ומשפטים הגדרות סיכום

להנדסה לינארית אלגברה

מאיר נדב ד״ר · שלח יונתן ד״ר

עניינים תוכן

פרק 0: ומספרים קבוצות	**2**
פרק 1: המרוכבים המספרים של ושימושים תכונות	**3**
פרק 2: ובמרחב במישור גיאומטריה	**4**
פרק 3: לינאריות משוואות מערכות	**6**
פרק 4: מטריצות	**9**
פרק 5: דטרמיננטה	**16**
פרק 6: וקטוריים מרחבים	**19**
פרק 7: תת-מרחבים	**22**

פרק 0: קבוצות ומספרים

הגדרה 0.2

הופעתם. לסדר חשיבות ללא מספרים) בהכרח (לא איברים של כלשהו אוסף היא קבוצה

הגדרה 0.5

עבור $z = x + yi$ עם מרוכב $x, y \in \mathbb{R}$ הממשי החלק את נגדיר $\mathrm{Re}(z) = x$ ואת המדומה החלק $\mathrm{Im}(z) = y$.
הצמוד המספר את נגדיר בנוסף, $\overline{z} = x - yi$.

הגדרה 0.8

B של איבר גם הוא A של איבר כל אם $A \subseteq B$ ונסמן Bב- מוכלת Aש- נאמר.
מתמטי: יותר קצת באופן $A \subseteq B$ לכל אם $a \in A$ מתקיים $a \in B$.
$A \nsubseteq B$ ונאמר Aש- לא מוכלת Bב-. אז נסמן $a \notin B$, עבורו $a \in A$ קיים כלומר הנכון, הוא ההיפך אם

הגדרה 0.11

אם $x \in A$ מתקיים כלומר האיברים, אותם בדיוק בהן יש אם $A = B$ ונסמן שוות הן A, B קבוצות ששתי נאמר אם ורק $x \in B$.

הגדרה 0.12

הכלה נקראת זו הוכחה דרך $B \subseteq A$. וגם $A \subseteq B$ כי להוכיח היא המקובלת הדרך, $A = B$ כי להוכיח כדי דו-צדדית.

טענה 0.14

מזו. זו שונות הקבוצות וכל $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

הגדרה 0.15

הבאות: הקבוצות את נגדיר A, B קבוצות שתי בהינתן
a. החיתוך $A \cap B$ הוא קבוצת כל האיברים שגם הן ב-A וגם ב-B. b. האיחוד $A \cup B$ הוא קבוצת כל האיברים הקבוצות משתי לאחת לפחות השייכים A, B.

טענה 0.19

מתקיים A, B קבוצות שתי לכל

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

1.4 טענה

מתקיים: לכל $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
a. חוקי החילוף לחיבור וכפל: $z_1+z_2 = z_2+z_1$ וגם $z_1z_2 = z_2z_1$. b. חוקי הקיבוץ לחיבור וכפל: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ וגם $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$. c. חוק הפילוג: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ d. ביחס נייטרלי 0 לחיבור: $z + 0 = z$ לכל $z \in \mathbb{C}$. e. ביחס נייטרלי 1 לכפל: $z \cdot 1 = z$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

1.6 טענה

מתקיים: לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ b. $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

1.7 טענה

מתקיים: לכל $z \in \mathbb{C}$
a. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ b. $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ c. $z\overline{z} \in \mathbb{R}$

1.12 הגדרה

נגדיר

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1.13 משפט

מתקיים לכל $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

.

1.14 טענה

מתקיים לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

.

1.18 טענה

שורשים n בדיוק יש $z^n = w$ למשוואה אז פולרית. בהצגה $w = re^{i\theta}$ כי ונניח ,0מ- השונה נתון מספר $w \in \mathbb{C}$ יהי ע״י הנתונים z בנעלם מרוכבים (פתרונות)

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}.$$

עבור $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

פרק 2: במרחב במישור גיאומטריה

2.1 הגדרה

כלומר ממשיות, קואורדינטות שתי בעלות הנקודות כל קבוצת הוא $\mathbb{R}^2$ המישור

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}.$$

2.3 הגדרה

וקטור $\vec{v} = (x,y)$ של איבר כלומר ממשיים, מספרים של סדור זוג הוא במישור $\mathbb{R}^2$.

2.12 טענה

$\|c \cdot (a,b)\| = |c| \cdot \|(a,b)\|$ וקטור לכל $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ סקלר ולכל $c \in \mathbb{R}$.

