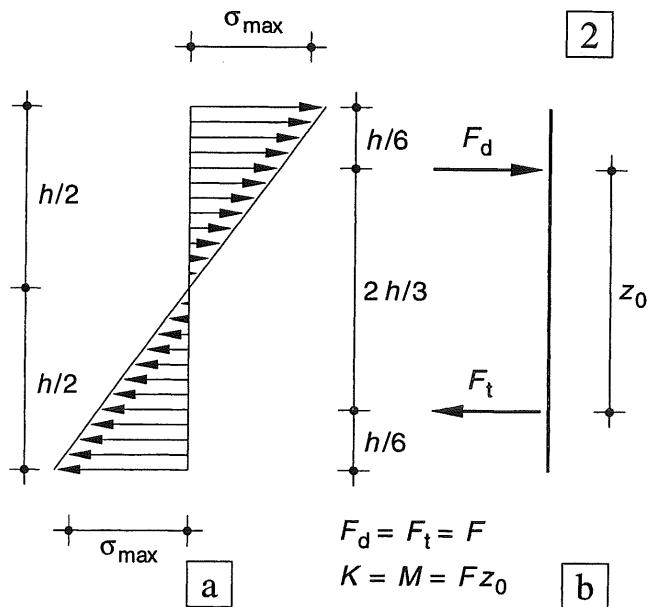


Fig. 2 Bepaling van de extreme buigspanningen

- a. Spanningsverdeling
- b. Grootte van het daaruit volgende koppel (= buigend moment)

Let op:

Voor het weerstandsmoment van een rechthoekige doorsnede is hiernaast de formule  $W = 1/6 b h^2$  afgeleid.

Bij samengestelde rechthoekige doorsneden kan het weerstandsmoment *nooit* worden bepaald als de superpositie van de weerstandsmomenten van de afzonderlijke delen.

Dit moet altijd verlopen via het kwadratische oppervlaktemoment volgens de formules [427 - (28)].

Bij de bepaling van zowel lineaire als kwadratische oppervlakte-momenten en ook bij buigende momenten kan het superpostiebeginsel wèl worden toegepast. In dit opzicht is het weerstandsmoment maar een bastaardmoment.

### 19.4.3 ALGEMENE FORMULES VOOR DE VERVORMINGEN

De afleiding is opgezet voor het meest voorkomende geval waarbij een balk in lengterichting een verticaal symmetrievlak bezit en de momentvector loodrecht op dit symmetrievlak staat, zie fig. 1a. Voor het merendeel van de gevallen houdt dit in dat de belasting verticaal is. Als we even afzien van de invloed van de dwarscontractie [414] (en KW-0 [095]), dan treden voor dit geval uitsluitend vervormingen op in vlakken die evenwijdig zijn aan dit symmetrievlak. Daaruit volgt weer dat we kunnen volstaan met het beschouwen van de vervormingen in het symmetrievlak.

Indien de dwarsdoorsnede geen symmetrie-as bezit, wordt het bepalen van de spanningsverdeling een stuk gecomplieerder. Dit valt buiten het kader van KW-4.

Wie echter in bepaalde situaties genoodzaakt is, zich hiermee toch bezig te houden, kan wat meer informatie vinden in paragraaf 19.7 [440-442].

Ter bepaling van de gedachte beschouwen we een prismatische balk die een T-vormige dwarsdoorsnede bezit, zie fig. 1a, b.

De ligging van de neutrale lijn n-n kan nu niet zonder meer worden aangegeven, zoals bij een rechthoekige doorsnede. De neutrale lijn in elke dwarsdoorsnede van de balk zal uit symmetrieverwegingen echter horizontaal moeten zijn. Bij buiging blijken vlakke doorsneden weer vlak te blijven en onder invloed van een constant buigend moment moet de balk dus weer een cirkelvorm aannemen, zie fig. 2b.

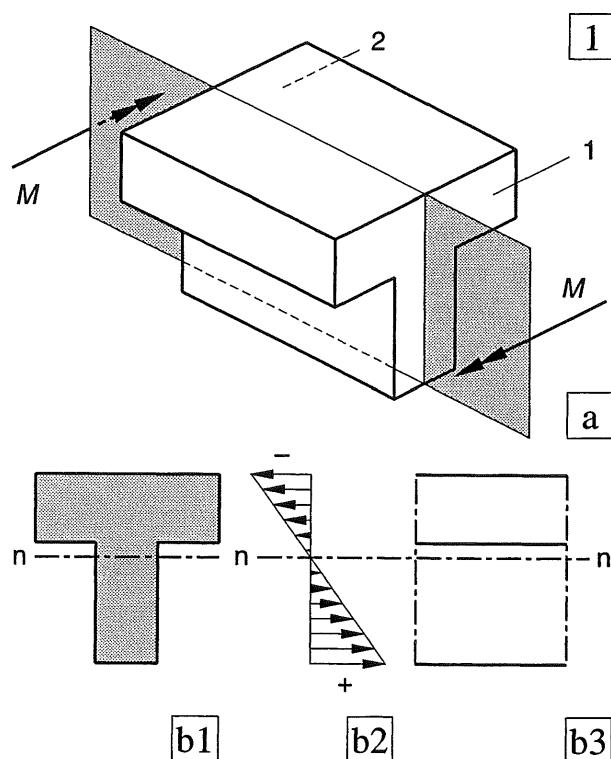


Fig. 1 Buiging van een T-balk

- a. Balk met een verticaal symmetrievlak, waarvan een mocht is onderworpen aan zuiver buigende momenten
- b1 Doorsnede,
- b2 Spanningsverdeling werkend op doorsnede 1 van fig. 1a,
- b3 Zijaanzicht van de balk met ligging van de neutrale lijn n-n

In fig. 2a is een balkgedeelte getekend met een lengte  $2a$ . De neutrale lijn ligt op een (voorlopig nog onbekende) afstand  $z_b$  beneden de bovenzijde van de balk. We beschouwen vervolgens een vezel op een afstand  $z$  beneden de neutrale lijn n-n. In fig. 2b is het vervormde balkgedeelte getekend, waarbij de vervormingen weer sterk zijn overdreven. Voor de werkelijke kleine vervormingen mag daarom de projectie van de cirkelboog  $A'-O'-B'$  worden gelijkgesteld aan de oorspronkelijke lengte  $A-O-B = 2a$ , vergelijk hiertoe fig. 2b met fig. 2a.

De lengte van de cirkelboog  $O'-B'$  is gelijk aan  $R \varphi$ ; de lengte van de beschouwde vezel is gelijk aan  $(R + z) \varphi$ , zodat de rek gelijk is aan:

$$\varepsilon(z) = \frac{\Delta a}{a} = \frac{z * \varphi}{R * \varphi} = \frac{z}{R} \quad (14)$$

Met de schrijfwijze  $\varepsilon(z)$  wordt bedoeld dat het verloop van  $\varepsilon_x$  wordt beschouwd als functie van de  $z$ -richting.

De kromming van de balk – dat wil zeggen; de mate waarin de balk 'rond' gaat staan – wordt gedefinieerd als:

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} \quad (15)$$

Dit is dus de toename van de hoekverdraaiing van het beschouwde balkgedeelte, gedeeld door de lengte van de neutrale lijn van het (gebogen) balkgedeelte. Voor de halve balkmoot die is weergegeven in fig. 2b geldt dus dat de kromming  $\kappa$  (kappa) exact gelijk is aan:

$$\kappa = \frac{\varphi}{R * \varphi} = \frac{1}{R} \quad (16)$$

De kromming  $\kappa$  is dus gelijk aan de reciproke waarde van de kromtestraal  $R$ .

Aan de hand van de vervormingen kunnen de optredende spanningen in de doorsnede worden bepaald. In [424] wordt onderzocht aan welke voorwaarden moet worden voldaan, om te zorgen dat de doorsnede geen normaalkracht overbrengt maar alleen een zuiver buigend moment.

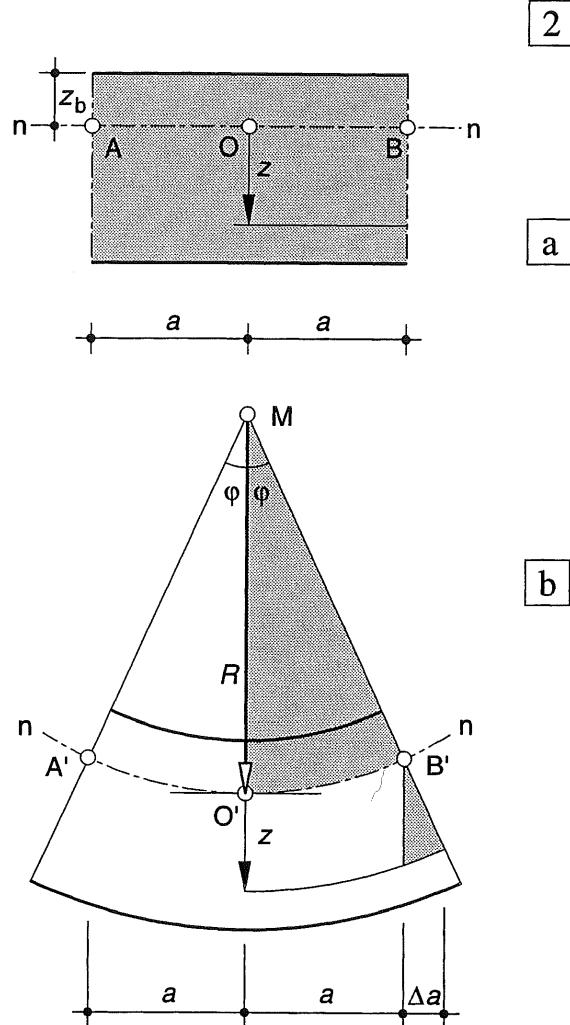


Fig. 2 Vervorming van een balkmoot ter lengte  $2a$  bij zuivere buiging

- a. Zij-aanzicht onvervormde mocht; de afstand  $z$  wordt gemeten vanaf de neutrale lijn; maar de ligging hiervan moet nog worden bepaald
- b. Zijaanzicht van de vervormde balkmoot met de grootte van de kromtestraal  $R$

## 19.4.4 EVENWICHTSVOORWAARDEN

*Normaalkracht*

Indien alleen een zuiver buigend moment op een doorsnede werkt, moet de resultante van alle spanningskrachjes gelijk zijn aan nul. Dit levert de voorwaarde, zie fig. 1:

$$N = \int_A \sigma \, dA = 0 \quad (17)$$

De grootheid  $A$  bij het integraalteken betekent dat over het gehele oppervlak  $A$  moet worden geïntegreerd.

In formule (17) vervangen we nu eerst de spanning door de rek volgens formule (9):  $\sigma = E \varepsilon$ . Vervolgens substitueren we de rek  $\varepsilon$  weer vanuit de geometrische betrekking [423-(14)].

Dit levert:

$$\int_A E \varepsilon(z) \, dA = \int_A E \frac{z}{R} \, dA = 0 \quad (17a)$$

Aangezien de grootheden  $E$  en  $R$  constant zijn en alleen  $z$  maar als onafhankelijk variabele voorkomt, kunnen de eerste twee grootheden vóór het integraalteken worden gebracht. Uit (17a) volgt dan als eerste voorwaarde bij zuivere buiging:

$$\int_A z \, dA = 0 \quad (18)$$

Deze integraal wordt gedefinieerd als:  
*lineair oppervlaktemoment* van de doorsnede en weergegeven door het symbool  $S$ .

$$\int_A z \, dA = S \quad (19)$$

In [429] zal blijken dat voorwaarde:  $S = 0$  inhoudt dat de neutrale lijn n-n door het zwaartepunt van de doorsnede gaat.

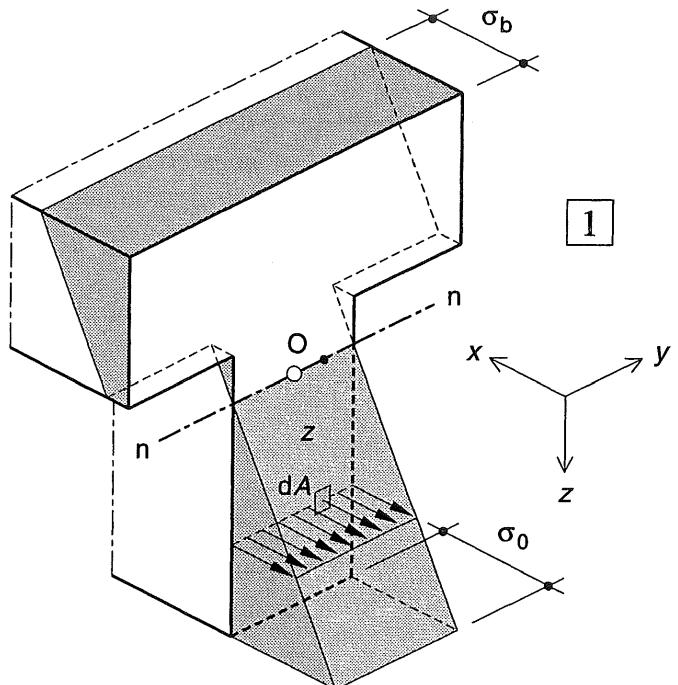


Fig. 1 Spanningsverloop over de doorsnede voor:

- de bepaling van de normaalkracht  $N$
- de bepaling van het buigend moment  $M$  om de neutrale lijn n-n

NB De optredende spanningen en rekken in de normale doorsnede hebben allemaal betrekking op de  $x$ -richting:  $\sigma_x, \varepsilon_x$

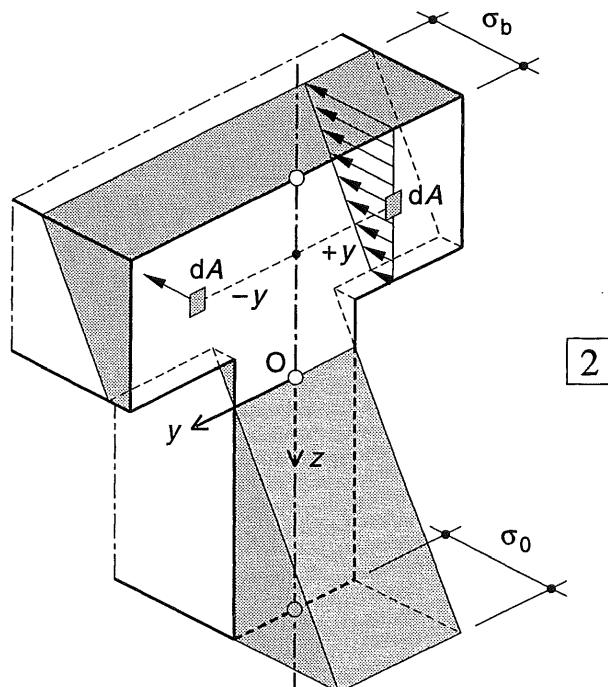


Fig. 2 Controle of er een buigend moment om de  $z$ -as optreedt

### Buigend moment om de y-as

Als tweede voorwaarde kunnen we invoeren dat het statisch moment dat door alle spinningskrachjes gezamenlijk wordt geleverd, gelijk moet zijn aan het buigende moment dat de doorsnede moet overbrengen.

$$M_y = \int_A \sigma \, dA \, z \quad (20)$$

Op dezelfde wijze als in formule (17) substitueren we weer de formules (9) en (14).

We vinden dan achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma * z \, dA = \int_A E \varepsilon(z) * z \, dA = \\ &= \int_A E \frac{z}{R} z \, dA = \frac{E}{R} \int_A z^2 \, dA \quad (20a) \end{aligned}$$

Als *kwadratisch oppervlaktemoment*  $I_y$  van de doorsnede om de y-as wordt nu gedefinieerd:

$$\int_A z^2 \, dA = I_y \quad (21)$$

De grootheid  $I$  zal in principe voor iedere doorsnedeform apart moeten worden berekend.

Regels om dit te doen worden verstrekt in [432 t/m 439]. In de hierna volgende formules zijn de indices, die aangegeven om welke as het moment wordt opgemaakt, veelal weggelaten als de tekst voor zichzelf spreekt. Substitutie van formule (21) (onder index  $y$ ) in (20a) levert:

$$M = \frac{EI}{R} \quad (22)$$

De term  $EI$  wordt als *buigstijfheid* aangeduid, ze komt voor in alle doorbuigingsformules van liggers in KW-5.

In de bovenstaande vorm is er met de buigingsformule nog niet zo veel te beginnen, daartoe wordt ze in [426] in een gemakkelijker te hanteren vorm gebracht.

### Buigend moment om de z-as

Als controle zullen we vervolgens nagaan of het statisch moment dat door alle spinningskrachjes om de z-as wordt geleverd, inderdaad gelijk is aan nul, zoals we bij dit symmetrische profiel mogen verwachten. Hoewel dit in eerste instantie een triviale bezigheid lijkt, volgt hieruit toch een belangrijk gegeven.

De genoemde voorwaarde luidt, zie fig. 2:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma * y \, dA = \int_A E \varepsilon(z) * y \, dA = \\ &= \int_A E \frac{z}{R} y \, dA = \frac{E}{R} \int_A y z \, dA \quad (23) \end{aligned}$$

We definiëren nu als het *oppervlakte product*:

$$\int_A y z \, dA = I_{yz} \quad (24)$$

Het moment om de z-as kan dus alleen maar nul zijn als het oppervlakteproduct  $I_{yz} = 0$ .

Uit fig. 2 blijkt dat dit bij doorsneden met minstens één symmetrie-as altijd het geval is. Elk aandeel van een oppervlakte-deeltje links van de symmetrie-as valt immers weg tegen het symmetrische oppervlakte-deeltje rechts van de symmetrie-as.

Maar dit houdt tegelijkertijd ook het volgende in. Als we de doorsnede in de getekende stand aan een uitwendig buigend moment  $M_z$  onderwerpen, dan zal de neutrale lijn nu samenvalLEN met de z-as, omdat nog steeds geldt dat  $I_{yz} = 0$ . Dit is weergegeven in fig. [426-2].

We noemen de y- en z-as de *hoofdassen* van de doorsnede omdat een belasting in z-richting alleen een doorbuiging in z-richting veroorzaakt met een neutrale lijn in y-richting.

Voor de y-richting geldt een soortgelijk resultaat: een belasting in y-richting veroorzaakt alleen een doorbuiging in y-richting met een neutrale lijn in z-richting.

## 19.4.5 SPANNINGSVERDELING

De spanning in een punt van de doorsnede volgt – evenals in [424] – door achtereenvolgens de formules (9) en (14) te gebruiken, zie fig. 1:

$$\sigma = E \epsilon(z) = E \frac{z}{R} \quad (25)$$

In deze formule kunnen we de kromtestraal  $R$  weer elimineren door substitutie van formule [425-(22)]. We vinden dan:

$$\sigma = \frac{M z}{I} \quad (26)$$

Formule (26) is een van de meest belangrijke formules in de toegepaste mechanica. Hieruit blijkt dat voor de normaalspanningen bij zuivere buiging het volgende geldt:

- de spanningen zijn recht evenredig met het buigende moment  $M$ ,
- de spanningen zijn recht evenredig met de afstand tot de neutrale lijn,
- de spanningen zijn omgekeerd evenredig met het kwadratisch oppervlaktemoment.

De elasticiteitsmodulus  $E$  heeft dus geen invloed op de spanningsverdeling, maar heeft wel invloed op de grootte van de vervorming, in dit geval dus de kromming. Volgens formule (16) geldt immers:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (27)$$

De kromming is recht evenredig met het buigend moment  $M$  en omgekeerd evenredig met de buigstijfheid  $EI$ .

Zowel bij zuivere trek of druk als bij zuivere buiging ontstaan in de normale doorsnede alleen *normaalspanningen*, volgens de definitie van [408].

In het *spraakgebruik* worden de normaalspanningen ten gevolge van de normaalkracht  $N$  altijd als *normaalspanningen* aangeduid, maar de normaalspanningen ten gevolge van het buigen-de moment  $M$  meestal als *buigspanningen*.

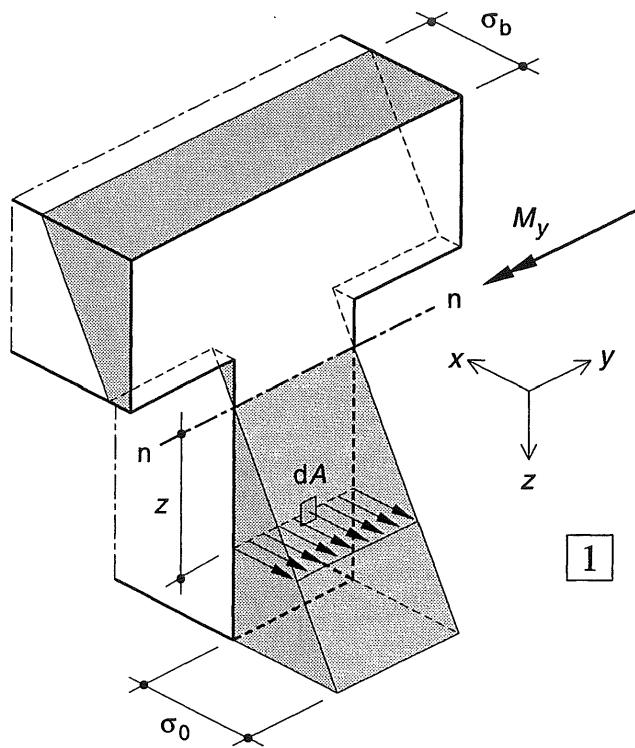


Fig. 1 Spanningsverdeling in een normale doorsnede van een T-balk ten gevolge van  $M_y$   
 $\sigma_x = M_y * z / I_y$

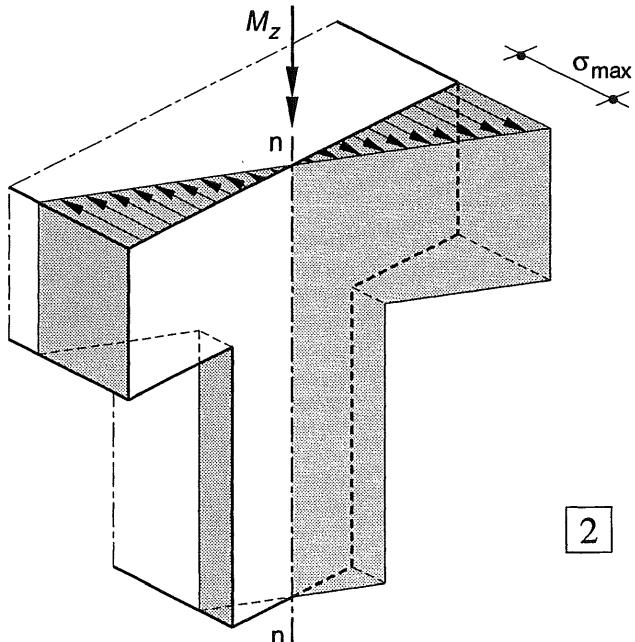


Fig. 2 Spanningsverdeling in een normale doorsnede van een T-balk ten gevolge van  $M_z$   
 $\sigma_x = M_z * y / I_z$

#### 19.4.6 WEERSTANDSMOMENT

Het verloop van de normaalspanningen (buigspanningen) over de hoogte van de dwarsdoorsnede is direct te tekenen als de spanningen in de boven- en ondervezel zijn bepaald. Deze spanningen worden benut om de benodigde vorm en afmetingen van een doorsnede vast te stellen zodra de grootte van het buigend moment  $M$  bekend is. Hiertoe worden twee nieuwe grootheden ingevoerd, zie fig. 3:

de *weerstandsmomenten*  $W_{\text{boven}}$  en  $W_{\text{onder}}$  volgens onderstaande formules:

$$\sigma_b = + \frac{M z_b}{I} = \frac{M}{\frac{I}{z_b}} = - \frac{M}{W_b} \quad (28a)$$

$$\sigma_o = + \frac{M z_o}{I} = \frac{M}{\frac{I}{z_o}} = + \frac{M}{W_o} \quad (28b)$$

Bij een positief moment treden aan de bovenzijde drukspanningen op, dit volgt automatisch uit de tweede term van formule (28a), omdat de afstand  $z_b$  als een negatieve waarde moet worden ingevoerd. Evenzo treden aan de onderzijde trekspanningen op, die eveneens rechtstreeks uit de tweede term van formule (28b) volgen, omdat de afstand  $z_o$  nu als een positieve waarde moet worden ingevoerd.

De grootheden  $W_o$  en  $W_b$  worden altijd als positieve grootheden beschouwd; bij toepassing van de formules voor het weerstandsmoment moet men dus altijd even nagaan of men met druk- of trekspanningen te doen heeft.

*Er wordt met nadruk op gewezen, dat formule (26) de algemeen geldige formule is waarmee in elk punt van de doorsnede de buigspanningen kunnen worden bepaald en dat de weerstandsmomenten alléén betrekking hebben op de spanningen in de uiterste vezels van de doorsnede.*

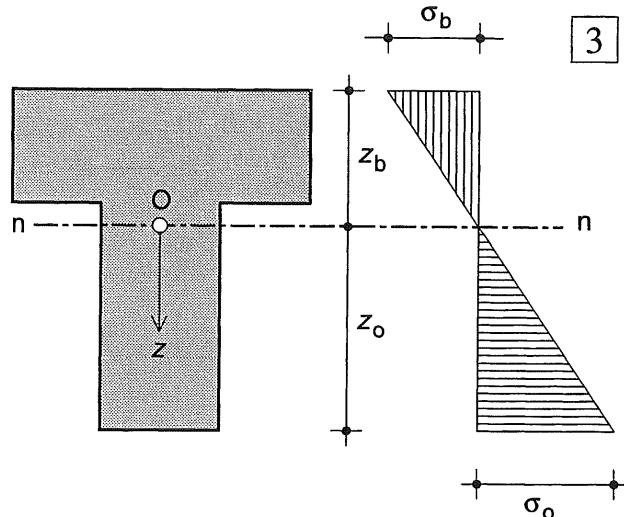


Fig. 3 Bepaling van de spanningen in de uiterste vezels met behulp van weerstandsmomenten

#### 19.4.7 BEPALING VAN DE BENODIGDE DOORSNEDE

Bij het ontwerpen is de overspanning van de ligger bekend evenals de globale grootte van de maximale belasting die op de ligger kan werken. Hieruit volgt dan weer het maximale moment waarop de ligger moet worden berekend volgens de voorschriften. Ook de rekenwaarde voor de sterkte (= de numerieke waarde voor de spanning die wordt gehouden in het bezwijkstadium) kan aan de voorschriften worden ontleend. Met behulp van de formules (28) kunnen dan de benodigde afmetingen worden bepaald.

Voorbeeld: houten balkvloer met overspanning  $l = 5$  m en een balkafstand  $b = 0,6$  m. De belasting in het bezwijkstadium bedraagt  $p = 3 \text{ kN/m}^2$ .

Rekenwaarde voor de buigsterkte (hout):  $f = 10 \text{ N/mm}^2$ .

$$M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} p b l^2 = \frac{1}{8} 3 * 0,6 * 5^2 = \\ = 5,625 \text{ kNm} = 5625 * 10^3 \text{ Nmm}$$

De balkdoorsnede is rechthoekig:  $b \times h$  zodat geldt:

$$W = 1/6 * bh^2. \text{ Uit (28) volgt dan als vereist weerstandsmoment: } W = M/f = 5625 * 10^3 / 10 = 562500 \text{ mm}^3.$$

Bij een gegeven balkbreedte  $b$  (gekozen als  $b = 75$  mm) volgt de benodigde hoogte  $h$  uit:

$$h = \sqrt{6 W / b} = \sqrt{6 * 562500 / 75} = 212 \text{ mm}$$

De handelsmaten voor  $h$  variëren van 100 tot 225 mm, opklimmend met 25 mm; alleen  $h = 225$  mm voldoet.

## 19.5.1 ALGEMEEN

Om de normaalspanningen in een normale doorsnede te kunnen berekenen, is in 19.3 en 19.4 gebruik gemaakt van de volgende doorsnede-grootheden:  $A$  -  $S$  -  $I$  -  $W$ .

Bij deze berekeningen wordt consequent het volgende assenkruis toegepast, zie fig. 1a:

$x$ -as: langs de staafas

$y$ -as: in het vlak van de normale doorsnede, liefst horizontaal

$z$ -as: in het vlak van de normale doorsnede, liefst verticaal

*Let op; bij gebruik van tabellenboeken kunnen andere assenkruisen zijn toegepast!*

In onderstaand overzicht zijn – evenals in 19.4 – de grootsheden  $S$  -  $I$  -  $W$  bepaald om de  $y$ -as, zodat in  $z$ -richting wordt geïntegreerd.

Bepaalt men de grootsheden om de  $z$ -as, dan moet in  $y$ -richting worden geïntegreerd. In de hierna volgende formules dienen dan de  $y$ - en  $z$ -coördinaat te worden verwisseld.

Oppervlakte:

$$A = \int_A dA$$

Lineair oppervlaktemoment

$$S_y = \int_A z dA$$

Kwadratisch oppervlaktemoment

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Weerstandsmoment:

$$W_b = I_y / z_b$$

$$W_o = I_y / z_o$$

Hierboven is de terminologie gebruikt volgens NEN 6701 (KW-0 [070]). In de praktijk wordt echter nog veelvuldig gebruik gemaakt van de vroegere kortere benamingen:

$S$  = *Statisch moment*

$I$  = *Traagheidsmoment*

In principe kan een willekeurig gevormde doorsnede in rechthoekige moten worden verdeeld, en kunnen  $A$ ,  $S$  en  $I$  worden bepaald vanuit de sommatie van deze moten, zie fig. 1b.

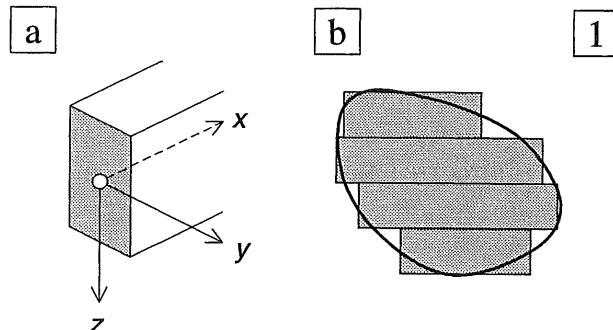


Fig. 1 Prismatische staaf

a. Assenkruis

b. Doorsnede vervangen door rechthoekige moten

De meeste doorsnedevormen kunnen echter eenvoudiger worden berekend als de som of het verschil van enkele rechthoeken, driehoeken of cirkels, zie fig. 2.

In 19.5 [432-439] zijn alle doorsnede-grootsheden op zuiver formele weg afgeleid, waarbij we ons beperken tot rechthoeken, driehoeken en cirkels. Aangezien veel studenten zich maar moeilijk een voorstelling kunnen maken van het kwadratisch oppervlaktemoment, is een meer tot de verbeelding sprekende afleiding gegeven in 19.8 [443-451], die alleen geldt voor doorsnede-vormen die uit rechthoeken zijn samengesteld.

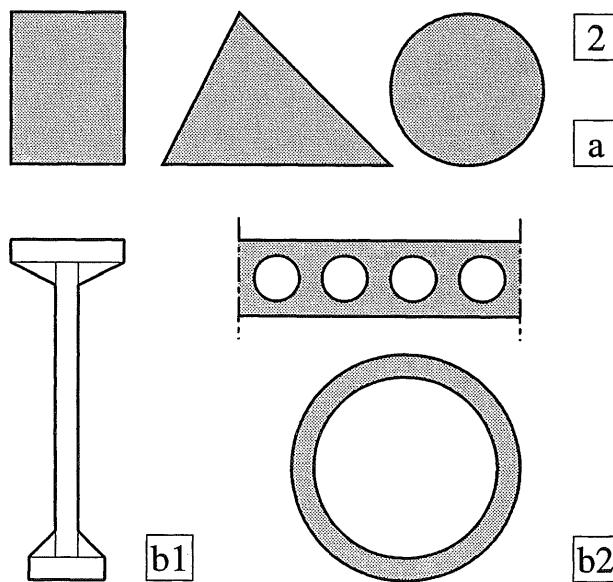


Fig. 2 Basis-doorsnedevormen (a) en Samengestelde doorsnedevormen (b)  
b1, b2 Optellen, resp. aftrekken van basisvormen

### 19.5.2 LINEAIR OPPERVAKTEMOMENT EN ZWAARTEPUNT

We beschouwen een dwarsdoorsnede van willekeurige vorm, waarvan we het zwaartepunt willen bepalen, zie fig. 1a. Daartoe brengen we eerst een willekeurig hulp-assenkruis  $y'-z'$  aan.

We beschouwen vervolgens een oppervlakte-elementje  $dA$  en maken hiervan het statisch moment op om de  $z'$ -as.

Dit is dus het product van het oppervlakje  $dA$  en de afstand  $y'$  tot de  $z'$ -as. Het statisch moment van het gehele oppervlak wordt aangeduid als het *lineaire oppervlaktemoment*  $S_{z'}$

$$S_{z'} = \int_A y' dA \quad (29)$$

Als het gehele oppervlak rechts van de  $z'$ -as ligt, zijn alle bijdragen aan het lineaire oppervlaktemoment positief; ligt ook een gedeelte links van de  $z'$ -as, dan is de bijdrage daarvan negatief.

We denken ons het oppervlak  $A$  nu in één punt geconcentreerd en gaan na op welke afstand dit punt vanaf de  $z'$ -as moet zijn gelegen, om hetzelfde lineaire oppervlaktemoment te verkrijgen als zojuist in (29) is berekend. Als we deze afstand gelijk stellen aan  $y'_0$ , moet dus gelden:  $A * y'_0 = S_{z'}$ . Hieruit volgt, zie fig. 1b:

$$y'_0 = \frac{S_{z'}}{A} \quad (30a)$$

De lijn evenwijdig aan de  $z'$ -as, maar op een afstand  $y'_0$  daarvan verwijderd, wordt aangeduid als een *zwaartelijn* van de doorsnede. Deze lijn zullen we vervolgens beschouwen als de 'echte'  $z$ -as (die zonder accent wordt aangegeven).

Op overeenkomstige wijze ligt er een tweede zwaartelijn op een afstand  $z'_0$  vanaf de  $y'$ -as, waarvan de afstand volgt uit :

$$z'_0 = \frac{S_{y'}}{A} \quad (30b)$$

Het snijpunt  $O$  van de twee zwaartelijnen wordt het *zwaartepunt* van de doorsnede genoemd.

*Alle zwaartelijnen van een doorsnede gaan door hetzelfde punt; het zwaartepunt O.*

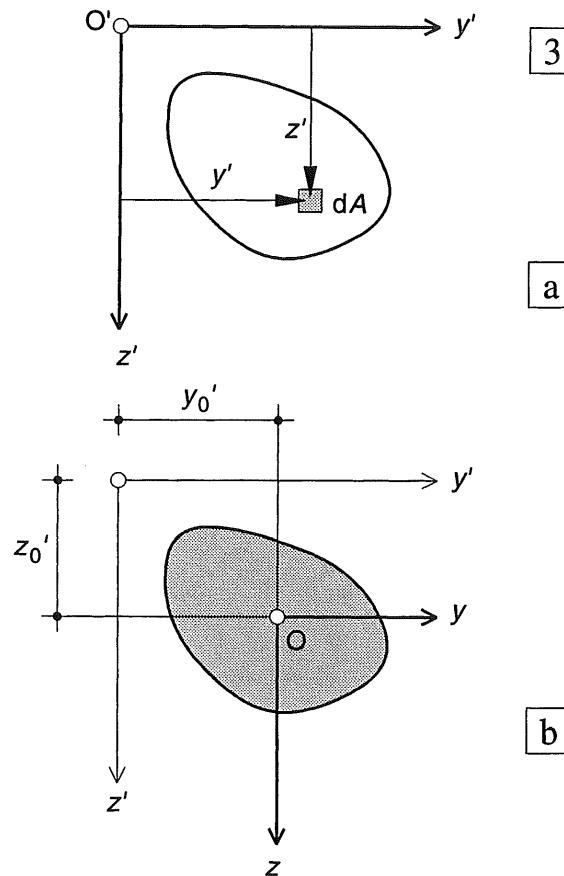


Fig. 1 Bepaling van het lineaire oppervlaktemoment

- a. Invoering van een hulpassenkruis  $y'-z'$
- b. Bepaling van het zwaartepunt O van de doorsnede (= oorsprong  $y-z$ -assenkruis)

Als we proefondervindelijk het zwaartepunt van een doorsnede willen bepalen, kunnen we een plak karton met de vorm van de doorsnede laten balanceren op de smalle kant van een lineaal, zie fig. 4. Deze evenwichtsstand van de lineaal geeft dan één van de oneindig vele zwaartelijnen weer. Als we dit herhalen voor een andere stand van de doorsnede dan geeft het snijpunt van beide zwaartelijnen het zwaartepunt aan.

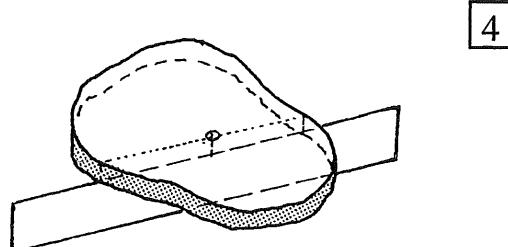


Fig. 4 Het visualiseren van een zwaartelijn van een willekeurige doorsnede

### 19.5.3 KWADRATISCH OPPERVLAKTEMOMENT ALS FUNCTIE VAN DE AFSTAND TOT DE AS

We gaan uit van een willekeurige doorsnede, waarvan de ligging van het zwaartepunt bekend is. Er wordt nu een  $y$ - $z$ -assenkruis aangebracht, met dit zwaartepunt  $O$  als oorsprong, zie fig. 1. Voorts wordt een tweede assenkruis  $y'$ - $z'$  met oorsprong  $O'$  aangebracht. Hierbij geldt:

$$y' = y + y'_0$$

$$z' = z + z'_0$$

Het kwadratisch oppervlaktemoment om de  $y'$ -as is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \int_A z'^2 dA = \int_A (z + z'_0)^2 dA = \\ &= \int_A z^2 dA + 2z'_0 \int_A z dA + z'_0^2 \int_A dA \end{aligned} \quad (31a)$$

De eerste term achter het laatste gelijkteken wordt aangeduid als: het *eigen* kwadratisch oppervlaktemoment  $I_y$  van de doorsnede; dat wil zeggen: t.o.v. een as door het zwaartepunt. De integraal van de tweede term is gelijk aan het lineaire oppervlakte-moment  $S_y$  om een zwaartelijn en is dus gelijk aan nul. De integraal van de derde term geeft het oppervlak van de doorsnede weer. Formule (31a) kan dan ook als volgt worden geschreven:

$$I_{y'} = I_y + z'_0^2 A \quad (31)$$

Formule (31) wordt aangeduid als:  
*de Regel van Steiner.*

Het kwadratisch oppervlaktemoment om een willekeurige as is gelijk aan het (*eigen*) kwadratisch oppervlakte-moment om een evenwijdige as door het zwaartepunt, vermeerderd met het product van het oppervlak van de doorsnede en het kwadraat van de afstand tussen de assen.

De regel wordt veel gebruikt om het kwadratisch oppervlaktemoment van samengestelde doorsneden te bepalen.

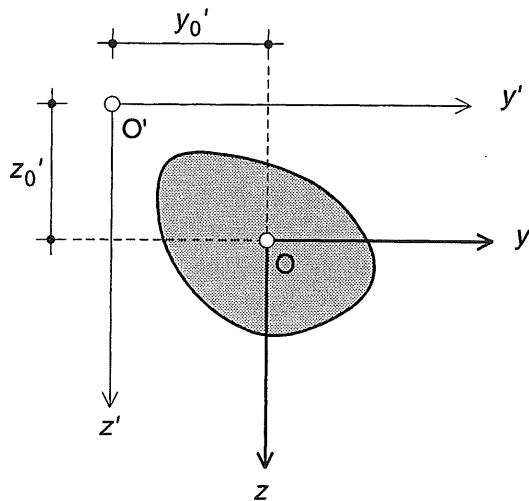


Fig. 1 Hulpassenkruis  $y'-O'-z'$  tezamen met het assenkruis  $y-O-z$  door het zwaartepunt  $O$  van de doorsnede

□ Voor het oppervlakteproduct geldt:

$$\begin{aligned} I_{y'z'} &= \int_A y' z' dA = \\ &= \int_A (y + y'_0)(z + z'_0) dA = \\ &= \int_A y z dA + z'_0 \int_A y dA + y'_0 \int_A z dA + \\ &\quad + y'_0 z'_0 \int_A dA \end{aligned} \quad (32a)$$

De eerste integraal op de derde regel is gelijk aan het oppervlakteproduct om het  $y$ - $z$ -assenkruis door het zwaartepunt, de tweede en derde integraal zijn gelijk aan de lineaire oppervlaktemomenten om de  $y$ -as en de  $z$ -as. Beide integralen zijn weer gelijk aan nul.

De vierde integraal op de vierde regel is gelijk aan het oppervlak van de doorsnede.

Uiteindelijk blijft er dus over:

$$I_{y'z'} = I_{yz} + y'_0 z'_0 A \quad (32)$$

Het oppervlakteproduct is alleen maar van belang bij asymmetrische doorsneden [440-442], want bij symmetrische doorsneden is het *eigen* oppervlakteproduct altijd gelijk aan nul.

#### 19.5.4 BEREKENING MET BEHULP VAN INTEGRAALREKENING

De meest voorkomende doorsneden kunnen opgebouwd worden gedacht uit rechthoeken, driehoeken en cirkels. Hoewel een ieder de oppervlakken en zwaartepunten van deze meetkundige figuren zo wel kan omschrijven, zullen ze hier ter wille van de uniformiteit toch met behulp van bepaalde integralen worden berekend. Voor de bepaling van de kwadratische oppervlaktemomenten blijkt het namelijk wél nodig te zijn om integraalrekening toe te passen. In alle gevallen wordt uitgegaan van het oppervlak van een smal mootje, dat vervolgens wordt geïntegreerd tussen de uiterste grenzen.

Vrijwel elke dwarsdoorsnede van een lijnvormig element kunnen we opbouwen uit een aantal rechthoeken en driehoeken, zie fig. [428-1 en 2]. Voor de verdere berekeningen is het zaak om een zodanige onderverdeling te kiezen dat de berekening zo eenvoudig mogelijk wordt, zie bijv. [437-439]. Hoewel bij deze afleidingen strikt met positieve en negatieve asrichtingen moet worden gewerkt, is dit in een verdere fase van de spanningsberekeningen dikwijls maar een moeizame aangelegenheid. Daartoe wordt in de hiernaast liggende kolom op de betrekkelijkheid van dergelijke afspraken ingegaan en worden voorstellen gedaan om met zo eenvoudig mogelijke middelen toch de juiste uitkomsten te kunnen bepalen.

#### *Betrekkelijkheid van tekenafspraken*

Vrijwel de gehele berekening van lineaire constructie-onderdelen speelt zich af in een verticaal plat vlak voor verticale belastingen en in een horizontaal plat vlak voor horizontale belastingen. Als basisformule voor de spanningsberekening ten gevolge van een centrische normaalkracht gelden [410-(2)] dan wel [416-(2a)].

Voor buiging geldt de basisformule [426-(26)]. In bovenstaande formules kunnen de volgende snedekrachten voorkomen: een kracht  $F$  c.q. een normaalkracht  $N$ , en een buigend moment  $M$ . Al deze grootheden zijn voorzien van een teken, en in [452-454] zijn daarover tekenafspraken gemaakt. Ter wille van een zekere uniformiteit hebben deze afspraken hun nut, maar overschat hun betekenis niet !

*Het enige werkelijk belangrijke is of een lijnvormig constructie-onderdeel onder trek of druk staat en wat de draairichting is van de daarop werkende momenten (dit volgt direct uit het buigteken van de momentenlijn).*

*Uit deze gegevens volgt éénduidig het teken van de spanningen, waarbij we trekspanningen altijd met een positief teken zullen invoeren en drukspanningen altijd met een negatief teken.*

Ook de richting van de momentvectoren ligt éénduidig vast, onverschillig of we daaraan wel of geen teken hebben toegekend.

Bij ingewikkelder gevallen kan het nodig zijn om kracht- of moment-vectoren samen te stellen of te ontbinden, maar ook dit levert altijd eenduidige resultaten.

Bij tekeningen van een doorsnede met in hetzelfde vlak een momentvector, denken we ons deze vector werkend op de achterliggende doorsnede, zodat gemakkelijk kan worden nagegaan waar trekspanningen en waar drukspanningen zullen optreden. De afstand vanaf de neutrale lijn behoeven we dan geen teken meer te geven.

## 19.5.5 RECHTHOEK

In fig. 1a is een rechthoek weergegeven, waarbij de assen van het assenkruis samenvallen met twee zijranden van de rechthoek. In de rechthoek wordt een smal mootje beschouwd ter breedte  $b$  en hoogte  $dz$ . Voor de bepaling van het oppervlak moeten we dus in  $z$ -richting integreren.

## Oppervlak

$$A = \int_0^h b \, dz = [bz]_0^h = bh$$

## Lineair oppervlaktemoment

Het lineaire-oppervlakte-moment (= statisch moment) wordt opgemaakt om de  $y$ -as van fig. 1a en is gelijk aan:

$$S_y = \int_0^h z \, b \, dz = \left[ \frac{1}{2} bz^2 \right]_0^h = \frac{1}{2} bh^2$$

## Ligging zwaartepunt

De ligging van het zwaartepunt volgt dan uit:

$$z_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{2}bh^2}{bh} = \frac{h}{2}$$

Op overeenkomstige wijze ligt er een tweede zwaartelijn evenwijdig aan de  $z$ -as, op een afstand  $y_0 = b/2$  vanaf de  $z$ -as, zie fig. 1a. Beide zwaartelijnen tezamen vormen het verschoven assenkruis van fig. 1b.

## Kwadratisch oppervlaktemoment

Voor de bepaling van de buigspanningen moeten we het kwadratisch oppervlaktemoment opmaken om een as door het zwaartepunt O.

Het bijbehorende assenkruis  $y$ -O-z is weergegeven in fig. 1b. Het kan soms gemakkelijker zijn om de assen te laten samenvallen met de zijranden van de doorsnede, zoals in fig. 1a. Zolang we de assenkruisen van fig. 1a, b niet gelijktijdig gebruiken, zullen we ook het hulpassenkruis van fig. 1a met  $y$ -z aangeven, dus zonder indices. Maar we zullen het kwadratisch oppervlaktemoment dat op zo'n hulpassenkruis betrekking heeft, wel aangeven met  $I'$ .

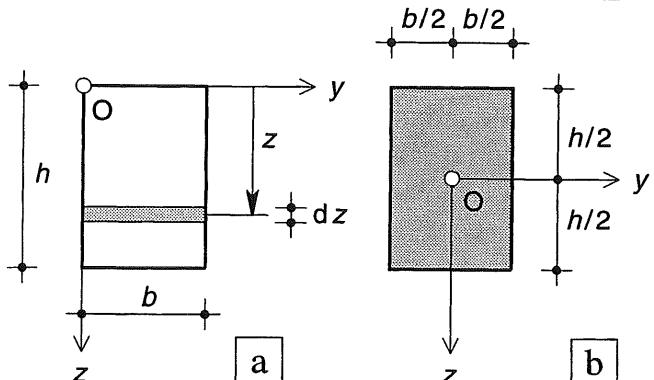


Fig. 1 Rechthoekige doorsnede met assenkruis

- a. Assenkruis langs de zijranden
- b. Assenkruis door het zwaartepunt

Gemakshalve maken we het kwadratisch oppervlaktemoment eerst op om de bovenrand. We vinden dan de volgende waarde, zie fig. 1a:

$$I'_y = \int_0^h z^2 * b \, dz = \left[ \frac{bz^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} bh^3 \quad (33a)$$

Als we het kwadratisch oppervlaktemoment opmaken om de neutrale lijn, moeten we integreren tussen  $-h/2$  en  $+h/2$ . In dit geval volgt, zie fig. 1b:

$$\begin{aligned} I_y &= \left[ \frac{bz^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{1}{24} bh^3 - \frac{1}{24} bh^3 = \\ &= \frac{1}{12} bh^3 \end{aligned} \quad (33b)$$

Het aandeel dat de doorsnede boven de neutrale lijn levert is even groot als het aandeel beneden de neutrale lijn. Beide aandelen moeten positief in rekening worden gebracht. Dit volgt uit het feit dat de term  $z^2 dA$  altijd positief is.

Zoals reeds eerder is vermeld, spreekt men van het *eigen* kwadratisch oppervlaktemoment, als het wordt opgemaakt om een zwaartelijn.

Bovenstaande uitkomsten moeten 'in waken en dromen' kunnen worden gereproduceerd! Daartoe zijn deze formules op de nevenstaande bladzijde omrand.

## SAMENVATTING

Buiging om de y-as

Kwadratisch oppervlaktemoment, opgemaakt om de boven- of onderrand, zie fig. 2a:

$$I'_y = \frac{1}{3} bh^3 \quad (33a)$$

Kwadratisch oppervlaktemoment, opgemaakt om de neutrale lijn, zie fig. 2b:

$$I_y = \frac{1}{12} bh^3 \quad (33b)$$

Buiging om de z-as

Op overeenkomstige wijze volgen bij buiging om de z-as het traagheidsmoment  $I'_z$  om de linker- of rechterzijrand (zie fig. 3a) en het eigen traagheidsmoment  $I_z$  om de (verticale) neutrale lijn (zie fig. 3b).

$$I'_z = \frac{1}{3} hb^3 \quad (34a)$$

$$I_z = \frac{1}{12} hb^3 \quad (34b)$$

Ter controle van beide uitkomsten passen we de Regel van Steiner toe; uit formule [430-(31)] volgt:

$$I_y = I'_y - z_0^2 A \quad (31a)$$

Voor de rechthoek betekent dit:

$$I_y = \frac{1}{3} bh^3 - (\frac{h}{2})^2 * b h = (\frac{4}{12} - \frac{3}{12}) b h^3$$

hetgeen gelijk is aan de waarde van (33b).

