# סיכום הגדרות ומשפטים

אלגברה לינארית להנדסה

ד״ר יונתן שלח · ד״ר נדב מאיר

## תוכן עניינים


| | |
|---|---|
| **פרק 0: קבוצות ומספרים** | **2** |
| **פרק 1: תכונות ושימושים של המספרים המרוכבים** | **3** |
| **פרק 2: גיאומטריה במישור ובמרחב** | **4** |
| **פרק 3: מערכות משוואות לינאריות** | **6** |
| **פרק 4: מטריצות** | **9** |
| **פרק 5: דטרמיננטה** | **16** |
| **פרק 6: מרחבים וקטוריים** | **19** |
| **פרק 7: תת-מרחבים** | **22** |

# פרק 0: קבוצות ומספרים

**הגדרה 0.2**

קבוצה היא אוסף כלשהו של איברים (לא בהכרח מספרים) ללא חשיבות לסדר הופעתם.

**הגדרה 0.5**

עבור $z = x + yi$ מרוכב עם $x, y \in \mathbb{R}$ נגדיר את החלק הממשי $\text{Re}(z) = x$ ואת החלק המדומה $\text{Im}(z) = y$.
בנוסף, נגדיר את המספר הצמוד $\overline{z} = x - yi$.

**הגדרה 0.8**

נאמר ש-$A$ מוכלת ב-$B$ ונסמן $A \subseteq B$ אם כל איבר של $A$ הוא גם איבר של $B$.
באופן קצת יותר מתמטי: $A \subseteq B$ אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \in B$.
אם ההיפך הוא הנכון, כלומר קיים $a \in A$ עבורו $a \notin B$, אז נסמן $A \nsubseteq B$ ונאמר ש-$A$ לא מוכלת ב-$B$.

**הגדרה 0.11**

נאמר ששתי קבוצות $A, B$ הן שוות ונסמן $A = B$ אם יש בהן בדיוק אותם האיברים, כלומר מתקיים $x \in A$ אם ורק אם $x \in B$.

**הגדרה 0.12**

כדי להוכיח כי $A = B$, הדרך המקובלת היא להוכיח כי $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$. דרך הוכחה זו נקראת הכלה דו-צדדית.

**טענה 0.14**

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ וכל הקבוצות שונות זו מזו.

**הגדרה 0.15**

בהינתן שתי קבוצות $A, B$ נגדיר את הקבוצות הבאות:
א. החיתוך $A \cap B$ הוא קבוצת כל האיברים השייכים גם ל-$A$ וגם ל-$B$. ב. האיחוד $A \cup B$ הוא קבוצת כל האיברים השייכים לפחות לאחת משתי הקבוצות $A, B$.

**טענה 0.19**

לכל שתי קבוצות $A, B$ מתקיים

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

# פרק 1: תכונות ושימושים של המספרים המרוכבים

**טענה 1.4**

לכל $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ מתקיים:
א. חוקי החילוף לחיבור וכפל: $z_1+z_2 = z_2+z_1$ וגם $z_1z_2 = z_2z_1$. ב. חוקי הקיבוץ לחיבור וכפל: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ וגם $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$. ג. חוק הפילוג: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ ד. $0$ נייטרלי ביחס לחיבור: $z + 0 = z$ לכל $z \in \mathbb{C}$. ה. $1$ נייטרלי ביחס לכפל: $z \cdot 1 = z$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

**טענה 1.6**

לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים:
א. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ב. $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

**טענה 1.7**

לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:
א. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ ב. $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ ג. $z\overline{z} \in \mathbb{R}$

**הגדרה 1.12**

נגדיר

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

**משפט 1.13**

לכל $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

.

**טענה 1.14**

לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

.

**טענה 1.18**

יהי $w \in \mathbb{C}$ מספר נתון השונה מ-$0$, ונניח כי $w = re^{i\theta}$ בהצגה פולרית. אז למשוואה $z^n = w$ יש בדיוק $n$ שורשים (פתרונות) מרוכבים בנעלם $z$ הנתונים ע"י

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}.$$

עבור $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

# פרק 2: גיאומטריה במישור ובמרחב

**הגדרה 2.1**

המישור $\mathbb{R}^2$ הוא קבוצת כל הנקודות בעלות שתי קוארדינטות ממשיות, כלומר

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}.$$

**הגדרה 2.3**

וקטור $\vec{v} = (x,y)$ במישור הוא זוג סדור של מספרים ממשיים, כלומר איבר של $\mathbb{R}^2$.

**טענה 2.12**

$\|c \cdot (a,b)\| = |c| \cdot \|(a,b)\|$ לכל וקטור $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ולכל סקלר $c \in \mathbb{R}$.

