

## 新混沌系统的动力学分析

张转周, 刘衍民, 秦 进

(遵义师范学院 数学学院, 贵州 遵义 563006)

**摘 要:** 基于动力系统的理论和方法, 构造出一个具有复杂混沌吸引子的非线性混沌自治三维系统. 其与经典的混沌系统具有类似的结构与性态. 采用理论分析和 Matlab 仿真相结合的方式研究, 得到了系统在平衡点处不稳定的参数范围. 通过分岔图和 Lyapunov 指数谱进一步揭示了系统丰富的动力学行为, Matlab 模拟验证了计算理论的正确性.

**关键词:** 混沌系统; 稳定性; 分岔; Lyapunov 指数

在二十世纪初期, 法国学者庞加莱在《科学与方法》一书中明确指出了三体问题解的随机性, 成为国际上第一位预见到混沌现象的人. 1963 年 Lorenz 得到第一个混沌系统之后, 许多新的混沌系统 (Chaoticsystems) 也陆续提出, 并且得到了广泛的应用<sup>[1-4]</sup>. 1999 年, 陈关荣利用反控制的方法发现了一个与 Lorenz 系统不同的混沌系统称为 Chen 系统. 文献 [5-6] 提出并实现了两个特殊的吸引子, 即多涡旋混沌吸引子和 Lyapunov 指数恒为常数的吸引子. 2010 年, Liu 提出了一个新的类 Lorenz 混沌系统<sup>[7]</sup>. 这些典型混沌系统的出现极大推动了非线性科学的发展.

本文提出了一个新的三维混沌系统, 通过理论推导并利用 Matlab 数值仿真对系统的动力学特性进行了分析研究, 得到系统的 Lyapunov 指数和维数, 给出了系统数值仿真图、Poincare 映射图、Lyapunov 指数谱和分岔图, 重点分析了不同参数变化对系统动力学行为的影响. 通过分岔图和 Lyapunov 指数谱进一步揭示了系统丰富的动力学行为, Matlab 模拟验证了计算理论的正确性, 为实际应用提供了重要依据.

### 1 建立模型

基于 Lorenz 系统模型, 构建了一个新的三维混沌系统, 下面对其加以介绍和分析.

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = -y + xz \\ \dot{z} = -xy - (a+c)z + b \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2016-09-27

资助项目: 国家自然科学基金 (71461027, 71471158); 贵州省科学技术基金项目 (黔科合 LH 字 [2015]7005 号); 贵州省教育厅青年科技人才成长项目 (黔教合 KY 字 [2017]256); 贵州省自然科学基金 (黔教合 KY[2014]295); 遵义市创新人才团队 (遵市科合 (2015)38 号); 遵义师范学院教研项目 (15-29) 基金资助项目; 贵州省科技合作项目 (黔科 LH 字 [2015]7042 号)

其中,  $(x, y, z)^T \in R^3$ , 为状态变量,  $a, b, c$  为实参数, 且  $a > 0, b > 0, a > -c$ , 系统 (1) 中仅含有 2 个非线性项  $xz, xy$ . 系统 (1) 的矩阵形式如下:  $\dot{X} = AX + f(X)$ , 其中:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+c) \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ xz \\ b - xy \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

可通过数学证明 (1) 与 Lorenz 系统族中的每一个都不拓扑等价, 是一个新的混沌三维系统.

## 2 系统的动力学行为

### 2.1 对称性、不变形

系统 (1) 在  $T: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  下保持不变, 故系统 (1) 关于  $z$  轴对称, 即如果  $\alpha$  是系统的解, 则在变换  $T\alpha$  下的解也满足系统 (1), 显然  $z$  轴也是系统中的一条解轨迹, 因此对于  $t \rightarrow 0$ , 轴上所有的解轨迹都趋近于  $(0, 0, 0)$ .

### 2.2 吸引子的存在性和耗散性

系统 (1) 的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ z & -1 & x \\ -y & -x & -(a+c) \end{bmatrix}$$

根据 Liouville 定理, 则向量场散度  $\nabla v = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = -(2a+c+1) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$  其中,  $\lambda_i (i=1, 2, 3)$  为矩阵  $J$  的特征根.

由于  $2a+c+1 > 0$ , 所以系统 (1) 是耗散的, 且以指数形式  $v(t) = v(0)e^{-(2a+c+1)t}$  收敛.