2.18 הגדרה

וקטורים עבור $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר $(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

2.20 טענה

מתקיים: אז וקטורים. $\vec{v_1} = (x_1,y_1),\ \vec{v_2} = (x_2,y_2),\ \vec{v_3} = (x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$ יהיו
1. $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \vec{v_2}\cdot\vec{v_1}$ 2. $(\vec{v_1}+\vec{v_3})\cdot\vec{v_2} = \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} + \vec{v_3}\cdot\vec{v_2}$ 3. $\vec{v_1}\cdot\vec{v_1} = \|\vec{v_1}\|^2$ 4. $\vec{v_1}\cdot(c\vec{v_2}) = c(\vec{v_1}\cdot\vec{v_2})$ לכל
סקלר $c \in \mathbb{R}$ 5. $\|\vec{v_1}\| = 0 \iff \vec{v_1} = (0,0)$ 6. $\|\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}\| = 1$ אם $\vec{v_1} \neq (0,0)$

2.21 טענה

מתקיים: אז ביניהם. הקטנה הזווית α ותהי, $(0,0)$מ- השונים $\mathbb{R}^2$ב- וקטורים שני $\vec{v},\vec{w}$ יהיו

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}.$$

#eq-cosine-scalar

2.22 מסקנה

וקטורים $\vec{v},\vec{w}$ השונים -מ $(0,0)$ אם ורק אם מאונכים/ניצבים הם $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. נסמן זה במקרה $\vec{v} \perp \vec{w}$.

2.26 הגדרה

לישר. נורמל נקרא וסיום) (התחלה ישר על נקודות לשתי שמתאים וקטור לכל המאונך וקטור

2.32 הגדרה

וקטורים שני $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ קיים אם קו-לינאריים נקראים $c \in \mathbb{R}$ כך -ש $\vec{v} = c\vec{w}$ או $\vec{w} = c\vec{v}$.

2.42 הגדרה

כלומר ממשיות, קואורדינטות שלוש בעלות הנקודות כל קבוצת הוא $\mathbb{R}^3$ המרחב

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

2.45 הגדרה

וקטור $\vec{v} = (x,y,z)$ איבר כלומר ממשיים, מספרים של סדורה שלשה הוא במרחב ב- $\mathbb{R}^3$.

2.53 טענה

$\|c \cdot (x,y,z)\| = |c| \cdot \|(x,y,z)\|$. וקטור לכל $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ סקלר ולכל $c \in \mathbb{R}$.

2.55 הגדרה

נגדיר $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2.b_3) \in \mathbb{R}^3$ וקטורים עבור

$$.(a_1,a_2,a_3) \cdot (b_1,b_2,b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

2.57 טענה

מתקיים: אז וקטורים. $\vec{v_1} = (x_1,y_1,z_!),\ \vec{v_2} = (x_2,y_2,z_2),\ \vec{v_3} = (x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ יהיו

א. $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \vec{v_2} \cdot \vec{v_1}$.

ב. $(\vec{v_1} + \vec{v_3}) \cdot \vec{v_2} = \vec{v_2} \cdot \vec{v_1}$.

ג. $\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} = \|\vec{v_1}\|^2$.

ד. $\vec{v_1} \cdot (c\vec{v_2}) = c(\vec{v_1} \cdot \vec{v_2})$.

ה. $\|\vec{v_1}\| = 0 \iff \vec{v_1} = (0,0)$.

ו. $\|\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}\| = 1$ אם $\vec{v_1} \neq (0,0)$.

2.58 טענה

מתקיים אז ביניהם. הקטנה הזווית α ותהי, $(0,0,0)$מ- השונים $\mathbb{R}^3$ב- וקטורים שני $\vec{v},\vec{w}$ יהיו

$$.\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

2.60 מסקנה

כי נניח $\vec{v},\vec{w}$ וקטורים שני $\mathbb{R}^3$ב- השונים $(0,0,0)$מ- אם ורק אם לזה זה מאונכים הם אז $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

פרק 3: לינאריות משוואות מערכות

3.1 הגדרה

מהצורה משוואה היא $x_1, x_{2,}..., x_n$ במשתנים לינארית משוואה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

#eq-linear-eq
אם חופשי. איבר או קבוע שנקרא נתון סקלר הוא bו- מקדמים, שנקראים נתונים סקלרים הם $a_1, ..., a_n$ כאשר ו/או מרוכב הוא אחד סקלר לפחות אם $\mathbb{R}$. מעל לינארית משוואה שזו נאמר ממשיים, והמשתנים הסקלרים כל $\mathbb{F}$ נכתוב, $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$ב- שמדובר לציין בלי להכליל נרצה אם $\mathbb{C}$. מעל לינארית משוואה שזו נאמר מרוכבים, המשתנים $\mathbb{C}$. או $\mathbb{R}$ או היא זו שקבוצה ונזכור

3.3 הגדרה

מעל -יותn-ה מרחב את נגדיר n. באורך וקטור או -יה,n נקראת $(c_1, c_2, ..., c_n)$ סקלרים סדרת $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \{(c_1, c_2, ..., c_n)|c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}\}.$$

מעל -יותn-ה מרחב את וגם $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, ..., c_n)|c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}\}.$$

$\mathbb{C}^n$ל- או $\mathbb{R}^n$ל- היא הכוונה אם לפרט במקום $\mathbb{F}^n$ נכתוב לעיתים.