**הגדרה 2.18**

עבור וקטורים $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר $(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

**טענה 2.20**

יהיו $\vec{v_1} = (x_1,y_1),\ \vec{v_2} = (x_2,y_2),\ \vec{v_3} = (x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$ וקטורים. אז מתקיים:
1. $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \vec{v_2}\cdot\vec{v_1}$ 2. $(\vec{v_1}+\vec{v_3})\cdot\vec{v_2} = \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} + \vec{v_3}\cdot\vec{v_2}$ 3. $\vec{v_1}\cdot\vec{v_1} = \|\vec{v_1}\|^2$ 4. $\vec{v_1}\cdot(c\vec{v_2}) = c(\vec{v_1}\cdot\vec{v_2})$ לכל סקלר $c \in \mathbb{R}$ 5. $\|\vec{v_1}\| = 0 \iff \vec{v_1} = (0,0)$ 6. $\|\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}\| = 1$ אם $\vec{v_1} \neq (0,0)$

**טענה 2.21**

יהיו $\vec{v},\vec{w}$ שני וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$ השונים מ-$(0,0)$, ותהי $\alpha$ הזווית הקטנה ביניהם. אז מתקיים:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}.$$

#eq-cosine-scalar

**מסקנה 2.22**

וקטורים $\vec{v},\vec{w}$ השונים מ-$(0,0)$ הם מאונכים/ניצבים אם ורק אם $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. במקרה זה נסמן $\vec{v} \perp \vec{w}$.

**הגדרה 2.26**

וקטור המאונך לכל וקטור שמתאים לשתי נקודות על ישר (התחלה וסיום) נקרא נורמל לישר.

**הגדרה 2.32**

שני וקטורים $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ נקראים קו-לינאריים אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$\vec{v} = c\vec{w}$ או $\vec{w} = c\vec{v}$.

**הגדרה 2.42**

המרחב $\mathbb{R}^3$ הוא קבוצת כל הנקודות בעלות שלוש קוארדינטות ממשיות, כלומר

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

**הגדרה 2.45**

וקטור $\vec{v} = (x,y,z)$ במרחב הוא שלשה סדורה של מספרים ממשיים, כלומר איבר ב- $\mathbb{R}^3$.

**טענה 2.53**

$\|c \cdot (x,y,z)\| = |c| \cdot \|(x,y,z)\|$. לכל וקטור $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ולכל סקלר $c \in \mathbb{R}$.

**הגדרה 2.55**

עבור וקטורים $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2.b_3) \in \mathbb{R}^3$ נגדיר

$(a_1,a_2,a_3) \cdot (b_1,b_2,b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

**טענה 2.57**

יהיו $\vec{v_1} = (x_1,y_1,z_!),\ \vec{v_2} = (x_2,y_2,z_2),\ \vec{v_3} = (x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ וקטורים. אז מתקיים:

א. $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \vec{v_2} \cdot \vec{v_1}$.

ב. $(\vec{v_1} + \vec{v_3}) \cdot \vec{v_2} = \vec{v_2} \cdot \vec{v_1}$.

ג. $\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} = \|\vec{v_1}\|^2$.

ד. $\vec{v_1} \cdot (c\vec{v_2}) = c(\vec{v_1} \cdot \vec{v_2})$.

ה. $\|\vec{v_1}\| = 0 \iff \vec{v_1} = (0,0)$.

ו. $\|\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}\| = 1$ אם $\vec{v_1} \neq (0,0)$.

**טענה 2.58**

יהיו $\vec{v},\vec{w}$ שני וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ השונים מ-$(0,0,0)$, ותהי $\alpha$ הזווית הקטנה ביניהם. אז מתקיים

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

**מסקנה 2.60**

נניח כי $\vec{v},\vec{w}$ שני וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ השונים מ-$(0,0,0)$. אז הם מאונכים זה לזה אם ורק אם $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

## פרק 3: מערכות משוואות לינאריות

**הגדרה 3.1**

משוואה לינארית במשתנים $x_1, x_2, ..., x_n$ היא משוואה מהצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

#eq-linear-eq

כאשר $a_1, ..., a_n$ הם סקלרים נתונים שנקראים מקדמים, ו-$b$ הוא סקלר נתון שנקרא קבוע או איבר חופשי. אם כל הסקלרים והמשתנים ממשיים, נאמר שזו משוואה לינארית מעל $\mathbb{R}$. אם לפחות סקלר אחד הוא מרוכב ו/או המשתנים מרוכבים, נאמר שזו משוואה לינארית מעל $\mathbb{C}$. אם נרצה להכליל בלי לציין שמדובר ב-$\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, נכתוב $\mathbb{F}$ ונזכור שקבוצה זו היא או $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

**הגדרה 3.3**

סדרת סקלרים $(c_1, c_2, ..., c_n)$ נקראת $n$-יה, או וקטור באורך $n$. נגדיר את מרחב ה-$n$-יות מעל $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \{(c_1, c_2, ...., c_n) | c_1, c_2, ...., c_n \in \mathbb{R}\}.$$

וגם את מרחב ה-$n$-יות מעל $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, ...., c_n) | c_1, c_2, ...., c_n \in \mathbb{C}\}.$$

לעיתים נכתוב $\mathbb{F}^n$ במקום לפרט אם הכוונה היא ל-$\mathbb{R}^n$ או ל-$\mathbb{C}^n$.