从而系统 (1) 的轨线都会被限制在一个体积为零的集合上, 并且动力学被固定在一个吸引子上, 因此吸引子是存在的.

### 2.3 平衡点的稳定性分析

经求解, 算出系统 (1) 的 3 个平衡点分别为:

$$O\left(0, 0, \frac{b}{a+c}\right), P_+\left(\sqrt{b-a-c}, \sqrt{b-a-c}, 1\right), P_-\left(-\sqrt{b-a-c}, -\sqrt{b-a-c}, 1\right)$$

根据系统 Jacobian 矩阵可得特征方程为:

$$\lambda^3 + (2a+c+1)\lambda^2 + (2a+c+a^2+ac-az+x^2)\lambda + a^2+ac+axy-a(a+c)z+ax^2=0 \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  为特征根.

将平衡点  $O\left(0, 0, \frac{b}{a+c}\right)$  代入特征方程得:

$$\lambda^3 + (2a+c+1)\lambda^2 + \left(2a+c+a^2+ac-\frac{ab}{a+c}\right)\lambda + a^2+ac-ab=0$$

当  $a^2+ac-ab < 0$  时, 由 Routh-Hurwitz 定理知平衡点  $O$  是不稳定的, 由于  $P_+, P_-$  具有对称性, 这里只对  $P_+$  进行讨论.

将  $P_+(\sqrt{b-a-c}, \sqrt{b-a-c}, 1)$ , 代入特征方程中有:

$$\lambda^3 + (2a+c+1)\lambda^2 + (a^2+ac+b)\lambda + 2a(b-a-c) = 0$$

则平衡点  $P_+$  不稳定的参数条件为:

$$b < \frac{(a^2+ac)(2a+c+3)}{c+1} \quad (3)$$

## 2.4 吸引子数值仿真

当参数  $a=5, c=-4$  时, 由 (3) 可知系统 (1) 在  $b>15$  时处于不稳定状态, 这里取  $b=16$ . 这时  $-(2a+c+1)=-7<0$ , 则系统是耗散的, 平衡点为:

$$O(0,0,16), P_+(\sqrt{15}, \sqrt{15}, 1), P_-(-\sqrt{15}, -\sqrt{15}, 1) \quad (4)$$

由式 (2) 可得平衡点  $O$  的特征值:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3+2\sqrt{21}, \lambda_3 = -3-2\sqrt{21}$

因此, 平衡点  $O$  是不稳定的, 同理可知,  $P_+, P_-$  都是稳定的. 这里给定参数  $a=5, b=16, c=-4$ , 系统初值为  $(0.1, 0.1, 0.1)$ , 可以得到原系统的一个混沌吸引子的 Matlab 仿真图, 如图 1. 为了观察平衡点的特性, 这里保持参数  $a, b, c$  的取值不变, 分别取系统初值为  $(3.87, 3.87, 1)$  和  $(-3.87, -3.87, 1)$ , 可以得到系统 (1) 在不同初值下的混沌吸引子, 如图 2. 通过图 2 发现当系统所取初值接近平衡点时, 混沌吸引子的形态有所改变, 即形成吸引子的同时也围绕稳定的平衡点  $P_+$  和  $P_-$  做不规则的环境运动, 使相轨迹在平衡点的某个邻域内变得十分密集.