Uit de regel van Steiner volgt dat het eigen kwadratisch oppervlaktemoment om de neutrale lijn kleiner is dan om elke andere daaraan evenwijdige lijn. Als we de neutrale lijn dus niet goed bepalen wordt  $I$  te groot in rekening gebracht en dientengevolge de spanning te klein, zie fig. 4.

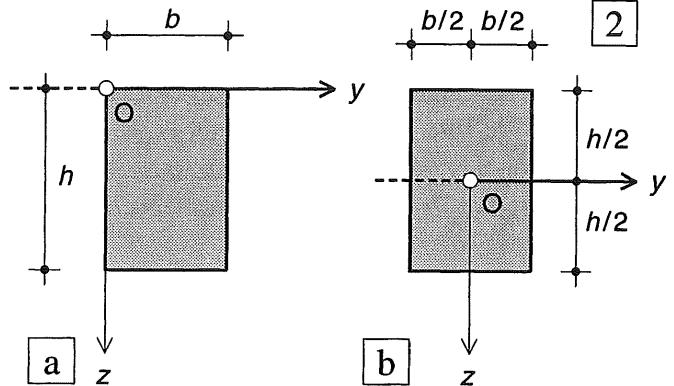


Fig. 2 Kwadratisch oppervlaktemoment opgemaakt:  
a. om de bovenrand  
b. om de y-as (neutrale lijn)

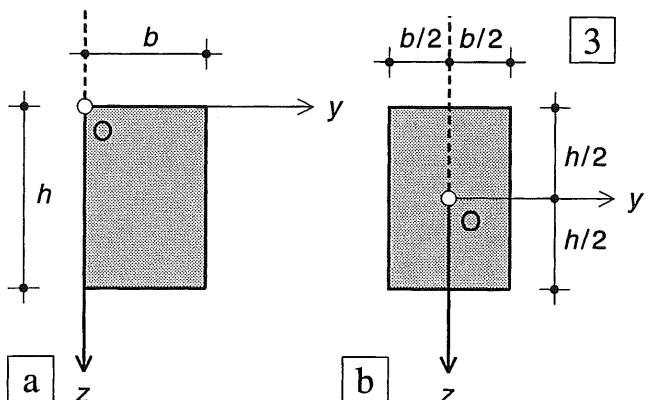


Fig. 3 Kwadratisch oppervlaktemoment opgemaakt:  
a. om een zijrand  
b. om de z-as (neutrale lijn)

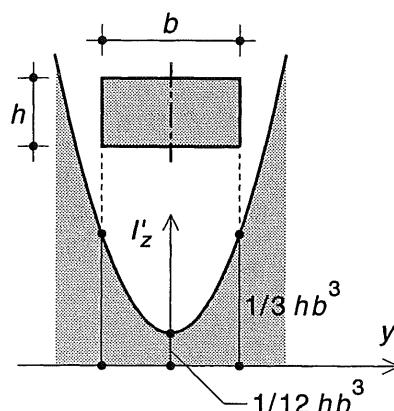


Fig. 4 Kwadratisch oppervlakte-moment  $I'_z$  als functie van de afstand  $y$  tot de zwaartelijn

## 19.5.6 DRIEHOEK

In fig. 1a is een driehoek weergegeven, met één zijde evenwijdig aan de  $y$ -as, terwijl twee hoekpunten van de driehoek op de assen zijn gelegen. Voor de bepaling van het oppervlak wordt geïntegreerd in  $z$ -richting.

*Oppervlak*

$$A = \int_0^h \frac{z}{h} b \ dz = \left[ \frac{b}{h} \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{2} b h$$

*Lineair oppervlakte-moment*

De eenvoudigste manier om het lineaire oppervlaktemoment  $S$  te bepalen, is ten opzichte van een as door de top van de driehoek, die evenwijdig loopt aan de basis, volgens fig. 1a.

$$\begin{aligned} S_y &= \int_0^h z * \frac{z}{h} b \ dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 \ dz = \\ &= \left[ \frac{b}{h} \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^2 \end{aligned}$$

*Ligging zwaartepunt*

De zwaartepuntsafstand  $z_0$  volgt dan uit, zie fig. 1b:

$$z_0 = \frac{S_0}{A} = \frac{\frac{b h^2}{3}}{\frac{1}{2} b h} = \frac{2}{3} h$$

Zoals bekend kunnen we ook de hoekpunten van de driehoek verbinden met de middens van de overstaande zijden, om de drie zwaartelijnen te vinden en bijgevolg ook het zwaartepunt van de driehoek, zie fig. 2.

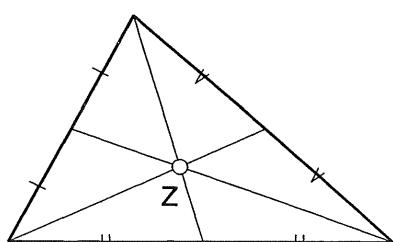
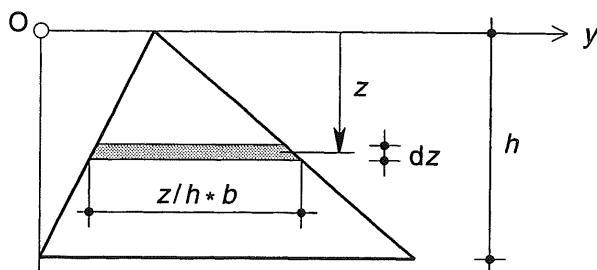
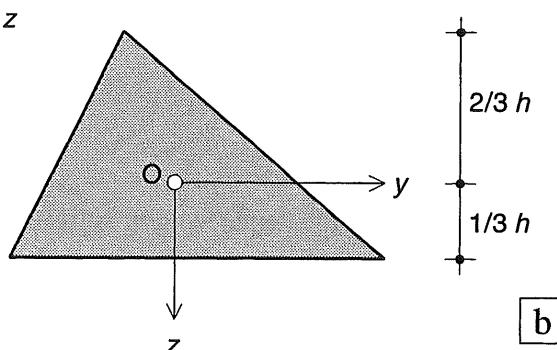


Fig. 2 Grafische bepaling van het zwaartepunt van een driehoek

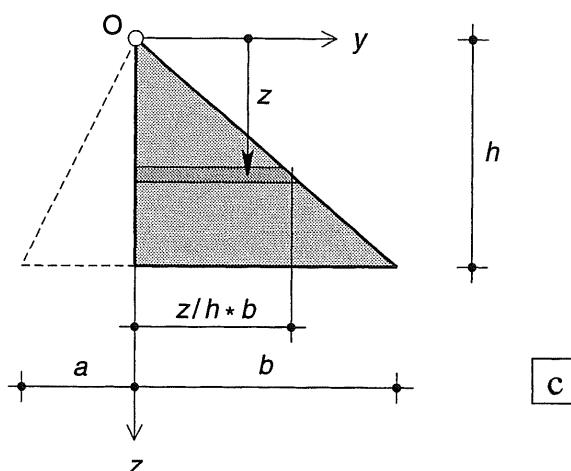
1



a



b



c

Fig. 1 Driehoekige doorsnede

- a. Horizontale as door de top van de driehoek
- b. Horizontale as door het zwaartepunt
- c. Assenkruis door de top van de driehoek voor de bepaling van het oppervlakte-product

### Kwadratisch oppervlakte-moment van een driehoek

Het kwadratisch oppervlaktemoment van een driehoek kan het snelste worden opgemaakt ten opzichte van een horizontale  $y$ -as door de top van de driehoek, zie fig. 1a.

$$\begin{aligned} I'_y &= \int_0^h z^2 * \frac{z}{h} b \, dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^3 \, dz = \\ &= \left[ \frac{b}{4h} z^4 \right]_0^h = \frac{1}{4} b h^3 \end{aligned} \quad (35a)$$

Ten opzichte van een  $y$ -as door het zwaartepunt volgt uit de (herschreven) Regel van Steiner; formule [433-(31a)]:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1}{4} b h^3 - \left( \frac{2}{3} h \right)^2 * \frac{1}{2} b h = \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{9} \right) b h^3 = \frac{1}{36} b h^3 \end{aligned} \quad (35b)$$

Vanuit formule (35b) kan dan weer met behulp van de (oorspronkelijke vorm van de) Regel van Steiner (zie formule[430-(31)]) het kwadratisch oppervlaktemoment om de onderrand van de driehoek worden opgemaakt:

$$\begin{aligned} I''_y &= \frac{1}{36} b h^3 + \left( \frac{1}{3} h \right)^2 * \frac{1}{2} b h = \\ &= \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{18} \right) b h^3 = \frac{1}{12} b h^3 \end{aligned} \quad (35c)$$

### □ Oppervlakte-product

Het oppervlakte-product kan het gemakkelijkst worden opgemaakt om een assenkruis door de top van de driehoek, zie fig. 1c. Met behulp van formule [430-(32)] kan dan het oppervlakte-product ten opzichte van het zwaartepunt worden berekend. Van de driehoek van fig. 1c beschouwen we eerst alleen het gerasterde deel in het 1e kwadrant.

$$\begin{aligned} I'_{yz} &= \int_0^A y z \, dA = \int_0^h \frac{z}{h} \frac{b}{2} * z * \frac{z}{h} b \, dz = \\ &= \int_0^h \frac{b^2}{2h^2} z^3 \, dz = \frac{b^2}{2h^2} \left[ \frac{z^4}{4} \right]_0^h = \frac{1}{8} b^2 h^2 \end{aligned} \quad (36a)$$

Het aandeel in het tweede kwadrant is negatief, zodat voor de gehele driehoek geldt:

$$I'_{yz} = \frac{1}{8} h^2 (b^2 - a^2) \quad (36)$$

### Kwadratisch oppervlakte-moment van een parallelogram

Het eigen kwadratisch oppervlaktemoment van een parallelogram is direct af te leiden uit dat van een rechthoek, zie fig. 3a. Het bedraagt:

$$I_y = \frac{1}{12} b h^3 \quad (37)$$

We kunnen het parallelogram ook splitsen in twee driehoeken en dan de regel van Steiner toepassen, zie hiertoe fig. 3b. De uitkomst is van belang voor (dunwandige) V- en W-vormige doorsneden.

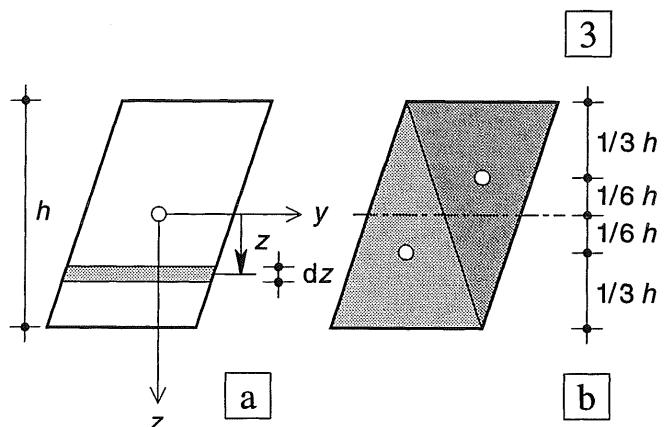


Fig. 3 Parallelogram

- a. Bepaling van het kwadratisch oppervlakte-moment door integratie
- b. Splitsen in twee driehoeken:

$$I_y = 2 * \frac{1}{36} b h^3 + 2 * \frac{bh}{2} \left( \frac{h}{6} \right)^2 = \frac{1}{12} b h^3$$

### 19.5.7 CIRKELVORMIGE DOORSNEDEN

Cirkelvormige doorsneden kunnen voorkomen bij kolommen van beton, metselwerk of hout. Dunwandige buisvormige doorsneden komen voor bij stalen kolommen en soms bij vakwerkliggers, die zijn opgebouwd uit stalen buizen, zie bijv. KW-3, fig. [317-2b]. Bij ruimtevakwerken worden in de meeste systemen eveneens buisprofielen toegepast.

De afleiding is opgezet voor een buisvormige doorsnede; hieruit volgt als limiet de cirkelvormige doorsnede, zie fig. 1a, b.

#### Oppervlak

Buisvormige doorsnede, zie fig. 1a:

$$A = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r dr = [\pi r^2]_{R_1}^{R_2} = \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

Cirkelvormige doorsnede, zie fig. 1b:

De buisvorm gaat over in een cirkelvorm als geldt:

$R_2 = R$  en  $R_1 = 0$ , zie fig. 1b. Hieruit volgt:

$$A = \pi R^2$$

#### Ligging zwaartepunt

Het zwaartepunt valt altijd samen met het middelpunt van de cirkelvormige doorsnede(n).

1

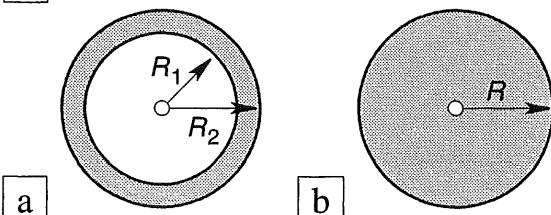


Fig. 1 Cirkelvormige doorsneden  
a. Buisvormige doorsnede  
b. Massieve cirkelvormige doorsnede

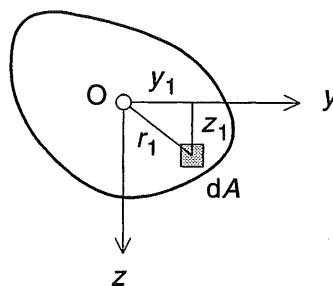
#### Kwadratisch oppervlakte-moment

De kwadratische oppervlakte-momenten om de  $y$ - en  $z$ -as zijn uit symmetrie-overwegingen hetzelfde. Ze kunnen het eenvoudigste worden bepaald door eerst het polaire kwadratische oppervlaktemoment  $I_p$  te berekenen. Dit wordt als volgt gedefinieerd, zie fig. 2:

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (38)$$

Aangezien geldt:  $r^2 = y^2 + z^2$  volgt hieruit:

$$I_p = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y \quad (39)$$



2

Fig. 2 Polair kwadratisch oppervlakte-moment

#### Buisvormige doorsnede

Vooral bij buisvormige doorsneden is de bepaling van  $I_p$  erg gemakkelijk, zie fig. 1a.

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{R_1}^{R_2} r^2 * 2\pi r dr = \left[ \frac{1}{2} \pi r^4 \right]_{R_1}^{R_2} = \\ &= \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) \end{aligned} \quad (40)$$

Uit symmetrie-overwegingen moet dan gelden:

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi (R_2^4 - R_1^4) \quad (41)$$

#### Cirkelvormige doorsnede

$I_p$  volgt uit (40) voor  $R_2 = R$  en  $R_1 = 0$ , zodat geldt

$$I_p = 1/2 * \pi R^4 \quad (40a)$$

en hieruit volgt weer:

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi R^4 \quad (42)$$

### 19.6.1 DOORSNEDEN MET TWEE OF MEER SYMMETRIE-ASSEN

Als zowel de  $y$ -as als de  $z$ -as een symmetriee-as van de doorsnede is, valt het zwaartepunt van de doorsnede samen met het snijpunt van de symmetrieeassen, zodat we het lineaire oppervlaktemoment niet behoeven te berekenen.

Het kwadratisch oppervlaktemoment kan dan worden bepaald als de som of het verschil van de rechthoeken waaruit het profiel is opgebouwd. *Dit systeem werkt wat sneller dan toepassing van de Regel van Steiner.*

In fig. 3 zijn twee voorbeelden gegeven, waarbij zowel  $I_y$  als  $I_z$  is bepaald.

Bij de I-vormige doorsnede van fig. 3a kunnen we het kwadratisch oppervlaktemoment om de  $y$ -as bepalen als het verschil van twee (eigenlijk drie) oppervlakken en het kwadratisch oppervlaktemoment om de  $z$ -as als de som van twee (eigenlijk drie) oppervlakken.

$$I_y = \frac{1}{12} * b h^3 - \frac{1}{12} * (b_1 - b_2) h_2^3$$

$$I_z = \frac{1}{12} * 2h_1 b_1^3 + \frac{1}{12} * h_2 b_2^3$$

De kokervormige doorsnede van fig. 3b kan om beide assen worden opgevat als het verschil van twee oppervlakken.

$$I_y = \frac{1}{12} * b_1 h_1^3 - \frac{1}{12} * b_2 h_2^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} * h_1 b_1^3 - \frac{1}{12} * h_2 b_2^3$$

Als een doorsnede meer dan 2 symmetrieeassen bezit, zal het kwadratisch oppervlaktemoment om minstens 2 symmetrieeassen gelijk moeten zijn, zie fig. 4. Dan is  $I$  constant, onverschillig om welke as het wordt opgemaakt, zie [441-3] ( $I_y = I_z = I$  en  $I_{yz} = 0$ , zodat een puntcirkel ontstaat). De waarde van  $I_y$  voor het vierkant 'op zijn kant' van fig. 5b is dus ook gelijk aan:

$$I_y = \frac{1}{12} * a^4$$

Dit is zo nodig te controleren door het vierkant op te vatten als de som van twee driehoeken (NB; de weerstandsmomenten zijn *niet* gelijk).

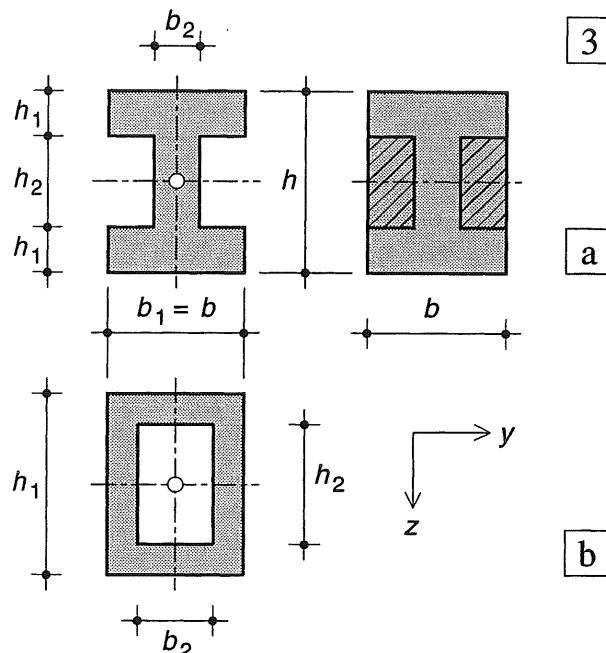


Fig. 3 Doorsneden met twee symmetrieeassen

- a. I-vormige doorsnede
- b. Kokervormige doorsnede

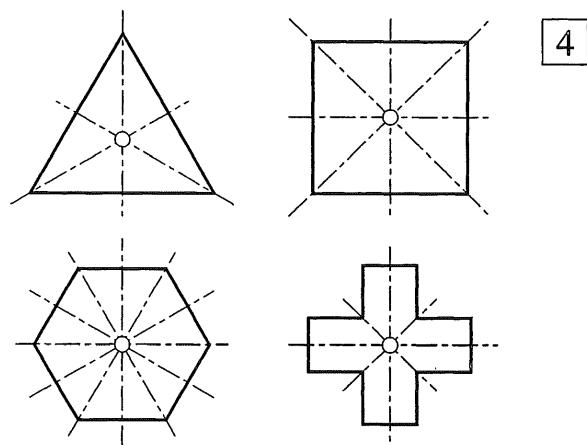


Fig. 4 Doorsneden met meer dan twee symmetrieeassen

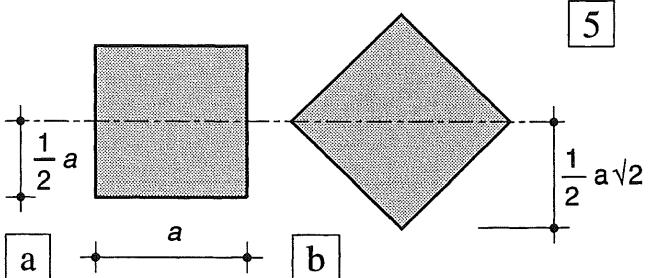


Fig. 5 Vierkante doorsnede:  $I = \frac{1}{12} * a^4$

- a.  $W = I : (a/2) = 1/6 * a^3$
- b.  $W = I : (\sqrt{2}/2) = 1/12 * a^3 \sqrt{2}$

### 19.6.2 DOORSNEDEN MET SLECHTS ÉÉN SYMMETRIE-AS

Indien de doorsnede slechts één symmetrie-as bezit, kan het kwadratisch oppervlaktemoment om deze as op dezelfde wijze worden opgemaakt als in [437], zie fig. 1a. De ligging van het zwaartepunt is hierbij niet van belang.

Voor de loodrecht hierop staande richting moet eerst de ligging van het zwaartepunt worden bepaald met behulp van het lineaire oppervlaktemoment  $S$ , zoals hiernaast is weergegeven. Het kwadratisch oppervlaktemoment kan worden bepaald met behulp van de Regel van Steiner. Veelal is het echter eenvoudiger om de doorsnede opgebouwd te denken uit de som en/of het verschil van een aantal rechthoeken. Het kwadratisch oppervlakte-moment wordt dan bepaald als de algebraïsche sommatie van de onderdelen om de neutrale lijn. In fig. 2 zijn een drietal mogelijkheden weergegeven. Bij twee er van wordt weer van de Regel van Steiner gebruik gemaakt. Alle procedures leiden uiteraard tot hetzelfde resultaat.

*Kies een methode naar eigen goeddunken!*

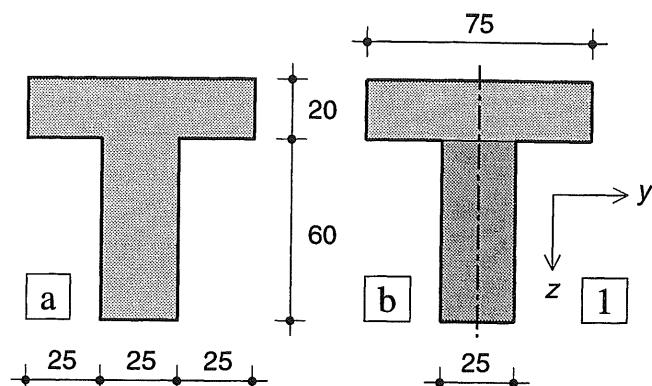


Fig. 1 Kwadratisch oppervlakte-moment

- a. Afmetingen van de doorsnede
- b. Bepaling van  $I_z$

$$I_z = 1/12 (20 * 75^3 + 60 * 25^3) = 781\,250 \text{ mm}^4$$

*Benodigde grootheden om de y-as:*

$$A = 75 * 20 + 25 * 60 = 3000 \text{ mm}^2$$

Lineair oppervlaktemoment ten opzichte van de bovenzijde van de doorsnede:

$$S_y = 75 * 20 * 10 + 25 * 60 * 50 = 90\,000 \text{ mm}^3$$

Zwaartepunts-afstand ten opzichte van de bovenzijde:

$$z_b = S_y / A = 90\,000 / 3000 = 30 \text{ mm}$$

*Methode I* (fig. 2a)

Kwadratisch oppervlakte-moment beschouwd als de algebraïsche som van drie oppervlakken die aan één zijde grenzen aan de neutrale lijn:

$$\begin{aligned} I_y &= 1/3 (75 * 30^3 - 50 * 10^3 + 25 * 50^3) = \\ &= 1700 * 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

*Methode II* (fig. 2b)

Kwadratisch oppervlaktemoment eerst opgemaakt om de bovenzijde van de doorsnede, daarna wordt met de Regel van Steiner het eigen kwadratisch oppervlaktemoment bepaald

$$\begin{aligned} I'_y &= 1/3 (50 * 20^3 + 25 * 80^3) = 4400 * 10^3 \text{ mm}^4 \\ I_y &= I'_y - A * z_b^2 = 4400 * 10^3 - 3000 * 30^2 = \\ &= 1700 * 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

*Methode III* (fig. 2c)

Rechtstreekse toepassing van de Regel van Steiner voor flens en lijf ten opzichte van het zwaartepunt van de gehele doorsnede

$$\begin{aligned} I_y &= 75 * 20 * 20^2 + 25 * 60 * 20^2 + \\ &+ 1/12 (75 * 20^3 + 25 * 60^3) = 1700 * 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

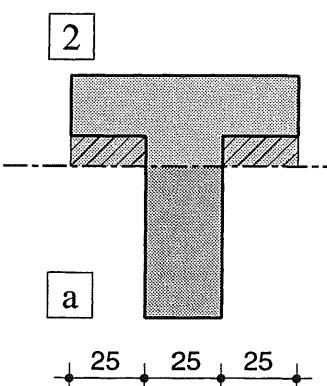
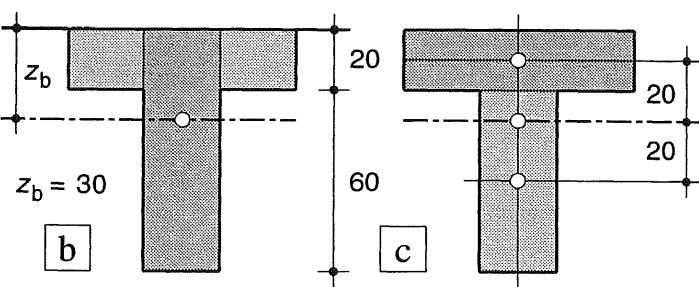


Fig. 2  
Verdeling van de doorsnede in moten voor de berekening  
a. Methode I  
b. Methode II  
c. Methode III



### 19.6.3 ALGEMENE FORMULERING

Bepaling oppervlak, zie fig. 3a:

$$A = b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3$$

Bepaling statisch moment om de bovenrand:

$$S_y = b_1 h_1 z_1 + b_2 h_2 z_2 + b_3 h_3 z_3$$

$$z_b = \frac{S_y}{A}$$

**Kwadratisch oppervlaktemoment  $I_y$**

#### METHODE III

Regel van Steiner toegepast ten opzichte van de neutrale lijn, zie fig. 3b:

$$I_y = b_1 h_1 a_1^2 + b_2 h_2 a_2^2 + b_3 h_3 a_3^2 + \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + \frac{1}{12} b_3 h_3^3$$

#### METHODE I

Visuele aanpak volgens [443] e.v.

Kwadratisch oppervlakte-moment rechtstreeks opgemaakt ten opzichte van de neutrale lijn, door steeds het verschil van twee rechthoeken te nemen, zie fig. 3c

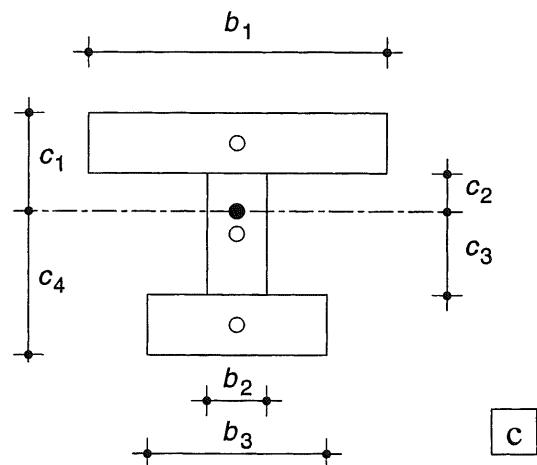
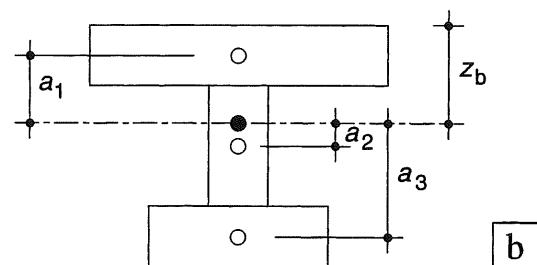
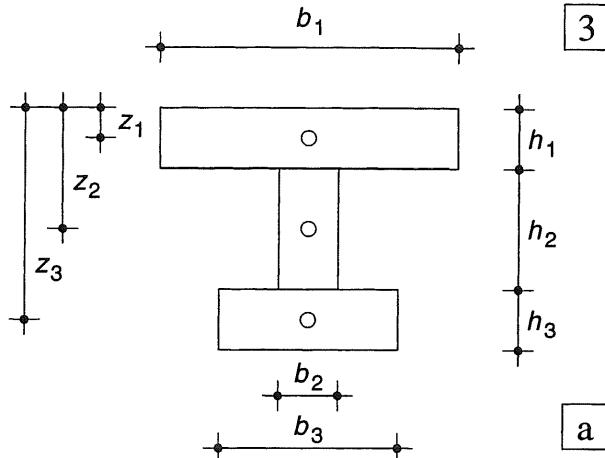
$$I_y = \frac{1}{3} b_1 (c_1^3 - c_2^3) + \frac{1}{3} b_2 (c_2^3 + c_3^3) + \frac{1}{3} b_3 (c_4^3 - c_3^3)$$

**Kwadratisch oppervlakte-moment  $I_z$**

#### METHODE III

Dit is een bijzonder geval van methode III, omdat alleen de drie eigen kwadratische oppervlakte-momenten van de samenstellende delen behoeven te worden opgeteld, zie fig. 3a.

$$I_z = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 + \frac{1}{12} h_2 b_2^3 + \frac{1}{12} h_3 b_3^3$$



- zwaartepunt rechthoekige onderdelen
- zwaartepunt gehele doorsnede

Fig. 3 Bepaling doorsnede-grootheden van samengestelde profielen

- a. Bepaling  $A$  en  $S$
- b. c. Bepaling kwadratisch oppervlakte-moment  $I$
- b. Methode III; toepassing van de regel van Steiner
- c. Methode I; rechtstreekse bepaling ten opzichte van de neutrale lijn

### 19.7.1 INLEIDING TOT DE PROBLEMATIEK

Asymmetrische doorsneden komen veel minder voor dan symmetrische doorsneden; in fig. 1 zijn twee voorbeelden gegeven. Bij het keersymmetrische Z-profiel van fig. 1a ligt het zwaartepunt in het midden van het lijf. Bij het asymmetrische L-profiel daarentegen, moeten zowel  $S_y$  als  $S_z$  worden berekend om de ligging van het zwaartepunt te kunnen bepalen. Zodra deze ligging bekend is, kunnen de grootheden  $I_y$  en  $I_z$  worden bepaald zoals is besproken in [438] en [439].

Als alleen een buigend moment  $M_y$  aangrijpt, zouden we de buigspanningen op de gebruikelijke manier kunnen bepalen met behulp van formule [426-(26)]. Het vervelende punt is echter dat door deze spanningsverdeling tegelijkertijd ook een moment wordt opgewekt om de  $z$ -as.

In fig. 2 is voor een gestyleerd Z-vormig profiel de aldus berekende spanningsverdeling ruimtelijk weergegeven. Hieruit volgt direct dat de beide flenzen niet alleen een koppel leveren om de  $y$ -as, maar tegelijkertijd ook om de  $z$ -as. Deze spanningsverdeling kan dus uitsluitend optreden als behalve het moment  $M_y$  tegelijkertijd ook een moment  $M_z$  op de doorsnede aangrijpt. De vector van het resulterende moment is kennelijk niet meer evenwijdig aan de neutrale lijn, zie fig. 2d.

In [425] is de oorzaak hiervan reeds aangeduid; het oppervlakteproduct  $I_{yz}$  is niet langer gelijk aan nul. Uit [425-(20a) en (21)] volgt:

$$M_y = \frac{E}{R} I_y$$

Uit [425-(23) en (24)] volgt:

$$M_z = \frac{E}{R} I_{yz}$$

Aangezien voor beide formules dezelfde verformde ligger is beschouwd, is de factor  $E/R$  in beide gevallen gelijk, zodat geldt:

$$M_z / M_y = I_{yz} / I_y \quad (43)$$

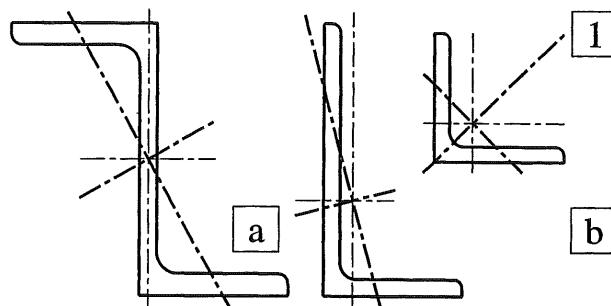


Fig. 1 Enkele asymmetrische doorsnede-vormen van staalprofielen

- a. Asymmetrisch Z-profiel en L-profiel (met ligging van de hoofdassen)
- b. Symmetrisch L-profiel, hoofdassen onder  $45^\circ$

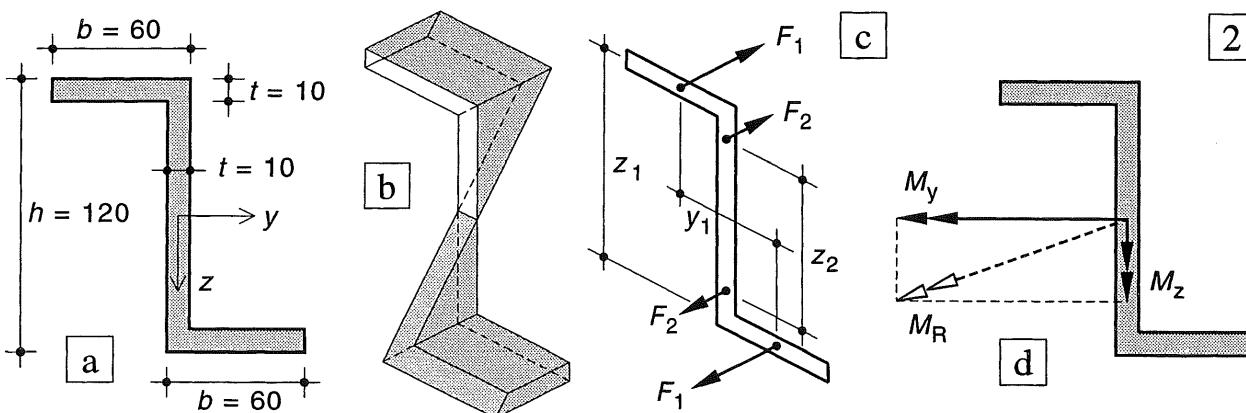


Fig. 2 Gestyleerd keersymmetrisch Z-profiel

- a. Assenkruis en afmetingen
- b. Spanningsverdeling ruimtelijk uitgezet bij een horizontale neutrale lijn

- c. Koppels om de  $y$ -as en de  $z$ -as ten gevolge van de krachten in de flenzen
- d. Resulterend moment  $M_R$

$$K_y = F_1 z_1 + F_2 z_2$$

$$K_z = F_1 y_1 (+ F_2 * 0)$$

### 19.7.2 BEPALING VAN $I$

De afmetingen van het gestyleerde Z-profiel zijn weergegeven in fig. 2a.

Kwadratisch oppervlakte-moment  $I_y$ , bepaald met behulp van methode III [439].

$$I_y = \frac{1}{12} t h^3 + 2 \frac{1}{12} (b-t) t^3 + 2(b-t) t \left(\frac{h-t}{2}\right)^2$$

Numerieke uitwerking, zie fig. 2a:

$$I_y = \frac{1}{12} 10 * 120^3 + 2 * \frac{1}{12} 50 * 10^3 + 2 * 50 * 10 * 55^2 = \\ = 4473,3 * 10^3 \text{ mm}^4$$

Kwadratisch oppervlakte-product  $I_{yz}$ , bepaald met behulp van methode III [439].

Alle 'eigen' oppervlakte-produkten van de samenstellende delen zijn hierbij gelijk aan nul, maar beide flenzen leveren een positief aandeel aan  $I_{yz}$ , omdat de coördinaten  $y$  en  $z$  zich in het 1e en 3e kwadrant bevinden, zie fig. 3a1.

(+ \* + = + en - \* - = +)

$$I_{yz} = 2(b-t) t \frac{b}{2} \frac{h-t}{2}$$

Numerieke uitwerking, zie fig. 2a

$$I_{yz} = 2 * 50 * 10 * 30 * 55 = 1650 * 10^3 \text{ mm}^4$$

Uit formule (43) volgt dan als verhouding tussen de buigende momenten:

$$M_z / M_y = 1650 / 4473 = 37 \%$$

In fig. 2d is ook de resulterende momentvector  $M_R$  weergegeven, alleen deze vector veroorzaakt dus een horizontale neutrale lijn. Omgekeerd zal dus een horizontale momentvector een schuine neutrale lijn veroorzaken.

Als we het assenkruis  $y-z$  van fig. 3a1 draaien tot de stand  $y'-z'$  van fig. 3a2, dan liggen lijf en flenzen van het profiel vrijwel geheel in het 2e en 4e kwadrant zodat het oppervlakteproduct  $I_{yz}$  dan negatief moet zijn.

Ergens tussen de oorspronkelijke en de geroteerde stand in, zal het oppervlakteproduct dan gelijk aan nul moeten zijn.

Als we die stand weten te bepalen, dan zal een momentvector evenwijdig aan de  $y''$ -as dus alleen een uitbuiging van de doorsnede in de  $z''$ -richting veroorzaken. De afleiding hiervan volgens Mohr valt buiten het bestek van KW-4.

Maar we zullen wel de uitkomsten van een dergelijke berekening weergeven. Uitgangspunt; bereken:  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_{yz}$ .

Kwadratisch oppervlakte-moment  $I_z$ , bepaald met behulp van het eigen kwadratische oppervlaktemoment van de twee flenzen plus dat van het lijf:

$$I_z = \frac{1}{12} t (2b-t)^3 + \frac{1}{12} (h-t) t^3$$

$$I_z = \frac{10}{12} \left[ (110)^3 + 110 * 10^2 \right] = 1118 * 10^3 \text{ mm}^4$$

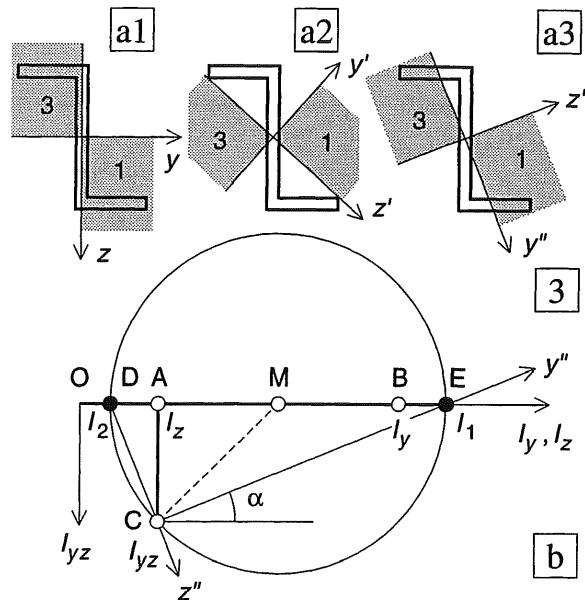


Fig. 3 Extreme waarden van het kwadratisch oppervlaktemoment

- a. Drie standen van het assenkruis
  - 1:  $I_{yz} > 0$ ; 2:  $I_{yz} < 0$ ; 3:  $I_{yz} = 0$ ;
- b. Constructie van de cirkel van Mohr (zie KW-7)

Bepaling van de extreme waarden van het kwadratische oppervlaktemoment met behulp van een grafische constructie: de cirkel van Mohr.

Zet de kwadratische oppervlakte-momenten  $I_y$  en  $I_z$  uit in de richting van de  $y$ -as (punten B en A in fig. 3b) en het oppervlakteproduct  $I_{yz}$  in de richting van de  $z$ -as ter plaatse van  $I_z$  (punt C in fig. 3b).

Bepaal het midden M van A en B en beschrijf met MC als straal een cirkel, die de  $y$ -as snijdt in de punten D en E.

Als het profiel in de oorspronkelijke stand wordt gehouden dan geeft CD de richting aan van de  $z''$ -as met het minimale kwadratische oppervlaktemoment  $I_2$  (ter grootte van OD) en CE de richting van de  $y''$ -as met het maximale kwadratische oppervlaktemoment  $I_1$  (ter grootte van OE). De grootte van de extreme kwadratische oppervlakte-momenten is eenvoudig te bepalen uit fig. 3b:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Substitutie van de berekende waarden levert:

$$I_{1,2} = 10^3 \left[ 2795 \pm \sqrt{1677^2 + 1650^2} \right]$$

$$I_1 = 10^3 (2795 + 2352) = 5147 * 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = 10^3 (2795 - 2352) = 443 * 10^3 \text{ mm}^4$$

Voorts geldt:

$$\operatorname{tg} \alpha = I_{yz} / (I_1 - I_2) = 1650 / (5147 - 443) = 0,41$$

## 19.7.3 GEBRUIK VAN TABELLEN

Voor staal- en aluminiumprofielen zijn de afmetingen en de daaruit volgende doorsnede-groot-heden in tabellenboeken en anderssoortige publicaties te vinden, zodat we die grootheden niet meer zelf behoeven uit te rekenen. In fig. 2 is een klein uittreksel weergegeven uit de brochure van een staalleverancier. Voor dit geval zijn de richtingen van de assen in overeenstemming gebracht met die van KW-4, maar is de notatie van de doorsnedegrootheden in cm gehandhaafd (in plaats van in mm) omdat dan niet zoveel nullen nodig zijn. *Let dus steeds op de benaming van de assen en de dimensie van de eenheden!*

Bij asymmetrische profielen wordt ook de ligging van de hoofdassen weergegeven ( $y''$ - $z''$ ) en de grootte van de extreme kwadratische oppervlaktemomenten  $I_1$  en  $I_2$ .

Voor dit assenkruis  $y''$ - $z''$  kunnen de buigspanningen ten gevolge van  $M''_y$  en  $M''_z$  weer op de gebruikelijke manier worden bepaald [426]. Een moment  $M_y$  moet dan eerst wel worden ontbonnen in de richtingen  $y''$  en  $z''$ , zoals is weergegeven fig. 1. Het Z-vormige profiel wordt intussen niet meer geleverd; het is voornamelijk besproken omdat het verschijnsel van een scheefstaande neutrale lijn bij verticale belasting hier het duidelijkst naar voren komt.

2

No	Afmetingen					A cm <sup>2</sup>	G kg/m	$I_y$ cm <sup>4</sup>	Doorsnede-grootheden				
	$h$ mm	$b$ mm	$t_1$ mm	$t_2$ mm	$r$ mm				$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_z$ cm <sup>3</sup>	$i_z$ cm
100	100	100	6	10	12	26,0	20,4	450	90	4,16	167	33	2,53
120	120	120	6,5	11	12	34,0	26,7	864	144	5,04	318	53	3,06
140	140	140	7	12	12	43,0	33,7	1 509	216	5,93	550	79	3,58
160	160	160	8	13	15	54,3	42,6	2 429	311	6,78	889	111	4,05
180	180	180	8,5	14	15	65,3	51,2	3 831	426	7,66	1 363	151	4,57
200	200	200	9	15	18	78,1	61,3	5 696	570	8,54	2 003	200	5,07
220	220	220	9,5	16	18	91,0	71,5	8 091	736	9,43	2 843	258	5,59
240	240	240	10	17	21	106,0	83,2	11 259	938	10,3	3 923	327	6,08
260	260	260	10	17,5	24	118,4	93,0	14 919	1 150	11,2	5 135	395	6,58
280	280	280	10,5	18	24	131,4	103	19 270	1 380	12,1	6 595	471	7,09
300	300	300	11	19	27	149,1	117	25 166	1 680	13,0	8 563	571	7,58

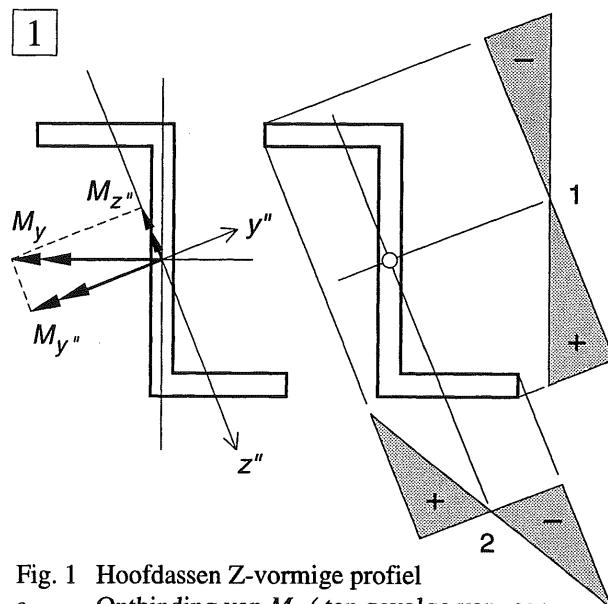


Fig. 1 Hoofdassen Z-vormige profiel

- a. Ontbinding van  $M_y$  (ten gevolge van een verticale belasting) langs de hoofdassen
- b. Buigspanningsverdelingen ten gevolge van  $M''_y$  (1) en  $M''_z$  (2)

Als voor een ligger de numerieke waarde van het moment globaal bekend is, evenals de grootte van de aan te houden spanning in het bezwijkstadium, dan volgt de grootte van het benodigde weerstandsmoment uit formule [427-(28)], zie ook 19.4.7 [427]:

$$W = M / \sigma \quad (28)$$

Uit een tabel als in fig. 2 volgt dan welk profiel minstens nodig is. De waarde  $i = \sqrt{(I/A)}$  wordt gebruikt bij knikberekeningen, zoals wordt beschreven in KW-5.

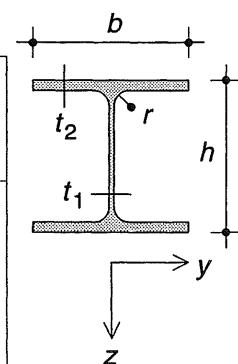


Fig. 2  
Uittreksel uit de  
profielgegevens  
voor Europese  
breedflens-  
profielen HE-B

### 19.8.1 RECAPITULATIE

Het kwadratisch oppervlaktemoment  $I$  is een hulpgrootheid om de *buigspanningen* (d.w.z normaalspanningen ten gevolge van een buigend moment) in een staaf of een ligger te kunnen berekenen.

Evenzo kunnen we de staafdoorsnede  $A$  als een hulpgrootheid beschouwen om de *normaalspanningen* te bepalen in een centrisch getrokken of gedrukte staaf. Omdat de spanning over de doorsnede hier constant is, volgt, zie fig. 2b:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (44)$$

De grootheid die de spanning veroorzaakt – hier dus de kracht  $F$  – moet door de hulpgrootheid  $A$  worden gedeeld om de spanning te vinden.

Bij buiging zijn de spanningen gelijk aan nul in de neutrale lijn en verlopen verder lineair over de hoogte, zie fig. 2c. Daarom staat in de buigingsformule ook de afstand  $z$  tot de neutrale lijn:

$$\sigma = \frac{M z}{I} \quad (45)$$

Qua opbouw is er niet veel verschil met formule (44). Ook in formule (45) moet de grootheid die de spanning veroorzaakt – in dit geval het buigend moment  $M$  – weer worden gedeeld door de hulpgrootheid  $I$  om de spanning te vinden.

Hoewel de meeste studenten de rekenregels om de grootheid  $I$  te bepalen wel beheersen, is het voor velen toch vrij moeilijk om zich bij deze grootheid ook maar iets voor te stellen.

#### Recapitulatie

De afleiding van de buigingsformule is weergegeven in [418-421].

In [422-427] worden doorsneden behandeld die minstens één symmetrie-as bezitten. De bepaling van de daarbij benodigde doorsnede-groot-heden:  $A - S - I - W$ , is uitvoerig besproken in [428-439]. Hierbij is een strikt analytische werk-wijze toegepast.

In deze paragraaf (19.8) wordt aangenomen, dat de bepaling van het zwaartepunt van een doorsnede niet op moeilijkheden zal stuiten [439-3a].

*Voor de bepaling van het kwadratisch oppervlaktemoment  $I$  beperken we ons tot doorsneden-vormen, die minstens één symmetrie-as bezitten en bovendien uit rechthoeken zijn opgebouwd.*

De afleiding wordt nu echter op een meer visuele wijze gegeven, die in hoofdlijnen overeenkomt met het behandelde in [420-421].

We hanteren hierbij maar één manier, die snel tot een oplossing leidt.

Voor wat ingewikkelder doorsneden-vormen zoals bijv. driehoeken en cirkels moet de meer algemene aanpak van paragraaf 19.5 worden gevolgd [434 t/m 436].

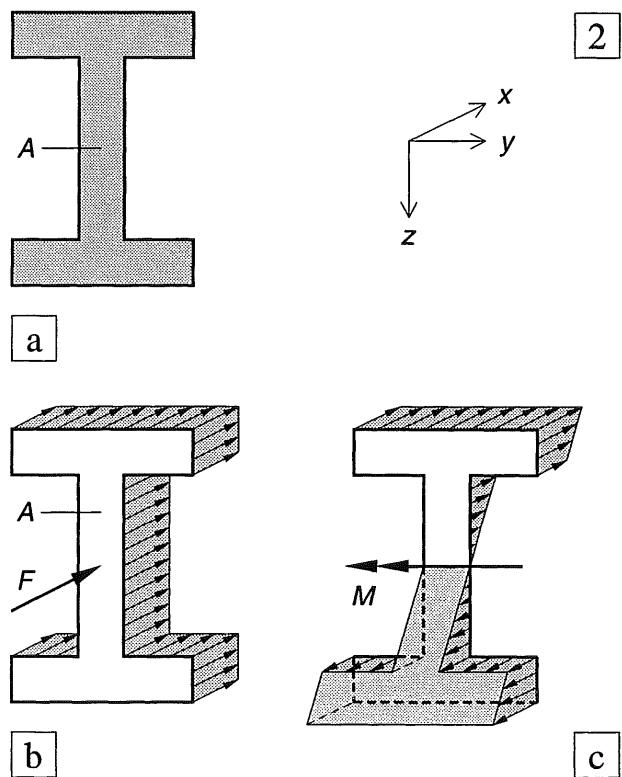


Fig. 1 Spanningsverdeling  
a. Doorsnede  
b. Normaalspanningen  
c. Buigspanningen

### 19.8.2 VISUALISERING VAN HET PROBLEEM

We beschouwen een liggertje van polystyrene-schuim dat we in het middendeel aan een zuiver buigend moment onderwerpen, d.w.z. aan een constant buigend moment, zie fig. 1a. Er blijken maar heel kleine krachtjes nodig te zijn, om een behoorlijke doorbuiging te krijgen.