**הגדרה 3.4**

פתרון של משוואה לינארית הינו $n$-יה $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{F}^n$ כך שבהצבת

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n.$$

המשוואה מתקיימת.

**הגדרה 3.9**

מערכת משוואות לינאריות (ממ"ל) במשתנים $x_1, x_2, ..., x_n$ היא אוסף של מספר כלשהו $m$) של משוואות לינאריות מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

#eq-linear-eqs

אם כל המקדמים והקבועים הם מספרים ממשיים, נאמר שהממ"ל מעל $\mathbb{R}$. אחרת, נאמר שהממ"ל מעל $\mathbb{C}$.

**הגדרה 3.10**

פתרון של ממ"ל הינו סדרת סקלרים $(c_1, c_2, ..., c_n)$ כך שבהצבת

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$$

כל המשוואות בממ"ל מתקיימות.

**הגדרה 3.14**

מטריצה מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ היא טבלה בת $m$ שורות ו-$n$ עמודות כך שבכל משבצת מופיע סקלר ב-$\mathbb{F}$. בהקשר של הממ"ל

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

נגדיר את מטריצת המקדמים (שנקראת גם מטריצת מקדמים מצומצמת):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

נגדיר גם את מטריצת המקדמים המורחבת מסדר $m \times (n+1)$ שכוללת עמודה בצד ימין (אחרי קו מפריד) בשביל הקבועים:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

נגדיר בנוסף את וקטור המשתנים $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וגם את וקטור הקבועים $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. דרך מקוצרת לכתיבת הממ"ל היא המשוואה הוקטורית $Ax = b$.

**הגדרה 3.18**

מטריצה נקראת מדורגת אם:

א. אם במטריצה יש שורות אפסים, אז הן מופיעות מתחת לכל שאר השורות.

ב. בכל שורה שאינה שורת אפסים, האיבר הראשון (משמאל) שאינו $0$ נקרא האיבר המוביל של שורה זו, והוא מופיע משמאל לאיבר המוביל של השורה מתחתיו (אם קיימת כזו). בפרט, מתחת לכל איבר מוביל יש אפסים בלבד.

**הגדרה 3.20**

מטריצה נקראת מדורגת קנונית אם:

א. היא מדורגת, כלומר מקיימת את שני תנאי ההגדרה הקודמת.

ב. האיבר המוביל בכל שורה (אם הוא קיים) הוא $1$. אפשר גם לקרוא לו אחד מוביל.

ג. בכל עמודה של אחד מוביל, כל שאר האיברים הם $0$ (מתחת וגם מעל לאחד המוביל).

**הגדרה 3.22**

נניח שקיבלנו צורה מדורגת קנונית של מטריצת מקדמים מצומצמת $A$ של ממ"ל $Ax = b$.

א. כל משתנה שמתאים לעמודה בה מופיע איבר מוביל נקרא משתנה תלוי. שאר המשתנים נקראים חופשיים.

ב. למספר המשתנים התלויים נקרא הדרגה של הממ"ל/מטריצה. נסמן $\text{rank}(A)$.

**הגדרה 3.25**

תהי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

מטריצה מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$. נסמן ב-$R_1, R_2, ..., R_m$ את שורות המטריצה $A$, כלומר $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ לכל $1 \leq i \leq m$. להלן שלושה סוגי פעולות על שורות $A$ הנקראות פעולות שורה אלמנטריות:

א. כפל השורה $R_i$ בסקלר $c \in F$ שאינו $0$. נסמן פעולה זו כך: $cR_i \to R_i$.

ב. הוספה לשורה $R_i$ את הכפולה של השורה $R_j$ בסקלר $c \in \mathbb{F}$ כאשר $i \neq j$. נסמן $R_i + cR_j \to R_i$. השורה $R_j$ נשארת ללא שינוי.

ג. החלפת השורות $R_i$ ו-$R_j$ עבור $i \neq j$. נסמן $R_i \leftrightarrow R_j$.

**הגדרה 3.28**

מטריצות $A, A'$ נקראות שקולות שורה אם ניתן להגיע מ- $A$ ל- $A'$ ע״י סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות.