3.4 הגדרה

שבהצבת כך $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{F}^n$ -יהn הינו לינארית משוואה של פתרון

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n.$$

מתקיימת. המשוואה

3.9 הגדרה

לינאריות משוואות של (m) כלשהו מספר של אוסף היא $x_1, x_{2,}..., x_n$ במשתנים (ממ"ל) לינאריות משוואות מערכת מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

#eq-linear-eqs
אם חופשי. איבר או קבוע שנקרא נתון סקלר הוא bו- מקדמים, שנקראים נתונים סקלרים הם $a_1, ..., a_n$ כאשר ו/או מרוכב הוא אחד סקלר לפחות אם $\mathbb{R}$. מעל לינארית משוואה שזו נאמר ממשיים, והמשתנים הסקלרים כל $\mathbb{F}$ נכתוב, $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$ב- שמדובר לציין בלי להכליל נרצה אם $\mathbb{C}$. מעל לינארית משוואה שזו נאמר מרוכבים, המשתנים $\mathbb{C}$. או $\mathbb{R}$ או היא זו שקבוצה ונזכור

3.10 הגדרה

שבהצבת כך $(c_1, c_2, ..., c_n)$ סקלרים סדרת הינו ממ"ל של פתרון

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$$

מתקיימות. בממ"ל המשוואות כל

הגדרה 3.14

בהקשר $\mathbb{F}$. ב- סקלר מופיע משבצת שבכל כך עמודות nו- שורות m בת טבלה היא $\mathbb{F}$ מעל $m \times n$ מסדר מטריצה הממ״ל של

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

מצומצמת): מקדמים מטריצת גם (שנקראת המקדמים מטריצת את נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

בשביל מפריד) קו (אחרי ימין בצד עמודה שכוללת $m \times (n+1)$ מסדר המורחבת המקדמים מטריצת את גם נגדיר הקבועים:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

לכתיבת מקוצרת דרך . $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ הקבועים וקטור את וגם $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ המשתנים וקטור את בנוסף נגדיר הוקטורית המשוואה היא הממ״ל $Ax = b$.

הגדרה 3.18

אם: מדורגת נקראת מטריצה

השורות. שאר לכל מתחת מופיעות הן אז אפסים, שורות יש במטריצה אם א.

והוא זו, שורה של המוביל האיבר נקרא 0 שאינו (משמאל) הראשון האיבר אפסים, שורת שאינה שורה בכל ב.

אפסים יש מוביל איבר לכל מתחת בפרט, כזו). קיימת (אם מתחתיו השורה של המוביל לאיבר משמאל מופיע בלבד.

הגדרה 3.20

אם: קנונית מדורגת נקראת מטריצה

הקודמת. ההגדרה תנאי שני את מקיימת כלומר מדורגת, היא א.

מוביל. אחד לו לקרוא גם אפשר 1. הוא קיים) הוא (אם שורה בכל המוביל האיבר ב.

המוביל). לאחד מעל וגם (מתחת 0 הם האיברים שאר כל מוביל, אחד של עמודה בכל ג.

הגדרה 3.22

$Ax = b$. ממ״ל של A מצומצמת מקדמים מטריצת של קנונית מדורגת צורה שקיבלנו נניח

חופשיים. נקראים המשתנים שאר תלוי. משתנה נקרא מוביל איבר מופיע בה לעמודה שמתאים משתנה כל א.

$\text{rank}(A)$. נסמן הממ״ל/מטריצה. של הדרגה נקרא התלויים המשתנים למספר ב.

3.25 הגדרה

תהי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$R_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ כלומר, A המטריצה שורות את $R_1, R_2, ..., R_m$ ב- נסמן $\mathbb{F}$. מעל $m \times n$ מסדר מטריצה
אלמנטריות: שורה פעולות הנקראות על פעולות סוגי שלושה להלן A שורות לכל $1 \leq i \leq m$.
$cR_i \to R_i$. כך: זו פעולה נסמן 0. שאינו $c \in F$ בסקלר R_i השורה כפל א.
$R_i + cR_j \to R_i$. נסמן $i \neq j$. כאשר $c \in \mathbb{F}$ בסקלר R_j השורה של הכפולה את R_i לשורה הוספה ב.
שינוי. ללא נשארת R_j
$R_i \leftrightarrow R_j$. נסמן $i \neq j$. עבור R_iו- R_j השורות החלפת ג.