Vervolgens nemen we een houten plankje van precies dezelfde afmetingen. Om dit plankje dezelfde doorbuiging te geven als het liggertje van polystyrene-schuim zijn nu aanmerkelijk grotere krachten nodig, zie fig. 1b.

De geometrische afmetingen van beide liggertjes zijn dezelfde, het verschil ligt uitsluitend in de grootte van de elasticiteitsmodulus  $E$ .

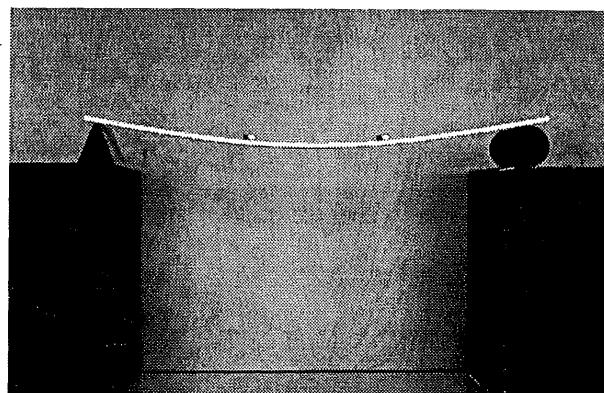
De krachten in het tweede geval zijn  $800 \times$  zo groot als in het eerste geval, dit betekent dat ook de  $E$  van deze houtsoort  $800 \times$  zo hoog is als die van polystyrene-schuim ( $E_h = 24\,000 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_p = 30 \text{ N/mm}^2$ ).

Als we het liggertje van polystyrene-schuim  $3 \times$  zo hoog maken als in het eerste proefje, dan kunnen we weer zorgen dat een zuiver buigend moment precies dezelfde kromming veroorzaakt als in het eerste proefje, zie fig. 1c. De benodigde krachten zijn intussen  $27 \times$  zo groot geworden. De overeenkomstige proef op een houten balkje kunnen we maar beter nalaten. Niet alleen omdat die krachten ook  $27 \times$  groter moeten worden, maar vooral omdat het balkje voor die tijd zo goed als zeker al gebroken zal zijn.

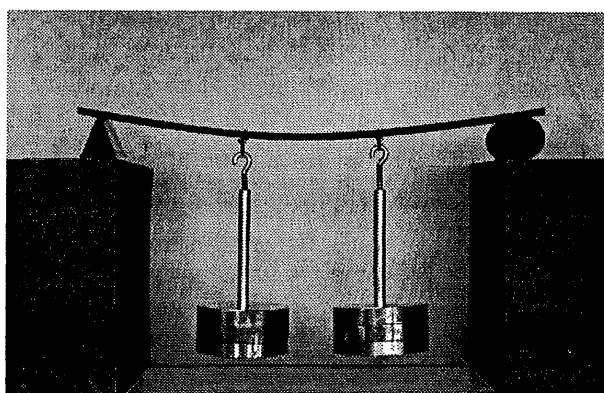
Behalve de elasticiteitsmodulus spelen dus ook de afmetingen en de sterkte van het materiaal een grote rol in het buigingsverschijnsel.

*Bij de kwadratische oppervlaktemomenten beperken we ons uitsluitend tot de geometrie van de liggerdoorsnede.*

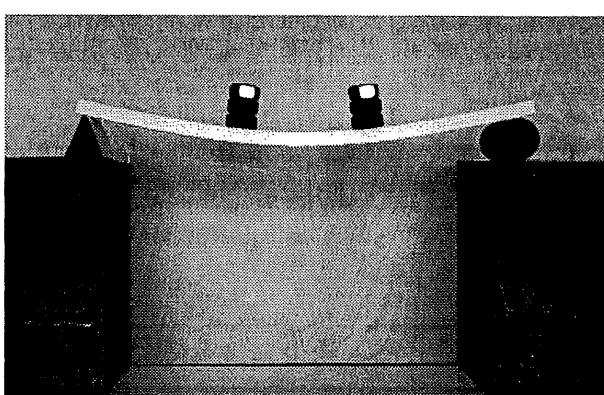
In de buigingsformule voor liggers worden beide grootheden daarom samengevoegd tot de buigstijfheid  $EI$ . De sterkte van het materiaal komt bij de volgende beschouwingen nog niet aan de orde.



a



b



c

Fig. 1 Liggertjes onderworpen aan een vierpuntsbuigproef  
 a. Liggertje van polystyrene-schuim ( $A = b \times h$ )  
 b. Liggertje van hout ( $A = b \times h$ )  
 c. Liggertje van polystyrene-schuim ( $A = b \times 3h$ )

### 19.8.3 ZUIVER BUIGENG MOMENT IN EEN DOORSNEDE

We beschouwen een aantal balkjes met verschillende doorsneden, maar wel van hetzelfde materiaal. Als we al deze balkjes dezelfde kromming geven, heeft de kromtestraal voor alle balkjes dezelfde waarde, zie fig. 2. Dit betekent dat op een afstand 1 vanaf de neutrale lijn (d.w.z. 1 mm als we in mm's werken en 1 m als we in m's werken), de spanning  $\sigma_1$  voor alle balkjes gelijk is. Omdat vlakke doorsneden vlak blijven, ligt het spanningsverloop dus over gehele doorsnede vast, zie fig. 2.

Aan de onderzijde van de neutrale lijn leveren de buigspanningen een trekkracht  $F_t$ , aan de bovenzijde een drukkracht  $F_d$ , zie fig. 3. Beide krachten moeten even groot zijn vanwege het horizontale evenwicht. Het buigend moment  $M$  is dan gelijk aan het koppel  $K = F * z_0$  dat beide krachten tezamen leveren, zie fig. 3c. Om dit koppel te bepalen kan het moment in principe worden opgemaakt om elke lijn, die evenwijdig is aan de neutrale lijn. Aangezien de neutrale lijn in fig. 3c loodrecht op het vlak van tekening staat, is het moment in deze figuur achtereenvolgens opgemaakt om twee punten:

- een willekeurig punt P
- een punt O in de neutrale lijn

Uiteraard zijn de uitkomsten gelijk.

Wij zullen in het vervolg hiervoor echter consequent de neutrale lijn zelf gebruiken.

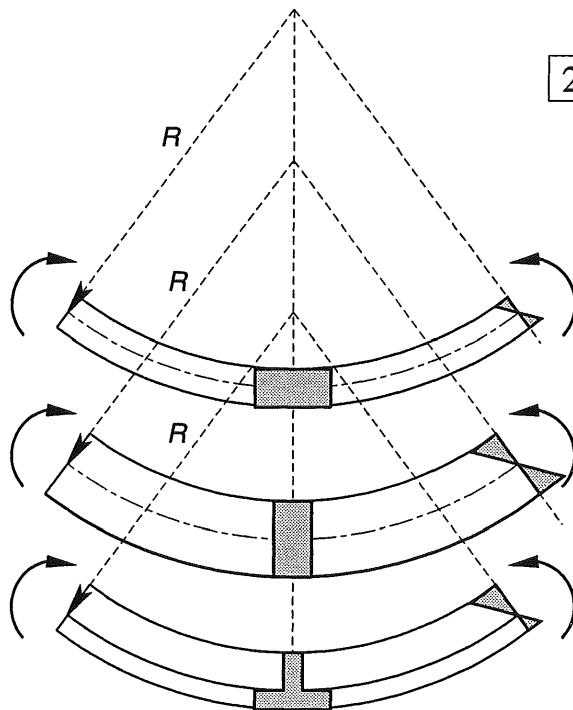


Fig. 2 Spanningsverloop in drie balkjes met verschillende doorsneden, die elk zijn onderworpen aan een zodanig constant buigend moment dat de kromming voor de drie balkjes gelijk is

Voor de balkjes geldt:

- van hetzelfde materiaal ( $E$ )
- met dezelfde kromtestraal ( $R$ )
- met verschillende doorsnede ( $A$ )

Fig. 3 Moment in een doorsnede

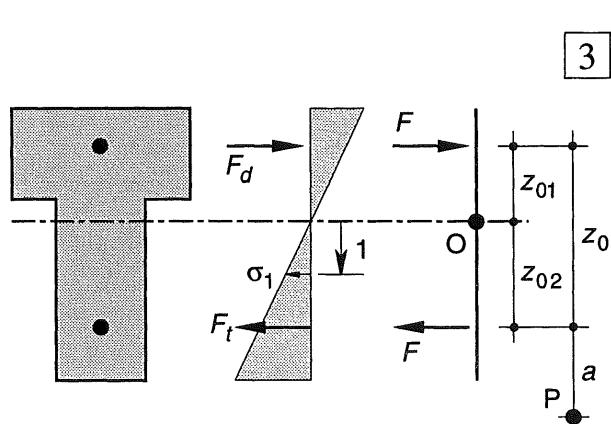
- a. Doorsnudevorm
- b. Spanningsverloop bij een zuiver buigend moment
- c. Het buigend moment is gelijk aan het koppel van trek- en drukkracht

Moment om punt P:

$$M = +F(a + z_0) - Fa = Fz_0$$

Moment om punt O:

$$M = +Fz_{01} + Fz_{02} = Fz_0$$



#### 19.8.4 BEPALING VAN HET MOMENT UIT HET SPANNINGSVERLOOP

In fig. 1b is het spanningsverloop over de doorsnede ruimtelijk uitgezet. We zullen nu in een onderdeel van de doorsnede nagaan, welk aandeel de daar optredende spanningen leveren aan het buigend moment. We kiezen hiervoor het rechthoekige deel dat in fig. 1c met een raster is weergegeven. Dit strekt zich uit vanaf de neutrale lijn tot de onderrand van de doorsnede. In fig. 1d is het ruimtelijke spanningsverloop hiervan weergegeven.

De spanning op een afstand 1 wordt weer gelijk gesteld aan  $\sigma_1$  en de spanningsgradiënt  $d\sigma / dz$  aan  $\sigma'_1$ . De maximale spanning op een afstand  $a_1$  is dan gelijk aan:  $\sigma_{\max} = \sigma'_1 * a_1$ . De totale trekkracht is gelijk aan de inhoud van de spanningsfiguur, zie fig. 1d. We vinden dus:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} b_1 a_1 \sigma_{\max} = \frac{1}{2} b_1 a_1 \sigma'_1 a_1 = \\ &= \frac{1}{2} b_1 a_1^2 \sigma'_1 \end{aligned} \quad (46)$$

Deze kracht grijpt aan in het zwaartepunt van de spanningsfiguur; de afstand tot de neutrale lijn is dan gelijk aan:  $a_{01} = 2/3 a_1$ .

De kracht  $F_1$  levert dus de volgende bijdrage aan het buigend moment:

$$\Delta M_1 = F_1 * a_{01} = \frac{1}{2} b_1 a_1^2 \sigma'_1 * \frac{2}{3} a_1$$

ofwel

$$\Delta M_1 = \frac{1}{3} b_1 a_1^3 \sigma'_1 \quad (47)$$

Als het kwadratisch oppervlaktemoment van het beschouwde deel 1 definiëren we:

$$I_1 = \frac{1}{3} b_1 a_1^3 \quad (48)$$

In deze notatie is  $b$  dus *evenwijdig* aan de neutrale lijn en staat  $a$  *loodrecht* op de neutrale lijn. Substitutie van (48) in (47) levert voor deel 1:

$$\Delta M_1 = I_1 * \sigma'_1 \quad (49)$$

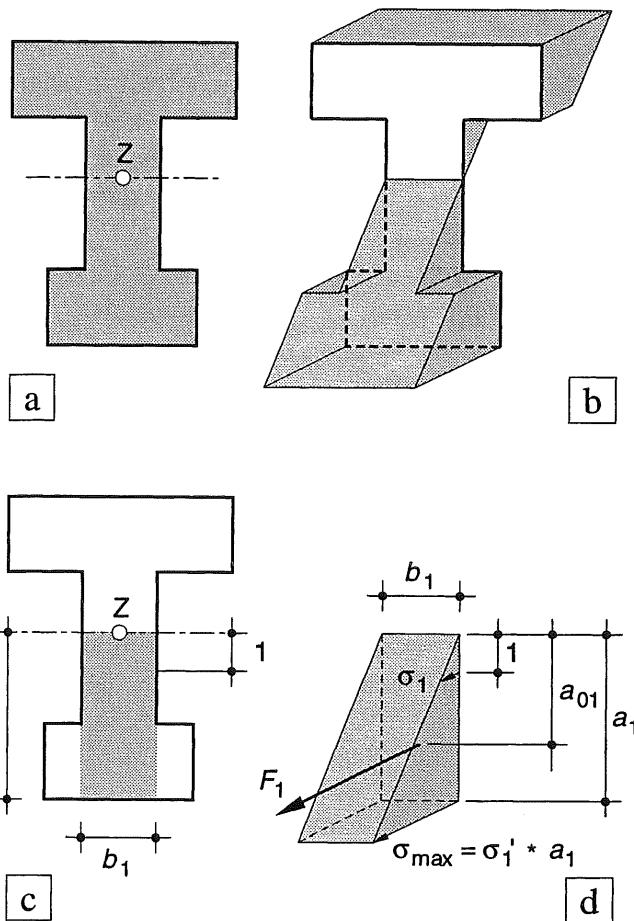


Fig. 1 Spanningsverloop bij zuivere buiging  
 a. Vorm van de doorsnede  
 b. Spanningsverloop ruimtelijk uitgezet  
 c. Alleen het gerasterde deel van de doorsnede wordt nader beschouwd  
 d. Spanningsverloop in het gerasterde deel van de doorsnede ruimtelijk uitgezet

Het aandeel dat een flensdeel buiten het lijf aan het buigend moment levert, is dan eenvoudig weer te geven als het verschil van twee driehoekig verlopende inhouden, zie fig. 2a:

$$\Delta M_2 = \left( \frac{1}{3} b_2 a_1^3 - \frac{1}{3} b_2 a_2^3 \right) * \sigma'_1 \quad (50)$$

ofwel

$$\Delta M_2 = I_2 * \sigma'_1 \quad (51)$$

Het moment dat door de gehele doorsnede wordt overgebracht is dan gelijk aan de som van alle momentaandelen:

$$M = \sum (I_i * \sigma'_i) = \sigma'_1 \sum I_i = \sigma'_1 * I \quad (52)$$

Uit formule (52) volgt dan voor de spanningsgradiënt (spanning op een afstand 1 vanaf de neutrale lijn gedeeld door de afstand 1):

$$\sigma'_1 = \frac{M}{I} \quad (53)$$

Op een afstand  $z$  vanaf de neutrale lijn volgt dan voor de spanning  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{M z}{I} \quad (54)$$

Hiermee hebben we de formule voor de spanningsverdeling in dezelfde gedaante gebracht als in [426-(26)].

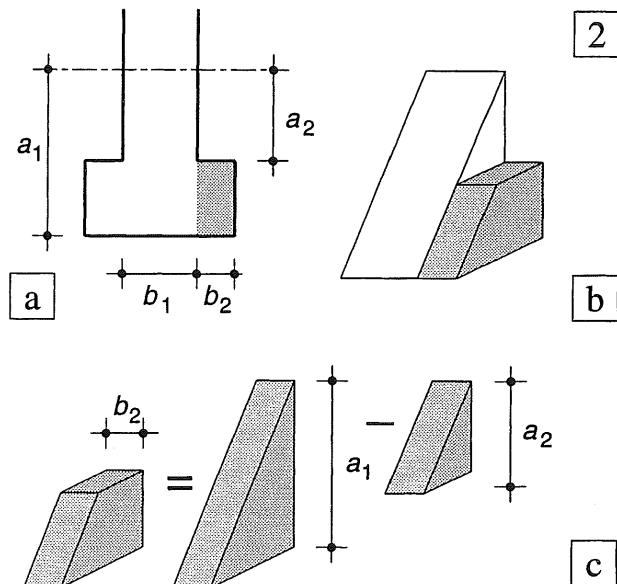


Fig. 2 Aandeel van een flens aan het kwadratisch oppervlaktemoment

- a. Beschouwde deel van de doorsnede
- b. Spanningsverloop in het flensdeel buiten het lijf aan de rechterkant
- c. Het beschouwde deel is gelijk aan het verschil van twee driehoekig verlopende inhouden van de spanningsfiguur

### 19.8.5 BEPALING KWADRATISCH OPPERVLAKTE-MOMENT

Voor de bepaling van het kwadratisch oppervlakte-moment van doorsneden die zijn opgebouwd uit rechthoeken gebruiken we dus als standaardformule:

$$I_1 = \frac{1}{3} b_1 a_1^3 \quad (48)$$

Er wordt met nadruk op gewezen dat de betreffende rechthoek met één zijde moet samenvallen met de neutrale lijn, zie fig. 1a.

Als dit niet het geval is, moet de rechthoek worden gesplitst in het verschil of de som van twee rechthoeken, zie fig. 1b.

Voor een rechthoek die symmetrisch is gelegen ten opzichte van de neutrale lijn, geldt :

$$a = \frac{1}{2} h$$

Voor het kwadratisch oppervlaktemoment volgt dus:

$$I = 2 * \frac{1}{3} b a^3 = \frac{1}{12} b h^3 \quad (55)$$

Voor symmetrische doorsneden zoals kokers en I-profielen werkt het iets sneller als formule (55) wordt gebruikt, zie fig. 2.

Voor kokerprofielen volgt  $I$  dan weer als het verschil van twee oppervlakken, zie fig. 3a1.

Voor een I-profiel geldt hetzelfde voor  $I_y$ ; zie fig. 3a2. Voor de bepaling van  $I_z$  kan echter alleen met de som van de oppervlakken worden gewerkt, zie fig. 3b.

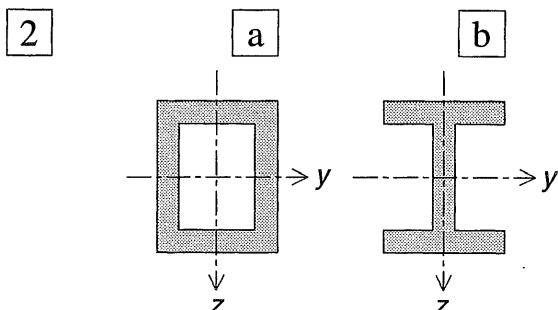


Fig. 2 Symmetrische profielen

- a. Kokerprofiel
- b. I-profiel

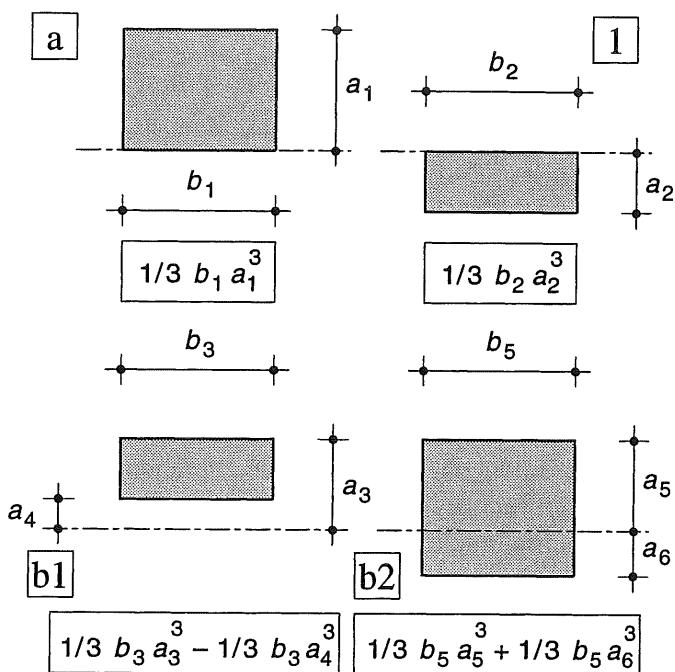


Fig. 1 Aandeel van een rechthoek aan het kwadratisch oppervlaktemoment

- a. Rechthoek grenst aan de neutrale lijn
- b. Rechthoek grenst niet aan de neutrale lijn
- b1 Verschil van twee rechthoeken
- b2 Som van twee rechthoeken

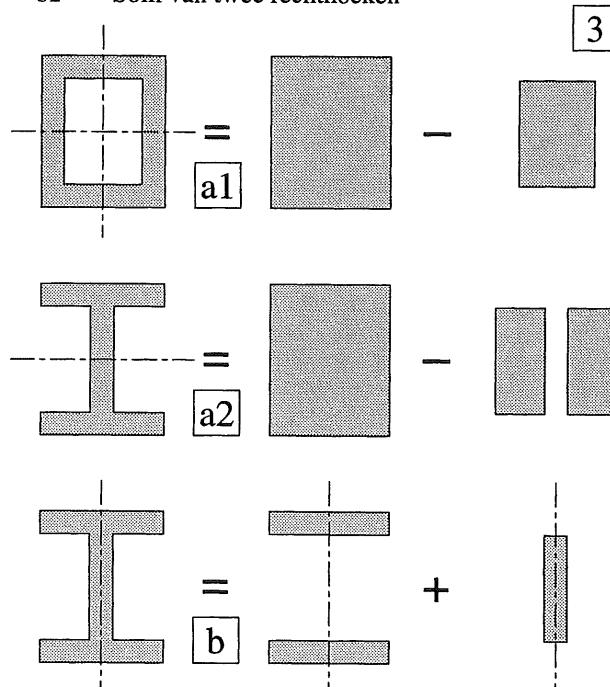


Fig. 3 Berekening kwadratisch oppervlaktemoment

- a. Verschil van twee oppervlakken:
- a1 Koker:  $I_y$  en  $I_z$
- a2 I-profiel: alleen  $I_y$
- b. Som van twee oppervlakken: I-profiel  $I_z$

### Dunwandige profielen

Bij dunwandige profielen kan de invloed van de flensen ook op een iets andere manier in rekening worden gebracht. In fig. 4b, c is het spanningsverloop zowel ruimtelijk als in zijaanzicht weergegeven. In een flens kunnen de spanningen worden gesplitst in een constante gemiddelde spanning en in een lineair verlopende spanning, zie fig. 4c. De constante spanning is gelijk aan:  $\sigma_{\text{gem}} = z_1 \sigma'_1$ ; ze levert een bijdrage aan het buigend moment ter grootte:

$$\Delta M_1 = \sigma_{\text{gem}} * b_1 a_1 * z_1 = \sigma'_1 z_1 * A_1 z_1$$

ofwel

$$\Delta M_1 = \sigma'_1 * A_1 z_1^2 \quad (56)$$

Het kwadratisch oppervlaktemoment voor dit deel moet dus gelijk zijn aan:

$$I_1 = A_1 z_1^2 \quad (57)$$

Het lineair verlopende spanningsaandeel dat nog niet in rekening is gebracht levert een kopeltje, dat even groot is als wanneer de flens achter plaatse van de neutrale lijn zou hebben bevonden, zie fig. 4c. Dit levert dus als aandeel aan het kwadratisch oppervlaktemoment:

$$I_2 = \frac{1}{12} b_1 a_1^3 \quad (58)$$

De totale bijdrage van de flens aan het kwadratisch oppervlakte-moment is dus gelijk aan:

$$I_{\text{flens}} = I_1 + I_2 \quad (59a)$$

Voor het aandeel van beide flensen samen, vermeerderd met het aandeel van het lijf geldt dus:

$$I = 2 * I_{\text{flens}} + I_{\text{lijf}} \quad (59)$$

Formule (59) geeft de Regel van Steiner weer, die in [430] op puur analytische wijze is afgeleid.

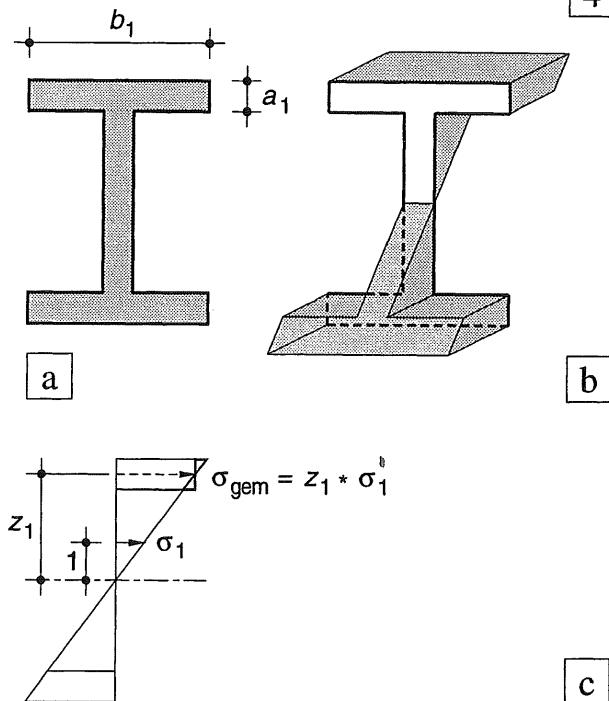


Fig. 4 Bijdrage van een flens aan het kwadratisch oppervlaktemoment

- a. Doorsnede
- b. Spanningsverloop ruimtelijk uitgezet
- c. Splitsen van de spanningen in de flens; weergegeven in zijaanzicht

Het zal duidelijk zijn dat de bijdrage van  $I_2$  vrijwel verwaarloosbaar is ten opzichte van de andere aandelen. Dit geeft ons een middel om een goede indruk te krijgen in welke mate de delen van dunwandige profielen bijdragen aan de buigstijfheid. We zullen hiervoor een aantal fictieve profielen gebruiken, die geheel zijn opgebouwd uit gelijke rechthoekige onderdelen, zie blad [450].

### 19.8.6 ONDERLINGE VERGELIJKING DUNWANDIGE PROFIELEN

Om enige feeling te verkrijgen in de effectiviteit van dunwandige profielen zijn in fig. 1 een aantal gestyleerde profielen met elkaar vergeleken. Alle basisprofielen hebben een vierkante buitenomtrek, terwijl alle samenstellende delen dezelfde dikte en lengte bezitten (hartmaten), zoals is weergegeven in fig. 1c (met c 5 als uitzondering). We hebben dan te maken met drie posities van de smalle rechthoeken met oppervlak  $A = b t$ , ten opzichte van de neutrale lijn, zie fig. 1b. De kwadratische oppervlakte-momenten ten opzichte van de neutrale lijn van het profiel bedragen dan:

$$1 \quad I_1 = \frac{1}{12} b t^3$$

$$2 \quad I_2 = \frac{1}{12} t b^3$$

$$3 \quad I_3 = b t * \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} b t^3$$

NB; de indices 1, 2, 3 van  $I$  hebben hierbij een andere betekenis dan op blad [449].

Bij een verhouding  $t/b = 1/10$  volgt dan dat  $I_1$  slechts 1 % bedraagt van  $I_2$ , zodat we de bijdrage van  $I_1$  zonder meer kunnen verwaarlozen.

We houden dan over:

$$I_2 = \frac{1}{12} t b^3 \quad (60)$$

$$I_3 = \frac{1}{4} t b^3 \quad (61)$$

Dit betekent dus dat  $I_3$  driemaal zoveel bijdraagt aan de stijfheid als  $I_2$ . Als we nu alle aandelen aan de stijfheid uitdrukken in die van  $I_2$ , dan geeft een eenvoudige optelsom de totale stijfheid, zie fig. 1c.

De effectiviteit van een bepaalde doorsnede in vergelijking met andere vormen, die op het eerste gezicht gelijkwaardig overkomen, is op deze wijze zeer eenvoudig na te gaan.

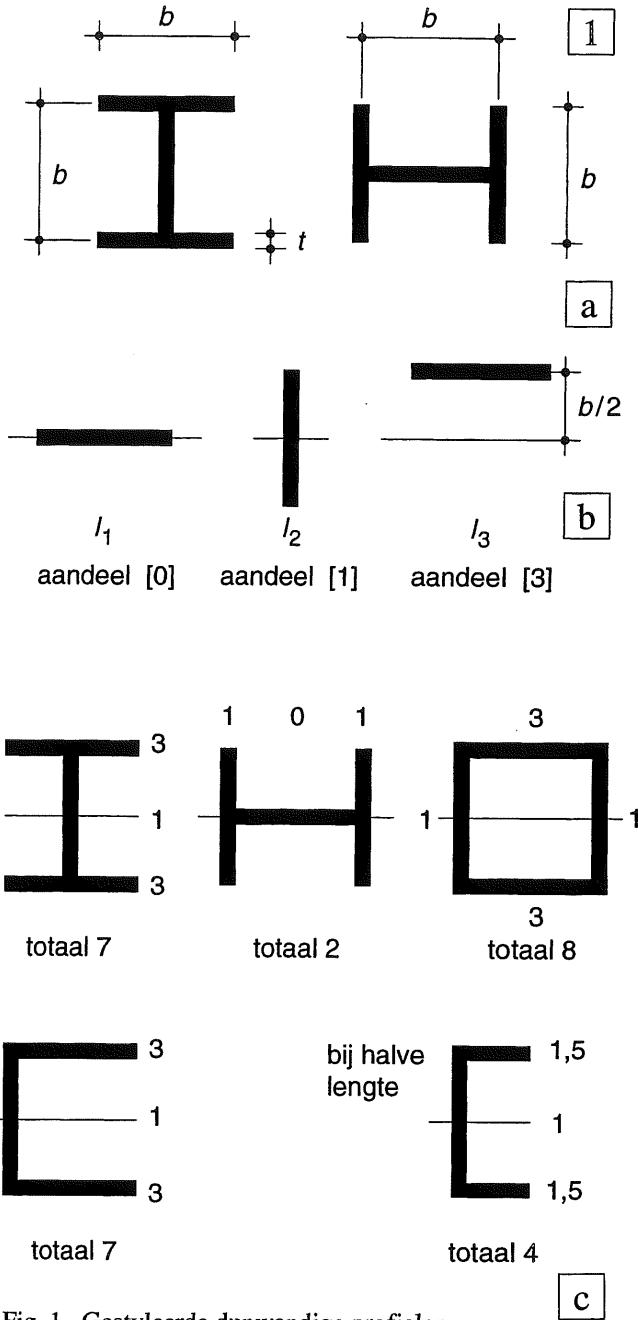


Fig. 1 Gestyleerde dunwandige profielen

- a. Geschematiseerde afmetingen
- b. Bijdragen  $\Delta I$  van de diverse onderdelen voor de bepaling van  $I_y$
- c. Vergelijking van de stijfheden, [uitgedrukt in  $I_2$ , zie formule (60)]

### 19.8.7 VEREENVOUDIGDE BEPALING $I$ BIJ DUNWANDIGE PROFIELEN

Zoals reeds is vermeld, kunnen de doorsnede-grootheden voor dunwandige profielen (staal, aluminium, messing) worden ontnomen aan tabellenboeken. Als we echter te werk gaan op de wijze als in [450] is omschreven, dan zijn de benodigde grootheden ook eenvoudig te berekenen. De essentie is dan dat van alle onderdelen waarvan de middellijn evenwijdig is aan de neutrale lijn, de eigen kwadratische oppervlaktemomenten in de Regel van Steiner worden verwaarloosd. Alle afrondingen van rechte hoeken worden eveneens verwaarloosd.

Voorbeeld:

Profiel HE 200 B

Afmetingen:

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$t_1 = 9 \text{ mm} \quad (\text{lijf})$$

$$t_2 = 15 \text{ mm} \quad (\text{flens})$$

Hieronder zijn de berekeningen rechtstreeks uitgevoerd, wellicht ten overvloede is de berekening in de rechterkolom ook nog in symbolen weergegeven.

$$\begin{aligned} I_y &= 2 * 200 * 15 * 92,5^2 + \frac{1}{12} 9 * 170^3 = \\ &= 51\,337\,250 + 3\,684\,750 = 5502 * 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$I_z = 2 * \frac{1}{12} 15 * 200^3 = 2000 * 10^4 \text{ mm}^4$$

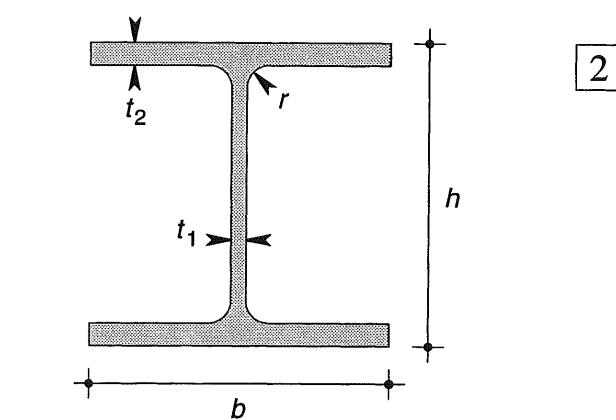


Fig. 2 Afmetingen HE profielen

$$I_y = 2 * b t_2 * \frac{1}{2} (h - t_2)^2 + \frac{1}{12} t_1 (h - 2 t_2)^3$$

$$I_z = 2 * \frac{1}{12} t_2 b^3$$

Vergelijking met de tabel op blad [442] leert dat de benaderingsberekening voor  $I_y$  een waarde levert die 96,5 % van de preciese uitkomst bedraagt (5502/5696).

Voor  $I_z$  bedraagt dit percentage zelfs 99,8 % (2000/2003).

Dit verschillende gedrag wordt veroorzaakt door het feit dat het materiaal in de afronding tussen lijf en flenzen in het eerste geval een veel grotere bijdrage levert dan in het tweede geval.

## 20 SPANNINGSCOMBINATIES

*Buiging plus Dwarskracht; Dubbele Buiging  
Buiging plus Normaalkracht; Wringing*

### 20.1 INLEIDING

#### 20.1.1 DEFINITIE VAN DE VEERKRACHTSGEVALLEN

De spanningstoestanden die in staven en liggers kunnen optreden ten gevolge van uitwendige krachten en momenten, worden ook wel aangeduid als veerkrachtsgevallen.

In hoofdstuk 19 hebben we ons beperkt tot de twee belangrijkste en ook de meest eenvoudige veerkrachtsgevallen:

- Een centrische normaalkracht
- Een zuiver buigend moment

In principe kunnen op een doorsnede echter zowel de drie orthogonale componenten van een willekeurig gerichte kracht aangrijpen alsook de drie orthogonale componenten van een willekeurig gericht moment, zie fig. 1.

Het verdient hierbij aanbeveling om de momenten als vectoren uit te zetten met een dubbele pijl, zoals is beschreven in KW-0 [035-3b].

Terwille van een gemakkelijker herkenning is in enkele figuren ook de notatie met een gebogen pijl weergegeven.

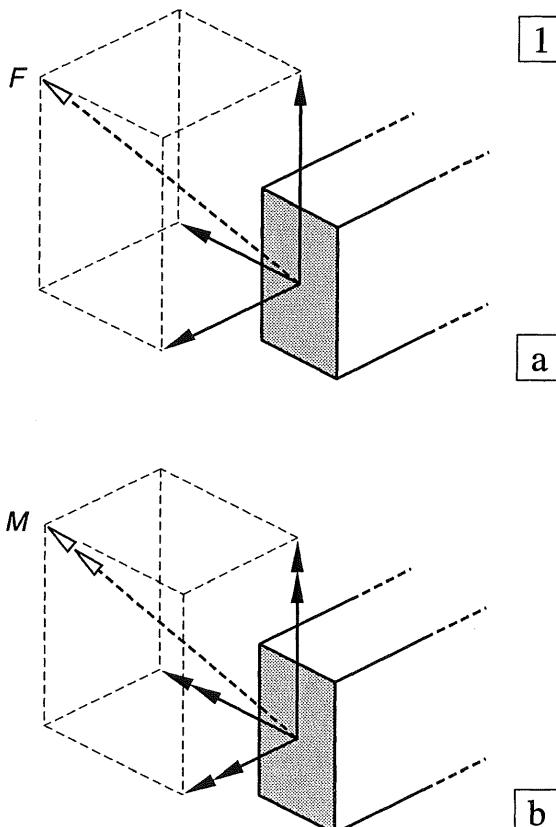


Fig. 1 Mogelijke snedekrachten op een doorsnede  
 a. Een willekeurig gerichte kracht  $F$ , aangrijpend in het zwaartepunt van de doorsnede  
 b. Een willekeurig gericht moment  $M$

## 20.1.2 TEKEN VAN DE VEERKRACHTSGEVALLEN

Bij evenwichtsbeschouwingen op een constructie of een constructieonderdeel, doet het er in feite niet toe welke richtingen we als positief aannemen, zolang we deze keuze tijdens een vraagstuk maar niet wijzigen. Het is echter handig om de afzonderlijke krachten en momenten positief te noemen als de betreffende vectoren in de richting van de positieve assen wijzen. Hierbij gaan we weer uit van een rechtsdraaiend assenkruis, zie fig. 2a. Dit houdt in: In het horizontale vlak;  $x$ -as naar rechts,  $y$ -as naar voren,  $z$ -as verticaal omlaag. Dit assenkruis mag in elke willekeurige stand worden gedraaid zolang er geen wijziging optreedt in de onderlinge ligging van de coördinaatassen.

Het is moeilijker om eenheid te verkrijgen in de notatie van de snedekrachten; meer dan eens kunnen we hierbij niet consequent te werk gaan. Voor prismaatische staven en liggers zullen we doorgaan met de tekenafspraken die we in [409] hebben toegepast, waarbij in het eerste kwadrant van het assenkruis een vergelijkings-elementje is aangebracht, waarvan drie zijvlakken samenvallen met een coördinatenvlak (2 daarvan zijn gerasterd weergegeven in fig. 2a2). In eerste instantie noemen we normaalkrachten, buigende en wringende momenten *positief* als op de gerasterde vlakjes de vectoren in de richting van de *negatieve* assen werken, en op de niet gerasterde vlakjes in de richting van de *positieve* assen, zie fig. 2b, c. Voor de verdere berekening nemen we voorts aan dat de ligger-as samenvalt met de  $x$ -as en dat de hoofdassen van de normale doorsnede samenvallen met de  $y$ - en de  $z$ -as, zie fig. 2a3.

Voor het teken van  $N$  en  $M$  houdt dit het volgende in:  
*Positieve normaalkrachten*  $N$  zijn – vanuit het staafmootje beschouwd – naar buiten gericht. Ze veroorzaken dus een trekkracht, zie fig. 2b1.

*Positieve wringende momenten*  $M_t$  hebben eveneens naar buiten gerichte momentvectoren, zie fig. 2b2.

Wellicht ten overvloede is op het voorste vlakje ook de bijbehorende draairichting getekend.

Bij positieve *buigende momenten*  $M_y$  (fig. 2c1) heeft de positieve kracht van het koppel een positieve  $z$ -coördinaat en de negatieve kracht een negatieve  $z$ -coördinaat, zoals is weergegeven in fig. 2d1. Boven de neutrale lijn treden dus drukkrachten op en beneden de neutrale lijn trekkrachten.

Als we voor horizontale belastingen een overeenkomstige gedraglijn aanhouden, dan vinden we bij positieve buigende momenten  $M_z$  (fig. 2c2) echter een negatieve kracht van het koppel bij een positieve  $y$ -coördinaat, zie fig. 2d2. Links van de neutrale lijn treden dan trekkrachten op en rechts daarvan drukkrachten.

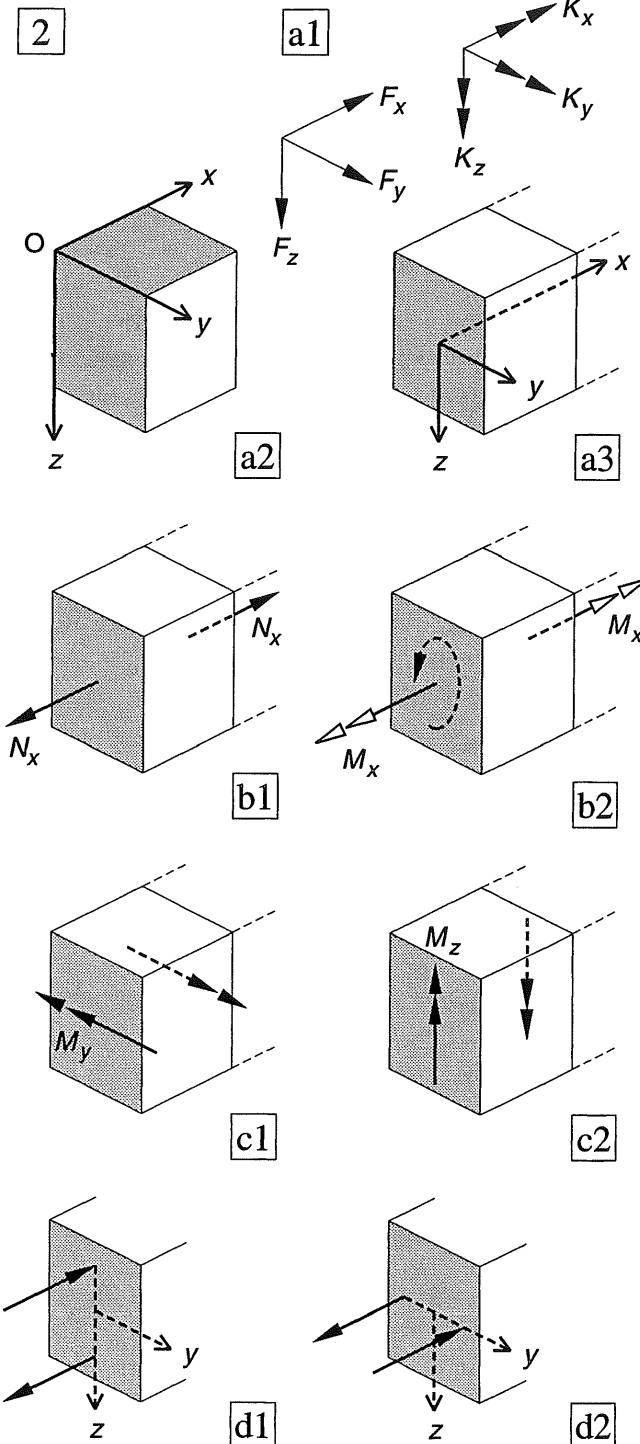


Fig. 2 Teken van de veerkrachtsgevallen bij een rechtsdraaiend assenkruis

- a1 Vergelijkings-elementje
- a2 Positieve richting van krachten en koppels
- a3 Assenkruis voor een staaf of ligger
- b1,2 Positieve normaalkracht en wringend moment
- c1,2 Positieve buigende momenten  $M_y$  en  $M_z$
- d1,2  $M_y$  en  $M_z$  weergegeven als koppels

### 20.1.3 COMBINATIE VAN EEN AANTAL VEERKRACHTSGEVALLEN

Een aantal veerkrachtsgevallen kan volkomen zelfstandig optreden, andere daarentegen zijn gekoppeld. De maatgevende spanningscombinaties worden meestal veroorzaakt door een combinatie van onafhankelijke veerkrachtsgevallen. We beperken ons tot lijnvormige elementen waarbij de  $x$ -as samenvalt met de staafas en de hoofdassen voor de kwadratisch oppervlaktemomenten samenvallen met de  $y$ - en  $z$ -as, zoals bij de rechthoekige doorsnede van fig. 1a1.

Alleenstaand kunnen voorkomen:

- $N_x$  Centrische normaalkracht; fig. 1a2.  
Hierdoor zullen normaalspanningen  $\sigma_n$  in de  $x$ -richting ontstaan.
- $M_y M_z$  Zuiver buigende momenten; fig. 1b.  
Hierdoor zullen normaalspanningen  $\sigma_b$  in de  $x$ -richting ontstaan.
- $M_x$  Zuiver wringend moment; fig. 1c1.  
Hierdoor zullen schuifspanningen  $\tau$  in het  $y$ - $z$ -vlak ontstaan. De spanningsverdeling komt in [486] aan bod.

Bij de momenten geeft de term 'zuiver' aan dat het moment langs de staafas constant is.

Nieuw is de introductie van het wringend moment (meestal aangegeven als  $M_t$ ).

Denk hierbij aan het uitwringen van een dweil of een vaatdoek, of neem zelf een balkje tempex ter hand en verwring het als op de foto, zie fig. 2.

Een vrij eenvoudige combinatie treedt op als de zuiver buigende momenten  $M_y$  en  $M_z$  gelijktijdig voorkomen, zie fig. 1c2. Men heeft dan nog steeds een zuiver buigend moment waarbij de neutrale lijn door het zwaartepunt van de doorsnede gaat. Maar de neutrale lijn valt nu niet langer samen met een van de hoofdassen van de doorsnede en men spreekt van *dubbele buiging*.

Fig. 2 Vervormingen bij zuivere wringing  
De staafas blijft recht maar tordeert wel ;  
normale doorsneden blijven niet langer vlak !

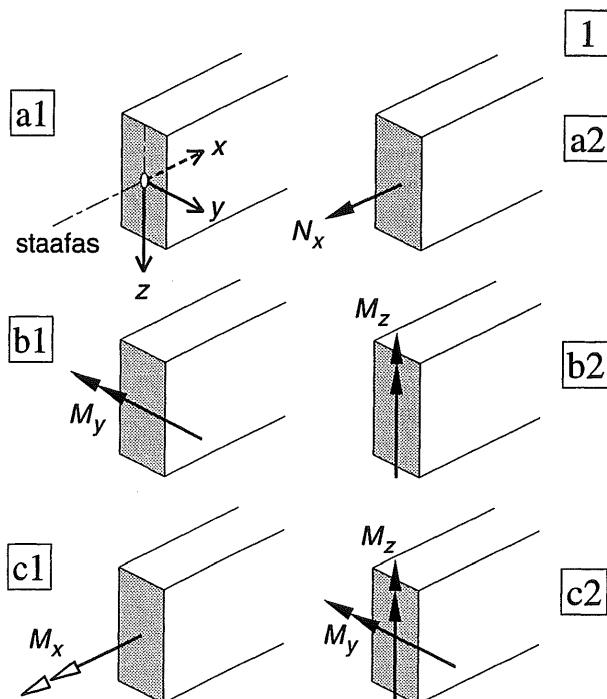


Fig. 1 Snedekrachten die zelfstandig kunnen voorkomen (alle grootheden positief volgens de tekenaarspraken van [453]).

- a1 Staat (ligger) met assenkruis en ligging van de hoofdassen in de dwarsdoorsnede
- a2 Normaalkracht
- b. Buigende momenten
- c1 Wringend moment
- c2 Dubbele buiging



## Dwarskrachten

Dwarskrachten veroorzaken in de betreffende doorsnede (in het  $y$ - $z$ -vlak) alleen maar schuifspanningen. Dwarskrachten kunnen nooit alleenstaand voorkomen, ze veroorzaken altijd buigende momenten, zie fig. 3b.

$V_z$  veroorzaakt een moment  $M_y$

$V_y$  veroorzaakt een moment  $M_z$

Alleen ter plaatse van een momentennulpunt is het mogelijk dat de dwarskracht alleen optreedt, maar dan ook alleen maar in dié snede.

NB: de getekende positieve dwarskrachten in fig. 3b kunnen zowel positieve als negatieve buigende momenten veroorzaken, afhankelijk van de randvoorwaarden van de ligger.

De combinatie buiging plus dwarskracht is het meest voorkomende en ook het belangrijkste belastinggeval. De normaalspanningen (buigspanningen) ten gevolge van het buigend moment en de schuifspanningen ten gevolge van de dwarskracht worden bij de elementaire mechanica vrijwel altijd afzonderlijk beschouwd.

In fig. 3b1 neemt het buigend moment  $M_y$  toe in de positieve  $x$ -richting. Als we fig. 3b1 een kwart slag naar links draaien dan moeten  $y$  en  $z$  onderling worden verwisseld en ontstaat voor  $M_z$  de situatie van fig. 3b2. Maar hierdoor hebben we de tekenafspraak voor  $M_z$  volgens [453] verlaten, vergelijk fig. 2c, d.

We kunnen daarom beter de afspraak aanhouden dat we buigende momenten positief noemen als ze trekspanningen (in  $x$ -richting) veroorzaken, gaande vanaf de neutrale lijn in de positieve asrichting van de doorsnede. Raadpleeg ook [431]: Betrekkelijkheid van tekenafspraken!

Een andere belangrijke combinatie is normaalkracht plus een buigend moment (al dan niet gecombineerd met dwarskracht), zie fig. 3c. De normaalkracht en het buigend moment zijn soms wel en soms niet afhankelijk van elkaar, maar de normaalspanningen ten gevolge van de normaalkracht  $N_x$  en de buigende momenten  $M_y$  (dan wel  $M_y$  en/of  $M_z$ ) zullen we altijd moeten superponeren.

## Wringing

In vele gevallen treden geen wringende momenten op of worden de invloeden verwaarloosd. De schuifspanningsverdeling ten gevolge van wringing kan in vele gevallen afzonderlijk worden beschouwd. Men moet voor wringing echter altijd op zijn hoede zijn. Bij de meeste dunwandige profielen kunnen onverwacht grote rotaties optreden. Zelfs bij grote buigstijfthes in  $y$ - en  $z$ -richting kan de wringstijfheid toch gering zijn, zie hiertoe 20.7.6 [491].