**טענה 3.30**

. נסתכל על הממ״ל $Ax = b$ עם מטריצת מקדמים מורחבת $(A|b)$, וגם על הממ״ל $A'x = b'$ עם מטריצת מקדמים מורחבת $(A'|b')$. אם $(A|b), (A'|b')$ הן מטריצות שקולות שורה, אז קבוצת הפתרונות של הממ״ל $Ax = b$ שווה לקבוצת הפתרונות של הממ״ל $A'x = b'$.

**הגדרה 3.32**

כאשר וקטור הקבועים של הממ״ל $Ax = b$ הוא $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, הממ״ל נקראת הומוגנית וניתן לכתוב $Ax = 0$.

הכוונה באגף ימין היא לוקטור האפס באורך $m$ (מספר השורות של $A$).

**טענה 3.39**

א. לכל $A$ מסדר $m \times n$ ולכל $b \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A|b)$.

ב. מתקיים $0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ כאשר $\min\{m, n\}$ הוא המספר הקטן מבין $m, n$.

**טענה 3.40**

לכל מטריצה $A$ מסדר $m \times n$ ולכל $b \in \mathbb{R}^n$, מספר הפתרונות לממ״ל $Ax = b$ נקבע באופן הבא:

א. אם $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$, אז אין לממ״ל פתרון.

ב. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$, אז לממ״ל יש אינסוף פתרונות.

ג. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n$, אז לממ״ל יש פתרון יחיד.

**טענה 3.43**

א. לכל ממ״ל הומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון טריוויאלי שהוא וקטור האפס $x = 0$, כלומר הפתרון בו כל המשתנים מתאפסים.

ב. אם $\text{rank}(A) = n$, אז הפתרון יחיד.

ג. אם $\text{rank}(A) < n$, אז יש אינסוף פתרונות. זה בהכרח המקרה אם מתקיים $m < n$.

# פרק 4: מטריצות

**הגדרה 4.2**

נגדיר את קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ (כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ) ע״י

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} | \forall 1 \leq i \leq m \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad a_{ij} \in \mathbb{F} \right\}.$$

**הגדרה 4.6**

עבור וקטורים $v = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n, w = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{F}^n$ וסקלר $c \in \mathbb{F}$ נגדיר את הפעולות הבאות:

1. פעולת החיבור:

$$v + w = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

2. פעולת כפל בסקלר:

$$c \cdot v = (c \cdot a_1, \ldots, c \cdot a_n)$$

**הגדרה 4.7**

עבור $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ וסקלר $c \in \mathbb{F}$ נגדיר את הפעולות הבאות:

1. פעולת החיבור:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. פעולת כפל בסקלר:

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

בפרט, נגדיר $-A = (-1) \cdot A$ ובהתאמה $B - A = B + (-1) \cdot A$.

**הגדרה 4.9**

יש דרך מקוצרת לכתיבת חיבור. במקום לכתוב את החיבור בכל רכיב, נסתכל על האיבר הכללי של כל מטריצה. נסמן את האיבר בשורה ה- $i$ ובעמודה ה- $j$ ע״י $(P)_{ij}$ לכל $P \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. אז למעשה הגדרנו לכל $1 \leq i \leq m$ ולכל $1 \leq j \leq n$:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij}$$

**הגדרה 4.13**

לכל $m, n \in \mathbb{N}$ נגדיר את מטריצת האפס מסדר $m \times n$ כמטריצה שכל איבריה הם $0$:

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**טענה 4.14**

יהיו $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. אז מתקיימים הכללים הבאים:

1. חוק החילוף (קומוטטיביות):
$$A + B = B + A$$
2. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות):
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
3. חוק הקיבוץ לכפל בסקלר:
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$
4. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות):
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$
5. ניטרליות היחידה:
$$1 \cdot A = A$$
6. $$0 \cdot A = \mathbf{0}_{m\times n}$$
7. ניטרליות מטריצת האפס:
$$A + \mathbf{0}_{m\times n} = A$$
8. $$A - A = 0$$

**הגדרה 4.16**

בהינתן $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$ נסמן את סכומם בעזרת כתיבה עם $\Sigma$ ואינדקס $l$.

$$\sum_{l=1}^{n} a_l = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

האינדקס $l$ רץ על פני הקבוצה $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ וכל הצבה תורמת איבר לסכום.

**הגדרה 4.18**

בהינתן $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו-

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n,$$

נגדיר את המכפלה

$$Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m$$

עם קוארדינטות הנתונות ע״י

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} x_j.$$

לכל $1 \leq i \leq m$. נסמן $y_i = (Ax)_i$ עבור הקוארדינטות.

**טענה 4.23**

יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $v, w \in \mathbb{F}^n$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$.

