ספר אלגברה לינארית — דגם אוברליף

צוות הקורס

21 בספטמבר 2025

תוכן העניינים

פרק 1

מרחבים וקטוריים

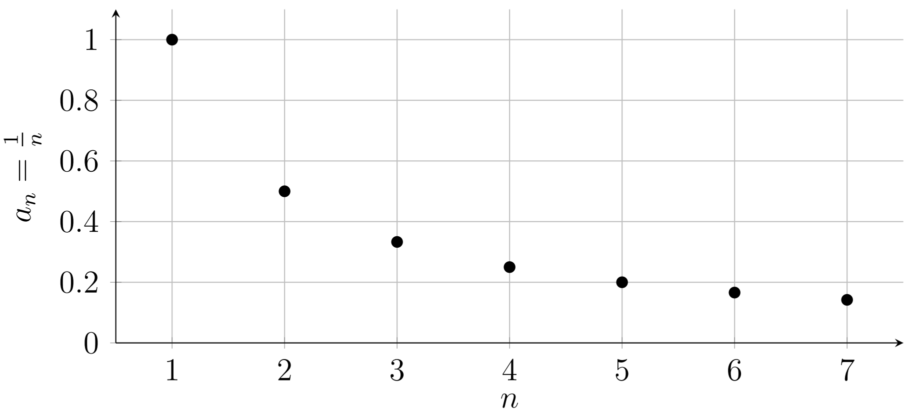
1.1 סדרות

יתכן מאוד וכבר שמעתם על סדרות חשבוניות, לדוגמא, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, וסדרות הנדסיות, לדוגמא, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. אלה הן שתי משפחות של סדרות של מספרים.

הגדרה 1.1. *סדרה של מספרים ממשיים* היא פונקציה f אשר תחום הגדרתה הוא קבוצת המספרים הטבעיים וטווחה הוא קבוצת המספרים הממשיים. נסכים לכתוב a_n במקום $f(n)$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) & \ldots \end{array}$$

כמו לכל פונקציה, גם לסדרה יש הצגה גרפית. לכל מספר סידורי n על ציר ה- x נתאים נקודה (n, a_n). לדוגמא, הסדרה שמתוארת באיור היא $a_n = \frac{1}{n}$.



נהוג לסמן סדרה ע"י $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, כש- a_{17} הוא האיבר ה- 17 שלה ו- a_{129} הוא האיבר ה-129 שלה. לעתים בכתיבת איברי הסדרה מוותרים על הסוגריים ורושמים פשוט $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

דוגמה 1.2. **1.** $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים טבעיים המופיעים לפי הסדר ה"טבעי" שלהם, כלומר,

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots .$$

2. $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים טבעיים אי-זוגיים, כלומר,

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots .$$

3. הסדרה $a_n = 1$ לכל n, כלומר

$$1, 1, 1, 1, 1, \ldots .$$

4. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים -1 ו- 1 המתחלפים, כלומר,

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

5. $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא הסדרה הבאה

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots .$$

קיימים אופנים שונים להגדרת סדרה. בכל אחת מהדוגמאות לעיל, סדרה הוגדרה ע"י נוסחא לחישוב איברה הכללי. זהו לא האופן היחיד. אחת השיטות הנפוצות להגדרת סדרה היא השיטה *רקורסיבית* - השיטה שמאפשרת חישוב של איברה הכללי של סדרה דרך האיברים הקודמים.

בשיטה זאת נחוצים *תנאיי התחלה.* לדוגמא, תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת ע"י $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ כאשר $a_1 = 1$ ו- $a_2 = 1$. (שימו לב כי סדרות רקורסיביות עם נוסחת נסיגה זהה שנבדלות בתנאיי התחילה הן סדרות שונות.) לא קשה להשתכנע כי איבריה הראשונים של הסדרה הם $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. קיימת גם נוסחא לחישוב של איברה הכללי של הסדרה הזאת

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

זאת סדרה "ידועונית" בתחום המתמטיקה, היא נקראת *סדרת פיבונצ'י*, על כינויו של מתמטיקאי איטלקי מימי הביניים- לאונרדו פיזנו.

משפט 1.3. *אם* $a > b$ *ו־* $b > c$*, אז* $a > c$.