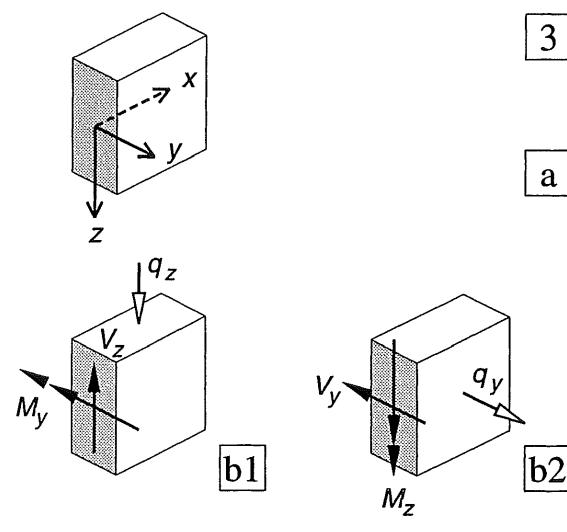


Fig. 3 Gelyktijdig optreden van snedekrachten

- a. Liggertje met assenkruis
- b1 Dwarskrachten en buigende momenten ten gevolge van een verticale belasting  $q_z$
- b2 Dwarskrachten en buigende momenten ten gevolge van een horizontale belasting  $q_y$
- c. Buiging – al dan niet met dwarskracht – gecombineerd met normaalkracht

### 20.2.1 ALGEMEEN

Bij vrijwel alle momentenlijnen die in KW-2 zijn behandeld, varieert het buigende moment langs de lengte-as van de ligger, zodat daar het veerkrachtsgeval buiging plus dwarskracht optreedt. De invloed van de dwarskracht op de vervormingen blijkt echter zo gering te zijn, dat de buigspanningsverdeling kan worden berekend alsof er in elke doorsnede alleen maar een zuiver buigend moment zou aangrijpen.

De dwarskracht veroorzaakt in de normale doorsnede enkel en alleen maar schuifspanningen. De grootte van deze spanningen is van betrekkelijk ondergeschikte betekenis. Desalnietemin zal een doorsnede de buigende momenten alleen maar effectief kunnen overdragen, als ook de schuifspanningsafdracht is gewaarborgd. Aan dit onderdeel wordt aandacht besteed in 20.6 [478].

Zoals reeds is vermeld, worden de buigspanningsverdeling ten gevolge van  $M$  en de schuifspanningsverdeling ten gevolge van  $V$  meestal afzonderlijk beschouwd.

Dit heeft de volgende oorzaken waarop we in KW-7 nog terug zullen komen:

- De grootte van de maximale schuifspanningen is veel kleiner dan van de maximale buigspanningen,
- de maximale buigspanningen treden veelal (maar niet altijd) op in andere doorsneden dan de maximale schuifspanningen,
- zelfs als beide maximale spanningen in dezelfde doorsnede optreden dan zijn de maxima op verschillende plaatsen in de doorsnede aanwezig.

Als we over schuifspanningen spreken bij een variërend buigend moment ten gevolge van een verticale belasting, dan bedoelen we daarbij uitsluitend de *verticaal* werkende schuifspanningen ten gevolge van *dwarsskracht* in de *normale doorsnede* en zonodig ook de daaruit volgende horizontale schuifspanningen [482-483].

Met de *horizontaal* werkende schuifspanningen in een schuine doorsnede ten gevolge van *buiging alleen* houden we ons in feite nooit bezig.

Bij een constant buigend moment treden er schuifspanningen op in alle doorsneden die een hoek  $\alpha$  maken met de normale doorsnede. We hebben bij zuivere buiging te maken met een lijnspanningstoestand, zoals is besproken in [410-411]; in elk punt van zo'n doorsnede is de resulterende buigspanning immers evenwijdig aan de as van de ligger.

We kunnen deze resulterende spanning weer ontbinden in een normaalspanning en een schuifspanning, volgens fig. [410-2]. Beide spanningen verlopen dan lineair over de hoogte. Door de invloed van de schuifspanningen blijven vlakke doorsneden dan ook niet meer vlak, zoals gemakkelijk is te constateren aan het model van een gebogen balkmootje dat een constante kromming bezit, zie fig. 1.

1



a



b

Fig. 1 Model van een liggermootje dat is onderworpen aan een constant buigend moment

- a. Normale doorsneden blijven vlak
- b. Een schuine doorsnede verwringt

## 20.2.2 BEREKENING VAN DE NORMAALSPANNINGEN TEN GEVOLGE VAN BUIGING

2

### Algemene richtlijnen

- Teken de momentenlijn en bereken de extreme positieve en negatieve momenten
- Bepaal het kwadratisch oppervlaktemoment van de doorsnede om de juiste buigingsas
- Bepaal de extreme buigspanningen in de buitenste vezels van de doorsnede met behulp van de formules [427-(28)]:

$$\sigma = \frac{M z}{I} \quad \text{of} \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

Het bepalen van het kwadratisch oppervlaktemoment kost meestal wat tijd. Ga daarom eerst na of de doorsnede één of meer symmetrie-assen bezit, zodat de richting van de hoofdassen vastligt [437-438].

Controleer vervolgens of het nodig is het zwaartepunt van de doorsnede te bepalen of dat uit symmetrie-overwegingen de neutrale lijn samenvalt met een symmetrie-as [438].

In beide gevallen zijn de kwadratische oppervlakte-momenten snel te bepalen met behulp van de algemene procedure volgens [439], of de variant voor samengestelde rechthoekige doorsneden volgens [448-449].

Voor asymmetrische doorsneden kunnen achtereenvolgens de volgende aanbevelingen worden verstrekt:

- a. Probeer ze te vermijden.
- b. Ga na of de vervormingen in zijdelingse richting wellicht geheel of gedeeltelijk worden verhinderd. Is dit het geval dan kan als nog van het  $y$ - $z$ -assenkruis gebruik worden gemaakt voor de bepaling van  $I$ , zie fig. 2.
- c. Als punt b. niet van toepassing is, maak dan voor standaardprofielen gebruik van tabelboeken voor de doorsnede-grootheden en bestudeer alsnog paragraaf 19.7.3 [442].

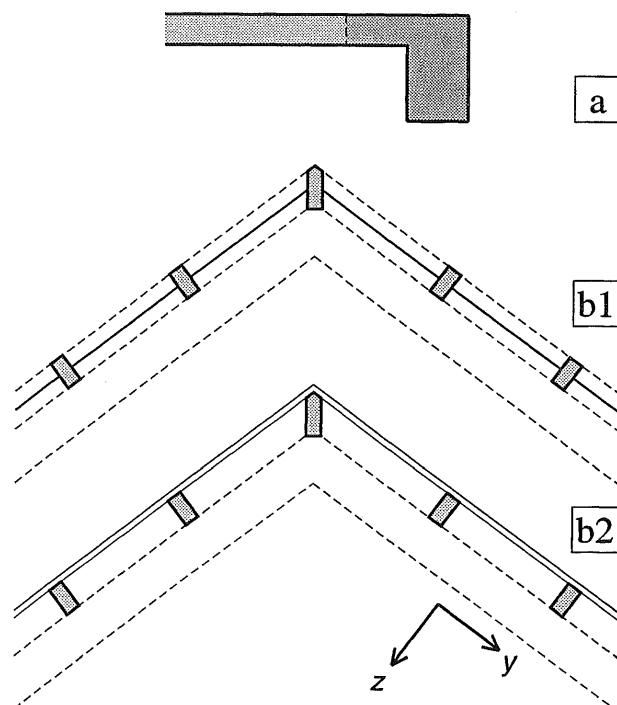


Fig. 2 Mogelijkheden om de procedure voor symmetrische doorsneden met symmetrische belasting toe te passen voor afwijkende situaties

- a. Betonvloer met randbalk. Een strook van de vloer mag als flens van de randbalk worden beschouwd (de zgn. meewerkende breedte) De bovenzijde van de randbalk kan niet zijdelings verplaatsen
- b1 Gordingen op een symmetrisch dak gekoppeld door trekstangen (halverwege de hoogte)
- b2 Gordingen op een symmetrisch dak gekoppeld door het dakbeschot aan de bovenzijde

In geval b. buigen de gordingen alleen door om hun stijve as, omdat een verplaatsing in zijdelingse richting wordt verhinderd. De krachten in zijdelingse richting worden via de trekstangen of het dakbeschot overgebracht naar de topgording, die een veel grotere belasting krijgt te dragen.

Bij de betonbalk zal men geneigd zijn de invloed van de flens te verwaarlozen en alleen met een rechthoekige doorsnede te rekenen.

Bij de houten gordingen zal men geneigd zijn om de invloed van het dakbeschot te verwaarlozen en de dikte van de gordingen zo groot te kiezen dat de spanningen door de dubbele buiging niet te hoog worden [462].

## 20.2.3 SPANNINGSVERDELING T-BALK

1

## Uitsluitend verticale belasting

Een betonbalk met een T-vormige doorsnede volgens fig. 1a heeft een overspanning van 12 m en moet behalve het eigen gewicht een gelijkmatig verdeelde belasting overbrengen ter grootte:  $q_q = 25 \text{ kN/m}^2$ .

Alle afmetingen zijn precies 10 × zo groot als bij de doorsnede van fig. [438-1], zodat we de daar berekende doorsnede-grootheden als volgt met de onderstaande factoren kunnen vermenigvuldigen:  $z \times 10$ ,  $A \times 10^2$ ,  $S \times 10^3$ ,  $I \times 10^4$

$$\begin{aligned}\text{Oppervlak: } A &= 300 * 10^3 \text{ mm}^2 \\ \text{Zwaartepunt: } z_b &= 300 \text{ mm} \\ \text{Kwadr. opp. mom: } I_y &= 17 * 10^9 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Belasting eigen gewicht:  $q_g$

Veranderlijke belasting:  $q_q$

$$\text{Totale belasting: } q = q_g + q_q$$

$$\begin{aligned}q_g &= A * \gamma_{\text{beton}} = 0,3 \text{ m}^2 * 24 \text{ kN/m}^3 = \\ &= 7,2 \text{ kN/m}^2\end{aligned}$$

$$q = 7,2 + 25,0 = 32,2 \text{ kN/m}^2$$

We berekenen eerst het maximale moment uitsluitend ten gevolge van het eigen gewicht:

$$\begin{aligned}M_{\max} &= 1/8 * q_g l^2 = 1/8 * 7,2 * 12^2 = \\ &= 129,6 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Voor de berekening van de spanningen (altijd uitgedrukt in N/mm<sup>2</sup>) moet het moment – dat vrijwel altijd wordt berekend in kNm – eerst worden herleid tot Nmm.

$$\begin{aligned}1 \text{ kN} &= 10^3 \text{ N}; \quad 1 \text{ m} = 10^3 \text{ mm}, \\ 1 \text{ kNm} &= 10^6 \text{ Nmm}.\end{aligned}$$

De extreme spanningen aan boven- en onderzijde van de doorsnede kunnen worden berekend met behulp van de formules [427-(28)].

In dit geval is het dus noodzakelijk om de ligging van het zwaartepunt te kennen. In de berekening heeft het echter nauwelijks voordelen om eerst de weerstandsmomenten uit te rekenen.

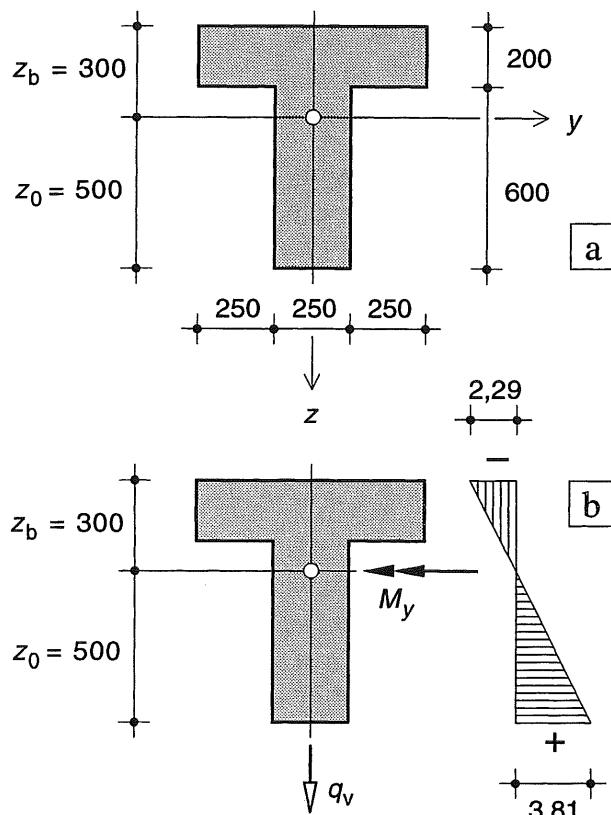


Fig. 1 T-vormige dwarsdoorsnede

- a. Afmetingen
- b. Spanningsverdeling ten gevolge van een verticale (omlaag gerichte) belasting (positief buigend moment  $M_y$ )

$$\sigma_b = \frac{M_y * z_b}{I_y} = \frac{129,6 * 10^6 * 300}{17 * 10^9} = 2,29$$

$$\sigma_o = \frac{M_y * z_o}{I_y} = \frac{129,6 * 10^6 * 500}{17 * 10^9} = 3,81$$

De maximale spanning treedt op aan de onderzijde en bedraagt:  $\sigma_o = +3,81 \text{ N/mm}^2$ .

De spanning aan de bovenzijde is gelijk aan:

$$\sigma_b = 3/5 * \sigma_o = -2,29 \text{ N/mm}^2.$$

Het is weliswaar mogelijk om de afstanden  $z_o$  en  $z_b$  in de formules [427-(28)] met hun teken in te voeren, maar het is niet gebruikelijk.

### Uitsluitend horizontale belasting

We beschouwen vervolgens dezelfde ligger met T-vormige doorsnede, die nu uitsluitend een horizontale belasting moet overbrengen. Deze kan bijvoorbeeld worden veroorzaakt door windkrachten van rechts, zie fig. 2a. Voor een gemakkelijke vergelijking van de hierbij optredende spanningen met die van het vorige geval, gaan we uit van hetzelfde maximale moment als in [458]:  $M_{\max} = 129,6 \text{ kNm}$ .

De momentvector valt nu samen met de verticale symmetrie-as van de doorsnede en het kwadratisch oppervlakte-moment kan rechtstreeks worden bepaald ten opzichte van deze as zonder eerst het zwaartepunt behoeven uit te rekenen, vergelijk fig. [438-1b]:

$$I_z = 7,81 * 10^9 \text{ mm}^4$$

De extreme buigspanningen aan de zijkanten van de flens volgen uit:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z * y_1}{I_z} = \frac{129,6 * 10^6 * 375}{7,81 * 10^9} = 6,22$$

De buigspanningen aan de zijkanten van het lijf zijn gelijk aan:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= 125/375 * \sigma_{\max} = 1/3 * 6,22 = \\ &= 2,07 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

We hebben ons bij deze berekening nog niet om het teken van het moment of de spanningen bekommerd. Uit de richting van de belasting  $q_h$  volgt dat links trekspanningen moeten optreden en rechts drukspanningen.

In fig. 3a en fig. 3b zijn de ruimtelijke spanningsfiguren ten gevolge van  $M_y$  en  $M_z$  weergegeven. Om het verloop van de spanningen zo duidelijk mogelijk zichtbaar te maken is het nulvlak horizontaal gesitueerd en zijn de trek- en drukspanningen in tegengestelde richting uitgezet ten opzicht van de figuren 1 en 2.

Het geval dat de verticale belasting en de horizontale belasting beide gelijktijdig aangrijpen, veroorzaakt dubbele buiging. Dit wordt besproken in [460].

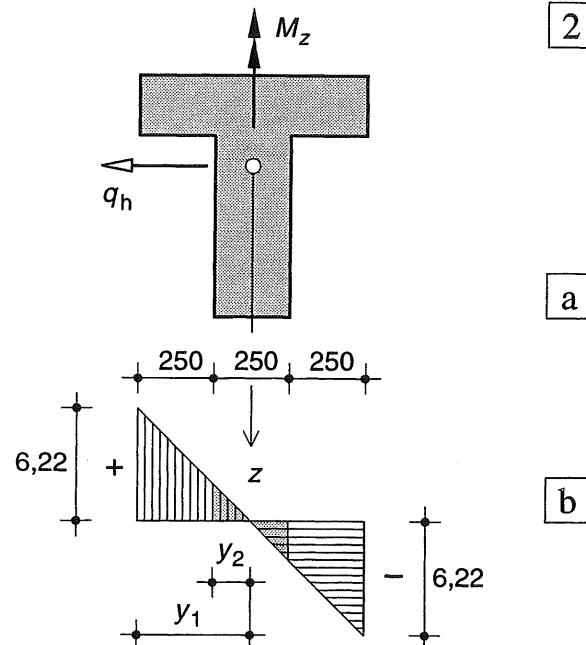


Fig. 2 Balk met T-vormige dwarsdoorsnede onder horizontale belasting

- a. Doorsnede met belasting- en momentvector
- b. Spanningsverdeling ten gevolge van  $M_z$

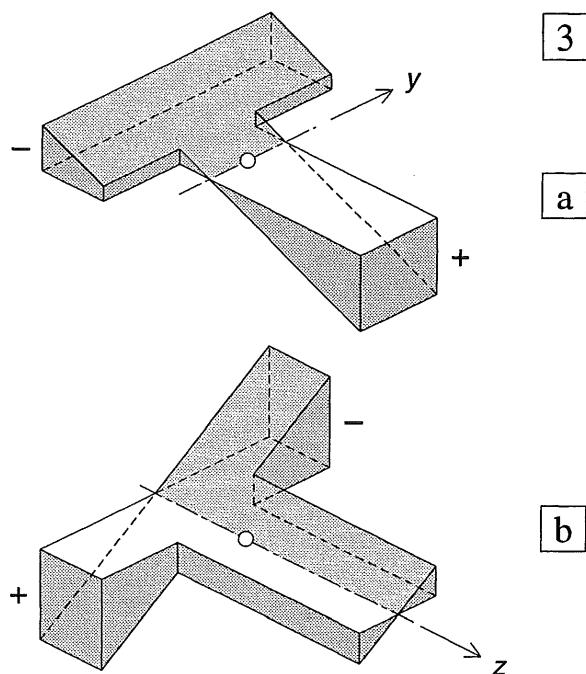


Fig. 3 Het verloop van de normaalspanningen, ruimtelijk uitgezet

- a. Buiging om de y-as (fig. 1)
- b. Buiging om de z-as (fig. 2)

## 20.3.1 OVERZICHT

Dubbele buiging treedt op als de momentvector niet evenwijdig is met één van de hoofdassen van de doorsnede. Hierbij kunnen zich een aantal gevallen voordoen:

1. De hoofdassen van de (meestal symmetrische) doorsnede liggen weliswaar in het horizontale en het verticale vlak, maar er treedt zowel een verticale belasting op (sommatie van het eigen gewicht en de veranderlijke belasting) als een horizontale belasting (door wind bijv.), zie fig. 1a.
2. Er treedt alleen een verticale belasting op, maar de hoofdassen van de doorsnede zijn geroteerd ten opzichte van het verticale vlak, zie fig. 1b.

De momentvector wordt nu ontbonden langs beide hoofdassen en voor elke momentvector worden de spanningen op de gebruikelijke wijze bepaald. Vervolgens worden de resultaten gesuperponeerd, zie [461].

3. Combinaties van de gevallen 1. en 2.  
Ook hier moeten de momentvectoren weer worden ontbonden langs de hoofdassen van de doorsnede.
4. Er treedt alleen een verticale belasting op, maar door de asymmetrie van de doorsnede moet eerst de richting de hoofdassen worden bepaald, met de bijbehorende waarden van  $I''$ . Daarna kan ontbinding langs deze hoofdassen plaatsvinden; zie fig. 1c [440-442].

Let vooral op bij hoekprofielen. Als de benen hiervan verticaal en horizontaal staan, komt men licht in de verleiding om de kwadratische oppervlaktemomenten op te maken om de  $y$ -as en de  $z$ -as en deze assen als de hoofdassen te beschouwen. In werkelijkheid zullen de hoofdassen altijd een hoek maken met de verticale en horizontale as. Raadpleeg tabellenboeken om veel rekenwerk met de vrijwel altijd optredende fouten te voorkomen. Zie ook [441-442].

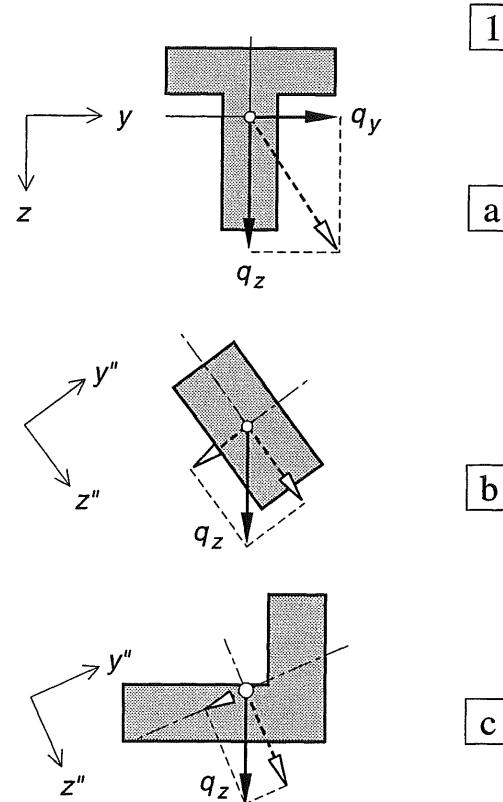


Fig. 1 Gevallen van dubbele buiging

- a. Resulterende belastingvector niet evenwijdig aan de hoofdassen in  $y$ - en  $z$ -richting
- b. Belastingvector in  $z$ -richting, maar hoofdassen geroteerd ten opzichte van het  $y$ - $z$ -assenkruis
- c. Belastingvector in  $z$ -richting, de richting van de hoofdassen moet afzonderlijk worden berekend, c.q. aan tabellenboeken worden ontnomen

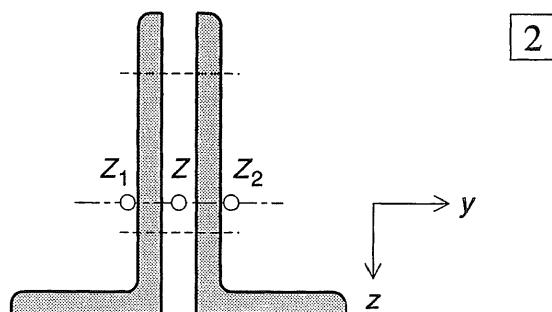


Fig. 2 Twee gekoppelde asymmetrische hoekprofielen leveren tezamen weer een symmetrisch profiel

Indien twee hoekprofielen plaatselijk zodanig zijn gekoppeld dat buiging om een scheve as wordt verhinderd, dan heeft men een samengesteld profiel met één symmetrie-as verkregen, waarbij de hoofdassen weer evenwijdig zijn aan de  $y$ - en  $z$ -as, zie fig. 2.

### 20.3.2 HORIZONTALE EN VERTICALE BELASTING TEZAMEN

Om het effect te doorzien van het gelijktijdig aangrijpen van een verticale en een horizontale belasting, beschouwen we weer de doorsnede waarvoor in [458-459] de spanningen zijn berekend voor elk belastinggeval afzonderlijk.

Om het spanningsverloop te kunnen tekenen, dienen de spanningen in alle hoekpunten van de doorsnede bekend te zijn. In principe kan men dan gebruik maken van de algemene formule:

$$\sigma = \frac{M_y * z}{I_y} + \frac{M_z * y}{I_z} \quad (1)$$

Maar als we puur algebraïsch te werk willen gaan, door zowel de momenten als de afstanden  $y$  en  $z$  een teken te geven volgens [453] (waarbij de kwadratische oppervlaktemomenten altijd als positieve grootheden worden ingevoerd), dan vinden we onjuiste uitkomsten.

Het is dan eenvoudiger om voor elk van de afzonderlijke belastinggevallen de spanningen in de hoekpunten te bepalen aan de hand van de draairichting van het moment en deze spanningen in de doorsnede te noteren, zie fig. 3a, b. Vervolgens kunnen deze spanningen in een derde doorsnede-figuur worden gesommeerd; fig. 3c.

Om de ligging van de neutrale lijn te bepalen – die uiteraard door het zwaartepunt van de doorsnede blijft gaan – is in fig. 3d langs de twee van belang zijnde zijranden van de doorsnede het spanningsverloop uitgezet. In fig. 4 is het spanningsverloop ruimtelijk weergegeven. Als men met behulp van formule (1) de spanningen berekent in de punten A-B-C-D, dan kan grafisch de spanning in elk punt worden bepaald, zie fig. 4c.

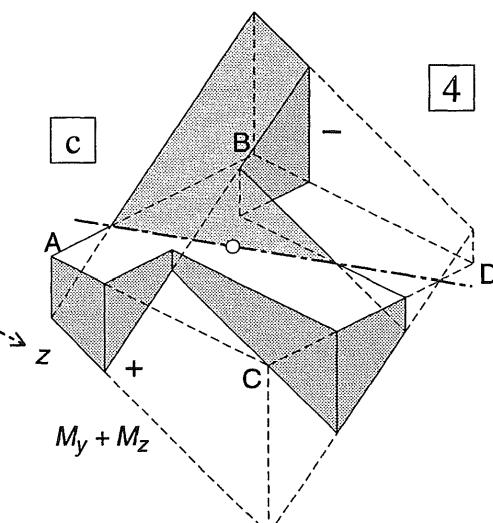
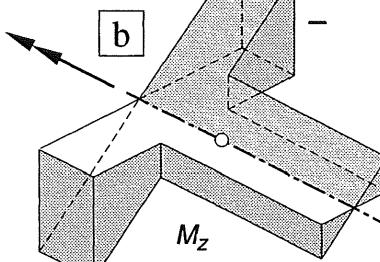
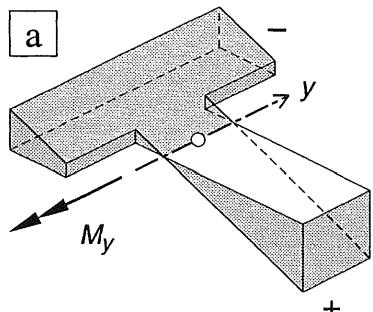


Fig. 4 Ruimtelijke figuren voor de spanningen ten gevolge van  
a.  $M_y$ ;      b.  $M_z$ ;      c.  $M_y + M_z$

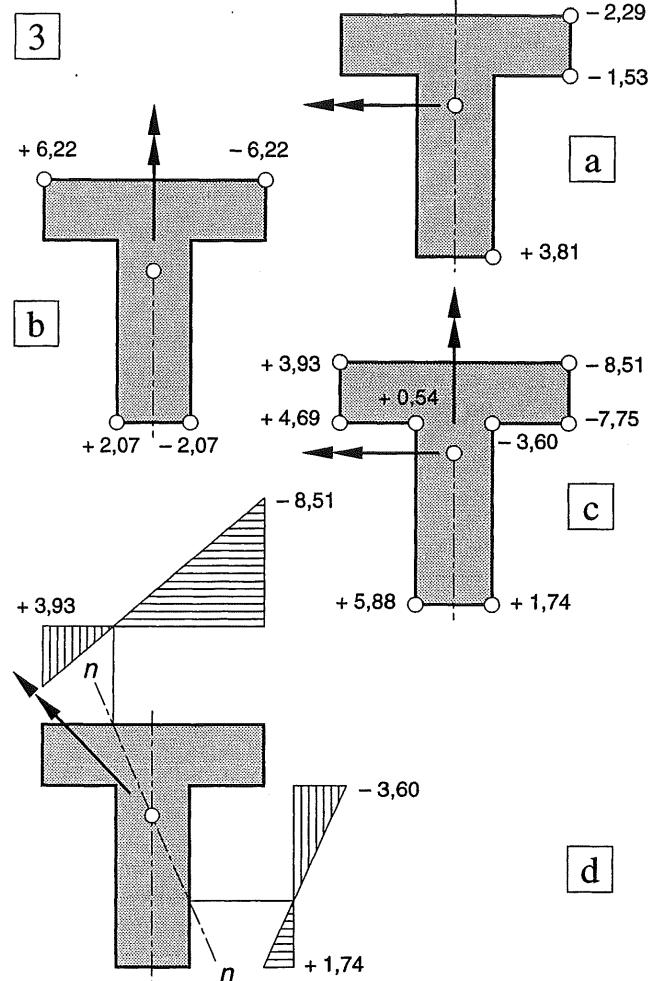


Fig. 3 Numerieke waarde van de spanningen in de hoekpunten van een T-vormige doorsnede  
a. Spanningen ten gevolge van  $M_y$   
b. Spanningen ten gevolge van  $M_z$   
c. Superpositie van de spanningen  
d. Spanningen langs 2 randen van de doorsnede uitgezet om de neutrale lijn te kunnen bepalen

### 20.3.3 VERTICALE BELASTING BIJ GEROTEERDE HOOFDASSSEN VAN DE DOORSNEDE

Het meest bekende geval zijn gordingen die zijn aangebracht op een kampsant voor een woning met een schuin dak, zie fig. 1a. De belasting wordt veroorzaakt door de zwaartekracht en werkt dus verticaal. Om de gedachte te bepalen wordt aangenomen dat het maximale buigende moment gelijk is aan  $M_y = 3,5 \text{ kNm}$ .

De afmetingen van de gording zijn gelijk aan:

$$b \times h = 95 \times 195 \text{ mm}^2$$

$$W_{\max} = 1/6 * 95 * 195^2 = 602 * 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{\min} = 1/6 * 195 * 95^2 = 293 * 10^3 \text{ mm}^3$$

Indien de gording gewoon verticaal wordt opgesteld bedragen de maximale buigspanningen:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_{\max}} = \frac{3,5 * 10^6 \text{ (Nmm)}}{602 * 10^3 \text{ (mm}^3)} = 5,81 \text{ N/mm}^2$$

Het dak maakt een hoek  $\alpha$  met de horizontaal. Het buigend moment  $M_y$  wordt nu ontbonden langs de hoofdassen van de gording, hetgeen de volgende moment-componenten oplevert, zie hiertoe fig. 1b:

$$M''_y = M_y \cos \alpha \quad \text{en} \quad M''_z = M_y \sin \alpha$$

Indien  $\tan \alpha = 0,75$  volgt:

$$\cos \alpha = 0,80 \quad \text{en} \quad \sin \alpha = 0,60$$

De spanningen aan de boven- en onderzijde van de doorsnede volgen uit:

$$\sigma_1 = \frac{M''_y}{W_{\max}} = \frac{3,5 * 10^6 * 0,8}{602 * 10^3} = 4,65 \text{ N/mm}^2$$

De spanningen aan de zijkanten van de doorsnede volgen uit:

$$\sigma_2 = \frac{M''_z}{W_{\min}} = \frac{3,5 * 10^6 * 0,6}{293 * 10^3} = 7,17 \text{ N/mm}^2$$

De spanningen  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  zijn voor elk belastinggeval afzonderlijk weergegeven in fig. 2.

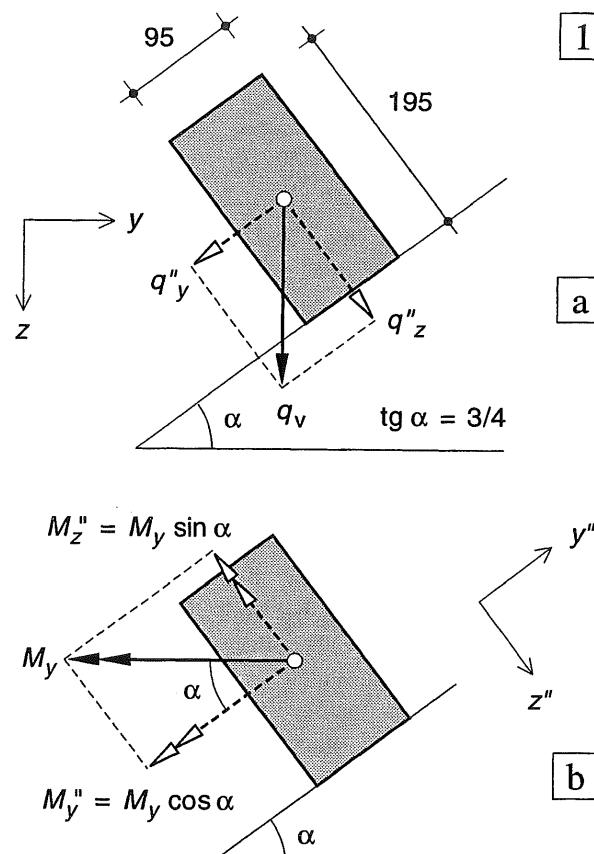


Fig. 1 Buigend moment in een gording

- a. Afmetingen en ligging van de doorsnede, met de ontbondenen van de belastingvector langs de hoofdassen
- b. Ontbinden van de moment-vector langs de hoofdassen

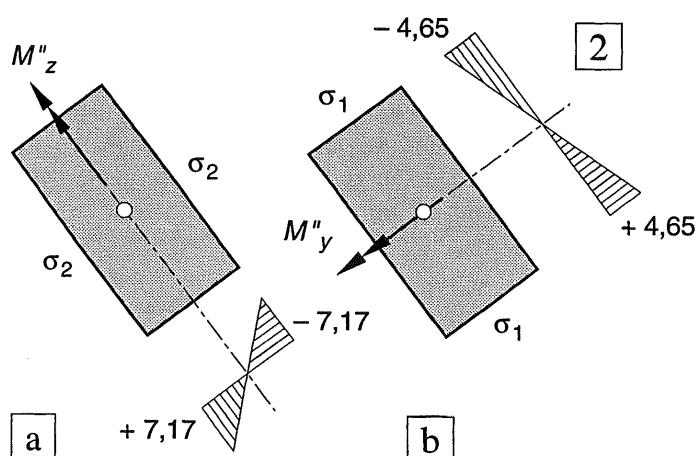


Fig. 2 Spanningsverloop voor beide belastinggevallen

- a. Spanningen ten gevolge van  $M''_z$
- b. Spanningen ten gevolge van  $M''_y$

In fig. 1 en 2 werkt de moment-vector in de getekende draairichting (kurketrekker-regel) op het daarachter liggende deel van de ligger. Hieruit volgt waar trek- en drukspanningen zullen optreden.

Als men hier moeite mee heeft, dan kan men de vector die de verticale belasting aangeeft, ook ontbinden langs de hoofdassen van het profiel, zie fig. 1a. Bij een ligger op twee steunpunten treedt dan trek op aan de zijde waar de betreffende component van de belasting heenwijst.

Om de uiteindelijke spanningsverdeling te vinden zijn de spanningen in de vier hoekpunten van de gording voor beide belastinggevallen, nogmaals weergegeven in fig. 3a, b.

Superpositie van de twee belastinggevallen levert dan de spanningen op in de vier hoekpunten van de gording, zie fig. 3c.

In fig. 3d zijn de spanningen langs de omtrek van het profiel weergegeven, waarbij de trekspanningen naar buiten zijn uitgezet. De neutrale lijn is dan gemakkelijk te tekenen.

Duidelijk blijkt de schuine ligging van de neutrale lijn èn het optreden van veel hogere trekspanningen dan in het geval van de verticaal staande gording.

De extreme spanningen blijken nu gelijk te zijn aan  $11,82 \text{ N/mm}^2$  in plaats van  $5,81 \text{ N/mm}^2$ , dus meer dan twee maal zo hoog. De spanningen blijken ook veel hoger te zijn, dan men bij hout gewoonlijk toelaat. Deze spanning bedraagt namelijk globaal  $7 \text{ N/mm}^2$  in het gebruiksstadium.

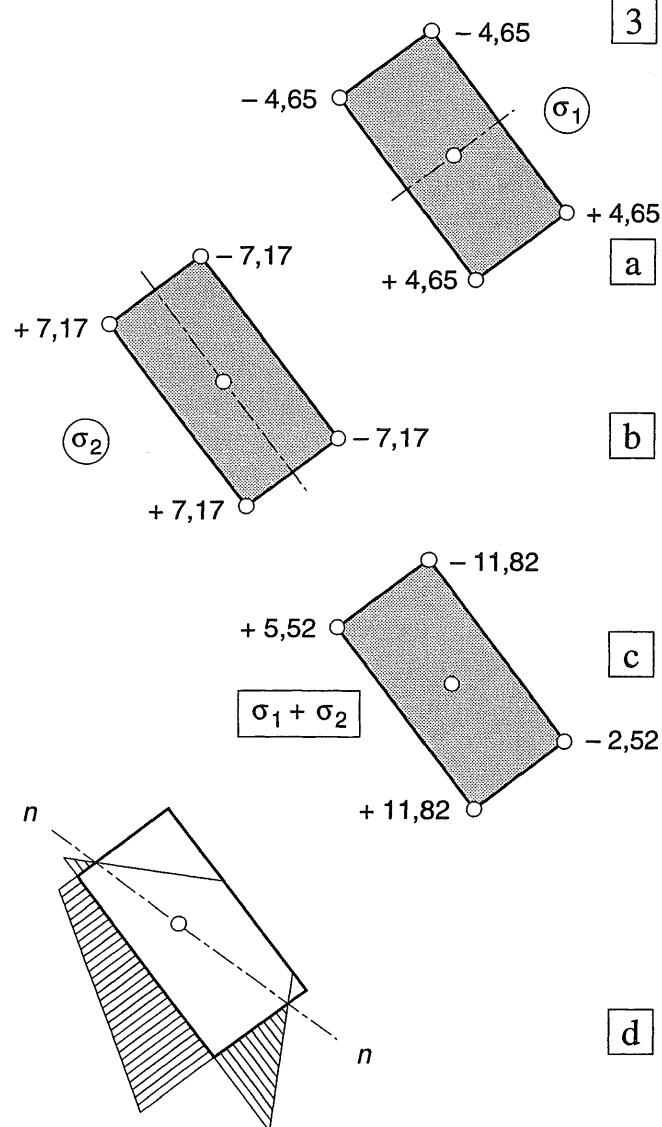


Fig. 3 Spanningen in de vier hoekpunten van de rechthoekige doorsnede

- Spanningen  $\sigma_1$  ten gevolge van  $M''_y$
- Spanningen  $\sigma_2$  ten gevolge van  $M''_z$
- Superpositie van  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$
- Spanningen uitgezet langs drie buitenranden van de doorsnede om de ligging van de neutrale lijn te bepalen

## 20.4.1 ALGEMEEN

Bij (horizontale) liggers treden maar zelden normaalkrachten op. Als normaalkrachten voorkomen, dan hebben we ze meestal zelf aangebracht, zoals bij liggers in voorgespannen beton. Verticale elementen, zoals kolommen en wanden, zijn in eerste instantie bedoeld om de verticale belastingen via normaalkrachten naar omlaag af te dragen.

Vrijwel altijd zullen ze tegelijkertijd meer of minder grote buigende momenten moeten opnemen. De normaalspanningen die uit beide belastinggevallen volgen moeten altijd worden gesuperponeerd.

Bij steenachtige materialen zonder wapening (metselwerk en ongewapend beton) komen de drukspanningen ten gevolge van de over te brengen normaalkracht ons goed van pas om de optredende buigtrekspanningen geheel of gedeeltelijk te compenseren. Dit soort materialen kan immers maar in zeer beperkte mate trekspanningen opnemen.

In eerste instantie zullen we echter uitgaan van materialen die even goed trek als druk kunnen opnemen. Om de gedachte te bepalen, zullen we hierbij gebruik maken van horizontale liggers, waarop zowel een centrische normaalkracht aangrijpt als een buigend moment. De schuifspanningen ten gevolge van de dwarskracht worden hierbij nog steeds niet beschouwd [478].

*Normaalkracht*

De normaalkracht grijpt aan in het zwaartepunt van de doorsnede; de normaalspanningen zijn gelijkmatig over de doorsnede verdeeld, zoals is uiteengezet in [416].

*Buigend moment*

Als een buigend moment op de doorsnede aangrijpt, ontstaat er een neutrale lijn die samenvalt met een zwaartelijn van de doorsnede. De spanningen zijn recht evenredig met de afstand tot de neutrale lijn. Ligging van de neutrale lijn en grootte van de spanningen hangt mede af van de doorsnedevorm en de richting van de momentvector, zoals is uiteengezet in hoofdstuk 19.

*Normaalkracht + buigend moment*

Als beide veerkrachtsgevallen gelijktijdig optreden, dan kunnen de normaalspanningen worden gesuperponeerd (= algebraïsch opgeteld).

Dit houdt in dat ter plaatse van de oorspronkelijke neutrale lijn (ten gevolge van buiging alleen), altijd de (gemiddelde) normaalspanning zal optreden.

Vooruitlopend op de wat systematischer behandeling in [465] is in fig. 1 voor de T-balk van [461-4] de superpositie weergegeven van een buigend moment volgens [461-4a] en een centrische normaalkracht (druk). De oorspronkelijke neutrale lijn van fig. 1a ondergaat dan alleen een evenwijdige verschuiving.

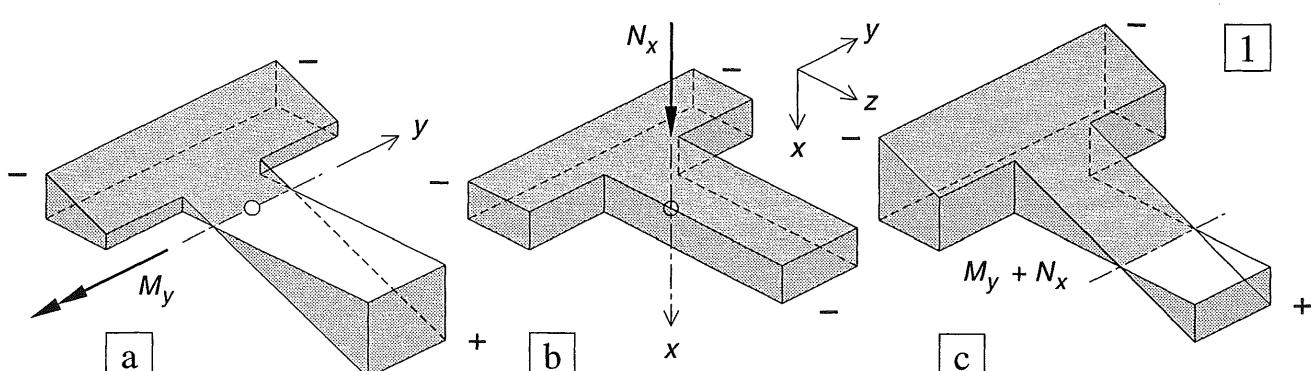


Fig. 1 Ruimtelijke figuren voor de spanningsverdeling ten gevolge van:

a. een buigend moment  $M_y$

b. Een centrische normaalkracht  $N_x$

c. Superpositie:  $M_y + N_x$

## 20.4.2 SUPERPONEREN VAN NORMAALSPANNINGEN EN BUIGSPANNINGEN

Strikt genomen zou men moeten spreken van:

1. normaalspanningen ten gevolge van *normaalkrachten*
2. normaalspanningen ten gevolge van *buigende momenten*

Het is echter algemeen gebruikelijk om de volgende veel kortere termen te gebruiken:

1. Normaalspanningen (uitsluitend t.g.v.  $N$ )
2. Buigspanningen (uitsluitend t.g.v.  $M$ )

In het vervolg zullen we meestal van deze laatste terminologie uitgaan.

Indien op een doorsnede de grootheden  $N$  en  $M$  gelijktijdig aangrijpen, zoals in fig. 2 is weergegeven, moeten de normaal- en buigspanningen worden gesuperponeerd, zie fig. 3. We gaan er gemakshalve vanuit dat de ligger een verticaal symmetrievlak bezit en de belasting op de ligger verticaal omlaag is gericht zodat de neutrale lijn loodrecht op het vlak van tekening staat.

Om de extreme spanningen aan de bovenzijde en onderzijde van de doorsnede in één formule te kunnen weergegeven, schrijven we:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (2)$$

Het plusteken geldt voor de vezels waar trek optreedt ten gevolge van een positief buigend moment. Voor een ligger op twee steunpunten is dit dus de ondervezel.

Als  $N$  en  $M$  beide positief zijn, zal in de ondervezel dus altijd trek optreden, het minteken in de formule geldt dan voor de bovenvezel.

In fig. 3a zijn de spanningen ten gevolge van normaalkracht en buiging elk afzonderlijk weergegeven en vervolgens opgeteld.

In fig. 3b zijn de buigspanningen echter rechtstreeks uitgezet ten opzichte van de waarde van de normaalspanning.

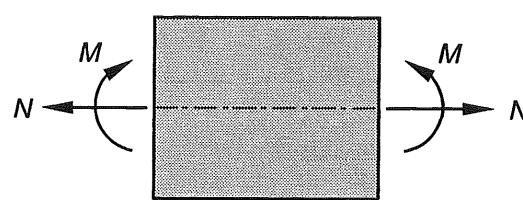


Fig. 2 Moot van een ligger onderworpen aan normaalkrachten en buigende momenten

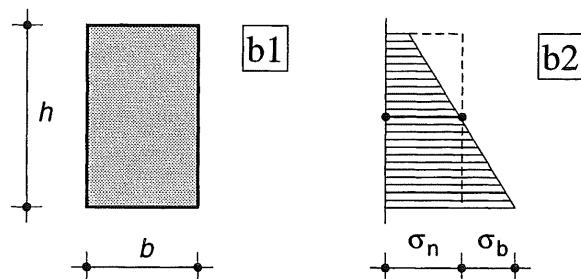
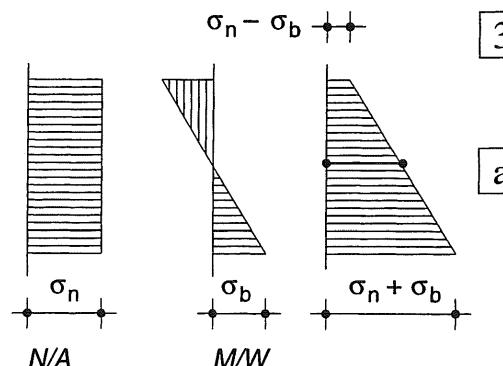


Fig.3 Superpositie van normaalspanningen (ten gevolge van trekkrachten) en buigspanningen (ten gevolge van een positief buigend moment)

- a. Spanningen afzonderlijk uitgezet en opgeteld
- b1 Dwarsdoorsnede rechthoekige balk
- b2 Buigspanningen uitgezet ten opzichte van de waarde van de normaalspanning

Let op:

$\sigma_n$  = constante (normaal) spanning t.g.v.  $N$

$\sigma_b$  = extreme (normaal) spanning t.g.v.  $M$

*Onthoudt de volgend belangrijke regel:  
Ter plaatse van de oorspronkelijke neutrale lijn (ten gevolge van buiging alléén) treedt na superpositie altijd de gemiddelde spanning op:  $\sigma = N/A$*

### 20.4.3 KOLOM ONDER INVLOED VAN VERTICALE EN HORIZONTALE BELASTING

Een kolom wordt aan zijn boveneind belast door een vertikale kracht  $F_V$  en een horizontale kracht  $F_H$ . De daaruit volgende snedekrachten  $N$  en  $V$  zijn weergegeven in fig. 1a. Het verloop van  $N$ ,  $V$  en  $M$  over de hoogte van de kolom is weergegeven in fig. 1b.

Voor een beter overzicht blijft het eigen gewicht van de kolom buiten beschouwing.

De numeriek gegevens luiden:

$$\text{doorsnede: } a \times b = 300 \times 200 \text{ mm}^2$$

$$\text{hoogte: } h = 3,0 \text{ m} = 3000 \text{ mm}$$

$$\text{krachten: } N = 240 \text{ kN}$$

$$V = 6 \text{ kN}$$

Let op: de symbolen  $a$  en  $h$  hebben hier niet de gebruikelijke betekenis; met andere woorden, pas formules nooit klakkeloos toe!

Gevraagd:

De verdeling van de (normaal) spanningen in de doorsneden: O - I - II - III, op onderlinge afstanden van 1 m van elkaar gelegen.

Oplossing:

We beschouwen de spanningsverdeling ten gevolge van  $N$  en ten gevolge van  $M$  eerst elk afzonderlijk. Daarna superponeren we beide spanningsverdelingen.

#### Normaalkracht

De spanning ten gevolge van de normaalkracht  $N$  is constant over de gehele lengte van de kolom. Hierbij doen we voor de berekening net alsof de kracht direct geheel gelijkmatig is verdeeld over de doorsnede en zich niet eerst hoeft te spreiden.