1.
$$A(v+w) = Av + Aw$$

2.
$$(A+B)v = Av + Bv$$

3.
$$A(\alpha v) = \alpha(Av)$$

**טענה 4.24**

תהי $Ax = 0$ ממ״ל הומוגנית.

1. קבוצת הפתרונות סגורה לחיבור, כלומר לכל שני פתרונות $v, w \in \mathbb{F}^n$ גם $v + w$ הוא פתרון.
2. קבוצת הפתרונות סגורה לכפל בסקלר, כלומר לכל פתרון $v \in \mathbb{F}^n$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ גם $\alpha v$ הוא פתרון.

**טענה 4.25**

תהי $Ax = b$ ממ״ל לא הומוגנית. נניח שקיים לה פתרון (לא בהכרח יחיד) $v_0 \in \mathbb{F}^n$. אז מתקיים הקשר הבא בין קבוצת הפתרונות של הממ״ל הלא הומוגנית לקבוצת הפתרונות של הממ״ל ההומוגנית $Ax = 0$:

$$\{x \in \mathbb{F}^n | Ax = b\} = \{v_0 + y | y \in \mathbb{F}^n, Ay = 0\}.$$

**הגדרה 4.27**

בהינתן $A \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר את מטריצת הכפל $AB$ ע״י

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (A)_{il}(B)_{lj} = (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + ... + (A)_{ik}(B)_{kj}.$$

לכל $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

**טענה 4.32**

יהיו $A \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{F}), B \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{F})$. נניח שהעמודות של $B$ הם הוקטורים $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{F}^k$. אז מתקיים

$$AB = A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כלומר התוצאה של כפל ב- $A$ משמאל הוא שכל וקטור עמודה מוכפל ב- $A$ לחוד.

**טענה 4.33**

יהיו $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B_1, B_2 \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$, $C \in \mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$. אז מתקיים

1.
$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$$

2.
$$A_1(B_1+B_2)=A_1B_1+A_1B_2$$

3.
$$A_1(B_1C)=(A_1B_1)C$$

4.
$$(\alpha A_1)B_1=\alpha(A_1B_1)=A_1(\alpha B_1)$$

5.
$$\mathbf{0}_{m\times n}B_1=\mathbf{0}_{m\times p}=A_1\mathbf{0}_{n\times p}$$

**הגדרה 4.34**

מטריצת היחידה מסדר $n\times n$ (אפשר גם לומר מסדר $n$) מוגדרת להיות

$$I_n=I_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

זוהי המטריצה שבה כל איבר על האלכסון הראשי הוא $1$, וכל שאר האיברים הם $0$. או באופן מתמטי:

$$\forall 1\le i\le n\quad (I_n)_{ii}=1$$
$$\forall 1\le i,j\le n\quad i\neq j\implies (I_n)_{ij}=0$$

**טענה 4.36**

לכל $A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $AI_n=A=I_mA$.

**הגדרה 4.38**

תהי $A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. נגדיר את המטריצה המשוחלפת $A^t\in\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ ע"י

$$(A^t)_{ij}=A_{ji}$$

לכל $1\le i\le n, 1\le j\le m$.

**טענה 4.41**

לכל $A,B\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F}), C\in\mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{F})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים:

1.
$$(A^t)^t=A$$

2.
$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

3.
$$(\alpha A)^t=\alpha A^t$$

4.
$$(AC)^t=C^tA^t$$

**הגדרה 4.45**

מטריצה $A$ נקראת ריבועית אם מספר השורות שלה שווה למספר העמודות, כלומר אם קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $A\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

**הגדרה 4.48**

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. אז נגדיר

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A$$

ולכל $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ פעמים}}.$$

עבור פולינום

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

נגדיר את ההצבה של $A$ בו ע״י

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

**הגדרה 4.51**

1. $A$ נקראת סימטרית אם מתקיים $A^t = A$, או באופן שקול:

$$\forall 1 \le i,j \le n \quad (A)_{ji} = (A)_{ij}$$

2. נקראת אנטי-סימטרית אם מתקיים $A^t = -A$, או באופן שקול:

$$\forall 1 \le i,j \le n \quad (A)_{ji} = -(A)_{ij}$$

**טענה 4.53**

תהי $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית.

1. אם $P$ אנטי-סימטרית, אז כל איבריה על האלכסון הראשי שווים ל- $0$.
2. אם $P$ סימטרית וגם אנטי-סימטרית, אז $P = 0$.
3. לכל $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ קיימות $S \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ סימטרית ו- $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ אנטי-סימטרית כך שמתקיים $B = S + A$.