3.28 הגדרה

אלמנטריות. שורה פעולות של סופית סדרה ע״י A' ל- A מ- להגיע ניתן אם שורה שקולות נקראות A, A' מטריצות

3.30 טענה

מקדמים מטריצת עם $A'x = b'$ הממ״ל על וגם, $(A|b)$ מורחבת מקדמים מטריצת עם $Ax = b$ הממ״ל על נסתכל .
שווה $Ax = b$ הממ״ל של הפתרונות קבוצת אז שורה, שקולות מטריצות הן $(A|b), (A'|b')$. אם $(A'|b')$ מורחבת
$A'x = b'$. הממ״ל של הפתרונות לקבוצת

3.32 הגדרה

$Ax = 0$. לכתוב וניתן הומוגנית נקראת הממ״ל, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא $Ax = b$ הממ״ל של הקבועים וקטור כאשר
A). של השורות (מספר m באורך האפס לוקטור היא ימין באגף הכוונה

3.39 טענה

$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A|b)$. מתקיים $b \in \mathbb{F}^n$ ולכל $m \times n$ מסדר A לכל א.
$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ מתקיים ב. $\min\{m, n\}$ כאשר m, n מבין הקטן המספר הוא

3.40 טענה

הבא: באופן נקבע $Ax = b$ לממ״ל הפתרונות מספר, $b \in \mathbb{R}^n$ ולכל $m \times n$ מסדר A מטריצה לכל
$\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$, אם א. פתרון. לממ״ל אין אז
$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$, אם ב. פתרונות. אינסוף יש לממ״ל אז
$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n$, אם ג. יחיד. פתרון יש לממ״ל אז

3.43 טענה

המשתנים כל בו הפתרון כלומר, $x = 0$ האפס וקטור שהוא טריוויאלי פתרון קיים $Ax = 0$ הומוגנית ממ״ל לכל א.
מתאפסים.
$\text{rank}(A) = n$, אם ב. יחיד. הפתרון אז
$\text{rank}(A) < n$, אם ג. מתקיים אם המקרה בהכרח זה פתרונות. אינסוף יש אז $m < n$.

פרק 4: מטריצות

4.2 הגדרה

ע״י ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (כאשר $\mathbb{F}$ מעל $m\times n$ מסדר המטריצות כל קבוצת את נגדיר

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} | \forall 1\le i\le m \quad \forall 1\le j\le n \quad a_{ij}\in\mathbb{F}\right\}.$$

4.6 הגדרה

הבאות: הפעולות את נגדיר $c\in\mathbb{F}$ וסקלר $v=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{F}^n, w=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{F}^n$ וקטורים עבור

1. החיבור: פעולת

$$v+w=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$$

2. בסקלר: כפל פעולת

$$c\cdot v=(c\cdot a_1,\ldots,c\cdot a_n)$$

4.7 הגדרה

הבאות: הפעולות את נגדיר $c\in\mathbb{F}$ וסקלר $A,B\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבור

1. החיבור: פעולת

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. בסקלר: כפל פעולת

$$cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

$B-A=B+(-1)\cdot A$. ובהתאמה $-A=(-1)\cdot A$ נגדיר בפרט,

4.9 הגדרה

מטריצה. כל של הכללי האיבר על נסתכל רכיב, בכל החיבור את לכתוב במקום חיבור. לכתיבת מקוצרת דרך יש $1\le i\le m$ לכל הגדרנו למעשה אז $P\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. לכל $(P)_{ij}$ ע״י j ה- ובעמודה i ה- בשורה האיבר את נסמן $1\le j\le n$ ולכל:

$$(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}$$

$$(cA)_{ij}=c(A)_{ij}$$

4.13 הגדרה

לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מסדר האפס מטריצת את נגדיר $m \times n$ הם איבריה שכל כמטריצה 0:

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

4.14 טענה

הבאים: הכללים מתקיימים אז $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. ו- $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ יהיו

1. החילוף חוק (קומוטטיביות):
$$A + B = B + A$$
2. הקיבוץ חוק (אסוציאטיביות):
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
3. בסקלר: לכפל הקיבוץ חוק
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$
4. הפילוג חוק (דיסטריביוטיביות):
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$
5. היחידה: ניטרליות
$$1 \cdot A = A$$
6. $$0 \cdot A = \mathbf{0}_{m\times n}$$
7. האפס: מטריצת ניטרליות
$$A + \mathbf{0}_{m\times n} = A$$
8. $$A - A = 0$$

4.16 הגדרה

בהינתן $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$ ואינדקס Σ עם כתיבה בעזרת סכומם את נסמן l.

$$\sum_{l=1}^{n} a_l = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

לסכום. איבר תורמת הצבה וכל $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ הקבוצה פני על רץ l האינדקס

4.18 הגדרה

בהינתן $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו-

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n,$$

המכפלה את נגדיר

$$Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m$$

ע״י הנתונות קוארדינטות עם

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} x_j.$$

הקוארדינטות. עבור $y_i = (Ax)_i$ נסמן לכל $1 \leq i \leq m$.