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{-240 * 10^3 \text{ (N)}}{200 * 300 \text{ (mm}^2\text{)}} = -4 \text{ N/mm}^2$$

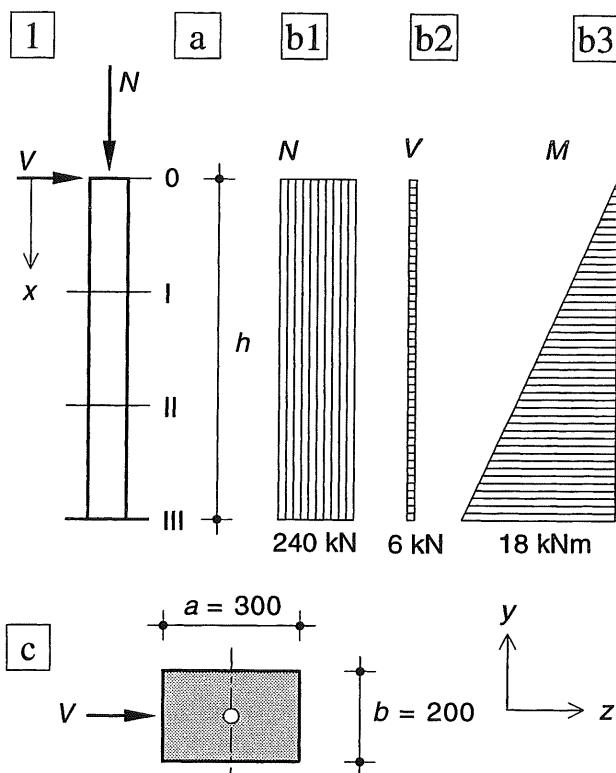


Fig. 1 Kolom onder invloed van een verticale en een horizontale belasting in de top  
Zijaanzicht kolom

- a. Zijaanzicht kolom
- b1 Normaalkrachtenlijn
- b2 Dwarskrachtenlijn (4 × te breed getekend ten opzichte van de normaalkrachtenlijn)
- b3 Momentenlijn
- c. Doorsnede van de kolom

#### Buigend moment

Het buigend moment heeft een lineair verloop over de hoogte:

$$M = V * x$$

De extreme buigspanningen aan de zijranden van de doorsnede volgen uit :

$$\sigma = M/W$$

We berekenen de buigspanningen in doorsnede I op een afstand van 1 m vanaf de bovenzijde van de kolom.

$$\sigma_b = \frac{M}{W} = \frac{6 * 10^3 \text{ (N)} * 10^3 \text{ (mm)}}{\frac{1}{6} * 200 * 300^2 \text{ (mm}^3\text{)}} = \pm 2 \text{ N/mm}^2$$

In de doorsneden II en III zijn de buigspanningen dan resp. 2 en 3 × zo groot.

In fig. 2 is voor de vier doorsneden de superpositie van de normaalspanningen en de buigspanningen weergegeven.

Hierbij blijken zich in de vier doorsneden vier kenmerkende gevallen voor te doen:

- 0 De spanningen zijn gelijkmatig verdeeld over de gehele doorsnede; fig. 2b.  
Er treden alleen drukspanningen op.
- I De drukspanningen variëren lineair over de doorsnede; fig. 2c.
- II De drukspanningen variëren lineair over de doorsnede, maar aan één buitenrand van de doorsnede zijn ze juist gelijk aan nul; fig. 2d.
- III De spanningen variëren lineair over de doorsnede, maar aan één zijde van de doorsnede treden over een gedeelte van de doorsnede trekspanningen op; fig. 2e.

Ter plaatse van de neutrale lijn (bepaald voor het geval van buiging alléén), treedt dus in alle gevallen de gemiddelde drukspanning op:

$$\sigma_n = -4 \text{ N/mm}^2.$$

Bij het tekenen van het spanningsverloop in een doorsnede, zijn we in principe vrij in de keuze van de richting waarin trek- en drukspanningen worden uitgezet.

De enige regel die we in het dictaat aanhouden is de volgende. Als bij de spanningsfiguur ook een stukje van de ligger in zijaanzicht wordt weergegeven, dan worden de spanningen getekend in de richting zoals ze van buitenaf op de beschouwde doorsnede werken, zie fig. 3.

Daar is een mochtje van een balk weergegeven, dat is onderworpen aan een constant buigend moment. Als we het spanningsverloop op de zijvlakjes tekenen, worden de drukspanningen op het linker zijvlakje dus naar rechts uitgezet en op het rechterzijvlakje naar links. Voor de trekspanningen geldt het omgekeerde.

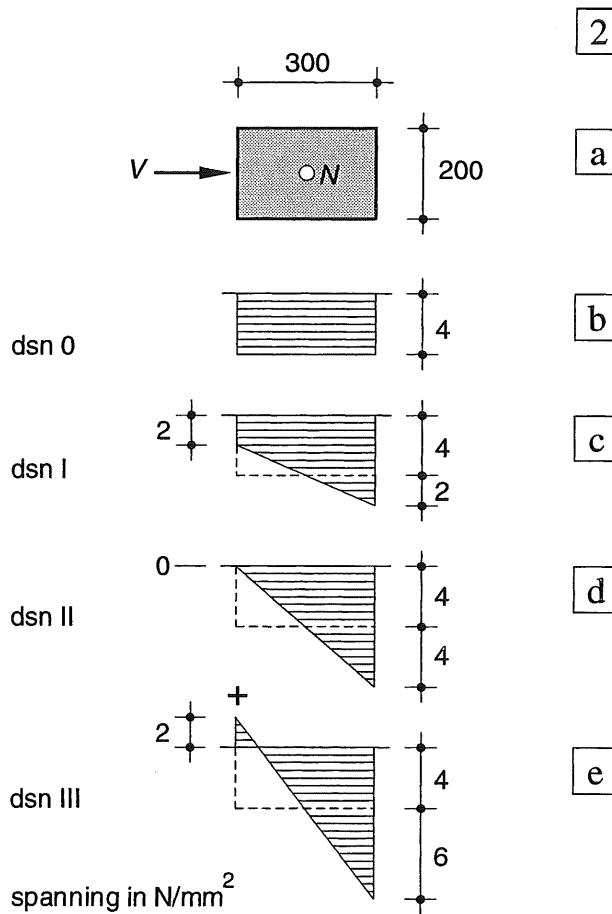


Fig. 2 Spanningsverdeling in enkele doorsneden van de kolom van fig. 1

- a. Bovenaanzicht kolom met aangrijpingspunten van  $V$  en  $N$
- b.- e. Superpositie van normaalspanningen en buigspanningen in de doorsneden 0 t/m III

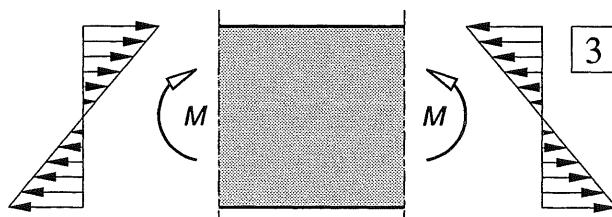


Fig. 3 Buigspanningen – behorende bij een positief buigend moment – uitgezet op de zijvlakjes van een mochtje van een balk

#### 20.4.4 INTRODUCTIE DRUKLIJN

Het begrip *druklijn* speelt bij de vormgeving van bogen en spanten een grote rol. De term wordt vrij gemakkelijk gehanteerd, maar de betekenis en werking wordt lang niet door iedereen volledig doorzien. Ter introductie grijpen we terug op fig. [466-1]; een kolom waar een schuingerichte kracht in de top aangrijpt, die weer wordt ontbonden in  $F_V$  en  $F_H$ .

In fig. 1a gaan we uit van hetzelfde belastings-schema, als enige verschil kiezen we de horizontale component  $F_H$  nu 6 × zo groot als voorheen.

Bij de berekening van de spanningen in een normale doorsnede kunnen we – evenals in [466-467] – op de gebruikelijke manier te werk gaan, zie fig. 1b.

De kracht  $F$  in de top van de kolom wordt ontbonden in de componenten  $F_V$  en  $F_H$ .

In de beschouwde doorsnede worden de daaruit volgende snedekrachten  $N$ ,  $V$  en  $M$  bepaald, zoals ze werken op het onderste deel van de kolom.

De verdeling van de normaalspanningen in de doorsnede wordt vervolgens voor elke snedekracht afzonderlijk berekend. Tenslotte worden de normaalspanningen tengevolge van  $N$  en  $M$  gesuperponeerd.

We brengen in deze procedure nu een kleine wijziging aan. We ontbinden de kracht  $F$  niet langer ter plaatse van zijn aangrijpingspunt op de kolom, maar verplaatsen deze kracht eerst langs zijn werklijn tot hij het vlak van de beschouwde normale doorsnede snijdt in punt S, zie fig. 1c. Aangezien  $F$  de enige kracht is, die op het afgesneden gedachte deel van de kolom werkt, mag dit zonder meer.

Pas in punt S ontbinden we  $F$  weer in  $F_V$  en  $F_H$ . Vervolgens gaan we na welke invloeden deze krachten op de beschouwde doorsnede uitoefenen. De kracht  $F_H$  kan zonder meer langs zijn werklijn worden verplaatst en levert de dwarskracht  $V$ . De kracht  $F_V$  moet echter door invoeering van een koppel worden verplaatst naar het zwaartepunt van de doorsnede. De verplaatste kracht  $F_V$  vormt dan de normaalkracht  $N$ , en het koppel het buigend moment  $M = F_V * z$ .

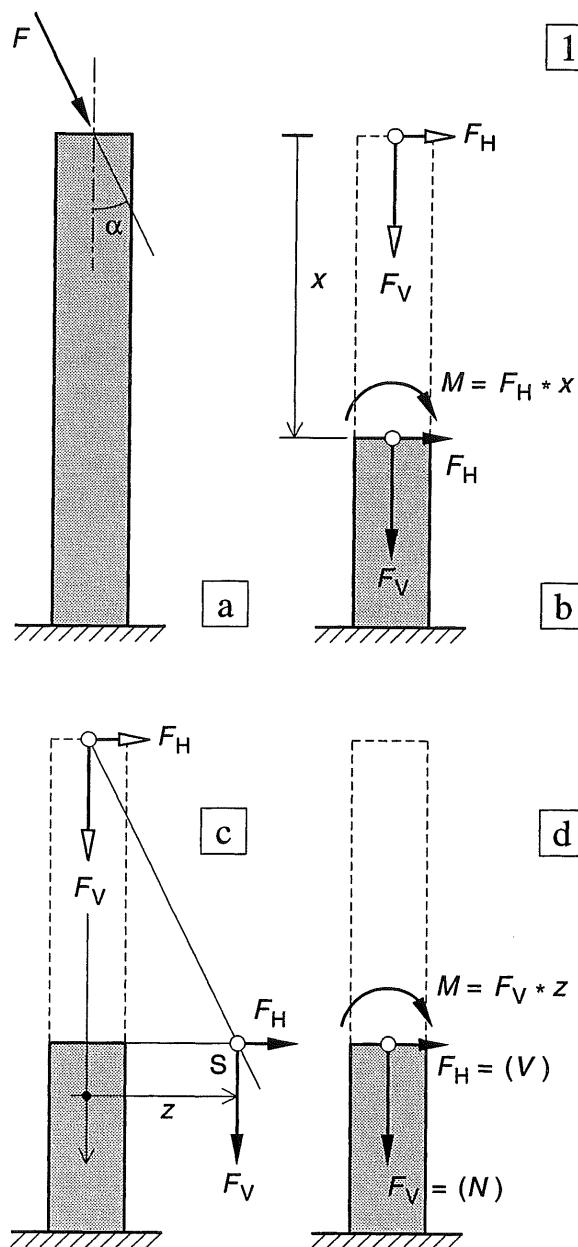


Fig. 1 Introductie druklijn

- Kolom met schuingerichte kracht in de top
- Gebruikelijke wijze voor het bepalen van de snedekrachten
- Verplaatsen van de kracht langs zijn werklijn naar de betreffende snede
- Verplaatsen van de componenten van de kracht naar het zwaartepunt van de doorsnede

Vergelijken we nu de snedekrachten volgens beide methoden dan vinden we het volgende. (vergelijk fig. 1b met fig. 1d; let op,  $x$ -as langs de staafas):

Methode I

$$N = F_V$$

$$V = F_H$$

$$M = F_H * x$$

Methode II

$$N = F_V$$

$$V = F_H$$

$$M = F_V * z$$

Bij de normaalkracht en de dwarskracht zijn de uitkomsten zonder meer gelijk, bij de momenten zijn ze echter anders geschreven.

Uit fig. 1a en 1c volgt:

$$\tan \alpha = \frac{z}{x} = \frac{F_H}{F_V}$$

zodat geldt:

$$F_V * z = F_H * x$$

In woorden: beide momenten zijn gelijk.

Het snijpunt S van de werklijn van de kracht  $F$  met het verlengde van de normale doorsnede zullen we aanduiden als het *drukpunt*.

De verbindingslijn van alle drukpunten van de opeenvolgende normale doorsnede noemen we dan de *druklijn*.

In het voorbeeld valt de druklijn samen met de werklijn van de kracht  $F$  en lijkt de definitie noodloos omslachtig.

Indien er op het afgesneden gedachte liggerdeel echter meer krachten met verschillende aangrijppunten werken, dan moet elke normale doorsnede een andere resulterende kracht overbrengen, elk met zijn eigen werklijn [KW-1]. In dergelijke gevallen kunnen we de druklijn alleen maar definiëren als voorheen is aangegeven; namelijk als de verbindingslijn van de opeenvolgende drukpunten. Dergelijke belastingen kunnen bijv. bestaan uit een gelijkmatig verdeelde horizontale belasting op de kolom (windkrachten) of uit het eigen gewicht van de kolom. Beide belastingen worden soms elk afzonderlijk beschouwd en soms gezamenlijk.

### Druklijn bij een muur of kolom bij verticale plus horizontale belasting

We beschouwen een muur of kolom onder eigen gewicht met één horizontale puntlast in de top.

Om de gedachte te bepalen gaan we uit van een kolom, die is opgebouwd uit grote natuurstenen blokken. Het gewicht van elk blok is zodanig getekend dat de kracht per blok juist de hoogte van het blok heeft, zie fig. 2a.

We bepalen nu achtereenvolgens de resultante van de kracht die via een voeg op de daaronder liggende blokken wordt overgedragen, en we werken van boven naar beneden, zie fig. 2b. We zien dan al gauw dat elk opeenvolgend drukpunt precies dezelfde afstand  $e$  tot de verticale zwaartelijn van de kolom heeft. De druklijn blijkt een verticale lijn te zijn op een constante afstand van de aslijn van de kolom, zoals is getekend in fig 2c.

Als behalve de horizontale kracht in de top ook nog een verticale kracht aangrijpt, dan wordt de druklijn een gebogen lijn, die langzaam nadert tot de voorgaande lijn die geldt zonder de extra bovenbelasting, zie fig. 2d.

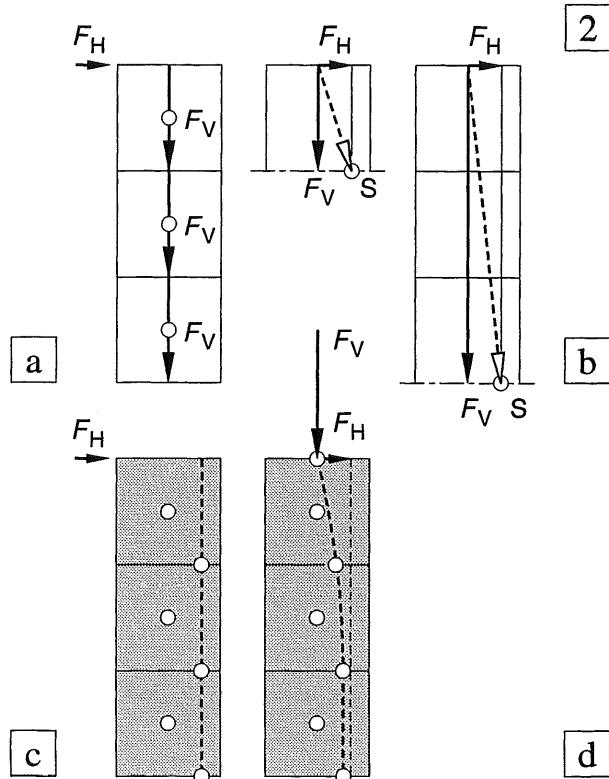


Fig. 2 Druklijn voor een blokkenstapeling onder eigen gewicht met één horizontale puntlast in de top

- a. Stapeling met de daarop werkende krachten
- b. Constructie van het drukpunt in de 1e en 3e voeg
- c. Druklijn zonder verticale bovenbelasting (a.)
- d. Druklijn bij één extra verticale kracht in de top

### 20.4.5 EXCENTRISCH BELASTE RECHTHOEKIGE DOORSNEDE

De ligging van de druklijn is vooral illustratief zolang die nog binnen de doorsnede ligt. We komen daar in [476] op terug. In fig. 1 gaat de druklijn in de top van de kolom door het zwaartepunt van de doorsnede (met afmetingen  $b \times h$ ). Alleen hier is de doorsnede centrisch belast. Alle andere doorsneden zijn excentrisch belast. De normaalkracht (ter grootte  $F_V$ ) bezit daar een excentriciteit  $e$  ten opzichte van het zwaartepunt van de betreffende doorsnede.

Ter wille van de eenvoud nemen we aan dat het aangrijpingspunt van  $F_V$  op een van de hoofdassen ligt. Voor de afleiding van de formule is het voorts wenselijk om  $F_V$  als een trekkracht in te voeren. De dwarskracht  $F_H$  wordt weer buiten beschouwing gelaten. We kunnen de indices dan weg laten en beschouwen  $F$  als een verticale kracht. Deze situatie is weergegeven in fig. 2.

Als we de kracht  $F$  naar het zwaartepunt verplaatsen vinden we als snedekrachten:

$$N_x = +F \quad (3)$$

$$M_y = +F * e_z \quad (4)$$

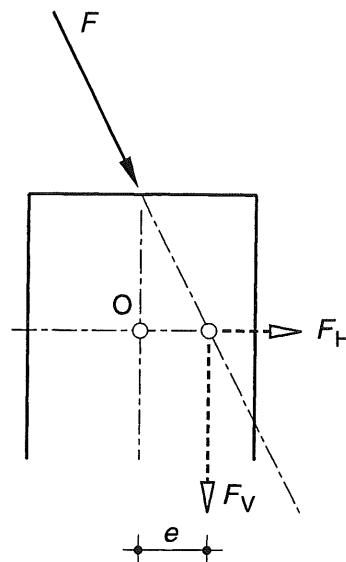
De normaalkracht is positief omdat er trek op de doorsnede wordt uitgeoefend en het buigende moment is positief omdat er trekspanningen  $\sigma_{xx}$  ontstaan voor positieve waarden van  $z$  [455].

We substitueren de formules (3) en (4) nu in formule [465-(2)], waarbij we verder geen rekening behoeven te houden met de diverse indices. We vinden dan:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{+F}{bh} \pm \frac{F * e_z}{\frac{1}{6} bh^2}$$

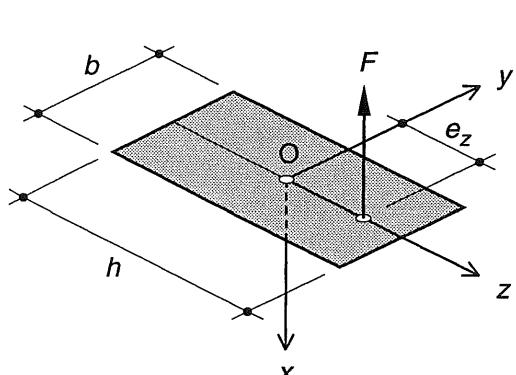
ofwel

$$\sigma = \frac{F}{bh} \left[ 1 \pm \frac{6e_z}{h} \right] \quad (5)$$



1

Fig. 1 De druklijn kan zowel binnen als buiten de doorsnede liggen



2

Fig. 2 Voor de afleiding van de formules wordt uitgegaan van een verticale trekkracht  $F$  die door een van de hoofdassen gaat

Aangezien de eerste term achter het gelijkteken de gemiddelde spanning voorstelt, kunnen we voor (5) ook schrijven:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\text{gem}} \left( 1 \pm \frac{6e_z}{h} \right) \quad (5a)$$

Om enig gevoel te verkrijgen welke invloed de excentriciteit van de kracht heeft op de normaalspanningsverdeling, kan de onderstaande tabel worden geraadpleegd.

Hierin zijn voor een rechthoekige doorsnede – voor enkele waarden van  $e$  – de bijbehorende extreme normaalspanningen aan de rand van de doorsnede vermeld {formule (5a)}.

Alle spanningen zijn uitgezet ten opzichte van de gemiddelde spanning, zodat in feite alleen de numerieke waarde van de vorm tussen () van formule (5a) is uitgezet.

$e$	$\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{\text{gem}}}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{gem}}}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{gem}}}$
0	( $1 \pm 0$ )	+ 1	+ 1
$h/6$	( $1 \pm 1$ )	+ 2	0
$h/3$	( $1 \pm 2$ )	+ 3	- 1
$h/2$	( $1 \pm 3$ )	+ 4	- 2

De bijbehorende spanningsfiguren zijn weergegeven in fig. 3c. Het is duidelijk zichtbaar dat de spanning ter plaatse van de oorspronkelijke neutrale lijn, steeds gelijk blijft aan de gemiddelde spanning.

Bij kleine excentriciteiten treden over de gehele doorsnede nog trekspanningen op. Bij excentriciteiten die groter zijn dan  $e = h/6$ , treden zowel trek- als drukspanningen op.

Bij toenemende excentriciteit komt de werkelijke neutrale lijn ( $\sigma = 0$ ) steeds dichter te liggen bij de neutrale lijn voor buiging alléén.

Zuivere buiging kan men dan beschouwen als een zeer kleine kracht die aangrijpt op een zeer grote afstand; ofwel een kracht die nadert tot nul op een afstand die nadert tot oneindig.

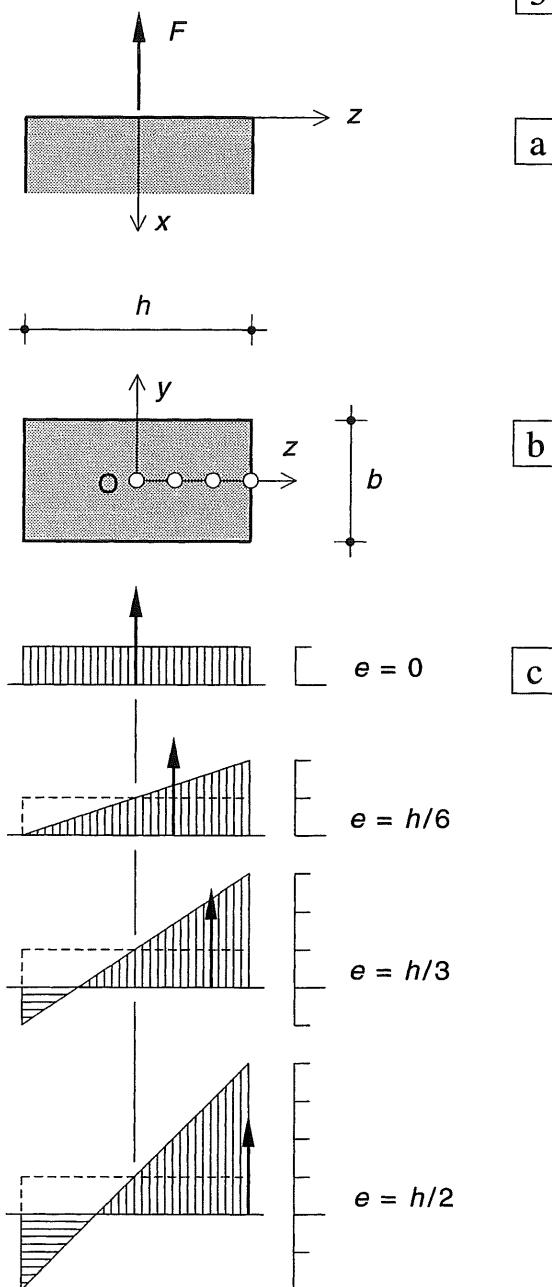


Fig. 3 Spanningsverdeling bij een rechthoekige doorsnede bij toenemende excentriciteit van de trekkracht

- a. Zijaanzicht staaf
- b. Staafdoorsnede met de successievelijke aangrijppunten van de kracht  $F$
- c. Spanningsdiagrammen bij toenemende excentriciteit

### 20.4.6 BEPALING VAN $M$ EN $N$ UIT HET SPANNINGSVERLOOP

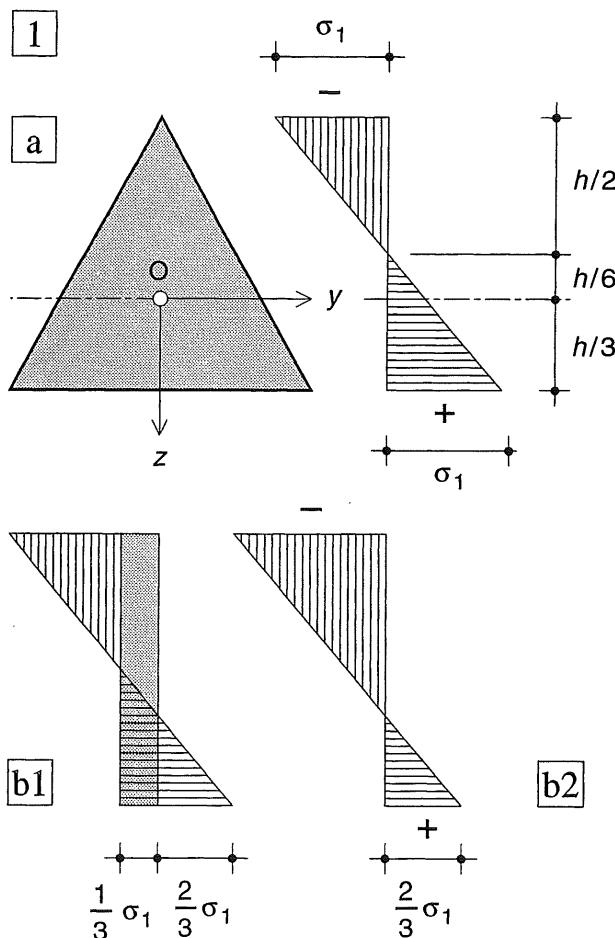
Bij het bepalen van de snedekrachten uit het spanningsverloop kunnen we zuiver formeel te werk gaan met behulp van formule [461-(1)], als we daar het spanningsaandeel ten gevolge van de normaalkracht nog aan toevoegen; zie [474-(6)]. We moeten dan wel bijzonder opletten om niet met de tekens in de war te raken. De volgende werkwijze is daarom meer aan te bevelen.

We bepalen allereerst de grootte van de spanning ter plaatse van het zwaartepunt van de doorsnede. Hieruit volgt de grootte van  $\sigma_n$ , dus ook de grootte van de normaalkracht en het teken:

$$N = A * \sigma_n$$

Als we dit gelijkmatige spanningsaandeel van de spanningsfiguur aftrekken, houden we het buigspanningsaandeel over. We kennen dan de ligging van de neutrale lijn en de grootte van de extreme spanningen.

Als het een beetje meeziit, valt de neutrale lijn langs een van de hoofdassen van de doorsnede. Met behulp van formule [465-(2)] is dan ook de grootte van het buigend moment te bepalen evenals het teken.



#### Voorbeeld:

Op de driehoekige doorsnede van fig. 1a werkt de getekende spanningsverdeling.

#### Gevraagd:

Door welke snedekrachten wordt deze spanningsverdeling veroorzaakt.

#### Analyse:

Als alleen een centrische normaalkracht zou aangrijpen, zouden de spanningen gelijkmatig moeten zijn verdeeld. Indien alleen een buigend moment zou aangrijpen, zouden de spanningen lineair moeten verlopen en zou bovendien de spanning ter plaatse van het zwaartepunt O gelijk aan nul moeten zijn.

Uit de figuur blijkt dat de spanningen weliswaar lineair verlopen maar dat de spanning ter plaatse van het zwaartepunt O ongelijk aan nul is. Er moet dus een combinatie van  $N$  en  $M$  aangrijpen (normaalkracht + buigend moment).

#### Berekening

De gemiddelde spanning  $\sigma_n$  treedt op ter plaatse van de neutrale lijn (bepaald voor buiging alléén). Uit de figuur volgt:

$$\sigma_n = 1/3 * \sigma_1$$

De normaalkracht  $N$  is dan gelijk aan:

$$N = \sigma_n * A = 1/3 * \sigma_1 * 1/2 * bh \quad (\text{trek})$$

De buigspanningsfiguur is apart overgetekend in fig. 1b2. De grootte van het buigend moment kan nu gemakkelijk worden bepaald met behulp van de formules [427-(28b)] en [435-(35b)].

$$M = \frac{\sigma * I}{z} = \frac{\frac{2}{3} \sigma_1 * \frac{1}{36} b h^3}{\frac{h}{3}} = \frac{1}{18} \sigma_1 b h^2$$

Neemt men de spanning aan de top van de driehoek dan vindt men uiteraard hetzelfde resultaat; de verhouding  $\sigma/z$  blijft immers constant.

In dit soort gevallen levert het geen voordelen om eerst het weerstandsmoment te berekenen. We kunnen het beste direct van de basisformule uitgaan:

$$\sigma = \frac{M * z}{I}$$

Fig. 1 Driehoekige doorsnede met gelijke maar tegengesteld gerichte extreme spanningen  
 a. Doorsnede met spanningsverloop in  $z$ -richting  
 b. Het afsplitsen van de normaalspanningen levert het buigspanningsverloop

### 20.4.7 RECHTHOEK: BEPALING VAN DE KRACHT EN DE EXCENTRICITEIT UIT DE SPANNINGSVERDELING

Indien bij een rechthoekige doorsnede de spanningsverdeling is gegeven kan omgekeerd de daarbij behorende kracht met zijn eventuele excentriciteit worden berekend. Het probleem zal zich bij spanningen meestal niet in deze vorm voordoen, maar voor enkele andere problemen kan deze berekening wel handig zijn. Hiertoe gebruiken we weer formule [470-(5a)].

#### Analytische oplossing

Voorbeeld, zie fig. 1

Afmetingen doorsnede:  $b \times h = 50 \times 180 \text{ mm}^2$

Extreme spanningen:  $\sigma_1 = 5 \text{ N/mm}^2$ ;  $\sigma_2 = 1 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_{\text{gem}} = 1/2 * (5 + 1) = 3 \text{ N/mm}^2$$

$$F = b * h * \sigma_{\text{gem}} = 50 * 180 * 3 = 27000 \text{ N} = 27 \text{ kN}$$

Voor de bepaling van de excentriciteit kunnen we formule [470-(5a)] gebruiken, het plusteken behoort dan bij de algebraisch grootste spanning:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{gem}} (1 + 6e/h)$$

$$5 = 3 (1 + 6e/180)$$

$$6e = h (5/3 - 1) = 180 * 2/3 = 120 \text{ mm}$$

$$e = 120/6 = 20 \text{ mm}$$

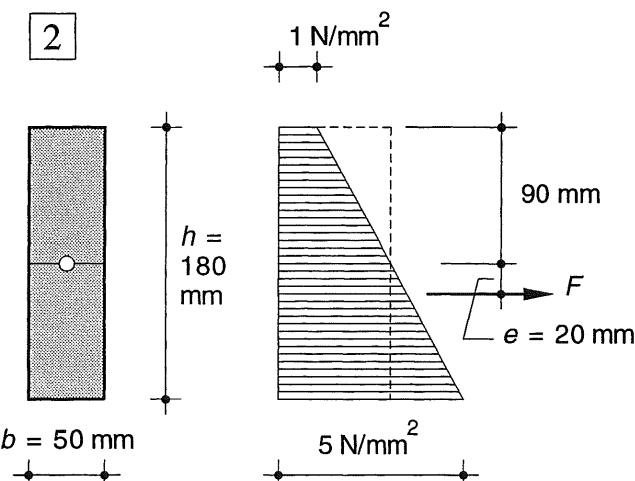


Fig. 1 Rechthoekige doorsnede met lineair verlopende normaalspanningen over de hoogte; bepaling van de kracht  $F$  met de bijbehorende excentriciteit  $e$

#### Grafische oplossing

De grootte van de kracht moet analytisch worden berekend. Maar de ligging van de werklijn kan zeer eenvoudig grafisch worden bepaald, fig. 3 (toelichting in KW-1). Hiertoe moeten de volgende handelingen worden verricht:

- zet het varierende spanningsverloop uit langs de betreffende zijde van de rechthoek, zie fig. 2b1,
- verdeel deze zijde van de rechthoek in drie gelijke stukken, zie fig. 2a (punten A, B, C, D).
- verbindt de extreme spanningen elk met het dichtstbijzijnde deelpunt; ( $\sigma_1$  met C,  $\sigma_2$  met B), zie fig. 2b1
- bepaal het snijpunt S van beide lijnen en laat vanuit S een loodlijn neer op de zijde van de rechthoek,
- deze loodlijn is dan de werklijn van  $F$ .

In fig. 2c hebben we de werklijn van  $F$  een kenmerkende plaats in een van de vier deelpunten gegeven. Uit de grafische constructie blijkt, dat er dan in een van de andere deelpunten een spanning optreedt, die gelijk is aan nul. Let op: zowel de formules als de grafische constructie in [475] gelden alleen voor *rechthoekige* doorsneden.

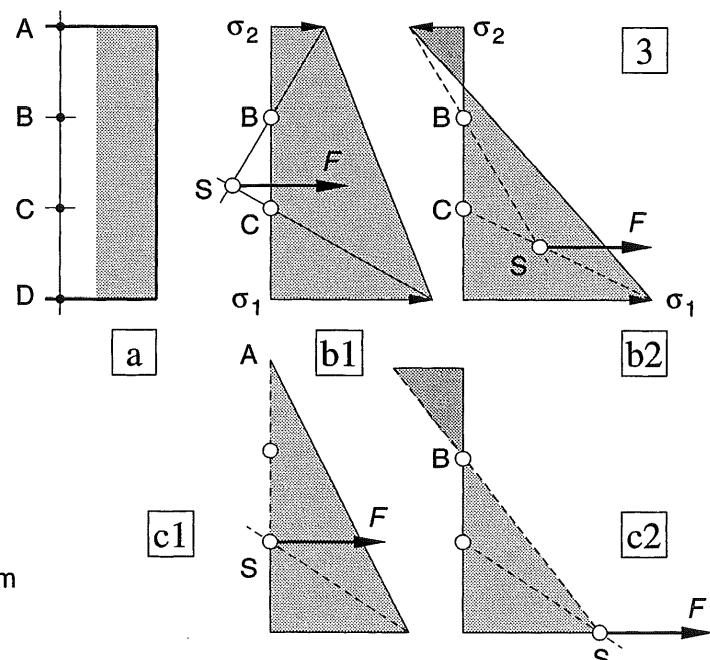


Fig. 2 Grafische bepaling van de ligging van de resultante uit de spanningsverdeling, zie KW-1

- a. Verdeling van de hoogte in drie gelijke delen
- b. Uitvoering van de grafische constructie
- b1; b2 alleen drukspanningen; druk- èn trekspanningen
- c. Twee bijzondere posities van de werklijn van  $F$  in een kernpunt; op de rand van de doorsnede
- c1; c2

#### 20.4.8 EXCENTRISCHE KRACHT GRIJPT AAN BUITEN DE HOOFDASSEN

Zolang de kracht aangrijpt op een van de twee hoofdassen hebben we te maken met *enkele buiging*. Als de kracht echter daarbuiten aangrijpt hebben we te maken met *dubbele buiging*, zoals is besproken in [460] t/m [463].

In fig. 1 is zo'n geval weergegeven. We verplaatsen de kracht  $F$  nu niet rechtstreeks naar het zwaartepunt, maar via de  $z$ -richting en de  $y$ -richting. Hierdoor voeren we dus de volgende momenten in:

$$M_y = F * e_z$$

$$M_z = F * e_y$$

De spanningen volgen dan als superpositie van drie gevallen. Bij een rechthoekige doorsnede worden de betreffende spanningen aangegeven door:

$$\sigma_n = \frac{F}{b_y b_z} \quad (\text{ten gevolge van } N)$$

$$\sigma_b = \frac{6 F e_z}{b_y b_z^2} \quad (\text{ten gevolge van } M_y)$$

$$\sigma_b = \frac{6 F e_y}{b_z b_y^2} \quad (\text{ten gevolge van } M_z)$$

Als in een dergelijk geval de spanningsverdeling wordt gevraagd, ook al is het maar in één punt, lijkt het verreweg het handigste om de drie spanningsfiguurtjes te tekenen – zo nodig ruimtelijk – en vervolgens in de vier hoekpunten de spanningen te superponeren. Bepaal hierbij het teken van de spanningen aan de hand van de richting van de kracht  $F$  en de draairichting van de ingevoerde momenten  $M_y$  en  $M_z$ .

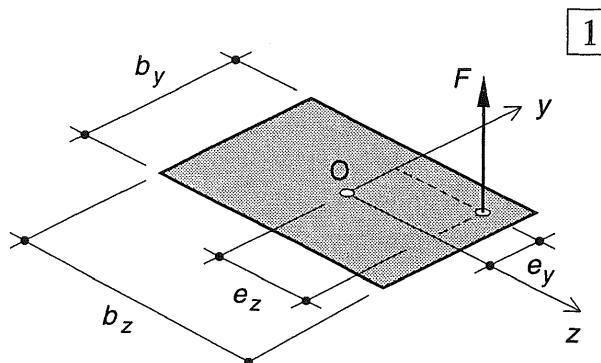


Fig. 1 Door het verplaatsen van de excentrische trekkkracht naar het zwaartepunt van de doorsnede worden twee (positieve) buigende momenten geïntroduceerd.  
Dat wil zeggen: trekspanningen  $\sigma_{xx}$  in de positieve  $y$ -en  $z$ -richting

#### Algemene spanningsformule

Ook voor het meest algemene geval kan de spanningsverdeling in één formule worden samengevat, die is weergegeven als formule (6). Het is in wezen een combinatie van de formules [461-(1)] en [465-(2)].

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A} \pm \frac{(F_x * e_z) z}{I_y} \pm \frac{(F_x * e_y) y}{I_z} \quad (6)$$

De  $x$ -as ligt langs de ligger- of staafas.  
Het assenkruis  $y-z$  is de hoofdrichtingen van de doorsnede aangebracht.  
Het beschouwde punt heeft de coördinaten  $y, z$ .

### 20.5.1 ALGEMEEN

In de bouw wordt veel gebruik gemaakt van steenachtige materialen; voornamelijk beton en metselwerk. Dit soort materialen is veel beter in staat om drukkrachten op te nemen dan trekkrachten. De treksterkte van beton bedraagt ca. 10 % van de druksterkte, bij metselwerk ligt dit tussen de 5 % en de 10 %.

Metselwerk en ongewapend beton worden dan ook voornamelijk gebruikt voor wanden, waarbij immers de drukspanningen overheersen.

Voor liggerachtige constructies is metselwerk ongeschikt en moet beton van wapening worden voorzien.

Bij gewoon gewapend beton nemen de wapeningsstaven de trekkrachten van het beton over nadat dit is gescheurd. De berekeningswijze van gewapend beton komt aan de orde in KW-7.

Bij voorgespannen beton brengen we via kabels van te voren zodanige drukkrachten in het beton aan, dat de trekspanningen die door het eigen gewicht en de belasting ontstaan, geheel of gedeeltelijk worden gecompenseerd [KW-7]

In de meest eenvoudige vorm van voorgespannen beton wordt gebruik gemaakt van rechte kabels. In principe kunnen we hiervan de krachtwerving reeds doorzien met behulp van de voorheen afgeleide betrekkingen. Maar ook dit probleem wordt pas behandeld in KW-7.

In [476] wordt – ter wille van de volledigheid – aangegeven in welk gebied van een rechthoekige doorsnede excentrische drukkrachten mogen aangrijpen, zonder dat ergens in de doorsnede trekkrachten ontstaan. Dit 'veilige' gebied wordt aangeduid als de *kern* van de doorsnede.

Aangezien de kern van een doorsnede veel van zijn vroegere betekenis bij het voorspannen heeft verloren, wordt op andere doorsnedevormen niet ingegaan.

Metselwerk wordt meestal vervaardigd van baksteen of kalkzandsteen; soms ook van natuursteen of betonsteen. De treksterkte die door de voegen van het metselwerk kan worden overgebracht, is meestal zo gering dat deze sterkte beter kan worden verwaarloosd.

Het blijkt echter dat drukkrachten, die op een beperkte afstand buiten de kern van de doorsnede aangrijpen, toch nog kunnen worden overgedragen, zolang de druklijn zich maar binnen de doorsnede bevindt.

Het gedeelte van de doorsnede, waar trekkrachten volgens de voorgaande berekeningen zouden moeten optreden, onttrekt zich dan plaatseelijk aan de krachtwerving. Het resterende effectieve deel van de doorsnede gedraagt zich dan weer volgens de gewone regels.

We spreken in dit soort gevallen meestal van een *gedeeltelijk meewerkende doorsnede*.

### 20.5.2 KERN BIJ EEN RECHTHOEKIGE DOORSNEDE

We beschouwen een rechthoekige doorsnede, waarbij we een centrische drukkracht vanaf het zwaartepunt van de doorsnede langs de  $z$ -as verplaatsen naar punt R, zie fig. 1a. Uit formule [470-(5)] volgt dat de spanning in de bovenste uiterste vezel juist gelijk is aan nul indien geldt:  $e = h/6$ , zie fig. 1b. Deze afstand wordt de kernstraal genoemd en meestal met  $k$  aangegeven. Evenzo veroorzaakt een excentriciteit  $e = h/6$  boven de  $y$ -as in de onderste uiterste vezel een spanning die juist gelijk is aan nul.

Op overeenkomstige wijze kan het aangrijppingspunt van de kracht zich op de  $y$ -as bewegen tussen  $y = -b/6$  en  $y = +b/6$ , zonder dat in de doorsnede trekspanningen ontstaan, zie fig. 1c.

Zet men de kernstralen ter weerszijden van het zwaartepunt uit langs de assen en verbindt men de opvolgende punten met elkaar, dan ontstaat een ruitvormige figuur, die de *kern* van de doorsnede wordt genoemd, zie fig. 1a. Zolang het aangrijppingspunt van de kracht zich binnen deze kern bevindt, zullen nergens in de doorsnede trekspanningen ontstaan.

Dit is als volgt in te zien, zie fig. 1d, waar de kern vergroot is weergegeven. We brengen een drukkracht  $F$  aan op een willekeurig punt P van de rand van de kern. Deze kracht wordt vervolgens ontbonden in twee componenten  $F_Q$  en  $F_R$ , die liggen op de snijpunten van de kernrand met het assenkruis, zie fig. 1d. De ontbondenen veroorzaken elk een driehoekig drukspanningsverloop over de doorsnede, waarbij de spanning langs één zijrand juist gelijk is aan nul, zie fig. 1b, c. De superpositie van beide spanningsverlopen veroorzaakt dan over de gehele doorsnede een drukspanningsverloop, waarbij alleen de spanning in één hoekpunt nog gelijk is aan nul; namelijk in punt A van fig. 1a.

Als de kracht  $F$  aangrijpt in punt Q van de kernrand, dan valt de (echte) neutrale lijn samen met de zijrand A-B van de doorsnede.

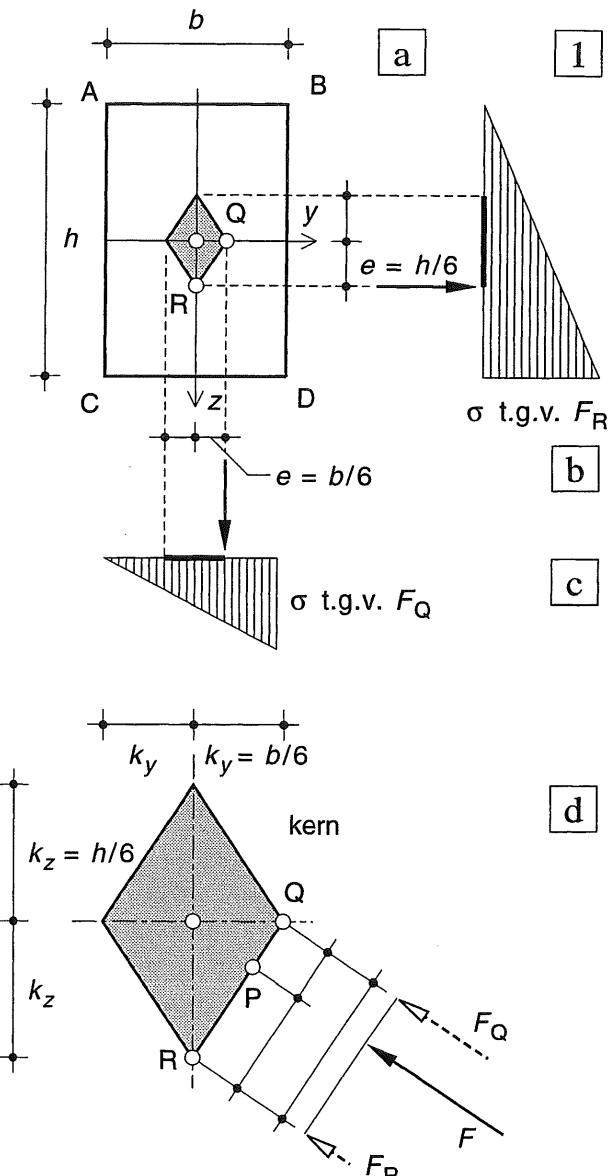


Fig. 1 Kern van een rechthoekige doorsnede

- Afmetingen van de doorsnede en de kern
- Spanningsverloop als  $F$  aangrijpt in het onderste kernpunt R
- Spanningsverloop als  $F$  aangrijpt in het rechter kernpunt Q
- De kracht  $F$  – aangrijpend op een willekeurig punt P van de kernrand – wordt ontbonden in twee evenwijdige krachten, aangrijpend in Q en R

Als de kracht  $F$  aangrijpt in punt R van de kernrand, dan valt de (echte) neutrale lijn samen met de zijrand A-B van de doorsnede.

Bij verplaatsing van de kracht  $F$  van Q naar R, roteert de neutrale lijn – rechtsdraaiend buiten de doorsnede om – rond hoekpunt A van de doorsnede, vanuit de stand A-C tot de stand A-B.

### 20.5.3 GEDEELTELIJK MEEWERKENDE RECHTHOEKIGE DOORSNEDE

We onderzoeken nu het geval dat de kracht  $F$  nog wel binnen de doorsnede aangrijpt, maar niet meer binnen de kern ligt. We beperken ons daarbij tot rechthoekige doorsneden waarbij de kracht op een van de hoofdassen is gelegen, zoals is weergegeven fig. 2. We beginnen met het grensgeval waar de kracht  $F$  in het rechter kernpunt aangrijpt en de spanning in de linkerrand van de doorsnede gelijk is aan nul, zie fig. 2a. Plaatsen we de kracht  $F$  meer naar rechts, dan zullen in het linker deel van de doorsnede dus trekspanningen moeten optreden, zie fig. 2b1; vergelijk hiertoe ook fig. [471-3].

Als het materiaal echter niet in staat is om trekspanningen op te nemen, dan behoeft dit nog niet direct tot het bezwijken van de staaf (c.q. kolom) te leiden. De natuur gebruikt in dat geval maar een gedeelte van de doorsnede om de krachten over te brengen. In dit gedeelte blijven vlakke doorsneden weer gewoon vlak en treden uitsluitend drukspanningen op. Deze drukspanningen moeten uiteraard weer evenwicht maken met de uitwendige kracht.

Als wij nu kans zien om een dergelijke spanningsverdeling aan te geven, dan hebben we de oplossing van het vraagstuk gevonden.

Dit blijkt al bijzonder eenvoudig te zijn; we zorgen er voor dat de zogenaamde *meewerkende* doorsnede zodanige afmetingen krijgt dat de kracht  $F$  weer in het kernpunt van deze overblijvende doorsnede komt te staan. Deze situatie is weergegeven in fig. 2b2 en b3. De afstand van het aangrijpingspunt tot de buitenrand bedraagt  $f$ , het meewerkende deel van de doorsnede heeft dan een lengte  $3f$ , vergelijk fig. 2a2.

De grootte van de maximale spanning volgt dan uit de voorwaarde dat de inhoud van de spanningsfiguur gelijk moet zijn aan de kracht  $F$ :

$$\frac{1}{2} * b_y * 3f * \sigma_{\max} = F \quad (7)$$

Deze materie is wat uitvoeriger behandeld in KW-0 [062-065], bij de verende ondersteuning.