**הגדרה 4.57**

מטריצה $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת:

1. אלכסונית אם לכל $i \neq j$ מתקיים $(A)_{ij} = 0$, כלומר כל האיברים מחוץ לאלכסון הראשי שווים ל- $0$.
2. משולשית עליונה אם לכל $i > j$ מתקיים $(A)_{ij} = 0$, כלומר כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שווים ל- $0$.
3. משולשית תחתונה אם לכל $i < j$ מתקיים $(A)_{ij} = 0$, כלומר כל האיברים מעל לאלכסון הראשי שווים ל- $0$.

**טענה 4.60**

יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

1. אם $A, B$ משולשיות עליונות, אז $AB$ גם משולשית עליונה.
2. אם $A, B$ משולשיות תחתונות, אז $AB$ גם משולשית תחתונה.
3. אם $A, B$ אלכסוניות, אז $AB$ גם אלכסונית.

**הגדרה 4.62**

מטריצה $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת סקלרית אם קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש- $A = \alpha I_n$.

**הגדרה 4.64**

מטריצה $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת אלמנטרית אם היא מתקבלת ממטריצת היחידה $I_n$ ע״י פש״א אחת.
עבור פש״א $S$, נסמן ב- $S(I_n)$ את המטריצה האלמנטרית המתאימה שמתקבלת מ- $I_n$ ע״י $S$. באופן כללי, לכל מטריצה $A$ נסמן ב- $S(A)$ את המטריצה שמתקבלת מ- $A$ ע״י $S$.

**טענה 4.66**

יהיו $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $S$ פש״א. אז מתקיים $S(I_m)A = S(A)$.

**מסקנה 4.68**

יהיו $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורה. אז קיימת $B \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{F})$ כך ש- $A' = BA$.

**הגדרה 4.70**

נגדיר את וקטורי היחידה $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathbb{F}^n$ ע״י

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר כל הקואורדינטות הן $0$ חוץ מהקואורדינטה ה- $i$ השווה ל- $1$. נציין שאלה וקטורי העמודה של $I_n$, וגם וקטורי השורה עד כדי שחלוף (ההבדל בין שורה לעמודה).

**טענה 4.72**

אם $A' \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית, אז התנאים הבאים שקולים:
1. $A' = I_n$
2. $\text{rank}(A') = n$
3. לממ״ל $A'x = 0$ יש פתרון יחיד.
4. לכל $b' \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד לממ״ל $A'x = b'$.
5. לכל $b' \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לממ״ל $A'x = b'$.

**טענה 4.73**

לכל $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ התנאים הבאים שקולים:
1. $A$ שקולת שורה ל- $I_n$.
2. $\text{rank}(A) = n$
3. לממ״ל $Ax = 0$ יש פתרון יחיד.
4. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד לממ״ל $Ax = b$.
5. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לממ״ל $Ax = b$.

**הגדרה 4.74**

מטריצה $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת הפיכה משמאל אם קיימת $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $BA = I_n$. $A$ נקראת הפיכה מימין אם קיימת $C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $AC = I_n$. אם שני התנאים מתקיימים, $A$ נקראת הפיכה.

**משפט 4.75**

לכל $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ התנאים הבאים שקולים:

1. $A$ שקולת שורה ל- $I_n$.
2. $\text{rank}(A) = n$
3. לממ"ל $Ax = 0$ יש פתרון יחיד.
4. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד לממ"ל $Ax = b$.
5. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לממ"ל $Ax = b$.
6. $A$ הפיכה משמאל.
7. $A$ הפיכה מימין.
8. $A$ הפיכה.

**טענה 4.76**

יהיו $A, B, C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $BA = I_n = AC$. אז $B = C$.

**מסקנה 4.77**

יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. אז מתקיים

$$AB = I_n \iff BA = I_n.$$

**מסקנה 4.78**

יהיו $A, B_1, B_2 \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $B_1A = B_2A = I_n$. אז $B_1 = B_2$.

**הגדרה 4.79**

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. נסמן ב- $A^{-1}$ את המטריצה שמקיימת

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

נקרא לה המטריצה ההופכית ל- $A$.

**מסקנה 4.84**

1. תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. אז מתקיים

$$A^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_1.$$

כאשר $E_1, E_2, ..., E_k$ הן המטריצות האלמנטריות המתאימות לפש"אות $S_1, S_2, ..., S_k$ בדירוג הקנוני של $A$.

2. $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות:

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}.$$

# פרק 5: דטרמיננטה

**הגדרה 5.1**

עבור $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר את $\det(A)$ ע״י התכונות הבאות:

1. $\det(I_n) = 1$.
2. אם $A \xrightarrow{\alpha R_i \to R_i} A'$ עבור $1 \le i \le n$, אז $\det(A') = \alpha \det(A)$.
3. אם $A \xrightarrow{R_i + \alpha R_j \to R_i} A'$ עבור $i \neq j$, אז $\det(A') = \det(A)$.
4. אם $A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} A'$ עבור $i \neq j$, אז $\det(A') = -\det(A)$.