4.23 טענה

יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $v, w \in \mathbb{F}^n$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$.

1.
$$A(v+w) = Av + Aw$$

2.
$$(A+B)v = Av + Bv$$

3.
$$A(\alpha v) = \alpha(Av)$$

4.24 טענה

הומוגנית. ממ״ל $Ax = 0$ תהי

1. פתרון. הוא $v + w$ גם $v, w \in \mathbb{F}^n$ פתרונות שני לכל כלומר לחיבור, סגורה הפתרונות קבוצת
2. פתרון. הוא αv גם $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in \mathbb{F}^n$ פתרון לכל כלומר בסקלר, לכפל סגורה הפתרונות קבוצת

4.25 טענה

בין הבא הקשר מתקיים אז $v_0 \in \mathbb{F}^n$. יחיד) בהכרח (לא פתרון לה שקיים נניח הומוגנית. לא ממ״ל $Ax = b$ תהי ההומוגנית הממ״ל של הפתרונות לקבוצת הומוגנית הלא הממ״ל של הפתרונות קבוצת $Ax = 0$:

$$\{x \in \mathbb{F}^n | Ax = b\} = \{v_0 + y | y \in \mathbb{F}^n, Ay = 0\}.$$

4.27 הגדרה

ע״י AB הכפל מטריצת את נגדיר $A \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{F})$ בהינתן

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (A)_{il}(B)_{lj} = (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + ... + (A)_{ik}(B)_{kj}.$$

לכל $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

4.32 טענה

מתקיים אז $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{F}^k$. הוקטורים הם B של שהעמודות נניח $A \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{F})$. יהיו

$$AB = A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

לחוד. A ב- מוכפל עמודה וקטור שכל הוא משמאל A ב- כפל של התוצאה כלומר

4.33 טענה

מתקיים אז $\alpha \in \mathbb{F}$. ו- $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B_1, B_2 \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$, $C \in \mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ יהיו

1.
$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$$

2.
$$A_1(B_1+B_2)=A_1B_1+A_1B_2$$
3.
$$A_1(B_1C)=(A_1B_1)C$$
4.
$$(\alpha A_1)B_1=\alpha(A_1B_1)=A_1(\alpha B_1)$$
5.
$$\mathbf{0}_{m\times n}B_1=\mathbf{0}_{m\times p}=A_1\mathbf{0}_{n\times p}$$

4.34 הגדרה

להיות מוגדרת (n מסדר לומר גם (אפשר $n\times n$ מסדר היחידה מטריצת

$$.I_n=I_{n\times n}=.\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

מתמטי: באופן או 0. הם האיברים שאר וכל ,1 הוא הראשי האלכסון על איבר כל שבה המטריצה זוהי

$$\forall 1\le i\le n\quad (I_n)_{ii}=1$$
$$\forall 1\le i,j\le n\quad i\ne j\implies (I_n)_{ij}=0$$

4.36 טענה

לכל $A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $AI_n=A=I_mA$.

4.38 הגדרה

תהי $A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. ע״י $A^t\in\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ המשוחלפת המטריצה את נגדיר

$$(A^t)_{ij}=A_{ji}$$

לכל $1\le i\le n, 1\le j\le m$.

4.41 טענה

לכל $A,B\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F}), C\in\mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{F})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים:
1.
$$(A^t)^t=A$$
2.
$$(A+B)^t=A^t+B^t$$
3.
$$(\alpha A)^t=\alpha A^t$$
4.
$$(AC)^t=C^tA^t$$

4.45 הגדרה

עבורו $n\in\mathbb{N}$ קיים אם כלומר העמודות, למספר שווה שלה השורות מספר אם ריבועית נקראת A מטריצה $A\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

4.48 הגדרה

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. נגדיר אז

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A$$

ולכל $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ פעמים}}.$$

פולינום עבור

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ע״י בו A של ההצבה את נגדיר

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

4.51 הגדרה

1. שקול: באופן או, $A^t = A$ מתקיים אם סימטרית נקראת A

$$\forall 1 \le i,j \le n \quad (A)_{ji} = (A)_{ij}$$

2. שקול: באופן או, $A^t = -A$ מתקיים אם אנטי-סימטרית נקראת

$$\forall 1 \le i,j \le n \quad (A)_{ji} = -(A)_{ij}$$

4.53 טענה

ריבועית. מטריצה $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ תהי
1. אם P, אנטי-סימטרית אז כל איבריה על האלכסון הראשי שווים ל- 0.
2. אם P אנטי-סימטרית, וגם סימטרית אז $P = 0$.
3. לכל $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ קיימות $S \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ סימטרית ו- $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ שמתקיים כך אנטי-סימטרית $B = S + A$.