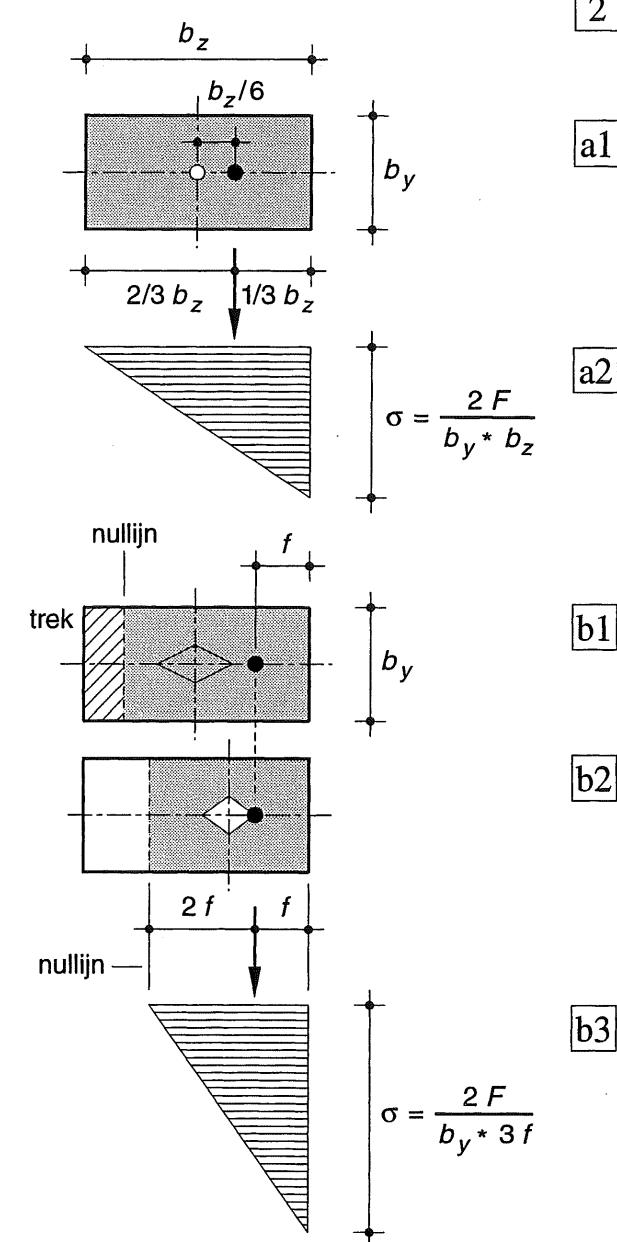


Fig. 2 Spanningsverloop in rechthoekige doorsneden die geen trek kunnen opnemen

- a. Kracht in het rechter kernpunt; driehoekig spanningsverloop over de gehele doorsnede
- b1 Kracht buiten het rechter kernpunt van de volledige doorsnede, zodat over een gedeelte van de doorsnede trekspanningen moeten ontstaan
- b2 De kracht bevindt zich tegelijkertijd in het kernpunt van het gedeelte dat we als meewerkende doorsnede aanduiden; hieruit volgt weer een driehoekig spanningsverloop over deze meewerkende doorsnede

## GEMETSELDE WANDEN

1

Bij gemetselde wanden treden overeenkomstige verschijnselen op als in 477 zijn besproken. Over het algemeen zullen we een strook van een muur beschouwen van 1 m lengte, zie fig. 1a. De puntlast van de vorige beschouwingen is dan vervangen door een lijnlast. Zolang deze aangrijpt binnen het middelste 1/3 deel van de breedte, zullen geen trekspanningen optreden. De kern is nu dus vervangen door een strook ter breedte  $b/3$ , zie fig. 1a.

Ook hier kan de lijnlast buiten de strook aangrijpen waarbij een deel van de doorsnede niet meewerkt. Zodra de lijnlast de buitenrand echter te veel nadert lopen de maximale spanningen sterk op omdat de meewerkende muurbreedte steeds kleiner wordt, zie fig. 1b.

Het is dus handig om een toelaatbare waarde voor de maximale spanning aan de rand aan te nemen, die in de praktijk niet mag worden overschreden.

Bij een gemetselde muur kan eigenlijk ter plaatse van elke voeg een scheur ontstaan.

Om de krachten vanuit de muren op de ondergrond over te brengen wordt bij funderingen op staal meestal een balk van gewapend beton toegepast. Deze krijgt dan een verbrede voet om de spanningen op de ondergrond binnen toelaatbare grenzen te houden, zie fig. 2.

Deze gewapend betonbalk kan wel degelijk trekspanningen opnemen. Ter plaatse van de aansluiting aan de ondergrond is er natuurlijk weer *geen sprake van* dat trekspanningen vanuit de fundering op de ondergrond kunnen worden overgedragen. Maar door de verbrede voet zijn er toch aanzienlijke excentriciteiten mogelijk voor er iets fout gaat.

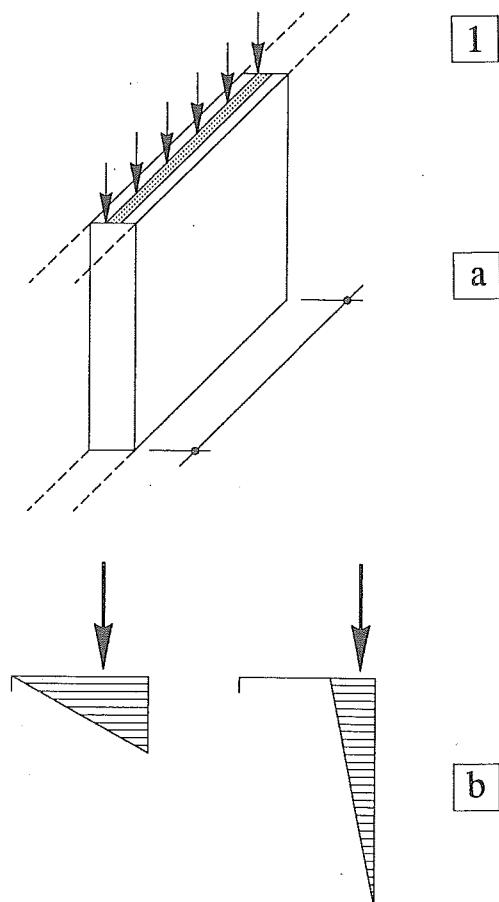


Fig. 1 Lijnlast op een muur

- a. Beschouwde strook van 1 m breedte met een lijnlast ter plaatse van de linker kernrand
- b. Het spanningsverloop afhankelijk van de optredende excentriciteit

2

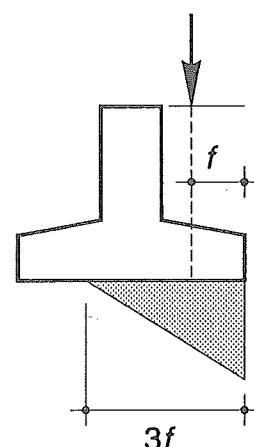


Fig. 2 Excentriciteit bij een fundering van gewapend beton (fundering op staal)

## DRUKLIJN BIJ EEN MUUR OF KOOLM

We beschouwen een muur of kolum onder eigen gewicht met één horizontale puntlast in de top. Gevraagd wordt om de ligging van de druklijn te bepalen.

Om de gedachte te bepalen gaan we uit van een kolum, die is opgebouwd uit grote natuurstenen blokken. Het gewicht van elk blok is zodanig getekend dat de kracht per blok juist de hoogte van het blok heeft, zie fig. 4a.

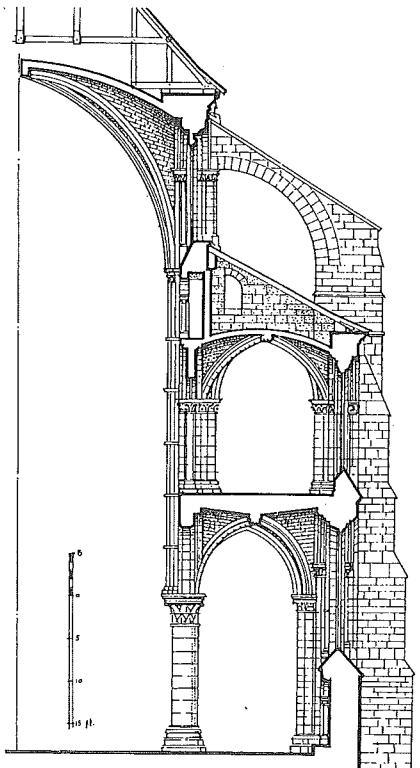
We bepalen nu achtereenvolgens de resultante van de kracht die via een voeg op de daaronder liggende blokken wordt overgedragen, en we werken van boven naar beneden, zie fig. 4b, c. We zien dan al gauw dat elk opeenvolgend drukpunt precies dezelfde afstand  $e$  tot de verticale zwaartelijn van de kolum heeft.

De druklijn blijkt een verticale lijn te zijn op een constante afstand van de aslijn van de kolum, zoals is getekend in fig 3d.

Als we voor het bovenste blok dus binnen aanvaardbare grenzen blijven, dan geldt dit ook voor alle daaronder liggende blokken.

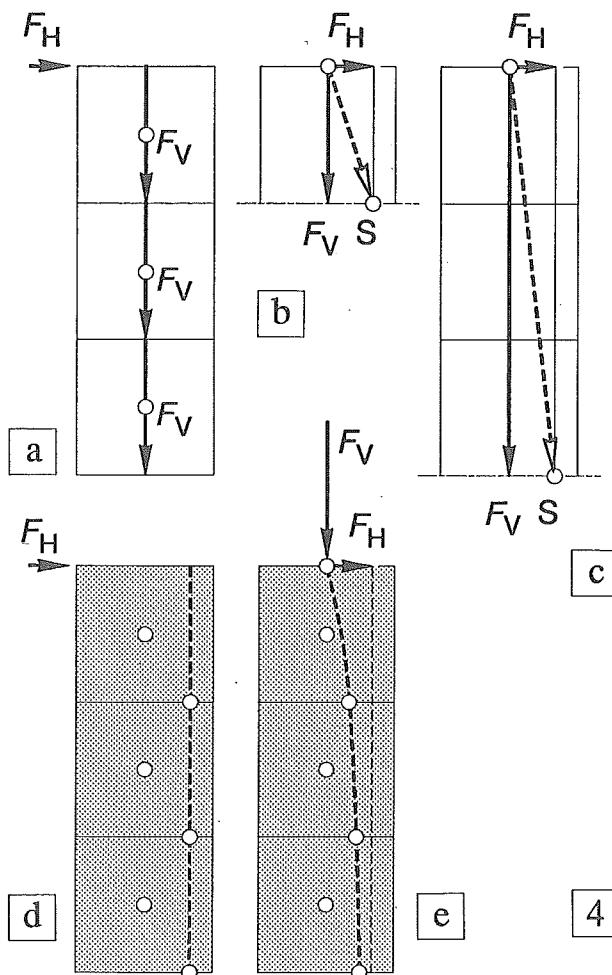
Als behalve de horizontale kracht in de top ook nog een verticale kracht aangrijpt, dan wordt de druklijn een gebogen lijn, die langzaam nadert tot de voorgaande lijn die geldt zonder de extra bovenbelasting, zie fig. 4e.

Van de lezer wordt niet verwacht, dat hij zelf dit soort druklijnen gaat construeren. Het verklaart echter wel de geleidelijke uitbouw van steunberen bij Gotische kathedralen, zie fig. 3.



3

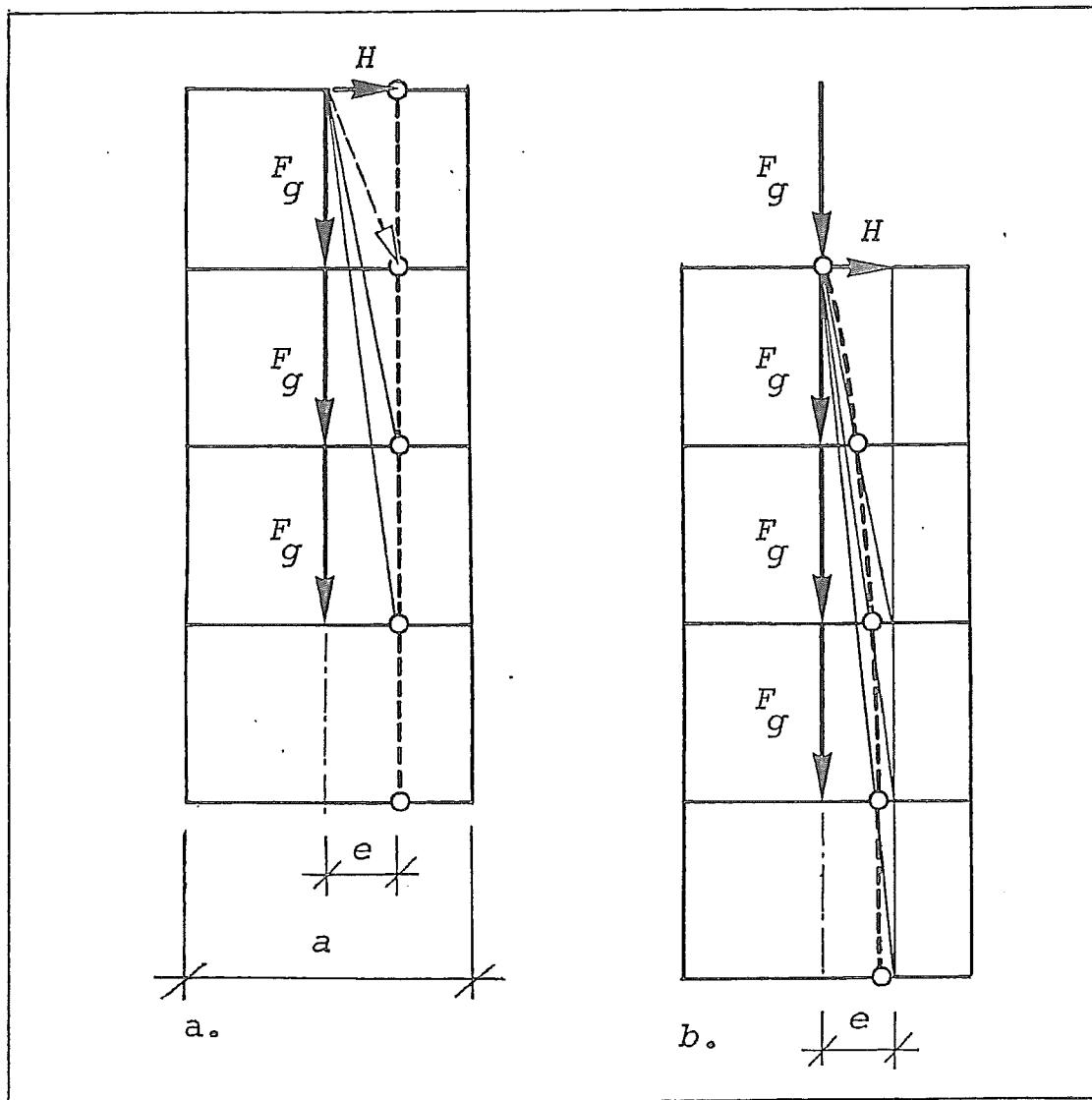
Fig. 3 Steunbeer bij de kathedraal van Laon



4

Fig. 4 Druklijn voor een blokkenstapeling onder eigen gewicht met één horizontale puntlast in de top

- a. Stapeling met de daarop werkende krachten
- b. Constructie van het drukpunt in de eerste voeg
- c. Idem voor de derde voeg
- d. Druklijn
- e. Druklijn voor dezelfde blokkenstapeling als in a. met bovendien één extra verticale kracht in de top



## 20.6.1 ALGEMEEN

In [455] is reeds besproken, dat dwarskrachten nooit alleen kunnen voorkomen, het dwarskrachtenverloop veroorzaakt tegelijkertijd ook een momentenverloop. In KW-2 [265-(13)] werd reeds afgeleid:

$$M_x = \int V_x \, dx$$

We hebben in [456] echter ook gesteld, dat de vervormingen die door dwarskrachten worden veroorzaakt, zo klein zijn dat we voor de bepaling van de *buigspanningen* mogen blijven uitgaan van de gebruikelijke aanname: *vlakke doorsneden blijven vlak*.

De dwarskracht ligt als het ware in het vlak van de normale doorsnede; de spanningen die door de dwarskracht worden veroorzaakt dienen dan ook in dit vlak te liggen. Met andere woorden; dwarskrachten veroorzaken in de normale doorsnede alleen schuifspanningen.

Om deze schuifspanningsverdeling te kunnen bepalen moeten we echter via een omweg te werk gaan. We beschouwen een liggermootje waarop een evenwichtssysteem van dwarskrachten en buigende momenten aangrijpt, zie fig. 1a. Dit mootje verdelen we vervolgens door een horizontale snede in twee delen. Uit een evenwichtsbeschouwing voor elk deel blijkt dan dat in het horizontale snedevlak schuifspanningen aanwezig moeten zijn, zie fig. 1b.

Door deze grootte te bepalen ligt ook de schuifspanning in het aangrenzende vertikale elementje vast, zie fig. 1c. Schuifspanningen op onderling loodrechte vlakjes zijn immers even groot en tegengesteld gericht [411-3b en 4c].

Omdat bij de afleiding alleen maar evenwichtsbeschouwingen worden gebruikt en de vervormingen buiten beschouwing zijn gelaten, is de beschrijving van het spanningsverloop ten gevolge van dwarskrachten wat minder nauwkeurig dan dat bij zuivere buiging.

## 20.6.2 EVENWICHTSBESCHOUWING OP EEN LIGGER-ELEMENTJE

We beschouwen het evenwicht van een mootje uit een prismatische balk met een T-vormige dwarsdoorsnede, zie fig. 2a. Op dit mootje werkt een constante dwarskracht  $V$ , zie fig. 2b. Op de linkerzijde van het mootje werkt een positief buigend moment  $M$ . Op de rechterzijde moet dan een buigend moment werken ter grootte:

$$M + \Delta M = M + V * a$$

Zie zo nodig, KW-2 [262-263].

De spanningen in het linker- en rechterzijvlak van de beschouwde moot volgen dan uit:

$$\sigma_1 = \frac{M * z}{I} \quad \sigma_2 = \frac{(M + V * a) * z}{I}$$

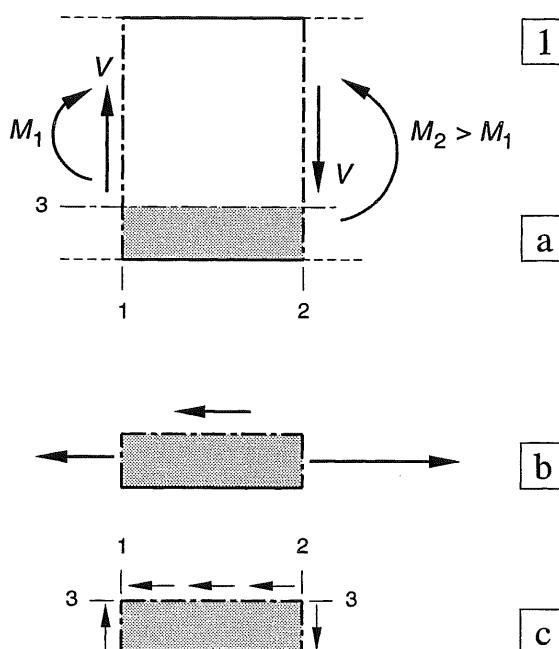


Fig. 1 Principe van de berekening

- Evenwicht van een liggermootje tussen de sneden 1 en 2
- Evenwicht van het onderste plakje van het mootje, beneden snede 3
- Ter plaatse van de snijlijn van de vlakken 1 en 3 (c.q. 2 en 3), zijn de schuifspanningen gelijk en tegengesteld gericht

Dit spanningsverloop op beide zijvlakjes is uitgezet in fig. 2c. We beschouwen nu een horizontale lijn in deze moot, op een afstand  $z$  beneden de neutrale lijn. Het verschil tussen beide spanningen is daar gelijk aan:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{V * a * z}{I} \quad (8)$$

Vervolgens brengen we een doorgaande horizontale snede aan op een afstand  $z_3$  beneden de neutrale lijn en beschouwen het horizontale evenwicht van het deel van de moot beneden deze snede, zie fig. 2d.

Doordat de trekspanningen op het rechter zijvlak groter zijn dan op het linkerzijvlak, werkt er op het 'afgesneden' deel een kracht naar rechts. Het afgesneden gedachte deel kan dan alleen maar in evenwicht worden gehouden door een horizontale naar links gerichte kracht  $\Delta F_H$ , die wordt geleverd door schuifspanningen in het snedevlak.

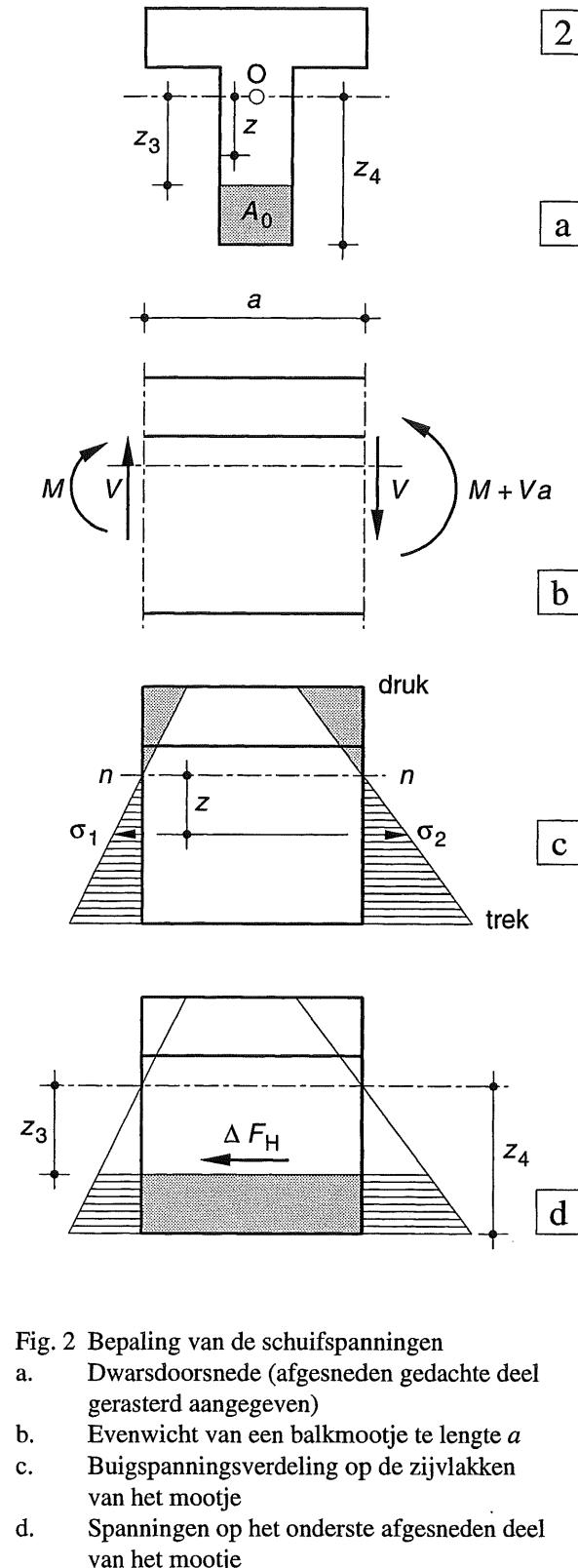
Om  $\Delta F_H$  te bepalen moet dus het verschil worden berekend van de krachten die op de zijvlakken van het afgesneden mootdeel met doorsnede  $A_0$  werken.

$$\Delta F_H = \int_{z_3}^{A_0} (\sigma_2 - \sigma_1) dA = \int_{z_3}^{z_4} \frac{V a z}{I} dA \quad (9)$$

Verdere uitwerking van formule (9) levert:

$$\Delta F_H = \frac{V a}{I} \int_{z_3}^{z_4} z dA = \frac{V a}{I} S_0 \quad (10)$$

In formule (10) stelt  $S_0$  dus het lineaire oppervlakte-moment voor van het *afgesneden* gedachte gedeelte ten opzichte van de *neutrale lijn* van de doorsnede, zie ook fig. 2a.



### 20.6.3 BEPALING VAN DE VERTICAAL WERKENDE SCHUIFSPANNING

Om de schuifspanning in de normale doorsnede te kunnen vinden, zullen we eerst de (gemiddelde) horizontale schuifspanning in snedevlak 3 bepalen. De kracht  $\Delta F_H$  volgens [479-(10)] moet daartoe worden gedeeld door het oppervlak van het horizontale snedevlak:

$$\tau_h = \frac{\Delta F_H}{ab} = \frac{VaS_0}{I * ab} = \frac{VS_0}{bI} \quad (11a)$$

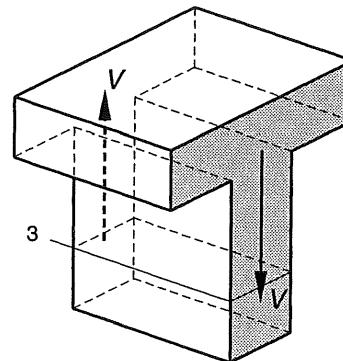
In formule (11a) is de afstand  $a$  weggevallen, de beide beschouwde doorsneden 1 en 2 uit [478] zijn daardoor samengevallen tot één verticale doorsnede.

Bij de behandeling van lijnspanningstoestanden in [410-411] is afgeleid dat schuifspanningen op onderling loodrechte vlakjes even groot zijn en tegengesteld gericht, dat wil zeggen, beide naar dezelfde hoek toe of er juist vanaf. Dit houdt in dat de grootte van de verticale schuifspanning ter hoogte van doorsnede 3 eveneens is bepaald door formule (11a) en dat de schuifspanning in dezelfde richting moet werken als de bijbehorende dwarskracht, vergelijk fig. 1a en 1c. Als algemene formule voor de schuifspanningen in een normale doorsnede houden we daarom aan:

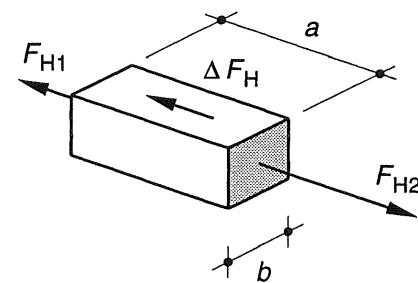
$$\tau = \frac{VS_0}{bI} \quad (11)$$

Uit formule (11) volgt:

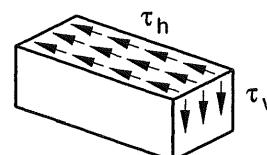
- de schuifspanning is recht evenredig met de dwarskracht  $V$ ,
- de schuifspanning is recht evenredig met het lineaire oppervlakte-moment van het afgesneden gedachte deel ten opzichte van de neutrale lijn ( $S_0$ ),
- de schuifspanning is omgekeerd evenredig met de beschouwde plaatselijke breedte  $b$  van de doorsnede,
- de schuifspanning is omgekeerd evenredig met het (eigen) kwadratisch oppervlakte-moment van de doorsnede.



1



a



b

c

Fig. 1 Bepaling van de verticale schuifspanningen  
 a. Dwarskrachten op de liggermoet  
 b. Horizontale schuifkracht maakt evenwicht met het verschil van beide trekkrachten op het afgesneden deel  
 c. Horizontale en verticale schuifspanningen op het afgesneden gedachte deel van de moed

Aangezien  $S_0$  maximaal is ter plaatse van de neutrale lijn, zal daar meestal ook de maximale schuifspanning optreden. Hier kunnen uiteraard afwijkingen in optreden als de breedte van de doorsnede in de directe omgeving van de neutrale lijn varieert.

#### 20.6.4 SCHUIFSPANNINGSVERLOOP RECHTHOEKIGE DOORSNEDE

Voor een rechthoekige doorsnede kunnen we de schuifspanningsverdeling gemakkelijk in een analytische vorm afleiden.

De maximale schuifspanning treedt op ter plaatse van de neutrale lijn, zie fig. 2a:

$$S_{\max} = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{1}{8} b h^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{V S_0}{b I} = \frac{V * \frac{1}{8} b h^2}{b * \frac{1}{12} b h^3} = \frac{3}{2} \frac{V}{b h} \quad (12)$$

De maximale schuifspanning in een rechthoekige doorsnede is gelijk aan  $1,5 \times$  de gemiddelde waarde van de schuifspanning.

Om de algemene formule te vinden voor de schuifspanningsverdeling in een rechthoekige balk, moet  $S_0$  worden bepaald als functie van  $z$ ; de grootheden  $V$ ,  $b$  en  $I$  zijn immers constant, zie fig. 2b

$$S_0 = (\frac{h}{2} - z) * b * (z + \frac{h/2 - z}{2}) =$$

$$= \frac{b}{2} (\frac{h}{2} - z) (\frac{h}{2} + z) = \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2) \quad (13)$$

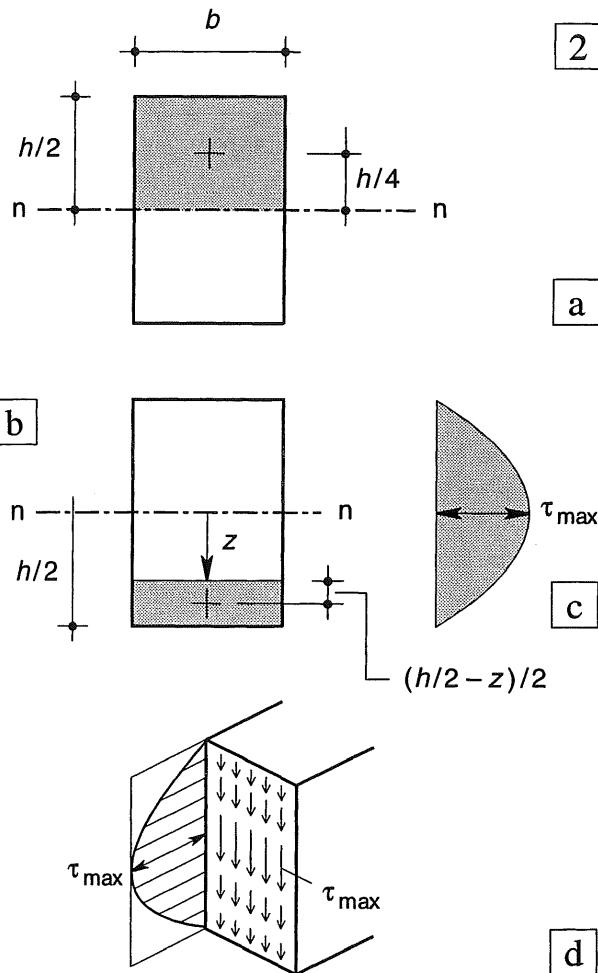
Dit is de formule voor een parool, zie fig. 2c.

Voor  $z = \pm h/2$  volgt  $S_0 = 0$ ;  
en voor  $z = 0$  volgt  $S_0 = 1/8 bh^2$ .

De vorm van het schuifspanningsverloop wordt volledig bepaald door  $S_0$ . De schuifspanningen verlopen parabolisch over de hoogte en zijn gelijkmatig verdeeld over de breedte, zie fig. 2d. De waarde van  $\tau_{\max}$  bij een rechthoek dient tot de parate kennis te behoren:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{b h} \quad (12)$$

Uit formule (12) blijkt dat het voor de maximale schuifspanning niet van belang is of een balk rechtop wordt gezet of op zijn plat gelegd. Voor de buigspanningen maakt dit wel verschil.



- Fig. 2 Schuifspanningen bij een rechthoek
- a. Bepaling van de maximale schuifspanning ter plaatse van de neutrale lijn
  - b. Bepaling van het schuifspanningsverloop over de hoogte
  - c. Verloop uitgezet loodrecht op de normale doorsnede
  - d. Werkelijk verloop in de normale doorsnede tezamen met de gebruikelijke aanduiding loodrecht op de normale doorsnede

Achteraf bezien blijkt de gelijkmatig verdeelde schuifspanning die we in KW-0 [057-2c] bij ons blokkenmodel vonden, niet eens zo veel af te wijken van de werkelijke verdeling in een liggerdoorsnede.

We zullen later in KW-7 zien dat we bij gewapend beton, waar de doorsnede is gescheurd en we eigenlijk niet goed weten waar de schuifspanningen zich bevinden, gemakshalve met een zogenaamde *nominale* schuifspanning werken, waarvan we eveneens aannemen dat ze gelijkmatig over de doorsnede is verdeeld.

### 20.6.5 SCHUIFSPANNINGSVERDELING BIJ DUNWANDIGE PROFIELEN

Bij doorsneden met een sprongsgewijs verlopende breedte, geeft toepassing van de standaardformule [480-(11)] irreële resultaten. Bij de aansluiting van een flens aan een lijf volgen immers ongelijke schuifspanningen in één en hetzelfde doorsnedevlak. Vooral bij dunwandige profielen spreekt dit zeer sterk. Bij het I-profiel van fig. 1a zouden we namelijk de gehele horizontale schuifkracht in het lijf – ter plaatse van de aansluiting aan de flens – ineens over de gehele breedte van de flens moeten verdelen.

In fig. 1b is de waarde van  $S_0$  weergegeven, die vrijwel lineair verloopt over de dikte  $t_1$  van de flenzen en vervolgens maar weinig varieert over de resterende hoogte ( $h - 2t_1$ ) van het lijf.

De flenzen leveren immers verreweg het grootste deel van het lineaire oppervlaktemoment  $S_0$  – steeds opgemaakt ten opzichte van de neutrale lijn – en het lijf draagt daaraan niet veel meer bij. De hieruit volgende schuifspanningsverdeling volgens formule [480-(11)] is weergegeven in fig. 1c. Door de grote breedte  $b$  van de flenzen berekent men hier minieme schuifspanningen.

We vinden voor de flenzen echter geheel andere resultaten als we geen horizontale snede in de flenzen aanbrengen maar een verticale, zoals is weergegeven in fig. 2b2.

Uit het verloop van de buigspanningen in fig. 2a volgt dat de trekkracht in de flenzen per eenheid van breedte constant is. De trekkracht op het afgesneden deel van de onderflens is dus recht evenredig met de breedte van dit deel.

Doordat het buigend moment in lengterichting van de ligger varieert, werken er op het afgesneden deel van de onderflens weer ongelijk grote trekkrachten. Deze moeten in evenwicht worden gehouden door schuifkrachten in het snedevlak, zie fig. 2b2. Uit een en ander volgt een lineair verloop van de grootte van de schuifspanning in de flenzen; vanaf nul aan de vrije uiteinden tot de maximale waarde bij de aansluitingen aan het lijf, zoals is weergegeven in fig. 3a.

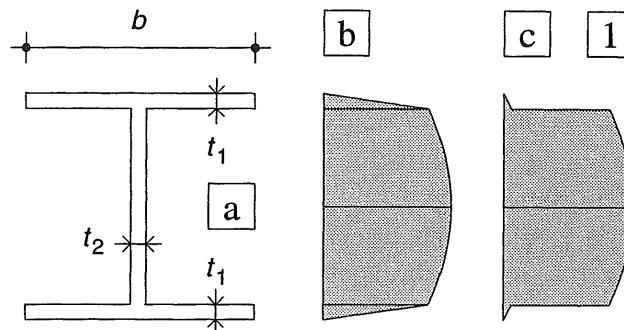


Fig. 1 Schuifspanningsverdeling volgens de standaardformule [480-(11)]

- a. Afmetingen van de doorsnede
- b. Verloop van  $S_0$
- c. Berekend verloop van  $\tau_{xz}$

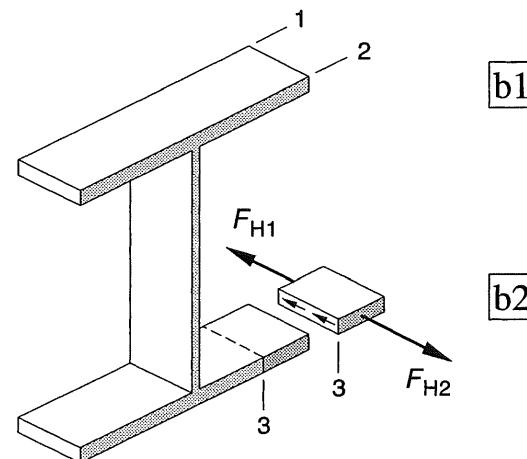
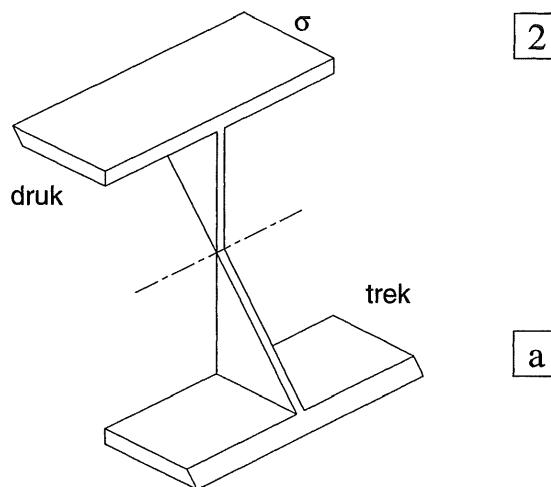


Fig. 2 Spanningsverdeling bij een I-profiel

- a. Trek- en drukspanningen in een normale doorsnede, ruimtelijk uitgezet
- b1. Beschouwing van een mocht uit de I-balk tussen de normale doorsneden 1 en 2
- b2. Evenwicht van het afgesneden deel van de flens, rechts van snede 3 in langsrichting

Om voor dunwandige profielen enig inzicht te verkrijgen in het schuifspanningsverloop, is dit voor een drietal profielen met een constante wanddikte  $t$  berekend.

Voor een gemakkelijke vergelijking zijn de drie profielen geïdealiseerd, de hoogte en de wanddikte is voor alle drie gelijk gekozen. De dwarskracht werkt in verticale richting. Voor de numerieke uitwerking is uitgegaan van de verhouding:  $t/h = 1 : 15$ .

De schuifspanningen zijn weergegeven in fig. 3 en uitgedrukt in  $V/th$ . De spanningen kunnen als zodanig direct worden vergeleken met de gemiddelde schuifspanning in het lijf (lange stippellijnen in de figuren).

Het blijkt dat de werkelijk optredende schuifspanningen in het lijf maar weinig afwijken van deze gemiddelde waarden. De overeenkomst met de maximale waarde van  $\tau$  is het beste als we uitgaan van de hoogte ( $h - 2t$ ) van het lijf tussen de flenzen (korte stippellijnen in de tekening). Voor een praktijkberekening is substitutie van de hoogte van het lijf tussen de hartlijnen van de flenzen het meest voor de hand liggend: ( $h - t$ ). De hieruit volgende waarde van  $\tau$  komt dan goed overeen met de gemiddelde waarde van de weinig variërende schuifspanning in het lijf.

Ter vermindering van misverstanden; de schuifspanningsverdeling in het *lijf* is bij de drie profielen volkomen gelijk aan die volgens formule [480-(11)], alleen het spanningsverloop in de *flenzen* is volledig afwijkend.

Het schuifspanningsverloop in de flenzen is dus gemakkelijk te bepalen. Ter plaatse van de aansluiting van beide flenshelften aan het lijf moet er immers evenwicht van krachten heersen, zie fig. 4.

De schuifspanningen in het lijf hebben dezelfde richting als de dwarskracht die op de beschouwde normale doorsnede werkt. De schuifspanningen in de flenzen vormen als het ware de toevoer en de afvoer van de 'schuifspanningsstroom' in het lijf.

Ontbreken de flenzen aan één of twee uiteinden, dan moet de aanvoer als het ware in de flens zelf worden opgebouwd via een parabolische verloop, zie fig. 3c.

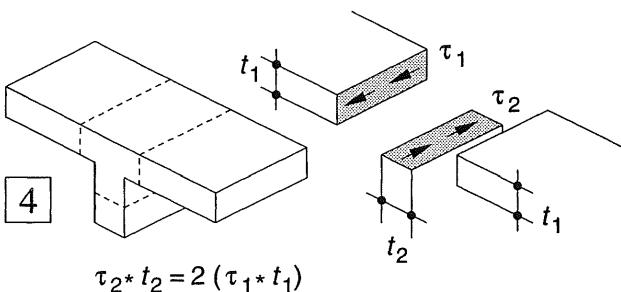
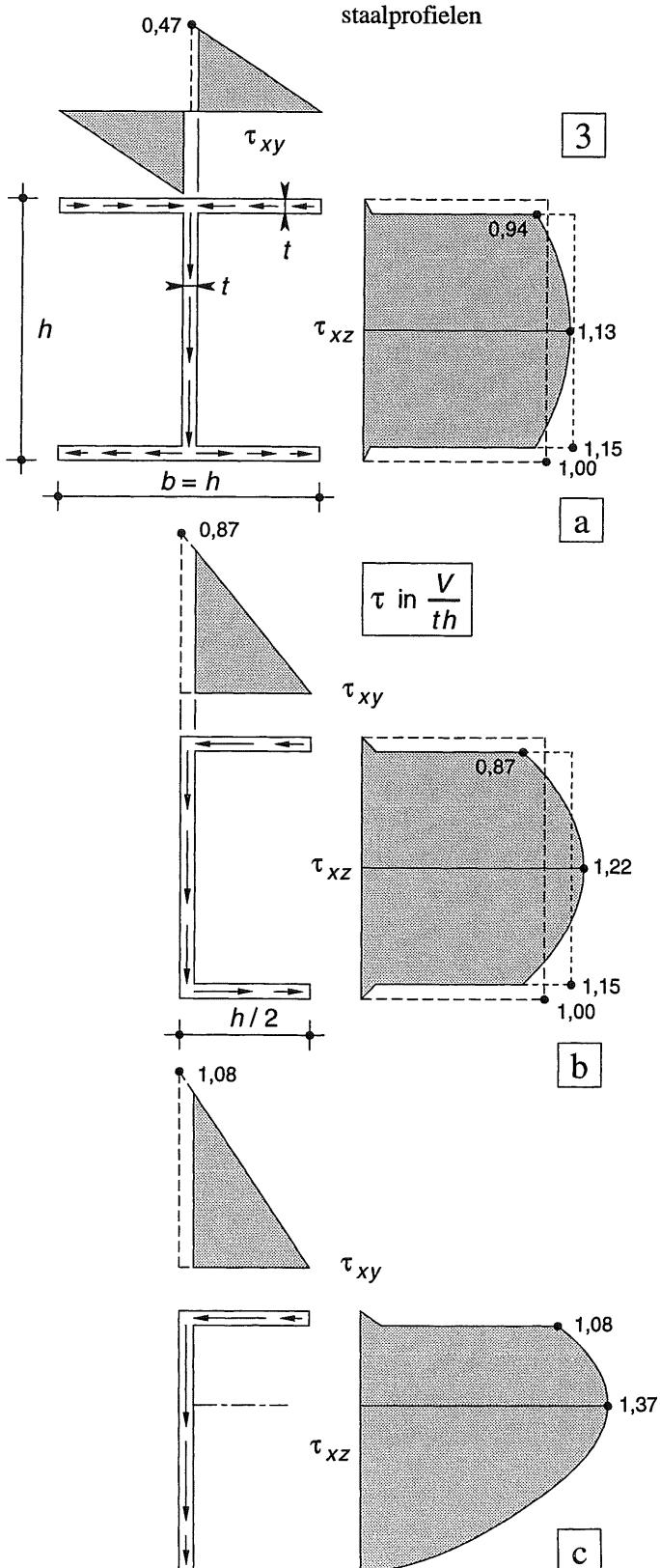


Fig. 4 Krachterevenwicht bij de aansluiting van het lijf aan de flenen

Fig. 3  
Schuifspanningsverdeling bij drie dunwandige staalprofielen



### 20.6.6 VEREENVOUDIGDE SCHUIFSPANNINGS-BEREKENING

Het is zeer gebruikelijk bij staalprofielen met (horizontale) flensen, om de schuifspanningen gelijkmatig verdeeld over het lijf aan te nemen, zie fig. 1a.

Let hierbij op het volgende:

Voor het I-profiel op zijn kant volgens fig. 1b neemt elke (verticaal staande) flens de helft van de dwarskracht op en veroorzaakt daarbij in elke flens een parabolisch schuifspanningsverloop. Het horizontale lijf doet nu niet mee in de overdracht van de schuifspanningen. Het is dan ook volkomen onjuist om ter plaatse van de neutrale lijn als 'breedte' van de doorsnede de hoogte  $h$  van het profiel in te voeren.

Bij het kokerprofiel van fig. 1c nemen de beide verticale zijwanden weer elk de helft van de dwarskracht op en ontstaat er een vrijwel constant schuifspanningsverloop in deze zijwanden. In de verticale symmetrielyn van de doorsnede zijn de schuifspanningen juist gelijk aan nul. Vanaf hier verlopen ze lineair naar de zijwanden. In feite geeft het U-profiel van fig. [483-3b] de spanningsverdeling weer in de linkerhelft van de koker. De grootte van de spanningen in de koker is echter maar half zo groot, omdat per kokerhelft maar de halve dwarskracht aangrijpt.

Bij dikwandige profielen zoals ze in de betonbouw voorkomen, kan men zich behelpen door de flensen helemaal niet te beschouwen en alleen maar een parabolische schuifspanningsverdeling in het lijf aan te nemen, zie fig. 2.

Deze schuifspanningen zullen immers vrijwel nooit maatgevend zijn. Als deze spanningen te hoog zouden oplopen kan men beter op een geheel andere wijze niet lineair elastisch rekenen. Dergelijke berekeningen moeten met computerprogramma's worden uitgevoerd en vallen buiten het kader van KW-4.

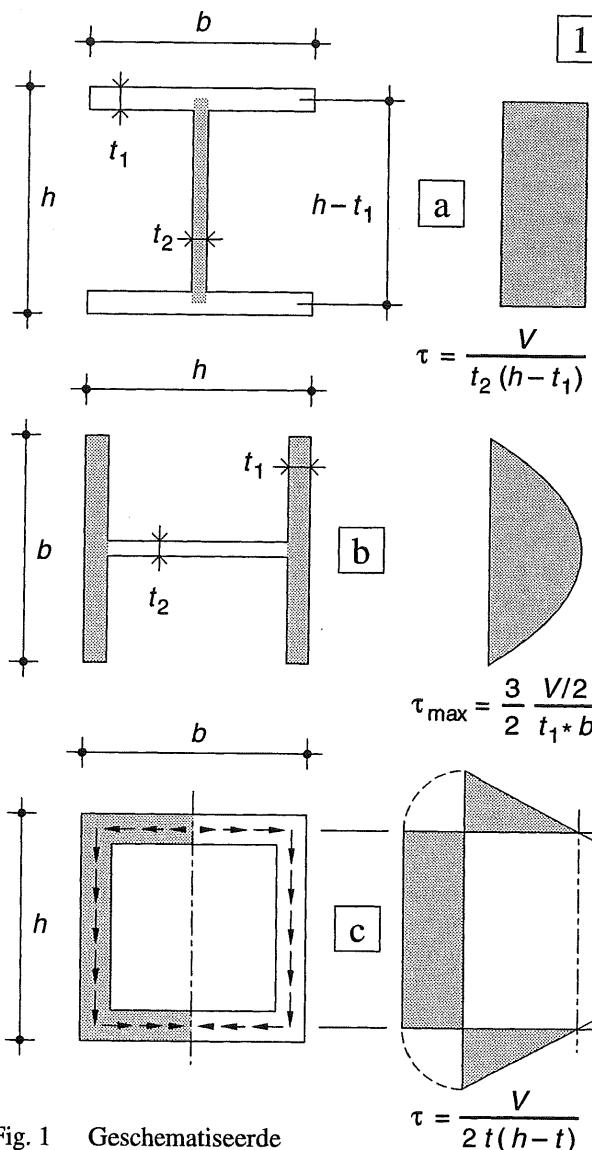
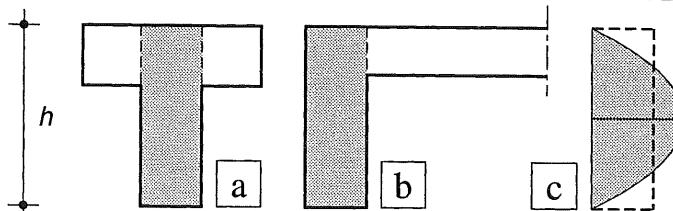


Fig. 1 Geschematiseerde schuifspanningsverdeling bij dunwandige profielen (staal)  
 a. 'Staand' I-profiel  
 b. 'Liggend' I-profiel  
 c. Koker

Fig. 2 Vereenvoudigde berekening bij een dikwandig profiel (beton)  
 a. T-balk      b. Randbalk van een vloer  
 Aangehouden schuifspanningsverloop (parabolisch, c.q. gelijkmatig verdeeld)



### 20.6.7 BELANG VAN HORIZONTALE SCHUIFSPANNINGEN

Dimensionering van lineaire constructiedelen vindt plaats aan de hand van de optredende normaalspanningen (en wel voornamelijk de buigspanningen). De schuifspanningen worden achteraf gecontroleerd en blijken zelden of nooit maatgevend te zijn. Dit zou de indruk kunnen wekken dat het voorgaande moet worden gekarakteriseerd als 'much ado about nothing'.

Toch is dit niet juist.

Bij de dunne lijven van staalprofielen kunnen de spanningen bij grote belastingen en kleine overspanningen wel degelijk hoog oplopen.

Bij betonbalken zal de schuifspanning meestal geen grote rol spelen; de problemen kunnen door het aanbrengen van beugels worden opgelost.

Bij houten balken moeten we veel meer op onze hoede zijn. De verticale schuifspanningen bij liggers, treden op in vlakken die loodrecht staan op de vezelrichting. Deze spanningen kunnen gemakkelijk worden opgenomen. Maar daar horen dan even grote horizontale schuifspanningen bij. Die werken dus in vlakken evenwijdig aan de vezelrichting. En juist in deze richting is hout voor schuifspanningen een zwak materiaal.

Soms worden losse houten balken op elkaar bevestigd om een balk van dubbele hoogte te vormen, dan wel een plomp I- of T-profiel, zie fig. 3a. In zo'n geval zullen draadnagels, kramplaten of deuvels de schuifkrachten moeten overbrengen die nodig zijn om de losse balken als één geheel te laten werken. De buigstijfheid neemt hierdoor immers aanzienlijk toe. Controle op de grootte van deze locaal over te brengen krachten is noodzakelijk. Hetzelfde geldt voor alle losse stapelingen van platen of liggers. Bij voorkeur werken deze als losse liggers die elk hun eigen kwadratisch oppervlaktemoment leveren, zie fig. 3b.