**טענה 5.5**

יהיו $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$. אז מתקיים

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

**טענה 5.6**

אם למטריצה $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ יש שורת אפסים, אז $\det(A) = 0$.

**טענה 5.7**

יהיו $D, U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

1. אם $D$ אלכסונית מהצורה

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

אז מתקיים

$$\det(D) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

2. אם $U$ משולשית עליונה מהצורה

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

כאשר הכוכביות מציינות איברים כלשהם ובנוסף $d_i \neq 0$ לכל $1 \le i \le n$, אז מתקיים

$$\det(U) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

**טענה 5.10**

'latex=' עבור $n = 2$ הפונקציה $\det : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ מהגדרה (#def-det)[7.1] מקיימת:

1. לכל

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$\det(A) = ad - bc.$$

2. $A$ הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$. במקרה זה מתקיים

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**טענה 5.14**

'latex=' יהיו $E, A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $E$ מטריצה אלמנטרית המתאימה לפש"א $S$, כלומר $E = S(I_n)$. אז מתקיים

$$\det(EA) = \det(E)\det(A).$$

**משפט 5.15**

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$. אז $A$ הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$.

**טענה 5.17**

'latex=' יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. אז מתקיים

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

**מסקנה 5.18**

'latex=' תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. אז מתקיים

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

**טענה 5.21**

'latex=' תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. אז מתקיים

$$\det(A^t) = \det(A).$$

**מסקנה 5.22**

תהי $U, L \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

1. אם $U$ משולשית עליונה מהצורה

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

כאשר הכוכביות מציינות איברים כלשהם, אז מתקיים

$$\det(U) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

2. אם $L$ משולשית תחתונה מהצורה

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

כאשר הכוכביות מציינות איברים כלשהם, אז מתקיים

$\det(L) = d_1 d_2 \cdots d_n$.

**הגדרה 5.24**

תהי $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. נגדיר את המינור $M_{i,j}(A)$ להיות המטריצה שמתקבלת מ- $A$ ע״י מחיקת השורה ה- $i$ והעמודה ה- $j$.

**טענה 5.27**

‘latex=’ תהי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

אז מתקיים:

1. לכל $1 \leq i \leq n$, ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי השורה ה- $i$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{i,j}(A))$$

2. לכל $1 \leq j \leq n$, ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה ה- $j$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{i,j}(A))$$

# פרק 6: מרחבים וקטוריים

**הגדרה 6.9**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $W \subseteq V$ תיקרא תת-מרחב של $V$ אם $W$ היא מ״ו מעל $\mathbb{F}$ בפני עצמה, עם פעולות החיבור והכפל בסקלר מ- $V$.

**הגדרה 6.14**

תהי $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. קבוצת הפתרונות לממ״ל ההומוגנית $Ax = \underline{0}$ נקראת מרחב הפתרונות של $A$ ומסומנת ע״י $\mathsf{N}(A)$.

**טענה 6.15**

$\mathsf{N}(A)$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$.

**הגדרה 6.25**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, ..., v_k \in V$. צירוף לינארי (צ״ל) של $v_1, ..., v_k$ הוא וקטור מהצורה

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$$

כאשר $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$.

**הגדרה 6.28**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, v_2, ..., v_k \in V$. אז נגדיר את קבוצת כל הצירופים הלינאריים של וקטורים אלה:

$$\mathsf{Span}(v_1, ..., v_k) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k | \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}\}$$

**הגדרה 6.31**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש- $V$ נוצר סופית אם קיימים $v_1, ..., v_k \in V$ כך ש- $V = \mathsf{Span}(v_1, ..., v_k)$. במקרה זה גם נאמר שהקבוצה $\{v_1, ..., v_k\}$ פורשת את $V$. ניתן גם לומר (באופן פחות פורמלי) שהוקטורים $v_1, ..., v_k$ פורשים את $V$.

**הגדרה 6.36**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$. קבוצת וקטורים $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$ נקראת:
- תלויה לינארית (ת״ל) אם קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ שאינם כולם שווים ל- $0$ כך ש-

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V.$$

במקרה זה גם נאמר שהצירוף הלינארי באגף שמאל הוא לא טריוויאלי.
- בלתי תלויה לינארית (בת״ל) אם לכל $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ עבורם מתקיים

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V,$$

בהכרח מתקיים $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. צירוף לינארי זה נקרא טריוויאלי.

**מסקנה 6.42**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_l \in V$.
א. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ ת״ל, אז $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_l\}$ ת״ל.
ב. אם $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_l\}$ בת״ל, אז $\{v_1, ..., v_k\}$ בת״ל.