4.57 הגדרה

נקראת: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה
1. לכל אם אלכסונית $i \neq j$ מתקיים $(A)_{ij} = 0$, כל איברים מחוץ לאלכסון הראשי שווים ל- 0.
2. לכל אם עליונה משולשית $i > j$ מתקיים $(A)_{ij} = 0$, כל איברים מתחת לאלכסון הראשי שווים ל- 0.
3. לכל אם תחתונה משולשית $i < j$ מתקיים $(A)_{ij} = 0$, כל איברים מעל לאלכסון הראשי שווים ל- 0.

4.60 טענה

יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
1. אם A, B עליונות, משולשיות אז AB גם משולשית. עליונה
2. אם A, B תחתונות, משולשיות אז AB גם משולשית. תחתונה
3. אם A, B אלכסוניות, אז AB גם אלכסונית.

4.62 הגדרה

מטריצה $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת סקלרית אם קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש- $A = \alpha I_n$.

4.64 הגדרה

אחת. פש"א ע"י I_n היחידה ממטריצת מתקבלת היא אם אלמנטרית נקראת $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה לכל כללי, באופן S. ע"י I_n מ- שמתקבלת המתאימה האלמנטרית המטריצה את $S(I_n)$ ב- נסמן, S פש"א עבור S. ע"י A מ- שמתקבלת המטריצה את $S(A)$ ב- נסמן A מטריצה

4.66 טענה

יהיו $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- S מתקיים אז פש"א. $S(I_m)A = S(A)$.

4.68 מסקנה

יהיו $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולות. קיימת אז שורה $B \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{F})$ ש- כך $A' = BA$.

4.70 הגדרה

ע"י $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathbb{F}^n$ היחידה וקטורי את נגדיר

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

וקטורי וגם, I_n של העמודה וקטורי שאלה נציין 1. ל- השווה i ה- מהקוארדינטה חוץ 0 הן הקוארדינטות כל כאשר לעמודה). שורה בין (ההבדל שחלוף כדי עד השורה

4.72 טענה

שקולים: הבאים התנאים אז קנונית, מדורגת $A' \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ אם

1. $A' = I_n$
2. $\text{rank}(A') = n$
3. יחיד. פתרון יש $A'x = 0$ לממ"ל
4. לכל $b' \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד לממ"ל $A'x = b'$.
5. לכל $b' \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לממ"ל $A'x = b'$.

4.73 טענה

שקולים: הבאים התנאים $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ לכל

1. A שורה שקולת ל- I_n.
2. $\text{rank}(A) = n$
3. יחיד. פתרון יש $Ax = 0$ לממ"ל
4. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד לממ"ל $Ax = b$.
5. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לממ"ל $Ax = b$.

4.74 הגדרה

הפיכה נקראת A. $BA = I_n$ ש- כך $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ קיימת אם משמאל הפיכה נקראת $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. נקראת A מתקיימים, התנאים שני אם. $AC = I_n$ ש- כך $C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ קיימת אם מימין

4.75 משפט

שקולים: הבאים התנאים לכל $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$

1. A שורה שקולת ל- I_n.
2. $\text{rank}(A) = n$
3. יחיד. פתרון יש $Ax = 0$ לממ"ל
4. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד לממ"ל $Ax = b$.
5. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לממ"ל $Ax = b$.
6. A הפיכה. משמאל
7. A הפיכה. מימין
8. A הפיכה.

4.76 טענה

יהיו $A, B, C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $BA = I_n = AC$. אז $B = C$.

4.77 מסקנה

יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. מתקיים אז

$$AB = I_n \iff BA = I_n.$$

4.78 מסקנה

יהיו $A, B_1, B_2 \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $B_1A = B_2A = I_n$. אז $B_1 = B_2$.

4.79 הגדרה

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. נסמן הפיכה ב- A^{-1} שמקיימת המטריצה את

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

ל- A. ההופכית המטריצה לה נקרא

4.84 מסקנה

1. תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. מתקיים אז הפיכה

$$A^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_1.$$

כאשר $E_1, E_2, ..., E_k$ הן המטריצות האלמנטריות לפש"אות המתאימות $S_1, S_2, ..., S_k$ של הקנוני בדירוג A.

2. A אלמנטריות: מטריצות של מכפלה היא

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}.$$

פרק 5: דטרמיננטה

5.1 הגדרה

הבאות: התכונות ע"י $\det(A)$ את נגדיר $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ עבור
1. $\det(I_n) = 1$.
2. אם $A \xrightarrow{\alpha R_i \to R_i} A'$ עבור $1 \le i \le n$, אז $\det(A') = \alpha \det(A)$.
3. אם $A \xrightarrow{R_i + \alpha R_j \to R_i} A'$ עבור $i \ne j$, אז $\det(A') = \det(A)$.
4. אם $A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} A'$ עבור $i \ne j$, אז $\det(A') = -\det(A)$.