Vergelijk daartoe de modellen van fig. 4. Bij de scharnierende verbinding van boven- en onderflens in fig. 4a leveren de 'boven en onderflens' alleen hun eigen kwadratische oppervlaktemoment aan de buigstijfheid. Bij de prismatische balk van fig. 4b leveren lijf en flenzen hun aandeel volgens [449], maar bij het vakwerk van fig. 4c leveren alleen de flenzen hun aandeel volgens [449]. De diagonalen en verticalen zorgen er dan voor dat 'vlakke' normale doorsneden in hoofdtrekken vlak blijven

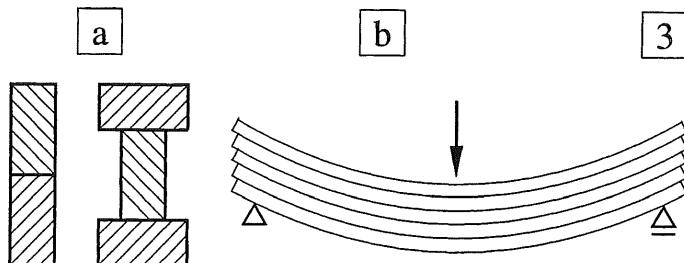


Fig. 3 Schuifspanningen in horizontale vlakken (hout)

- a. Eenvoudige samenstellingen van houten balken
- b. Stapeling van losse planken

Losse planken werken *niet* als één geheel

Bij de ondersteuningen blijven vlakke doorsneden – als de stapeling als één geheel wordt beschouwd – dan ook niet meer vlak

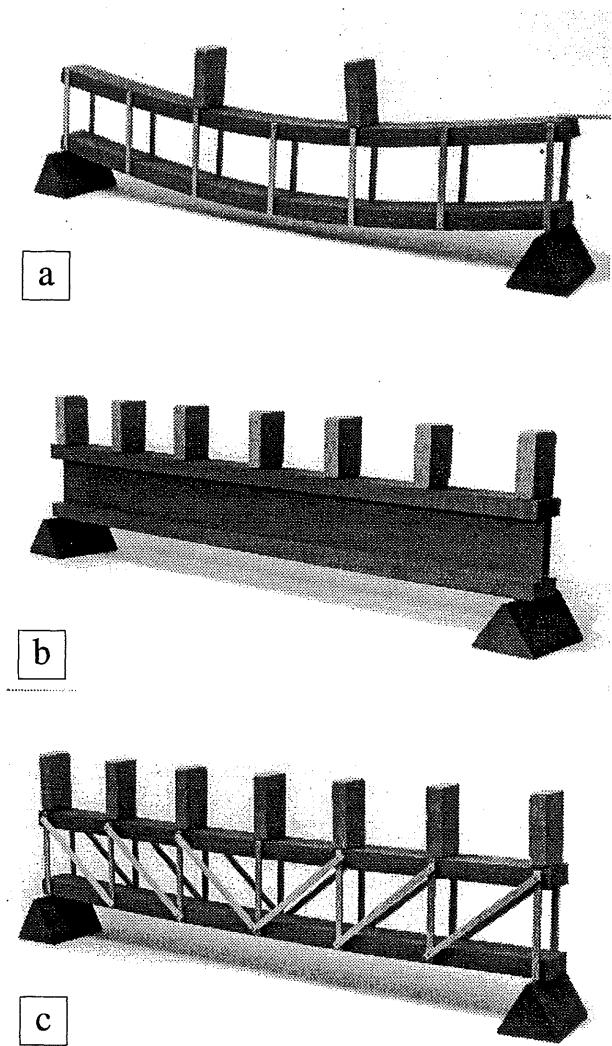


Fig. 4 Speelmodellen, waarbij de verbinding tussen boven- en onderflens wordt gevormd door:

- a, b. Verticale pendelstijlen; Een continu lijf
- c. Verticale pendelstijlen + diagonalen (vakwerk)

## 20.7.1 ALGEMEEN

We spreken van zuivere wringing als een ligger of staaf een constant wringend moment moet overbrengen, zie fig. 1. Alle andere snedekrachten worden gelijk aan nul verondersteld.

In een normale doorsnede treden alleen maar schuifspanningen op die tezamen een koppel vormen ter grootte van het wringend moment. De opeenvolgende normale doorsneden verdraaien hierbij ten opzichte van de liggeras en *verwelven* hierbij. Dit betekent dat een normale doorsnede niet meer vlak blijft, maar verplaatsingen vertoont loodrecht op de normale doorsnede. Maar omdat bij een constant wringend moment alle opvolgende doorsneden dezelfde verwelving vertonen, blijven de opeenvolgende normale doorsneden wel aan elkaar passen.

Voor de meest eenvoudige toestand waarbij deze verwelingen ongehinderd kunnen optreden, is door *de St. Venant* de spanningsverdeling afgeleid in 1855. Deze stof valt buiten het bestek van KW-4. Geïnteresseerden worden verwezen naar de literatuur {7}.

Alleen voor cirkelvormige doorsneden is een betrekkelijk eenvoudige afleiding mogelijk, omdat dit het enige geval is waarbij vlakke doorsneden wél vlak blijven. Ter verklaring van het gedrag van buisvormige profielen zullen we hier in [492] enige aandacht aan besteden. Op zich heeft de cirkelvorm voor ons echter weinig praktische betekenis.

We zullen de belangrijkste *uitkomsten* van de theorie volgens de St Venant echter wel vermelden. Voorts kunnen we gebruik maken van twee analogiën, die een alleszins redelijke indruk geven van de spanningen die zijn te verwachten. Voor dunwandige staal- of messingprofielen, waar de optredende vervormingen het meeste van belang zijn, kunnen de spanningen met behulp van heel eenvoudige regels vrijwel exact worden berekend.

{7} J.P. den Hartog, 'Advanced Strength of Materials', Chapter I. Torsion  
McGraw-Hill Book Company, Inc. 1952



1

Fig. 1 Verwringing van een balkje, vervaardigd van polystyreeschuim

Probeer dit zelf en constateer dat de einddoorsneden door de verwelving niet meer op een plat vlak passen. Verifiëer voorts dat alle zijvlakken van het stripje onder hoeken van  $+45^\circ$  en  $-45^\circ$  met de normale doorsnede, resp. positieve en negatieve krommingen vertonen

---

In de praktijk treedt wringing meestal gecombineerd op met buiging en dwarskracht. Dikwijls realiseren we ons niet dat er wringing optreedt en hebben we er ook nauwelijks last van.

Maar er kunnen zich ook gevallen voordoen, dat zeer grote onverwachte vervormingen voor on-aangename verrassingen zorgen. Het is dus wel degelijk zaak dat we de meest essentiële eigenschappen van dit veerkrachtsgeval weten te ondernemen.

Denk aan twee even zware kinderen die elkaar op een wipplank in evenwicht houden. Als elk kind naar zijn rechterkant overhelt wordt de plank tussen beide kinderen onderworpen aan een zuiver wringend moment, waar in feite niemand iets van merkt. Maar als een van de twee besluit naar de andere kant over te hellen dan slaat het wringend moment bij de oplegging van teken om. De oplegging zal dan niet alleen een verticale oplegreactie moeten leveren, maar ook een koppel dat zijdelings omslaan van de plank tegengaat.

### 20.7.2 RESULTATEN VAN DE THEORIE VAN DE ST VENANT

De theorie geldt voor prismatische staven die over hun gehele lengte zijn onderworpen aan een zuiver (= constant) wringend moment, waarbij de einddoorsneden vrij kunnen vervormen.

#### Spanningen

- In normale doorsneden treden alleen schuifspanningen op en geen normaalspanningen.
- Langs een rand van een normale doorsnede zijn de schuifspanningen altijd evenwijdig aan deze rand, zie fig. 2.
- Ontbindt men alle schuifspanningen in twee (willekeurig gerichte) onderling loodrechte componenten, dan geldt het volgende:
  - a. De schuifspannings-componenten in de één richting ( $y$ -richting) dragen dan de één helft bij aan het uitwendig wringend moment  $M_t$  en de schuifspannings-componenten in de andere richting ( $z$ -richting) de andere helft.
  - b. De resulterende krachten in  $y$ - en  $z$ -richting zijn gelijk aan nul.

#### Vervormingen

- De opeenvolgende normale doorsneden verdraaien ten opzichte van elkaar, waarbij de doorsnedenvorm in aanzicht niet verandert (dus in het  $y$ - $z$ -vlak).
- Loodrecht op het vlak van de doorsnede treden verplaatsingen op (dus in  $x$ -richting) die voor overeenkomstige punten in elke doorsnede gelijk zijn; het zogenaamde verwelven van de doorsnede, zie fig. 3.

Voor het inzichtelijk maken van de schuifspanningsverdeling bij zuiver wringen zijn twee analogiën in gebruik:

- De stroomlijnen-analogie van *Lord Kelvin*
- De zeepvlies-analogie van *Prandtl*

De tweede analogie is 'more powerfull'; de eerste is meer bevattelijk. We zullen de eerste analogie daarom het meeste toepassen en de tweede aan het eind kort bespreken [496].

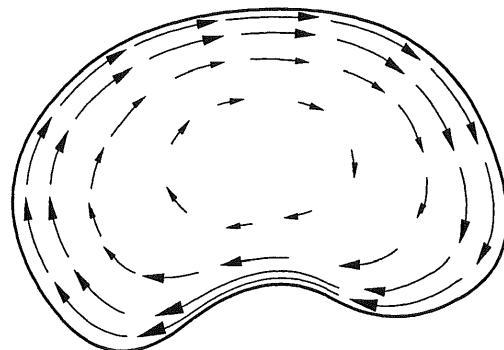


Fig. 2 Schuifspanningen ten gevolge van wringing in een prismaatieve staaf van willekeurige doorsnede

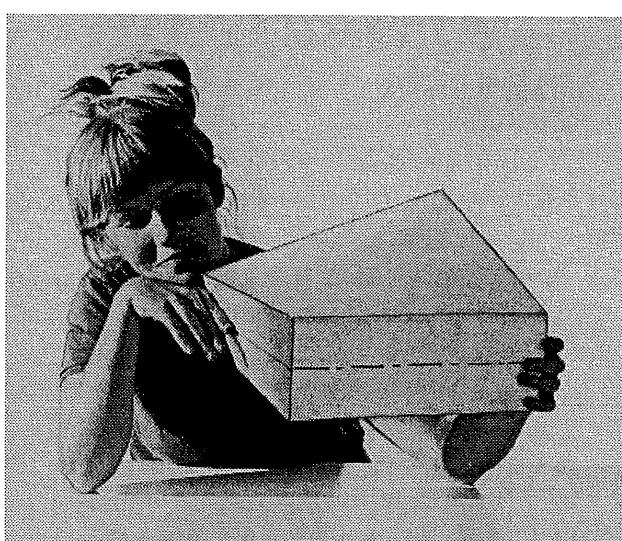


Fig. 3 Vergroot weergegeven moed van een prismaatieve staaf met rechthoekige doorsnede. De streep-stiplijn is de neutrale lijn (voor buiging en wringing) van de normale doorsnede

## 20.7.3 STROOMLIJNEN-ANALOGIE

De richting en grootte van de schuifspanningen bij een cirkelvormige doorsnede blijken geheel overeen te komen met de richting en grootte van een ideale vloeistof-stroming in een cirkelvormige bak.

Om de stroming zichtbaar te maken, kunnen we als volgt te werk gaan. Boven de bak wordt een camera geplaatst die vast aan de bak is verbonden. Op de vloeistof drijven kleine deeltjes. We verdraaien de bak nu over een kleine hoek om zijn verticale as. Tijdens deze verdraaiing maken we een tijdopname van de deeltjes op de vloeistof.

Bij een cirkelvormige bak komt de vloeistof door zijn traagheid nog niet direct in beweging. De camera verdraait dus ten opzichte van de kleine deeltjes en op de foto ontstaan streepjes die allemaal cirkelvormig zijn, zie fig. 1a.

Bij andere doorsnede-vormen moet de vorm van de bak worden aangepast. De vloeistof kan dan bij het begin van de beweging niet meer geheel stil blijven staan. Door het draaien van de bak moeten ook sommige delen van de vloeistof in beweging komen. Maar met precies hetzelfde procédé kunnen ook hier weer de stroomlijnen worden vastgelegd.

Voor de vierkante doorsnede komt dan een foto te voorschijn zoals geschematiseerd is weergegeven in fig. 1b. Het zal duidelijk zijn dat de optredende stromingen – dus ook de optredende schuifspanningen – niet erg veel zullen afwijken van die bij een cirkel met hetzelfde oppervlak.

Naarmate de vorm van de doorsnede meer rechthoekig wordt, zullen de spanningen ook meer gaan afwijken van de spanningen die we bij het vierkant vonden. In tabel 6 zijn voor enkele verhoudingen  $t/b$ , de maximale schuifspanningen weergegeven, die optreden ter plaatse van de middens van de lange zijden  $b$  [7].

Bij kleine verhoudingen van  $t/b$  kan echter gebruik worden gemaakt van een zeer gemakkelijke benaderingsformule [489].

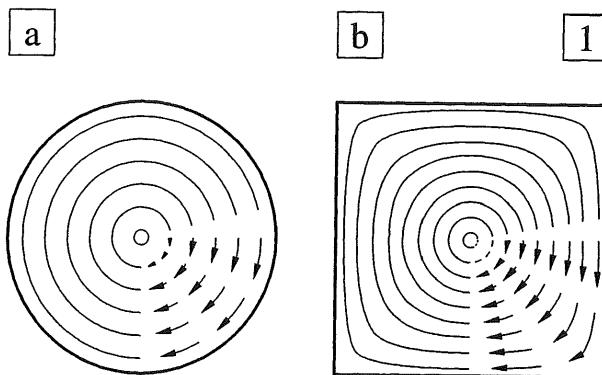


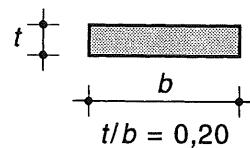
Fig. 1 Geschematiseerde beelden voor de schuifspanningen volgens de stroomlijnen-analogie

- a. Cirkelvormige doorsnede
- b. Vierkante doorsnede

Ook hier kan de formule voor de maximale schuifspanning weer in een vorm worden gebracht waarbij het (wringend) moment  $M_t$  wordt gedeeld door het weerstandsmoment tegen wringing:  $W_t = \alpha b t^2$ .

Ook de geometrische factor tegen wringing  $I_t$  kan op soortgelijke wijze worden vastgelegd:  $I_t = \beta b t^3$

Let op: in beide formules geldt:  $t \leq b$   
Afhangelijk van de dikte-breedte verhouding variëert  $\alpha$  van 1/5 tot 1/3 en  $\beta$  van 1/7 tot 1/3.



TABEL 6  $W_t$  en  $I_t$

$t/b$	$\alpha$	$\beta$
1,00	0,208	0,141
0,66	0,231	0,196
0,50	0,246	0,229
0,40	0,259	0,249
0,33	0,267	0,263
0,20	0,291	0,291
0,10	0,313	0,312
→ 0	0,333	0,333

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b t^2}$$

$$I_t = \beta b t^3$$

#### 20.7.4 SCHUIFSPANNINGSVERDELING IN EEN BREDE STRIP

We beschouwen een brede strip waarbij in het analogon een ronddraaiende stroming zal moeten optreden. In het overgrote deel van de doorsnede treedt een driehoekig snelheidsverloop op, zie fig. 2a. De snelheid is nul in de hartlijn van de strip en bereikt tegengestelde maximale waarden aan de tegenover elkaar liggende lange zijden. Alleen aan de beide einden van de strip zal de vloeistof even 'rond' moeten stromen.

Een ander houdt in dat de schuifspanningen in het overgrote deel van de strip eveneens driehoekig verlopen. We nemen nu gemakshalve even aan dat dit driehoekige verloop over de gehele lengte van de strip optreedt, zoals is weergegeven in fig. 2b1.

Volgens stelling a. van [487] leveren deze schuifspanningen (allemaal in  $y$ -richting) een inwendig moment dat gelijk is aan de *helft* van het totale uitwendige wringende moment  $M_t$ .

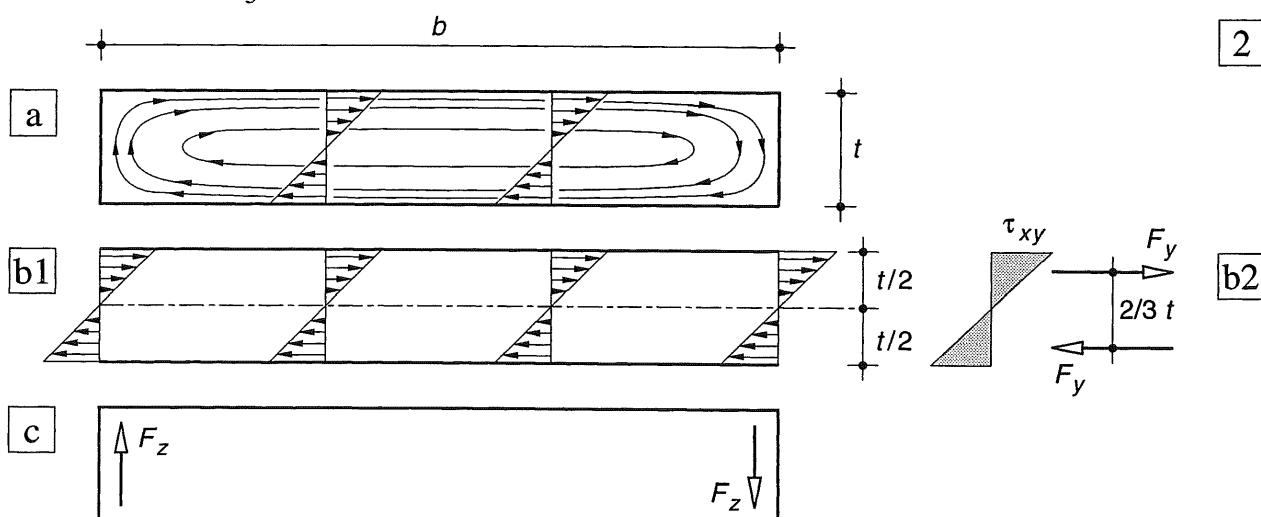
De schuifspanningen in  $z$ -richting – die alleen maar kunnen voorkomen in de directe omgeving van de korte einden – zullen dan de andere helft van het uitwendige wringende moment  $M_t$  moeten leveren, zie fig. 2a en 2c.

Als we de maximale schuifspanning aan de lange zijranden gemakshalve aangeven met  $\tau_{xy}$ , dan kunnen we voor het aandeel van de horizontale schuifspanningen de volgende uitdrukking neerschrijven, zie fig. 2b:

$$\frac{1}{2} M_t = \frac{1}{2} \tau_{xy} b \frac{t}{2} * \frac{2}{3} t = \frac{1}{6} \tau_{xy} b t^2$$

zodat geldt:

$$\tau_{xy} = \frac{1/2 * M_t}{1/6 * b t^2} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b t^2} \quad (13)$$



De bepaling van het inwendige wringende moment gebeurt dus op volkomen overeenkomstige wijze als we dat in fig. [421-2] voor het buigende moment hebben gedaan. Alleen stonden daar de spanningen loodrecht op het vlak van de beschouwde doorsnede, terwijl ze hier in het vlak van de doorsnede liggen.

Een tweede verschil is dat op deze wijze pas de *helft* van het uitwendige wringende moment is verdisconteerd.

De maximale schuifspanningen aan de korte zijden van de doorsnede hebben ongeveer dezelfde grootte als aan de lange zijranden. Dit is gemakkelijk in te zien als we weer denken aan de rondlopende vloeistofstroming.

De spanningscomponenten  $\tau_{xz}$  komen alleen voor aan de uiteinden over een afstandje van hoogstens twee maal de dikte van de strip. De daaruit voortvloeiende vertikale krachtjes over deze gebiedjes zijn betrekkelijk klein.

Doordat deze krachtjes zo'n grote inwendige hefboomsarm bezitten, zijn ze toch in staat om de andere helft van  $M_t$  te leveren.

Fig. 2 Stroomlijnen-analogie voor een brede strip

- a. De werkelijke schuifspanningsverdeling komt overeen met het snelheidsverloop
- b1. Geschematiseerde schuifspanningen in  $y$ -richting
- b2. Bepaling van het aandeel aan het wringend moment ten gevolge van  $\tau_{xy}$
- c. Geschematiseerde schuifkrachten in  $z$ -richting

### 20.7.5 MOMENT – VERVORMINGS – RELATIE BIJ EEN BREDE STRIP

□ Om het verband te kunnen bepalen tussen het wringend moment en de daaruit volgende vervorming van de brede strip, wordt een vierkant elementje uit deze strip beschouwd. Het ruimtelijke model van het elementje is hetzelfde als in fig. [487-3], maar in een wat andere stand geplaatst, zie fig. 1. Het elementje bezit de dikte  $t$  van de strip en heeft in bovenaanzicht de zijden  $a$ , zie fig. 2a, b. In het bovenste plakje van dit elementje werken overal de maximale schuifspanningen  $\tau_{xy}$  (in de normale doorsnede) en  $\tau_{yx}$  (loodrecht op de normale doorsnede); fig. 2b. Ten gevolge van deze schuifspanningen neemt het vierkantje een ruitvorm aan – zie appendix [A- 400] – waarbij de verandering van de rechte hoek gelijk is aan, zie fig. 2c:

$$\gamma = 2 \Delta\psi = 2 \frac{\Delta u}{a} \quad (14)$$

Het onderste plakje van het elementje neemt een vergelijkbare vorm aan, alleen zijn de hoeken  $\Delta\psi$  van teken omgedraaid, omdat de schuifspanningen een tegengesteld teken bezitten.

Intussen blijft de vorm van de normale doorsnede in aanzicht onveranderd (rechte hoeken blijven recht). Maar de opvolgende normale doorsneden verdraaien wel ten opzichte van elkaar, zie fig. 2d. De verwelving heeft alleen plaats loodrecht op de normale doorsnede.

De rotatie van de twee beschouwde normale doorsneden ten opzichte van elkaar, kan worden bepaald uit de rotatie van het voor- en achtervlak van het beschouwde elementje, zie fig. 2d. Het voorvlak roteert over een hoekje:  $+ \Delta u/t$  en het achtervlak over een hoekje  $- \Delta u/t$ .

De specifieke hoekverdraaiing bedraagt dan:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = 2 \frac{\Delta u / t}{a} \quad (15)$$

Substitutie van (14) in (15) levert:

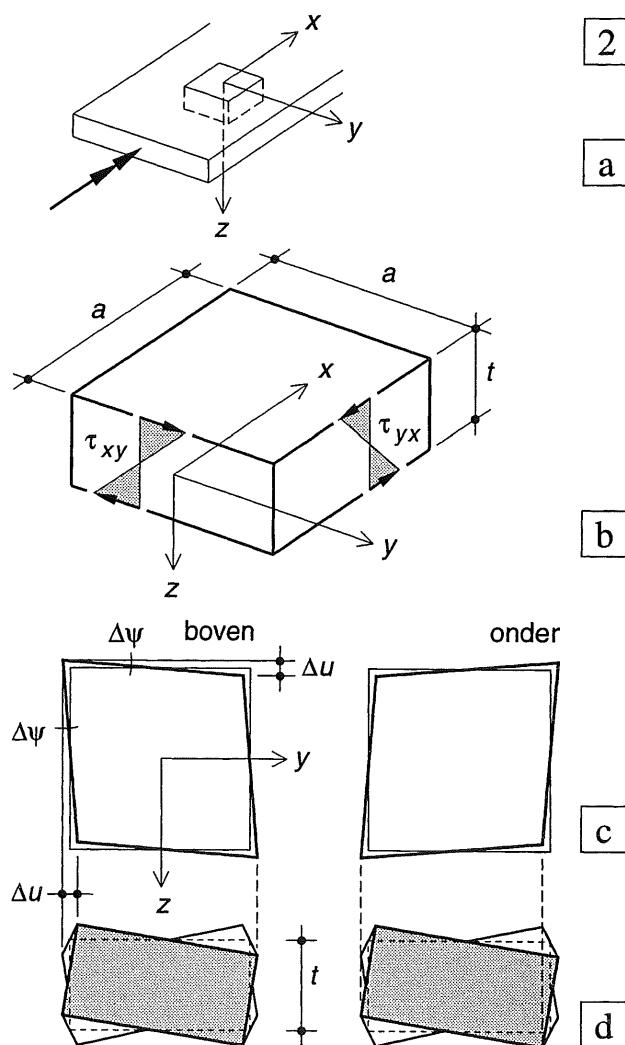
$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\gamma}{t} \quad (16)$$

NB  $\Delta u$  is een kleine verplaatsing in algemene zin,  $\vartheta$  is de hoekverdraaiing in  $y$ -richting.

- Fig. 2 Vervormingen van een brede strip onder een constant wringend moment
- Strip onder invloed van een rechtsdraaiend wringend moment
  - Schuifspanningen op het beschouwde vierkante elementje
  - Vervormingen van het boven- en ondervlak van het beschouwde elementje
  - Vervormd elementje in aanzicht ( $2 \times$ )



Fig. 1 Sterk vergrote vervormingen van het vierkante elementje uit de strip  
In bovenaanzicht is er een bol verloop naar voren, en een hol verloop in dwarsrichting



□ We kunnen nu formule [489-(13)] gebruiken om de gezochte betrekking te vinden.

Daartoe vervangen we eerst  $\tau_{xy}$  door  $G\gamma$  volgens formule [A-400-(40)] uit de appendix en elimineren  $\gamma$  vervolgens met behulp van formule (16):

$$\tau_{xy} = G\gamma = G t \frac{d\vartheta}{dx}$$

We kunnen deze waarde van  $\tau_{xy}$  nu substitueren in formule [489-(13)]:

$$G t \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b t^2} \quad (17a)$$

Herschreven levert dit:

$$M_t = G \frac{1}{3} b t^3 \frac{d\vartheta}{dx} = G I_t \frac{d\vartheta}{dx} \quad (17)$$

Hierbij wordt de term  $GI_t$  aangeduid als de *wringstijfheid* van de doorsnede. (De factor  $I_t$  zou dan moeten worden aangeduid als geometrische factor tegen wringing)

Qua opbouw heeft de wringstijfheid:

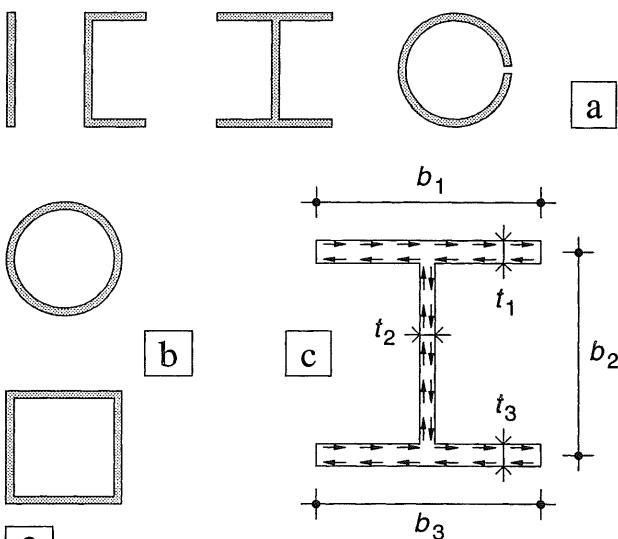
$$GI_t = G * 1/3 bt^3$$

veel overeenkomst met de buigstijfheid van de doorsnede, maar dan wel om de slappe as:

$$EI_y = E * 1/12 bt^3$$

Een brede strip is altijd wringslap, terwijl er voor de buiging van een horizontale strip zowel een slappe as ( $y$ -as) aanwezig is als een heel stijve as ( $z$ -as).

In feite is dit ook wel voor de hand liggend; de vectoren voor de buigende momenten  $M_y$  of  $M_z$  zijn elk immers rechtstreeks gerelateerd aan een van beide hoofdassen, terwijl de vector voor het wringend moment  $M_t = M_x$  loodrecht op deze assen staat en daardoor richtings-onafhankelijk is (vergelijk fig. [454-1b en 1c1]).



3

## 20.7.6 WRINGSTIJFHEID VAN DUNWANDIGE PROFIELEN

Bij dunwandige profielen moeten we onderscheid maken tussen enkelvoudig en meervoudig samenhangende doorsneden.

Een doorsnede is enkelvoudig samenhangend als de doorsnede geen open ruimten omsluit en is meervoudig samenhangend als dit wel het geval is, zie fig. 3.

Bij alle dunwandige enkelvoudige doorsneden-vormen is de wringstijfheid gering. Ze kan direct worden afgeleid uit de resultaten voor de brede strip; formule [489-(13)].

Beschouwen we de stroomlijnen-analogie dan is direct te zien dat het voor de stroming hoegegaamd geen verschil uitmaakt, of de doorsnede van het profiel een of meer knikken vertoont.

Alleen de totale lengte ( $\approx b_1 + b_2 + b_3$ ) is maar van belang, zie fig. 3c.

Ook als de dikte van de samenstellende delen van het profiel ongelijk is, volgt de wringstijfheid van het totaal als de som van de wringstijfheden van de samenstellende delen.

$$GI_t = G * \sum \frac{1}{3} b_i t_i^3 \quad (18)$$

Formule (17) gaat voor dit geval dan over in:

$$M_t = \left[ G \left( \frac{1}{3} b_1 t_1^3 + \frac{1}{3} b_2 t_2^3 + \dots \right) \right] \frac{d\vartheta}{dx} \quad (19)$$

De vorm tussen [ ] geeft de wringstijfheid weer, waarin voor  $b$  de hartmaten zijn te nemen. De maximale schuifspanningen langs de zijranden van de diverse onderdelen zijn dan gelijk aan:

$$\tau_1 = \frac{M_t t_1}{I_t} \quad \tau_2 = \frac{M_t t_2}{I_t} \quad \text{etc.} \quad (20)$$

Fig. 3 Dunwandige profielen

- a. Enkelvoudig samenhangend
- b. Meervoudig samenhangend
- c. Afbakening van een enkelvoudig samengehangend profiel voor de bepaling van de wringstijfheid (formule 19)

### 20.7.7 AXIAAL-SYMMETRISCHE DOORSNEDE-VORMEN

Alle ronde buisvormige doorsneden zijn axiaal symmetrisch, zie fig. 1a, b; de massieve cirkel vormt een limietstand ( $R_1 = 0$ ).

We beschouwen van zo'n staaf een mootje ter lengte  $dx$ , zie fig. 1a, c. Op beide uiteinden grijpen gelijke en tegengesteld gerichte wringende momenten aan. Vanwege de axiaal-symmetrie zullen de begrenzingsvlakken van dit mootje ook na vervorming vlak moeten blijven.

Voorts leert de stroomlijnen-analogie [488-1a], dat de schuifspanningen lineair moeten variëren vanaf het zwaartepunt van de normale doorsnede, zoals is weergegeven in fig. 1b.

#### Cirkelvorm

Ten gevolge van de wringende momenten verdraait de bovenste doorsnede van het beschouwde mootje over een hoekje  $d\vartheta$  ten opzichte van de onderste doorsnede, vergelijk fig. 2a en 2b. Op een afstand  $r$  vanaf het middelpunt van de bovenste cirkel ondergaat elk punt een verplaatsing  $r d\vartheta$  ten opzichte van de overeenkomstige punten van de onderste cirkel, zie fig. 2b.

De oorspronkelijke rechte hoek tussen een vezel in langsrichting en een normale doorsnede is na vervorming niet langer recht. De verandering van de rechte hoek is gelijk aan:

$$\gamma = \frac{r d\vartheta}{dx} \quad (21)$$

De grootte van de schuifspanning volgt dan uit formule [499-A-(40)]:

$$\tau = G \gamma = G r \frac{d\vartheta}{dx} \quad (22)$$

Alle schuifspanningen in een normale doorsnede zijn tangentiaal gericht. Het aandeel aan het wringend moment van de schuifspanning op een elementair deeltje ten opzichte van het middelpunt is dan gelijk aan, zie fig. 3a:

$$dM_t = \tau dA * r \quad (23)$$

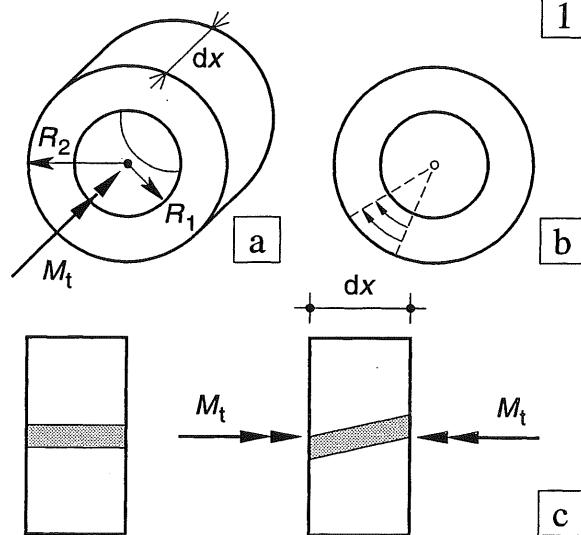


Fig. 1 Wringend moment op een buis

- a. Afmetingen
- b. Schuifspanningsverdeling
- c. Zijaanzicht van het mootje, voor en na belasten

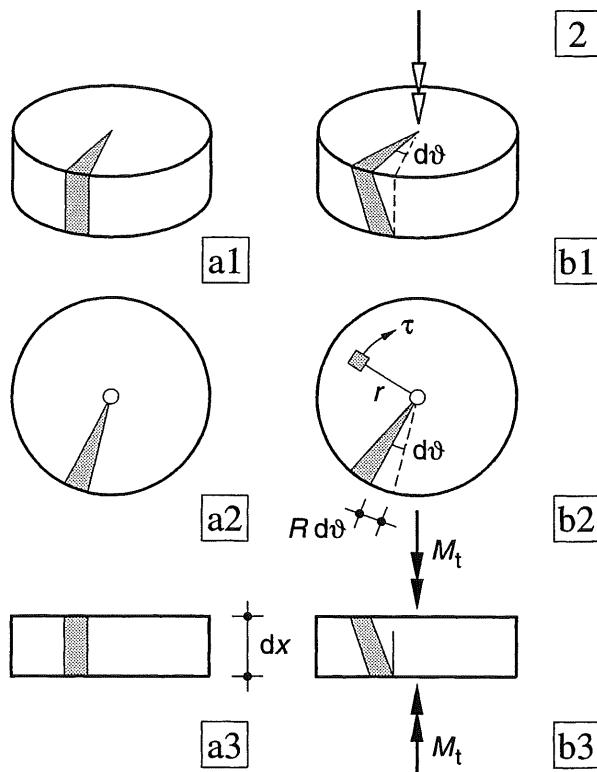


Fig. 2 Staaf met cirkelvormige doorsnede

- a. Staafmootje in onbelaste toestand
- b. Staafmootje na belasten
- 1-2-3 Perspectief - bovenaanzicht - zijaanzicht

Voor het totale wringende moment vinden we dan achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A \tau \, dA * r = \int_A G r^2 \frac{d\vartheta}{dx} \, dA = \\ &= G \frac{d\vartheta}{dx} \int_A r^2 \, dA \end{aligned} \quad (24)$$

De integraal van formule (24) wordt aangeduid als het polaire kwadratische oppervlaktemoment  $I_p = (I_t)$  [436-(38)] Voor een cirkel geldt dus als wringstijfheid, zie formule [436-(40a)]:

$$G * I_t = G * I_p = G * 1/2 \pi R^4 \quad (25)$$

Formule (24) kan nog worden geschreven als:

$$M_t = G I_t \frac{d\vartheta}{dx} \quad (24a)$$

Substitutie van de hieruit volgende waarde voor  $d\vartheta/dx$  in formule (22) levert:

$$\tau = \frac{M_t}{I_t} r \quad \text{en} \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} R \quad (26)$$

Voor de schuifspanningsverdeling ten gevolge van zuivere wringing in een cirkelvormige doorsnede vinden we dus, zie fig. 3a:

- de spanningen zijn recht evenredig met het wringende moment  $M_t$
- de schuifspanningen zijn recht evenredig met de afstand tot het middelpunt van de cirkel,
- de spanningen zijn omgekeerd evenredig met de geometrische factor tegen wringing  $I_t$ .

#### Buisvormige doorsnede

Voor een buisvormige doorsnede verloopt de afleiding geheel analoog aan die voor de cirkelvormige doorsnede en kunnen de algemene formules (24a) en (26) worden gebruikt. Ook hier geldt:  $I_t = I_p$ , zie [436-(40)]

$$I_p = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) \quad (27)$$

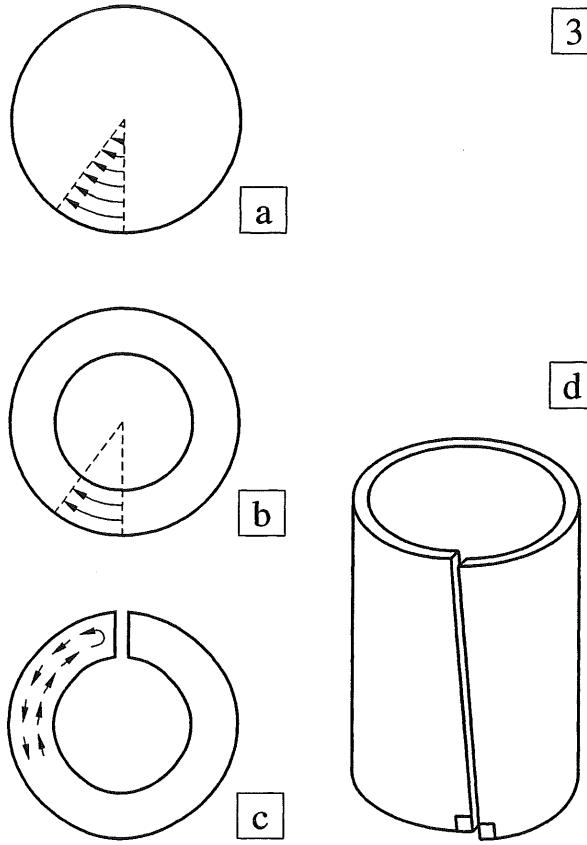


Fig. 3 Schuifspanningsverdeling in cirkelvormige doorsneden

- a. Cirkel (massieve staaf)
- b. Buis (meervoudig samengehangende doorsnede)
- c. Buis (enkelvoudig samengehangende doorsnede)
- d. Vervorming voor geval c. {7}

Bij de meervoudig samengehangende doorsneden zoals de buis is de wringstijfheid aanmerkelijk groter dan bij de enkelvoudig samengehangende doorsneden van [491]. Ook uit de stroomlijnen-analogie is direct duidelijk dat bij gesloten profielen de vloeistof in één richting rond kan stromen, zie fig. 3b. Bij open profielen daarentegen moet een heen en terug gaande stroming over de dikte van het profiel plaatsvinden, zie fig. 3c. Let op: als we in lengterichting van een buis een zaagsnede aanbrengen, dan is de wringstijfheid volledig verloren gegaan. We hebben dan weer met een enkelvoudig samengehangende doorsnede te doen, zie fig. 3d.

### 20.7.8 SPANNINGSVERDELING BIJ KOKERPROFIELEN

Bij (betrekkelijk) dunwandige kokerprofielen is de spanningsverdeling heel eenvoudig te bepalen. In de stroomlijnen-analogie heerst er weer een rondgaande stroming en de snelheid zal omgekeerd evenredig moeten zijn met de plaatselijke wanddikte.

In fig. 1 is een kokerprofiel weergegeven. In de onderdelen 1 en 3 treden uitsluitend horizontale schuifspanningen op en in de onderdelen 2 en 4 uitsluitend verticale schuifspanningen. Hierdoor ontstaan de schuifkrachten  $F_{H1}$  en  $F_{H3}$  in de horizontale onderdelen en de schuifkrachten  $F_{V2}$  en  $F_{V4}$  in de verticale onderdelen.

Elk tweetal schuifkrachten levert een koppel dat gelijk is aan de helft van het uitwendig wringend moment  $M_t$ .

Uit evenwichtsoverwegingen moet gelden:

$$F_{H1} = F_{H3} = F_H$$

$$F_{V2} = F_{V4} = F_V$$

We vinden dan voor de horizontale onderdelen:

$$\frac{1}{2} M_t = F_H * h_0 \quad (28a)$$

en voor de verticale onderdelen:

$$\frac{1}{2} M_t = F_V * b_0 \quad (28b)$$

De schuifspanningen in deze onderdelen zijn dan gelijk aan:

$$\tau_1 = \tau_h = \frac{F_H}{b_0 t_1} = \frac{M_t}{2 b_0 h_0} \frac{1}{t_1} \quad (29a)$$

$$\tau_2 = \tau_v = \frac{F_V}{h_0 t_2} = \frac{M_t}{2 b_0 h_0} \frac{1}{t_2} \quad (29b)$$

In algemene termen vindt men dus voor de grootte van de schuifspanning:

$$\tau_i = \frac{M_t}{2 b_0 h_0} \frac{1}{t_i} = \frac{M_t}{2 A_0 t_i} \quad (29)$$

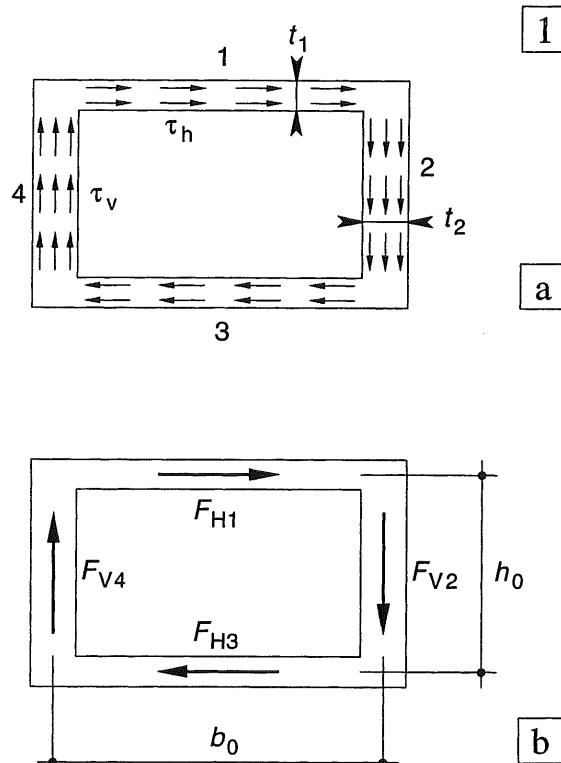


Fig. 1 Spanningsverdeling bij kokerprofielen

- a. Doorsnede met spanningsverloop
- b. Krachten per onderdeel
- c. Numerieke uitwerking

Inde formules (28) zijn  $b_0$  en  $h_0$  de lengtematen 'hart op hart' van de samenstellende delen en is  $A_0$  het oppervlak dat door deze systeemlijnen wordt omsloten, (het is dus niet gelijk aan het buitenoppervlak van de kokerdoorsnede  $A = bh$ ).

*Wringstijfheid van kokers*

De afleiding van de wringstijfheid neemt bij de vloeistof-analogie wat meer tijd in beslag dan bij de membraan-analogie. Geïnteresseerden worden verwezen naar {7}.

We geven hier slechts het eindresultaat, eerst in algemene vorm, daarna toegespitst op een rechthoekige koker met in principe verschillende wanddikten.

Algemene formule, zie fig. 2

$$I_t = \frac{4 A_0^2}{\int ds / t} \quad (30)$$

Hierin is  $A_0$  weer het oppervlak dat door de hartlijnen van de kokerdelen wordt omsloten en wordt  $s$  langs de hartlijnen gemeten;  $t$  is hierbij steeds de plaatselijke dikte.

Voor het concrete geval van fig. 2b vindt men:

$$I_t = \frac{4 (b_0 h_0)^2}{\frac{b_0}{t_1} + \frac{h_0}{t_2} + \frac{b_0}{t_3} + \frac{h_0}{t_4}} \quad (31)$$

*Voorbeelden:*

Bij een koker met een constante wanddikte vindt men zowel uit (30) als uit (31):

$$I_t = \frac{4 (b_0 h_0)^2 t}{2b_0 + 2h_0} \quad (32)$$

Voor de buisvormige doorsnede volgt uit (30):

$$I_t = \frac{4 (\pi R_0^2)^2}{2\pi R_0 / t} = 2\pi R_0^3 t \quad (33)$$

Voor dunwandige buizen levert de uitdrukking:  $2\pi R_0^3 t$  iets kleinere waarden dan de exacte waarde volgens formule [436-(40)], zie fig. 3.

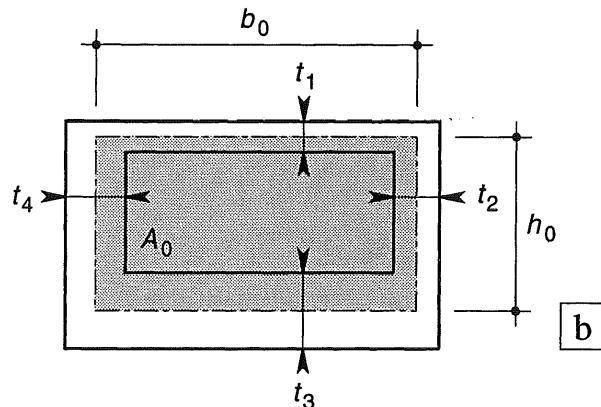
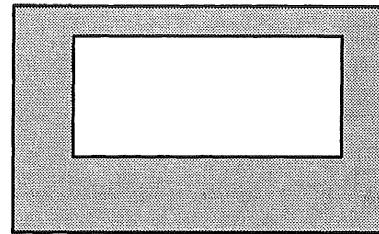


Fig. 2 Algemene formule voor de wringstijfheid

a. Doorsnede van de koker

b. In rekening te brengen oppervlak  $A_0$

Formule [436-(40)]

$$\begin{aligned} I_{p1} &= \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \\ &= 4\pi (R_2 - R_1) \frac{R_2 + R_1}{2} \frac{R_2^2 + R_1^2}{4} = \\ &= 4\pi t R_0 \left[ \left( \frac{R_2 + R_1}{2} \right)^2 - \frac{2R_1 R_2}{4} \right] = \\ &= 4\pi t R_0 \left[ R_0^2 - \frac{R_1 R_2}{2} \right] \approx 4\pi t R_0 \frac{R_0^2}{2} \end{aligned}$$

Formule [495-(33)]

$$I_{p2} = 2\pi R_0^3 t$$

Op deze wijze zijn beide formules in dezelfde vorm gebracht:  $I_{p1} = I_{p2}$

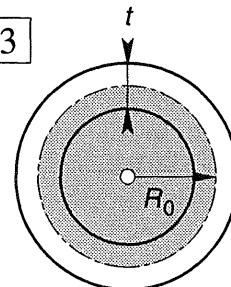


Fig. 3 Toepassing van de algemene formule voor een buisvormige doorsnede en vergelijking met de exacte waarde volgens [493-27].

### 20.7.9 MEMBRAAN-ANALOGIE

□ Bij de analytische behandeling van het wringprobleem voert de St. Venant een – vooralsnog onbekende – spanningsfunktie  $\Phi$  in. Hierbij wordt aangenomen dat de schuifspanningscomponenten uit deze spanningsfunktie kunnen worden afgeleid door differentiatie volgens onderstaande regels:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{aligned}\quad (34)$$

Door dit te doen wordt automatisch voldaan aan de evenwichtsvoorwaarde, die voor een elementair deeltje van de staaf kan worden afgeleid.

Voorts kan een differentiaalvergelijking voor de spanningsfunktie  $\Phi$  worden opgesteld.

We moeten dan nog wel de analytische functie  $\Phi$  zien te vinden die tegelijkertijd ook aan de randvoorwaarden voldoet. Dit was ten tijde van de St. Venant een lastig probleem dat slechts voor een aantal eenvoudige doorsnedevormen tot een oplossing kon worden gebracht (1855).

Prandtl realiseerde zich dat de differentiaal-vergelijking voor de spanningsfunktie  $\Phi$  dezelfde vorm bezit als de differentiaalvergelijking die geldt voor een membraan (dun vlies) onder alzijdige trek, en belast door een overdruk (1902).

Als gedachtenexperiment kunnen we uitgaan van een stijve vlakke plaat, met een gat erin dat de vorm van de doorsnede bezit. Over dit gat bevestigen we een strak gespannen vlies en brengen hierop een kleine overdruk aan.

Het vlies zal enigszins bol gaan staan, en het vlies zal overal langs de randen van de doorsnede precies aanliggen, zoals is weergegeven in fig. 1a, b.

De grootte van de schuifspanning in  $y$ -richting wordt dan bepaald door de helling in  $z$ -richting. Uit een hoogtelijnenkaart voor de vorm van het membraan, kunnen dan de grootte en de richting van de schuifspanningen worden bepaald, zie fig. 1c.

Bij een gebogen rand is de helling in  $n$ -richting (loodrecht op de rand) gelijk aan de schuifspanning in  $t$ -richting.

Aangezien de helling in tangentiale richting langs de rand overal gelijk is aan nul, kunnen er dus geen schuifspanningen loodrecht op de rand optreden. Dit betekent dat bij de membraan-analogie altijd aan de in [487] genoemde randvoorwaarde is voldaan.

De hoogtelijnen geven precies de richting van de schuifspanningen aan, de grootte is omgekeerd evenredig met de afstand van twee opeenvolgende hoogtelijnen.

In het midden van de doorsnede komen we  $2 \times$  dezelfde hoogtelijn tegen, de helling is hier dus gelijk aan nul.

Opvallend is de stijle helling van het vlies bij de 'inspringende' bocht van de doorsnede, hier nemen de schuifspanningen dus sterk toe.

In termen van de stroomlijnen-analogie kunnen we de hoogtelijnen vervangen denken door stroomlijnen. De hoeveelheid getransporteerde vloeistof tussen elk tweetal opeenvolgende stroomlijnen is dan constant. Als de stroomlijnen elkaar plaatselijk dichter naderen, moet de stroomsnelheid dus toenemen.