**מסקנה 6.44**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $\{v_1, ..., v_k\} \in V$ בת״ל ו- $w \in V$ כך שמתקיים $w \notin \text{Span}(v_1, ..., v_k)$. אז $\{v_1, ..., v_k, w\}$ בת״ל.

**מסקנה 6.45**

'latex= אם $\{v_1, ..., v_k\}$ קבוצה הפורשת מ״ו $V$ מעל $\mathbb{F}$, אז תת-הקבוצה

$$\{v_i | 1 \leq i \leq k, v_i \notin \text{Span}(v_1, ..., v_{i-1})\}$$

היא בת״ל ופורשת את $V$.

**הגדרה 6.48**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $B = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ נקראת בסיס ל- $V$ אם היא בת״ל וגם פורשת את $V$, כלומר $v_1, ..., v_n$ בת״ל ובנוסף $\text{Span}(B) = V$.

**הגדרה 6.51**

יהי $V = \{0_V\}$. עבור קבוצת וקטורים ריקה $\emptyset = \{\}$ נגדיר

$$\text{Span}(\emptyset) = \{0_V\}.$$

**טענה 6.53**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$. אז התנאים הבאים שקולים:
- ל- $V$ קיים בסיס.
- $V$ נוצר סופית, כלומר קיימת תת-קבוצה סופית הפורשת אותו.

**מסקנה 6.55**

'latex= יהיו $v_1, ..., v_k \in \mathbb{F}^n$.
א. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ בת״ל, אז $k \leq n$.
ב. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ פורשת את $\mathbb{F}^n$, אז $k \geq n$.
ג. אם $\{v_1, ..., v_k\}$ היא בסיס ל- $\mathbb{F}^n$, אז $k = n$.

**מסקנה 6.59**

'latex= יהיו $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורה. אז $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$.

**הגדרה 6.62**

בסיס סדור $B = \{v_1, ..., v_n\}$ למ״ו $V$ הוא בסיס יחד עם סדר על איבריו (כלומר יש חשיבות לסדר כתיבתם).

**הגדרה 6.65**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס סדור ל- $V$. לכל $v \in V$ קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ יחידים כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. אז עבור $v$ נגדיר את וקטור הקואורדינטות שלו ביחס ל- $B$ ע״י

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

**מסקנה 6.68**

'latex=' יהיו $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור ל- $V$, ו- $u,w_1,...,w_k\in V$. אז מתקיים

$$u\in \text{Span}(w_1,...,w_k) \iff [u]_B\in \text{Span}([w_1]_B,...,[w_k]_B).$$

**מסקנה 6.71**

'latex=' יהיו $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, $B=\{b_1,...,b_n\}$ בסיס ל- $V$ ו- $v_1,...,v_k\in V$.

א. אם $\{v_1,...,v_k\}$ בת״ל, אז $k\le n$.

ב. אם $\{v_1,...,v_k\}$ פורשת את $V$, אז $k\ge n$.

ג. אם $\{v_1,...,v_k\}$ היא בסיס ל- $V$, אז $k=n$.

**מסקנה 6.72**

יהי $V$ מ״ו נוצר סופית, כלומר קיים לו בסיס. אז כל שני בסיסים ל- $V$ הם שווי גודל.

**הגדרה 6.73**

גודל בסיס כלשהו של מ״ו $V$ נקרא המימד של $V$. סימונו הוא $\dim(V)$.

**מסקנה 6.78**

'latex=' יהי $V$ מ״ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $W$ תת-מרחב. אז מתקיים:

א. $W$ נוצר סופית ומתקיים $\dim(W)\le\dim(V)$.

ב. אם $\dim(W)=\dim(V)$, אז $W=V$.

# פרק 7: תת-מרחבים

**הגדרה 7.1**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ תת-מרחבים. אז החיתוך $W_1 \cap W_2$ הוא קבוצת כל הוקטורים השייכים גם ל- $W_1$ וגם ל- $W_2$, כלומר
$W_1 \cap W_2 = \{v \in V | v \in W_1, v \in W_2\}$.

**טענה 7.4**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ תת-מרחבים. אז $W_1 \cap W_2$ הוא תת-מרחב של $V$.

**הגדרה 7.8**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ תת-מרחבים. אז הסכום $W_1 + W_2$ מוגדר ע״י

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

**טענה 7.9**

יהי $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ תת-מרחבים. אז $W_1 + W_2$ הוא תת-מרחב של $V$, המקיים $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ וגם $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

**מסקנה 7.14**

יהיו $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$ ו- $W_1, W_2 \subseteq V$. אז מתקיים:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) \leq \dim(W_1 + W_2) \leq \dim(V)$$

ובאופן דומה:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_2) \leq \dim(W_1 + W_2) \leq \dim(V)$$

**משפט 7.16**

'latex=' יהי $V$ מ״ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ תת-מרחבים. אז מתקיים

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$