5.5 טענה

יהיו $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$. מתקיים אז

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

5.6 טענה

למטריצה אם $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים, אז $\det(A) = 0$.

5.7 טענה

יהיו $D, U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
1. אם D מהצורה אלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

מתקיים אז

$$\det(D) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

2. אם U מהצורה עליונה משולשית

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

מתקיים אז, $1 \le i \le n$ לכל $d_i \ne 0$ ובנוסף כלשהם איברים מציינות הכוכביות כאשר

$$\det(U) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

5.10 טענה

מקיימת: [7.1](#def-det) מהגדרה $\det : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ הפונקציה $n = 2$ עבור latex="
1. לכל

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$\det(A) = ad - bc.$$

2. A הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$. מתקיים זה במקרה

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

טענה 5.14

אז $E = S(I_n)$. כלומר, S לפש"א המתאימה אלמנטרית מטריצה E ש- כך $E, A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ יהיו latex="
מתקיים

$$\det(EA) = \det(E)\det(A).$$

משפט 5.15

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$. אז A הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$.

טענה 5.17

מתקיים אז $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. יהיו latex="

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

מסקנה 5.18

מתקיים אז הפיכה. $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ תהי latex="

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

טענה 5.21

מתקיים אז $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. תהי latex="

$$\det(A^t) = \det(A).$$

מסקנה 5.22

תהי $U, L \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
1. U מהצורה עליונה משולשית אם

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

מתקיים אז כלשהם, איברים מציינות הכוכביות כאשר

$$\det(U) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

2. L מהצורה תחתונה משולשית אם

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

מתקיים אז כלשהם, איברים מציינות הכוכביות כאשר

$$\det(L) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

5.24 הגדרה

i ה- השורה מחיקת ע"י A מ- שמתקבלת המטריצה להיות $M_{i,j}(A)$ המינור את נגדיר. $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ תהי
j ה- והעמודה.

5.27 טענה

תהי latex="
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

מתקיים: אז

1. לכל $1 \leq i \leq n$, ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי השורה ה- i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{i,j}(A))$$

2. לכל $1 \leq j \leq n$, ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה ה- j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{i,j}(A))$$

פרק 6: וקטוריים מרחבים

6.9 הגדרה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $W \subseteq V$ תיקרא של תת-מרחב אם W היא מעל מ״ו $\mathbb{F}$ פעולות עם עצמה, בפני בסקלר והכפל החיבור מ- V.

6.14 הגדרה

תהי $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. ומסומנת A של הפתרונות מרחב נקראת $Ax = \underline{0}$ ההומוגנית לממ״ל הפתרונות קבוצת ע״י $\mathsf{N}(A)$.

6.15 טענה

$\mathsf{N}(A)$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$.

6.25 הגדרה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, ..., v_k \in V$. מהצורה וקטור הוא $v_1, ..., v_k$ של (צ״ל) לינארי צירוף

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$$

כאשר $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$.

6.28 הגדרה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, v_2, ..., v_k \in V$. אלה: וקטורים של הלינאריים הצירופים כל קבוצת את נגדיר אז

$$\mathsf{Span}(v_1, ..., v_k) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k | \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}\}$$

6.31 הגדרה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$. נאמר ש- V נוצר סופית אם קיימים $v_1, ..., v_k \in V$ ש- כך $V = \mathsf{Span}(v_1, ..., v_k)$. במקרה שהוקטורים פורמלי) פחות (באופן לומר גם ניתן V את פורשת $\{v_1, ..., v_k\}$ שהקבוצה נאמר גם זה $v_1, ..., v_k$ את פורשים V.

6.36 הגדרה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$. וקטורים קבוצת $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ נקראת:
ש- כך 0 ל- שווים כולם שאינם $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ קיימים אם (ת״ל) לינארית תלויה -

$$.\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$$

טריוויאלי. לא הוא שמאל באגף הלינארי שהצירוף נאמר גם זה במקרה
מתקיים עבורם $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ לכל אם (בת״ל) לינארית תלויה בלתי -

$$, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$$

טריוויאלי. נקרא זה לינארי צירוף. $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$ מתקיים בהכרח

6.42 מסקנה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_l \in V$.
א. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ אז ת״ל, $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_l\}$ ת״ל.
ב. אם $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_l\}$ אז בת״ל, $\{v_1, ..., v_k\}$ בת״ל.

מסקנה 6.44

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $\{v_1, ..., v_k\} \in V$ בת״ל ו- $w \in V$ שמתקיים כך $w \notin \text{Span}(v_1, ..., v_k)$. אז $\{v_1, ..., v_k, w\}$ בת״ל.