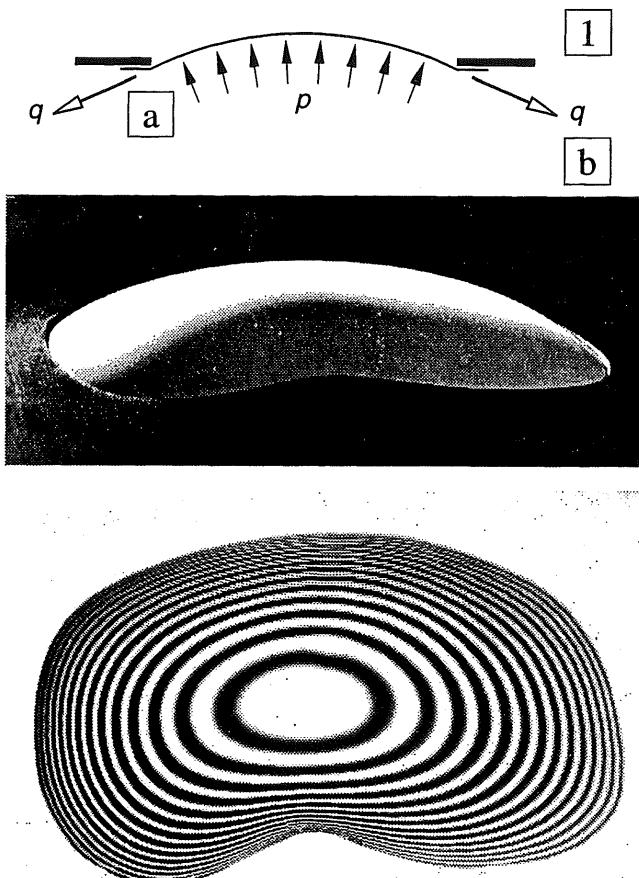


Fig. 1 Membraan-analogie  
 a. Doorsnede over het vlies  
 b. Vorm van het opgeblazen vlies  
 c. Hoogtelijnenkaart voor de vorm van het membraan (bepaald m.b.v. schaduw-moiré)

*Wringstijfheid*

Bij de afleiding van de analogie blijkt de inhoud van de lucht onder het vlies een maat te zijn voor de wringstijfheid. Voor een berekening dient dan de verhouding  $p/q$  bekend te zijn.

( $p$  = luchtdruk;  $q$  = voorspankracht per eenheid van lengte in het vlies).

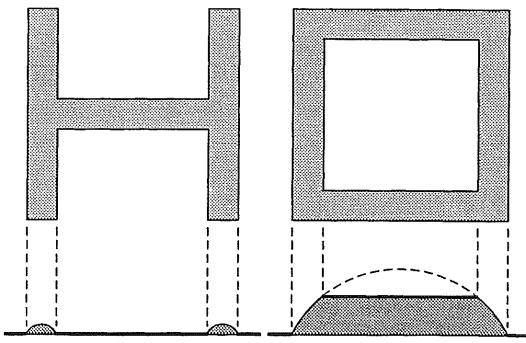
Maar ook zonder kennis van deze waarde is het direct duidelijk dat allerlei enkelvoudig samenhangende dunwandige doorsneden een wringstijfheid hebben die alleen afhangt van de breedte van de doorsnede en de totale lengte van het profiel, zie fig. 2a1.

Bij meervoudig samenhangende doorsneden wordt ter plaatse van het open gedeelte een vlakke gewichtsloze plaat in het vlies aangebracht, die dus niet bol gaat staan, maar wel met het omringende vlies mee omhoog gaat, zie fig. 2a2.

Het volume onder het vlies neemt hierdoor sterk toe. Het is dan ook direct duidelijk dat bij vierkante en cirkelvormige dikwandige doorsneden een kokervorm maar weinig minder effectief is dan de doorsnede in fig. 2b1 met 2b2.

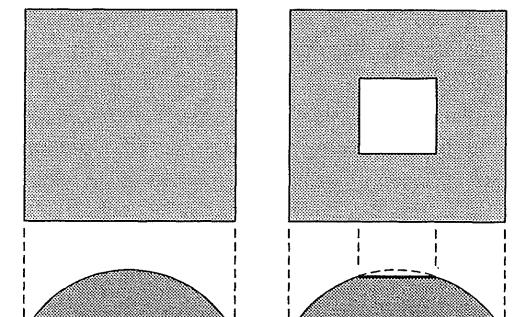
De analogie vereist ook dat deze gewichtsloze gedeelten zich slechts horizontaal omhoog kunnen verplaatsen en niet mogen roteren. De grootte van de schuifspanningen moet dan weer omgekeerd evenredig zijn met de plaatselijke wanddikte van de koker, zie fig. 2c.

Bij een symmetrische dubbele koker blijkt de verticale 'tussenstijl' hoegenaamd niet mee te doen aan het krachtenspel, zie fig. 2d. Voor de berekening van de schuifspanningen en de wringstijfheid kan de invloed van deze stijl dus worden verwaarloosd.



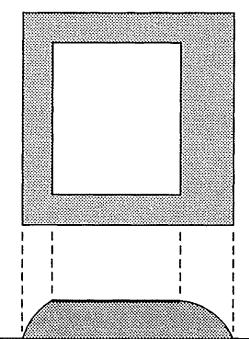
a1

2

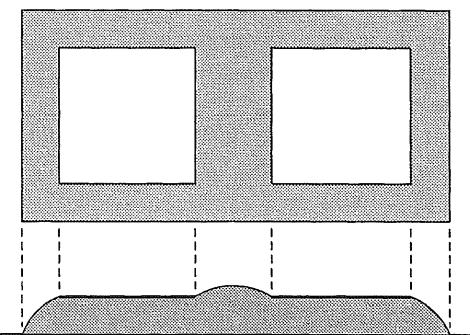


a2

2



c



d

Fig. 2 Vorm van het vlies bij de membraan-analogie

- a. Vergelijking van enkelvoudig en meervoudig samenhangende dunwandige doorsneden
- b. Vergelijking van een massieve vierkante doorsnede met een dikwandige vierkante koker
- c. Koker met ongelijke wanddikten
- d. Dubbele koker

## 20.8.1 DWARSKRACHTCENTRUM

Het dwarskracht-centrum speelt alleen een rol van enige betekenis bij dunwandige profielen waar de dwarskrachtvector niet samenvalt met de verticale symmetrielinie.

Bij de bepaling van de dwarskrachten en buigende momenten in een ligger, hebben we eigenlijk min of meer vanzelfsprekend aangenomen, dat de dwarskracht in een normale doorsnede door het zwaartepunt van de doorsnede zal gaan. Dit is in fig. 1a weergegeven voor een U-vormige doorsnede met een verticale symmetrie-as.

We draaien het profiel een kwart slag en nemen aan dat de dwarskracht weer door het zwaartepunt van de doorsnede aangrijpt. Er treden nu complicaties op, omdat de symmetrie-as geen verticale stand heeft maar een horizontale.

Om de consequenties hiervan te doorzien, roepen we de schuifspanningsverdeling in herinnering, zoals die door de dwarskracht ontstaat [482-483]. De geschematiseerde spanningsverdeling is weergegeven in fig. 2a. De daaruit volgende schuifkrachten zijn weergegeven in fig. 2b.

We zien direct dat deze drie schuifkrachten ten opzichte van het zwaartepunt O een linksdraaiend moment leveren. De (verticale) resultante van deze drie krachten gaat dan niet door het zwaartepunt O, of door het lijf, maar ligt links van het lijf, zie KW-0 [014]. Dit punt P – op de horizontale zwaartelijn gelegen – wordt aangeduid als: *dwarskrachtcentrum*

Alleen als de werklijn van  $q_z$  door dit dwarskracht-centrum gaat, zal de elementair berekende spanningsverdeling optreden; dat wil zeggen:

- de normaalspanningen ten gevolge van  $M$  voldoen aan formule [427-(28)],
- de schuifspanningen ten gevolge van  $V$  voldoen aan formule [480-11] voor wat het lijf betreft, en verlopen driehoekig in de flenzen volgens [483].

Als de werklijn van de dwarskracht een excentriciteit  $e$  bezit ten opzichte van de verticaal door P, moeten we V eerst naar P verplaatsen. Hierdoor ontstaat dan een wringend moment ter grootte:  $M_t = V * e$

In fig. 2 is de ligging van het dwarskrachtcentrum berekend voor het profiel van fig. [483-3b]. Hierbij is niet het daar berekende preciese spanningsverloop in het lijf en de flenzen aangehouden, maar is uitgegaan van de gemiddelde verticale schuifspanning in het lijf, zoals die ook is weergegeven in fig. [484-1c].

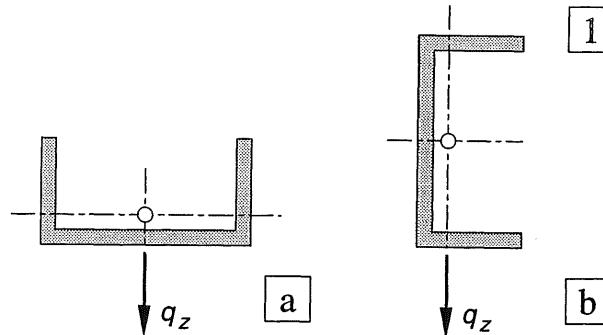


Fig. 1 Dwarskracht door het zwaartepunt

- a. De dwarskrachtvector valt samen met de verticale symmetrielijn
- b. Er is géén verticale symmetrielijn

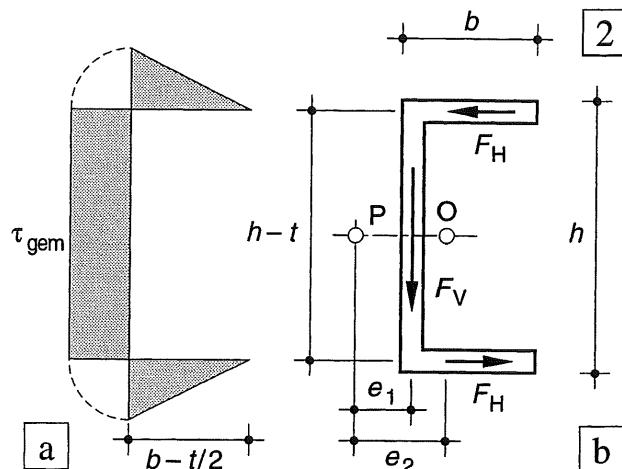


Fig. 2 Ligging van het dwarskracht-centrum

- a. Schuifspanningsverdeling ten gevolge van de dwarskracht (geschematiseerd)
- b. Schuifkrachten in lijf en flenzen  
Ligging van het dwarskrachtcentrum (punt P)

Dwarskrachtcentrum; vereenvoudigde berekening

Afmetingen doorsnede

$$h = 600 \text{ mm}; b = 300 \text{ mm}; t = 40 \text{ mm}$$

Dwarskracht  $V = 20000 \text{ N}$

$$\begin{aligned} \text{Lijf: } \tau_{\text{gem}} &= V / \{ t * (h - t) \} = \\ &= 20000 / \{ 40 * (600 - 40) \} = 0,89 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Horizontale schuifkracht per flens:

$$\begin{aligned} F_H &= 1/2 \tau_{\text{gem}} * t * (b - t/2) = \\ &= 1/2 * 0,89 * 40 * 280 = 4984 \text{ N} \end{aligned}$$

Uit fig. 2a, b volgt overigens direct dat  $F_H$  vrijwel gelijk moet zijn aan  $1/4 F_V$ , dus 5000 N.

De excentriciteit  $e_1$  ten opzichte van het lijf volgt uit:

$$F_V * e_1 = F_H * (h - t)$$

$$e_1 = \frac{F_H}{F_V} * (h - t) = \frac{5000}{20000} * 560 = 140 \text{ mm}$$

## 20.8.2 VERVORMING DOOR BUIGING DWARSKRACHT EN WRINGING

In de voorgaande paragrafen is gebleken dat bij dunwandige profielen enige voorzichtigheid is geboden voor wat betreft de vervormingen. In fig. 3 is een aantal van dergelijke profielen weergegeven.

### *Wringing*

Alle enkelvoudig samenhangende doorsneden zijn wringslap (fig. 3a-d). Alleen meervoudig samenhangende doorsneden zijn wringstijf (kokerprofiel van fig. 3e).

Bij een vrije uitkraging moeten we met wringslappeliggers voorzichtig zijn, bij relatief kleine wringende momenten kunnen zeer grote verdraaiingen optreden.

Als dergelijke profielen echter op regelmatige afstanden worden ondersteund, dan komt een geringe wringstijfheid meermalen goed van pas. Het profiel kan zich dan gemakkelijk aanpassen aan vervormingen die andere onderdelen ondergaan, zie fig. 4.

### *Zuivere buiging*

Alle getekende profielen zijn buigstijf om de y-as. Als we liggers van deze vorm als uitkragende ligger willen toepassen, moeten we zeer voorzichtig zijn met de verticale strip van fig. 3a. Bij de minste of geringste zijdelingse belasting kunnen grote verplaatsingen optreden. Alle andere doorsneden gevormen hebben voldoende zijdelingse stijfheid. Bij een momentvector, die evenwijdig is aan de (horizontale) y-as, zullen de liggers a. - d. - e. zuiver verticaal verplaatsen. De vormen b. en c. zullen dubbele buiging ondergaan en daardoor ook zijdellings verplaatsen [460]. Als we doorsnede c. echter over  $45^\circ$  roteren, dan zullen ook hier alleen maar verticale verplaatsingen langs de symmetrie-as optreden.

### *Buiging met dwarskracht*

In fig. 3 is voor elke doorsnede aangegeven in welke richting de schuifspanningen in lijf en flenzen verlopen bij een neerwaarts gerichte dwarskracht.

In het lijf staat de richting van de schuifspanningen dan zonder meer vast. Verder weten we dat de schuifspanningen bij dwarskracht elkaar 'nalopen'.

Dit betekent dat de schuifspanningen op doorsnede b. een zijdelingse kracht naar rechts uitoefenen, zodat deze doorsnede niet zal roteren maar wel zijdellings verplaatsen.

De doorsneden c. en d. zullen ten gevolge van de schuifspanningen wèl willen roteren. Het dwarskrachtcentrum valt dan ook niet samen met het zwaartepunt.

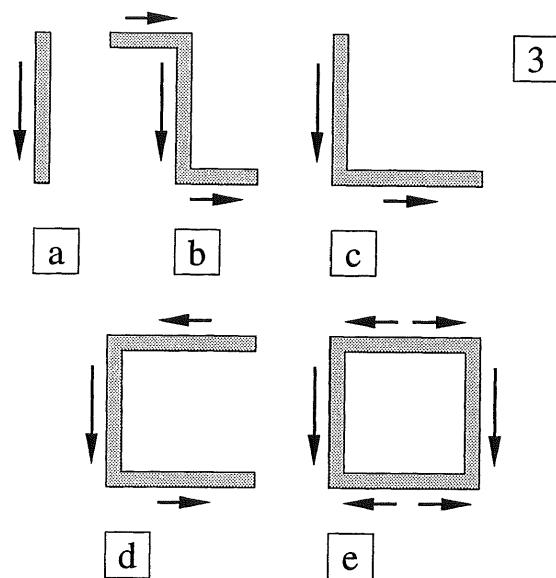


Fig. 3 Dunwandige profielen zoals die in aluminium worden uitgevoerd  
De pijltjes naast de doorsneden geven de richting aan van de schuifspanningen, die ontstaan ten gevolge van een (neerwaarts gerichte) dwarskracht

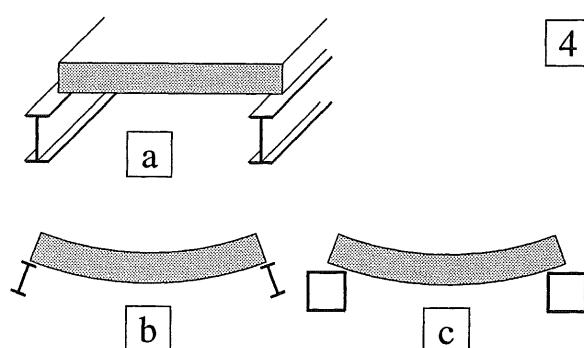


Fig. 4 Invloed wringstijfheid

- Relatief stijve balk, rustend op lange dunwandige liggers
- Bij wringslappel profielen wordt de stijve balk ter plaatse van het lijf van de I-profielen ondersteund en de wringende momenten in de I-ligger blijven laag
- Bij wringstijve profielen rust de stijve balk op de randen van de profielen en de wringende momenten kunnen vrij groot worden

## 20.9 VERVERMING ELEMENTJE DOOR SCHUIFSPANNINGEN

We beschouwen een vierkant elementje onder  $45^\circ$  met de horizontale as, waarop in de ene richting trekspanningen  $\sigma$  werken en in de andere richting even grote drukspanningen  $\sigma$ , zoals is weergegeven in fig. 1a. We tekenen in dit elementje een kleiner vierkant elementje met de zijden evenwijdig aan de  $x$ - en  $z$ -as. In [413] is afgeleid dat op de zijden van dit elementje alleen maar schuifspanningen werken, eveneens ter grootte  $\sigma$ .

In [414] is vermeld dat onder invloed van trekspanningen het elementje wat langer wordt en tegelijkertijd door de invloed van de contractie-coëficiënt ook wat smaller. De trekspanning in  $u$ -richting veroorzaakt in de  $u$ - en  $v$ -richting de volgende rekken:

$$\varepsilon_u = +\sigma/E \quad \varepsilon_v = -v*\sigma/E$$

Ten gevolge van de drukspanning in  $v$ -richting ontstaan de rekken:

$$\varepsilon_v = -\sigma/E \quad \varepsilon_u = +v*\sigma/E$$

Als we nu de rekken in dezelfde richting bij elkaar optellen, dan vinden we:

$$\varepsilon_u = -\varepsilon_v = (1+v)*\sigma/E \quad (35)$$

Het buitenste vierkante elementje neemt een rechthoekige vorm aan, zie fig. 1b. Het daarbinnen liggende vierkante elementje neemt echter een ruitvorm aan; de oorspronkelijk rechte hoeken zijn niet langer recht. De vergroting of verkleining van de rechte hoek blijkt evenredig te zijn met de grootte van de schuifspanning. Dit is aan te tonen door de verplaatsingen van de punten P en Q te bepalen ten opzichte van punt O dat niet verplaatst.

Als absolute verplaatsingen voor P en Q vinden we met behulp van formule (35):

$$\Delta u = \Delta v = \varepsilon * \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \frac{(1+v)}{E} \sigma \quad (36)$$

De horizontale en verticale componenten van deze verplaatsing bedragen:  $\Delta x = \Delta y = 1/2 \Delta u \sqrt{2}$ . We beschouwen vervolgens het lijnstuk P-Q. Punt P verplaatst een afstandje  $\Delta y$  omhoog en punt Q een afstandje  $\Delta y$  omlaag. De hoekverdraaiing van dit lijnstuk bedraagt dus:

$$\Delta\psi = \frac{2\Delta y}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{\Delta u\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{2\Delta u}{a} = \frac{(1+v)\sigma}{E} \quad (37)$$

Het verticale lijnstuk PR ondergaat een even grote rotatie. De verkleining van de rechte hoek RPQ bedraagt dus:

$$\gamma = 2\Delta\psi = \frac{2(1+v)}{E} \sigma \quad (38)$$

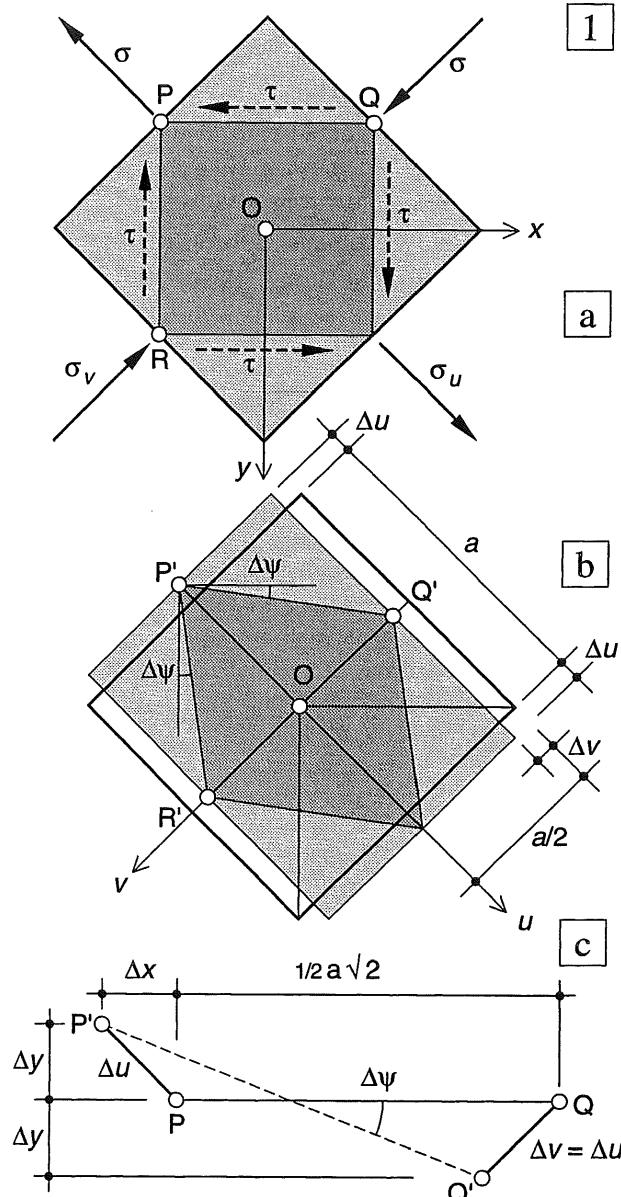


Fig. 2 Verband tussen schuifspanning en vergroting of verkleining van een rechte hoek

- Even grote trek en drukspanningen in de  $u$ - en  $v$ -richting leveren in de  $x$ - en  $y$ -richting alleen maar schuifspanningen
- Vervormingen t.g.v. van deze spanningen
- Verplaatsing en rotatie van het lijnstuk P-Q.

We definiëren nu als glijdingsmodulus  $G$ :

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \quad (39)$$

Bedenken we verder dat de schuifspanning  $\tau$  even groot is als de normaalspanning  $\sigma$ , dan kunnen we (38) met behulp van (39) achtereenvolgens schrijven als:

$$\tau = \frac{E}{2(1+v)} \gamma = G \gamma \quad (40)$$

## INLEIDING

De trefwoordenlijst van April 1999 heeft betrekking op de volgende delen:

- 0 BASISKENNIS
- 2 LIGGERS
- 3 VAKWERKEN , STANDZEKERHEID
- 4 SPANNINGEN
- 5 VERVORMINGEN

Deel 1 is in bewerking en (nog) niet verkrijgbaar in de bouwshop. Het omvat enkele elementaire mechanica-modellen, waarbij de hoofdkrachtsafdracht voornamelijk plaats vindt via normaalkrachten. Hierbij zijn twee hoofdbestanddelen te onderscheiden:

- 1 De grafische constructie met poolfiguur en stangeneelhoek, voor koorden, bogen, koepercels en gewelven .
- 2 De Stapelsteen-mechanica voor metselwerk

De combinatie van 1 en 2 geeft een goed inzicht in de hoofdkrachtswerking van historische gemetselde of gestapelde gebouwen zoals kathedralen of tempels uit de oudheid. Met behulp van 1 is eveneens inzicht te verkrijgen in enkele moderne constructievormen, zoals kabelconstructies.

In de andere dictaten wordt incidenteel verwezen naar deel 1. Studenten kunnen bij de leerstoel Krachtswerking die onderdelen verkrijgen waarvan ze gebruik willen of moeten maken.

Hetzelfde geldt voor de onderstaande delen, waarvan de opzet momenteel wordt gewijzigd :

- 6 Portalen en Raamwerken
- 7 Spanningsleer

Zoals vermeld heeft de voorliggende trefwoordenlijst uitsluitend betrekking op de volgende delen: 0 - 2 - 3 - 4 - 5.

Ze wordt in principe aan alle nieuwe drukken van de dictaten toegevoegd en zonodig aangevuld en uitgebreid.

## TOELICHTING TREFWOORDENLIJST

Het eerste cijfer van elke pagina waarnaar wordt verwezen geeft het betreffende deel aan. In deel 5 liggen de pagina's dan tussen 500 en 599. Een cursieve nummering – bijv. 504 – heeft betrekking op het voorwerk aan het begin van deel 5, terwijl een notatie als A-504 betrekking heeft op de appendix aan het eind van dat deel.

Voor een goed overzicht zijn de bladzijde-nummers die op hetzelfde deel betrekking hebben, zoveel mogelijk onder elkaar geplaatst.

De hoofdtrefwoorden beginnen steeds met een hoofdletter en zijn alfabetisch geordend. Bij diverse hoofdtrefwoorden is gebruik gemaakt van een onderverdeling, beginnend met een streepje en dan de omschrijving beginnend met een kleine letter in een kleiner lettertype, bijv.

Actie = Reactie

- voor uitwendige krachten
- voor inwendige krachten

Bij deze onderverdeling is meestal een systematische opbouw gebruikt en geen alfabetische. Kijk dus even wat er staat.

Bij sommige uitgebreide opsommingen is het hoofdtrefwoord weergegeven in hoofdletters, de primaire onderverdeling met 1, 2, 3 .... De secundaire onderverdeling wordt dan aangegeven met één streepje en de tertiare met twee streepjes.

## BEREKENING LIGGERS

- 1 Vrij opgelegde ligger
- belasting één puntlast
- belasting meer puntlasten
- idem grafisch

Als hetzelfde hoofdtrefwoord meer dan eens wordt genoemd, omdat er in de onderverdeling andere aspecten worden behandeld, dan wordt dat met romeinse cijfers aangegeven

## VERVORMINGEN I

.....

## VERVORMINGEN II

.....

Actie = Reactie	031		Cremona (Vakwerken)	340
- voor uitwendige krachten	213		- werkwijze algemeen	340-341
- voor snedekrachten	221		- uitgewerkt voorbeeld	342-345
Assenkruis (rechtsdraaiend)	009			
- bij liggers	216	428		
Basis-belastinggevallen	244		De St. Venant	486
BASIS-LIGGERS	508-511		Deuvels	485
Diagrammen voor $M, V, \varphi, w$	512-519		Diagrammen snedekrachten ( $V - M$ )	
- Liggers op twee steunpunten, $q$ -last	512-513		1 Liggers	
- Eénzijdig ingeklemde liggers, resp.			- belasting door puntlasten	228-235
belast door $K, F, q$ (vergeet-me-nietjes)	514-515		- - - $N-V-M$ bij pendelstijlen	213
- Liggers op twee steunpunten,			- belasting door $q$ -last	238-240
belast door randmomenten	518-519		- belasting lineair variërend	241
Beddingsmodulus	056		- belasting: puntlasten + $q$ -last	242-253
Belasting I			Differentiaal-rekening	
- permanent (eigen gewicht)	074-075		- grondbeginselen	255
- veranderlijk (personen,			- differentiëren	256-257
meubilair, sneeuw)	076-077		Dimensies (omschrijving)	011
- wind	078-079		Dimensioneren:	
- bijzondere belastingen	080		- op normaalkracht (voorbeelden)	415
- opgelegde vervormingen	082		- op buiging (voorbeeld)	427
- invloed temperatuur	097		Doorbuiging liggers	509
Belasting II (nomenclatuur)			Doorgaande ligger	530-534
- bezwijk- belasting			[ zie ook: LIGGER ]	
= breukbelasting	071		- principe van de berekening	530-531
- rekenwaarde v.d. belasting	071		- berekening bij een $q$ -last	532-533
- representatieve belasting			- - gelijke overspanningen	534-535
= extreme belasting	076		- - invloed randvelden	536-539
- momentane belasting			- - afwisselend belaste velden	537
= gemiddelde belasting	076		- - vuistregel doorgaande ligger	539
Belasting-afdracht (systematiek)	213		DOORSNEDE-GROOTHEDEN	
- afvoer windkrachten via stijve schijven	368-370		1 Analytische afleiding algemeen:	
- - voorbeeld analytisch	371		- oppervlakte $A$	428
- - voorbeeld numeriek	372		- lineair oppervlakte-moment $S$	429
- afvoer verticale en horizontale krachten	373		- kwadratisch oppervlakte-moment $I$ :	
Belasting op liggers			- - berekening via integraalrekening	430-436
- symmetrisch en keersymmetrisch	376-377		- - berekening via het spanningsverloop	443-447
Bollenmodel	405		- oppervlakte-product $I$	430
Buigend moment	218		- weerstandsmoment $W$	421; 427
Buigspanning	426		- zwaartepunt	429
Buigsterkte (hout)	427		2 Gebruik van tabellen	442
Buigstijfheid	425		Driehoekige vakwerken	352
Centrische druk of trek	416		DRIE-SCHARNIERSPANT	387
[ zie ook: SPANNINGSVERDELING ]			- definitie	203
Cirkel van Mohr	441		- vergelijking met twee-scharnierspant	380
Constructiedelen:			- bepaling snedekrachten:	
- blok- en lijnvormig, vlak	084-085		- - $N$ en $V$	388
Constructieve vormgeving			- - $M$ bij een regel onder een helling	389
- omschrijving vakgebied	017		- - $M$ bij een verticale $q$ -last	390-393
Contractie-coëfficiënt			- - - $M$ bij een asymmetrische $q$ -last	394-395
- definitie	095-096	414	- - $M$ bij een horizontale puntlast	397
- numerieke waarden	096		- $R$ en $M$ bij willekeurige belastingen	398-399
			Druk; drukkracht	309 416-417

Druklijn	396	468-471		Hoofdassen	425
– definitie		468		Horizontale belasting	
– toepassing bij driescharnierspannen	395-396			– op portalen	383
– toepassing bij kolommen		468-471		– op een driescharnierspant	397
Drukpunt		469			
Dubbele buiging		460-463			
Dwarscontractie	095	414; 422			
Dwarscontractie-coëfficiënt =					
= contractie-coëfficiënt	095	414			
– numerieke waarden	096				
Dwarskracht		218			
Dwarskrachtcentrum		498			
Dwarskrachtenlijn		228-235			
[ zie ook: Diagrammen snedekrachten (Liggers) ]					
Eenheden (omschrijving)	011				
Eenzijdig ingeklemde ligger		207; 270	514		
Eigen gewicht	075				
Elasticitetsmodulus	094; 096	414			
– numerieke waarden	096				
Evenwicht					
– indifferent	037				
– labiel	037; 042-043				
– stabiel	037; 042-043; 052-053				
– overgang stabiel → labiel	066-067				
Evenwichtbeschouwingen liggers	217				
Evenwichtsvoorwaarden	026-029				
– in het platte vlak	034				
– in de ruimte	036				
Excentriciteit		471			
Excentrisch belaste doorsnede		470			
Excentrische druk of trek		417; 475			
[ zie ook: Buiging plus normaalkracht ]					
Excentrische dwarskracht					
[ zie: Wringing plus dwarskracht ]		498			
Flens		485			
Fundering	055				
– op staal	055				
– op palen	055				
– schematisering ondergrond	056-057				
Gaatvergelijkingen		533			
Gedeeltelijk meewerkende dsn		475			
Geknikte ligger:					
– L-vorm		542			
– T-vorm		543			
– spanningsverdeling in de knik		544-545			
Geometrische liggerstijfheid		549			
Geometrische stijfheidsverhouding		541			
Gereduceerd momentenvlak		573			
Glijdingsmodulus (afleiding)		499A			
Gravitatiwet	030				
Grond (eigenschappen)	057				
Hoofdassen					
Horizontale belasting					
– op portalen					
– op een driescharnierspant					
Incasseringsvermogen	081				
Ingeklemde ligger		209			
Inklemming		356			
– verend		207	356-357		
– volledig			207-209	356-357	
– invloed ligging oplegreacties	208				
Integraal-rekening:					
– grondbeginsele		258-259			
– bepaalde integraal		260			
– integreren					
(analytisch en grafisch)		261			
Inwendige hefboomsarm			420		
Kantelen	052				
Keersymmetrie [zie: Symmetrie]					
KERN					
1 Voor spanningsberekening					
– bij rechthoekige doorsnede			475-476		
– – volledig meewerkende dsn			476		
– – gedeeltelijk meewerkende dsn			477		
2 Onderdeel constructie					
= Stijve kern			365		
KNIK			416	582	
– omschrijving				582	
– invloed vervormingen				583	
– berekening volgens Euler				584-585	
– verklaring knikverschijnsel				586	
1 Basis-belastinggevallen					
– ongeschoorde portalen				590	
– geschoerde portalen				591	
2 Knik in onderling loodrechte richtingen				594	
3 Knik bij buiging + normaalkracht				596	
– buigbelasting sinusvormig				597-598	
Knikkracht				584	
Kniklengte				585; 587	
– schetsen van kniklijnen				589	
Knikspanning				592	
– algemene formulering				595	
– globale dimensionering (voorbeeld)				592-593	
– – bij $N + M$ (voorbeeld)				599	
Kolom				466	
Koord				300-301	
Koppel		004			
Krachten-methode					529

**KRACHT**

[zie ook: SAMENSTELLEN,

Verplaatsen, Ontbinden van krachten ]

- omschrijving 000-001
- definitie volgens Newton 032
- actie = reactie 031; 041
- evenwichtmakende kracht 010
- ontbondene van een kracht =
  - component van een kracht 007
  - resulterende kracht 010
  - tekenafspraken 012
- weergave:
  - grafisch 008;001
  - analytisch 001

**Krachten op liggers:**

- actie-krachten (uitwendige kr.) 207-209; 214
- reactiekrachten 214
- tekenafspraken 216
- verwisselen actie- en reactiekr. 214; 236
- inwendige krachten (spanningen) 209

Krachtendriehoek 007

Krachtenveelhoek 011

**Krachtswerking**

(omschrijving vakgebied) 016

Kromming 423 504-505

Kromtestraal 419; 423

**Kwadratisch oppervlaktemoment**

425; 428; 448

- van een driehoek 435

- van een rechthoek 432

- van een cirkelvormige dsn 436

- van een parallellogram 435

- van dunwandige profielen 449

**L-vormige ligger**

Labiel evenwicht 042

**LIGGER**

- definitie 202 301-302
- vrij opgelegd (rol + scharnier) 206 568
- vrij opgelegd met overstek 232; 273
- eenzijdig ingeklemd 207; 209; 225
- over meer steunpunten 535
- extra inwendige scharnieren 210; 212; 289-291
- zonder inwendige scharnieren 290-291
- ondersteund door pendelstijlen 210
- berekening oplegreacties 212-213
- instabiele varianten 211

**Lijf****Lijnvormige elementen:**

- koorden, liggers, staven 300-301
- Lijnspanningstoestand 410-411
- Linear oppervlakte-moment 424, 428; 479
- Linear variërende belasting 241
- Lineaire uitzettingscoëffic. 097

**MATERIAAL EIGENSCHAPPEN**

- 1 constructiemateriaal 094
- 2 ideaal materiaal (definitie) 095
- contractie-coëfficiënt 095-096
- elasticiteitsmodulus 095-096
- uitzettingscoëfficiënt 097
- Mechanica (definitie) 016

Meerbeukig portaal 382

Meewerkende doorsnede 477

Membraan-analogie 496

Methode Cross 548

Moment 004

- definitie statisch moment 004

- definitie buigend moment 218

- tekenafspraken 033

**MOMENTENLIJN LIGGER**

[zie ook: LIGGERS ]

**1 Basis-belastinggevallen:**

- vrij opgelegd ligger met 1 puntlast 244-246
- vrij opgelegd ligger met  $q$ -last 244-247
- uitkragende ligger met één puntlast 245
- uitkragende ligger met  $q$ -last 245

**2 Variërende belasting**

- Max. en minimum  $M$ -lijnen
- $q$ -last 286
- verplaatsbare puntlast 287
- 3 Visualisering van de vorm m.b.v. een koord 296-299
- Momentensom 527
- Momentenvlak-methode 574
- methode I (vrij opgelegde ligger) 568-572
- methode II (éénzijdig ingeklemde ligger) 574-575

Neutrale lijn 418

Newton 032

Normaalkracht 098 417

Normaalkracht + buigend moment 464

Normaalspanning 408; 426

Normale doorsnede 408; 411

Nulstaven (vakwerk) 338-339

**ONDERSTEUNINGEN**

[zie ook: OPLEGGINGEN ]

**1 Ondersteuningen I**

- continu 039
- lijnvormig 039
- puntvormig 039
- star 040
- verend 040; 055-068

**2 Ondersteuningen II**

- inklemming 207-209
- pendelstijl 210-211
- rol 206-208
- scharnier 206-208

<b>ONDERSTEUNINGEN</b>		
3 Ondersteuning rechthoekig blok (3D)		
– in één punt (koord)	040-041	
– in drie punten (star)	044-046	
– continu door de ondergrond		
– – alleen verticale belasting (e.g.)	059	
– – alleen horizontale belasting (wind)	060	
– – verticale + horizontale belasting	062-063	
– – gedeeltelijk meewerkend grondvlak	064-065	
<b>Ontbinden van krachten</b>		
1 In het platte vlak:		
– inleiding eenvoudige gevallen	022-023	
– langs drie gegeven werklijnen	024-025	
2 In de ruimte	035	
– Ontbondenen (van een kracht)	008	
<b>OPLEGGINGEN</b>	087	
1 Ideale opleggingen:		
rol, scharnier, volledige inklemming		
– ruimtelijk	088	
– in het platte vlak	089	
2 Realistische opleggingen		
– voorbeelden	090	
Oplegreacties ligger (berekening):		
– vrij opgelegde ligger	219	
– éénzijdig ingeklemde ligger	225	
Oppervlakte	428	
Oppervlakte-moment;	425; 439	
[ zie ook: Doorsnede grootheden ]		
Oppervlakte-produkt;	425	
[ zie ook: Doorsnede grootheden ]		
Optimaliseren ligger:		
– door verplaatsen v.d. opleggingen	288	
Overgangsmoment	533	
Paraboolvormige vakwerken	350	
Parallellogram v. krachten	007	
Pendelstijl	210	
Permanente belastingen	074	
Polonceauspant	315	
Poolfiguur	293	
<b>PORTAAL</b>		
1 omschrijving	202-203	540
– eenbeukig, meerbeukig	203	
– globale analyse	378-380	546-547
2 Berekening		
– onder een verticale $q$ -last		
– – vergelijking met doorgaande ligger	546-547	
– – berekening doorgaande liggers	548-549	
– twee-scharnierspant	550-551	
– onder een horizontale puntlast	359; 383	
– ligger op twee ingeklemde stijlen	552	
– volledig ingeklemd portaal	554-555	
– algemene formules portalen	555	
<b>Raamwerk (omschrijving)</b>	203	
– éénbeukig raamwerk =		
stapeling van portalen		
– – verticale belasting	381	
– – horizontale belasting	383-385	
<b>Randvoorwaarden</b>	091	259; 270
– invloed op verplaatsingen ligger	237	
<b>Rechthoekige staafwerken</b>	312	
<b>Regel (constructiedeel; definitie)</b>	202	540
<b>Regel van Steiner</b>	430-433	
<b>Rek</b>	414; 423	557
<b>Rekstijfheid</b>	414	557
<b>Relatie buigend moment - vervorming</b>		
( $M - \kappa$ ) diagram		502
<b>Relatie vervorming en belasting (<math>\varphi, w - q</math>)</b>		506-507
<b>Resultante</b>	008	
– van twee krachten	010	
<b>Rol, Roloplegging</b>	088	
<b>SAMENSTELLEN VAN:</b>		
<b>1 Krachten</b>		
– Twee krachten door één punt:		
– – analytische oplossing	008	
– – krachtendriehoek (grafisch)	007	
– – parallellogram van krachten	007	
– Meer krachten door één punt:		
– – krachtenveelhoek (grafisch)	011	
– Krachten niet door één punt:		
– – inleidende beschouwingen	013	
– – analytische opl. (bewerkelijk)	017-019	
– – grafische oplossing	016	
– Krachten zijn evenwijdig:		
– – analytische oplossing	020-021	
<b>2 Kracht + koppel</b>	015	
<b>3 Momenten</b>	033	
<b>Scharnier</b>	088	
<b>Schematiseren, Inleiding</b>	068-069	
<b>Schematiseren van:</b>		
– de constructie	083	
– constructie-onderdelen	086	
– materiaal-eigenschappen	094-095	
– opleggingen	087; 091-093	
<b>Schijven</b>	368; 371-373	
<b>Schoren</b>	367	
<b>Schuifspanning algemeen</b>		408; 411
<b>Schuifspanningsverloop</b>		
– ten gevolge van dwarskracht	480-485	
– ten gevolge van wringing	487-494	
<b>Snedekrachten (definitie)</b>	218	
– Buigend moment $M$	218	
– Dwarskracht $V$	218	
– Normaalkracht $N$	218	
– Tekenafspraken $N, V, M$	224-225	
– Tekenen v. diagram. $N, V, M$	226-235	

Sneeuwbelasting	077		
Soortelijke massa van lucht	401		
<b>SPANNING I</b>			
1 Algemeen	401; 406		
- in gassen en vloeistoffen	401		
- in vaste stoffen	402-403		
- in steenachtige materialen	404-407		
2 In een ideaal materiaal			
- definitie	406		
- notatie	408-409		
- teken (2D)	408		
- teken (3D)	409		
<b>SPANNING II (naamgeving)</b>			
1 Buigspanning =			
= lineair verlopende normaalspanning	426; 465		
- formules	426-427		
2 Normaalspanning (constante spanning)	408; 426; 465		
3 Resulterende spanning	408		
4 Schuifspanning t.g.v. dwarskracht bij:	408; 456		
- een rechthoekige dsn	481		
- een samengestelde rechthoekige dsn	478-480		
- dunwandige profielen	482-483		
- - vereenvoudigde berekening	484		
5 Schuifspanning t.g.v. wringing	487-493		
6 Belang horizontale schuifsp. bij buiging	485		
Spannings-rek-diagram	414		
Spanningscombinaties [zie: SPANNINGSVERDELING II ]			
<b>SPANNINGSVERDELING I</b>			
1 Bij één basisbelastinggeval			
- t.g.v. Buigende momenten	418-426		
- t.g.v. Dwarskrachten	478-484		
- t.g.v. Normaalkrachten	094	416-417	
- t.g.v. Wringende momenten	486-497		
- - bij kokerprofielen	494-497		
<b>SPANNINGSVERDELING II</b>			
2 Spanningscombinaties	452		
- teken van de veerkrachtsgevallen	453		
3 Combinaties van veerkrachtsgevallen	454-455		
- buiging + dwarskracht	456		
- - buiging om de y-as of de z-as	458-459		
- - dubbele buiging	460-463		
- buiging + normaalkracht	464-467		
- - invoering druklijn	468-469		
- - excentrisch belaste rechth. dsn.	470-471		
- - dubbele buiging + normaalkracht	474		
Spant			
- omschrijving	203	308	
- twee-scharnierspant	203		
- drie-scharnierspant	203	407	
Staaf (definitie)	202	300-301	
Staafwerk		300-313	
- driehoekig stramien	302		
- rechthoekig stramien	303		
- - buigvaste verbinding staven	304		
Stabiel evenwicht		042	
Stabiliteit		037; 070	354
Stabiliteit (constructie-eis)		073	
- 1e orde stabiliteit; [ zie: Standzekerheid ]			
- 2e orde stabiliteit; [ zie: Knik ]			
Standzekerheid (omschrijving)		354-355	
Stangenveelhoek		293	
Stapelbouw 3D			
- verschillende wijzen van stapelen		360-361	
- standzekerheid		362-363	
- - opbouw uit lijnvormige elementen		364-366	
- - opbouw uit vlakke elementen		368-369	
Stapeling van portalen		381	
Statisch bepaald hoofdsysteem			530
Statisch bepaalde constructie			
- omschrijving		204	528
- berekening statisch bepaalde ligger			502
Statisch bepaalde staafwerken			
en vakwerken		308	
Statisch moment			
(= lineair oppervlakte-moment)			428
Statisch onbepaalde constructies			
- omschrijving		204	529
- berekening statisch onbep. ligger		205	503
Steenachtige materialen ?			404
Sterkte (constructie-eis)		071	
Stijfheid (constructie-eis)		072	
- Cross-stijfheid (= liggerstijfheid)			541
- Staaf-stijfheid			541
Stijl (constructie-onderdeel;			
- definitie		202	540
Stijve kern			365
Stroomlijnen-analogie			487
Structuur-Mechanica			404-407
Stuik			557
Stuwdruk (wind)		078	
- numerieke waarden		079	
Stijgende diagonalen			327
<b>SUPERPONEREN VAN</b>			
<b>MOMENTENLIJNEN LIGGERS</b>		215-239	
Overzicht methoden I, II, III		278	
<b>I Splitsen van de belasting</b>			
- momenten van gelijk teken		279	
- momenten van ongelijk teken		280	
- voorbeelden		281	
<b>II Splitsen van de ligger in moten</b>		282	
- combinatie van I en II		283	
<b>III Verplaatsen v. d. opleggingen</b>		284	
- combinatie van II en III		285	
Symbolen			
- omschrijving		010	
- lijst van symbolen		012	
Symmetrie en Keersymmetrie			
- belasting op koorden		297	
- belasting op liggers		296-297	560

Tekenafspraken vervormingen:			
- helling	505		
- kromming	505		
- zakkig	505		
Teken van snedekrachten	224		
- tekenafspraken	431		
Temperatuur	097		
Tensor	408		
Traagheidsmoment	428		
[ zie: Kwadratisch oppervlakte-moment ]			
Trek, trekkracht (vakwerk)	309		
Twee-scharnierspant	378	540; 550	
Uitzettings-coëfficiënt	097		
Vakwerken (omschrijving)	203	314	
- vakwerkvormen	315		
- schematisering	316		
Vakwerklijger	203	314	
Vakwerkspant	203	315	
Vallende diagonalen		327	
Variërende buigstijfheid		573	
Vector			
- kracht-vector	008 001		
- moment-vector	033		
Veerkrachtsgevallen		452-455	
Veerstijfheid	064		
Veranderlijke belastingen	074		
- op vloeren	076		
Verende inklemming	207		
Veren-model			
- voor een buigend moment op een staaf	099		
- voor een normaalkracht op een staaf	098		
- voor de ondergrond	056-057		
- - gedeeltelijk meewerkend grondvlak	065		
Vergeet-me-nietjes		517; 576	
- toepassingen	520-521		
- controle basis-belastinggevallen	524-525		
Verplaatsen van een kracht			
- langs de werklijn	001		
- buiten de werklijn	014		
Verplaatsingsmethode		529	
Versterkte balken		564	
Verstijvingskruis	367		
Verticale schijven	368		
VERVORMINGEN I			
1 Principe			
- bij een lijnspanningstoestand	414		
- bij zuivere buiging	418		
- bij wringing + dwarskracht	499		
- bij zuivere afschuiving			
- - bepaling glijdingsmodulus	A-400		

2 Oorzaak vervormingen bij liggers			
- door buigende momenten	565		
- door normaalkracht	558		
- door schuifspanningen	A-400		
3 Constructie-type			
- vrij opgelegde ligger	233		
- - invloed randvoorwaarden	237		
VERVORMINGEN II : Rekenmethodiek bij:			
1 Normaalkrachten	556-564		
- bij twee geschoorde staven	558-559		
- bij een symmetrisch belast koord	561		
- bij vakwerken (Williot)	563		
- bij een versterkte balk	564		
2 Buigende momenten analytisch			
- benodigde differentiaalvergelijking	565		
- splitsen van de diffentiaalvergelijking	566-567		
3 Buigende momenten grafisch:			
Momentenvlak-methode I ,			
- voor vrij opgelegde liggers	558-569		
- - belast door een puntlast	570-571		
- - belast door een $q$ -last	572		
4 Buigende momenten grafisch:			
Momentenvlak-methode II ,			
- voor éénzijdig ingeklemde liggers	574-578		
- - recapitulatie vergeet-me-nietjes	576-577		
- - algemene toepassing	578		
- - willekeurig gekromde ligger	579		
- volledig ingeklemd portaal	580		
- drie-scharnierspant	581		
Verwelving	486		
Vlak staafwerk	308		
Vlakke spanningstoestand	412-413		
Vlakke doorsneden blijven vlak	418		
Volledig ingeklemd portaal	554		
Volledige inklemming	088-089	209	
Volumegewicht	075		
Voorschriften:			
- inleiding	070		
- overzicht TGB 1990	070		
Vormvastheid staafwerken	305-307		
- driehoekig stramien	310-311		
- rechthoekig stramien	312-313		
Vrij opgelegde ligger	206; 270		
Waterdruk	402		
Weerstandsmoment	421; 427-428		
Werklijn	007		
Wet van Hooke	009	414	557
Wetten van Newton:			
1 Gravitatiewet	030		
2 Bewegingswetten	031		
- wet van de traagheid	031		
- kracht = massa $\times$ versnelling	031		
- actie = reactie	031		
3 Relatie kracht - massa	032		

T-08

W - (X - Y) - Z

Williot diagram	562-563
Windbelasting	078
- winddruk	079
- windzuiging	079
- windvormfactoren	079
Wrijving	047
- bij een horizontaal contactvlak	047
- bij een hellend contactvlak	048
- wrijvingscoëfficiënt	047
Wringing plus dwarskracht	498
<b>WRINGSTIJFHEID</b>	
1 Massieve profielen	
- rechthoekig profiel	488
- cirkelvormig profiel	492-493
2 Dunwandige profielen	
- enkelvoudig samenhangend	491
- meervoudig samenhangend	494-495
- - visualisatie via de membraan-analogie	496-497
Zeepvlies-analogie (wringing)	487
Zuiver buigend moment	424
Zuivere buiging	418
Zuivere druk of trek	416
Zuivere wringing	486
Zwaartelijn	429
Zwaartepunt (rechth. blok)	038      424; 429



012770-01