מסקנה 6.45

תת-הקבוצה אז, $\mathbb{F}$ מעל V מ״ו הפורשת קבוצה $\{v_1, ..., v_k\}$ אם latex=“

$$\{v_i | 1 \leq i \leq k, v_i \notin \text{Span}(v_1, ..., v_{i-1})\}$$

את ופורשת בת״ל היא V.

הגדרה 6.48

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $B = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ נקראת בסיס ל- V אם V את פורשת וגם בת״ל היא, כלומר $v_1, ..., v_n$ בת״ל ובנוסף $\text{Span}(B) = V$.

הגדרה 6.51

יהי $V = \{0_V\}$. נגדיר $\emptyset = \{\}$ ריקה וקטורים קבוצת עבור

$$\text{Span}(\emptyset) = \{0_V\}.$$

טענה 6.53

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$. אז התנאים הבאים שקולים:
- קיים V ל- בסיס.
- הפורשת סופית תת-קבוצה קיימת כלומר סופית, נוצר V אותו.

מסקנה 6.55

latex=“ יהיו $v_1, ..., v_k \in \mathbb{F}^n$.
א. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ בת״ל, אז $k \leq n$.
ב. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ פורשת את $\mathbb{F}^n$, אז $k \geq n$.
ג. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ בסיס היא ל- $\mathbb{F}^n$, אז $k = n$.

מסקנה 6.59

latex=“ יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{F})$ שקולות. אז שורה $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$.

הגדרה 6.62

כתיבתם). לסדר חשיבות יש (כלומר איבריו על סדר עם יחד בסיס הוא V למ״ו $B = \{v_1, ..., v_n\}$ סדור בסיס

הגדרה 6.65

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ סדור בסיס ל- V. לכל $v \in V$ קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ ש- כך יחידים ע״י B ל- ביחס שלו הקואורדינטות וקטור את נגדיר v עבור אז $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

מסקנה 6.68

מתקיים אז $u, w_1, ..., w_k \in V$. ו- $B = \{v_1, ..., v_n\}$ סדור בסיס ל- V, $\mathbb{F}$ מעל מ"ו V יהיו latex="

$$u \in \text{Span}(w_1, ..., w_k) \iff [u]_B \in \text{Span}([w_1]_B, ..., [w_k]_B).$$

מסקנה 6.71

$v_1, ..., v_k \in V$. ו- $B = \{b_1, ..., b_n\}$ בסיס ל- V, $\mathbb{F}$ מעל מ"ו V יהיו latex="
א. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ בת"ל, אז $k \leq n$.
ב. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ פורשת את V, אז $k \geq n$.
ג. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ בסיס ל- V, אז $k = n$.

מסקנה 6.72

יהי V מ"ו נוצר סופית, לו קיים כלומר שוויו הם V ל- בסיסים שני כל אז בסיס. לו קיים גודל.

הגדרה 6.73

הוא סימונו $\dim(V)$. V של המימד נקרא V מ"ו של כלשהו בסיס גודל

מסקנה 6.78

מתקיים: אז תת-מרחב. W ויהי, $\mathbb{F}$ מעל סופית נוצר מ"ו V יהי latex="
א. W נוצר סופית ומתקיים $\dim(W) \leq \dim(V)$.
ב. אם $\dim(W) = \dim(V)$, אז $W = V$.

פרק 7: תת-מרחבים

7.1 הגדרה

גם השייכים הוקטורים כל קבוצת הוא $W_1 \cap W_2$ החיתוך אז תת-מרחבים. $W_1, W_2 \subseteq V$ ויהיו, $\mathbb{F}$ מעל מ״ו V יהי
כלומר, W_2 ל- וגם W_1 ל-
$$.W_1 \cap W_2 = \{v \in V | v \in W_1, v \in W_2\}$$

7.4 טענה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$. אז תת-מרחבים $W_1 \cap W_2$ הוא תת-מרחב של V.

7.8 הגדרה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$. אז תת-מרחבים הסכום $W_1 + W_2$ ע״י מוגדר

$$.W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

7.9 טענה

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$. אז תת-מרחבים W_1+W_2 הוא תת-מרחב של V, המקיים $W_1 \subseteq W_1+W_2$
וגם $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

7.14 מסקנה

יהיו V מעל מ״ו $\mathbb{F}$ ו- $W_1, W_2 \subseteq V$. אז מתקיים:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) \leq \dim(W_1 + W_2) \leq \dim(V)$$

ובאופן דומה:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_2) \leq \dim(W_1 + W_2) \leq \dim(V)$$

7.16 משפט

יהי V מעל מ״ו $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$. אז תת-מרחבים מתקיים latex=“

$$.\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$