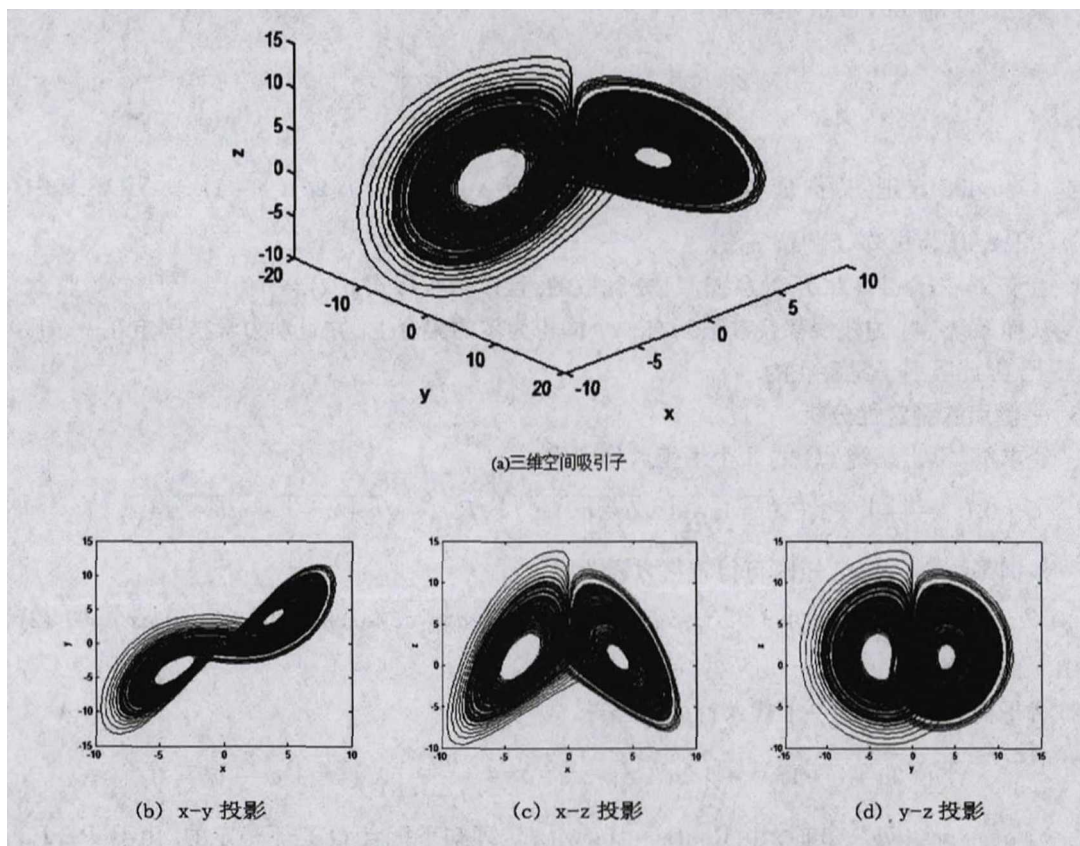


图 1 系统 (1) 的一个混沌吸引子数值仿真

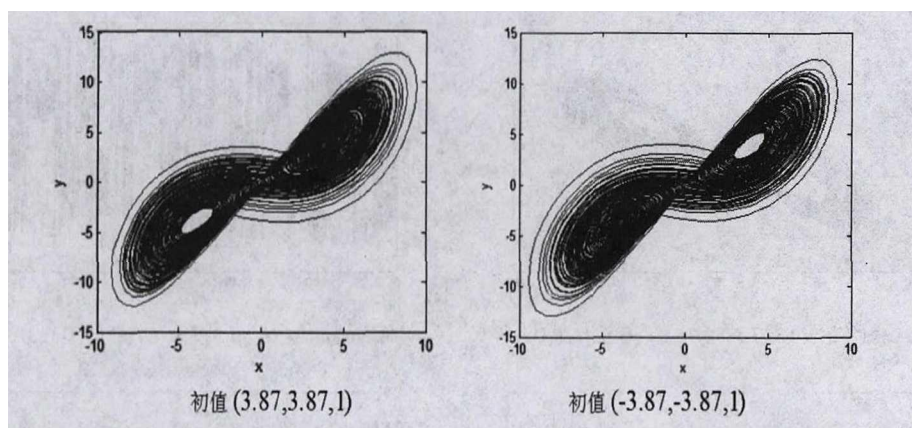


图 2 参数  $a = 5, b = 16, c = -4$  时, 系统 (1) 不同初值下的混沌吸引子

### 3 动力学行为分析

固定  $a = 5, c = -4$ , 参数  $b \in [0, 300]$ , 初值  $(0.1, 0.1, 0.1)$  系统的分岔图及 Lyapunov 指数. 如图 3 所示. 随着  $b$  的增大, 系统由不动点进入一个较大的含有多个周期窗口的混沌区域, 在每个周期窗口都有逆、倍周期分岔现象, 都是周期混沌的阵发过渡. 由 Kaplan - Yorke 猜想公式, 确定系统吸引子的分数维很低, 这与 Lorenz 系统类似. 值得注意的是, 取初值  $(0.1, 0.1, 0.1)$  和  $(3.87, 3.87, 1)$  时, 系统表现出不同的性态. 当  $b = 13.73$  时, 在初值  $(0.1, 0.1, 0.1)$  下表现为混沌态, 而当初值为  $(3.87, 3.87, 1)$  时则出现周期运动的极限环, 发生了超临界的 Hopf 分岔现象.

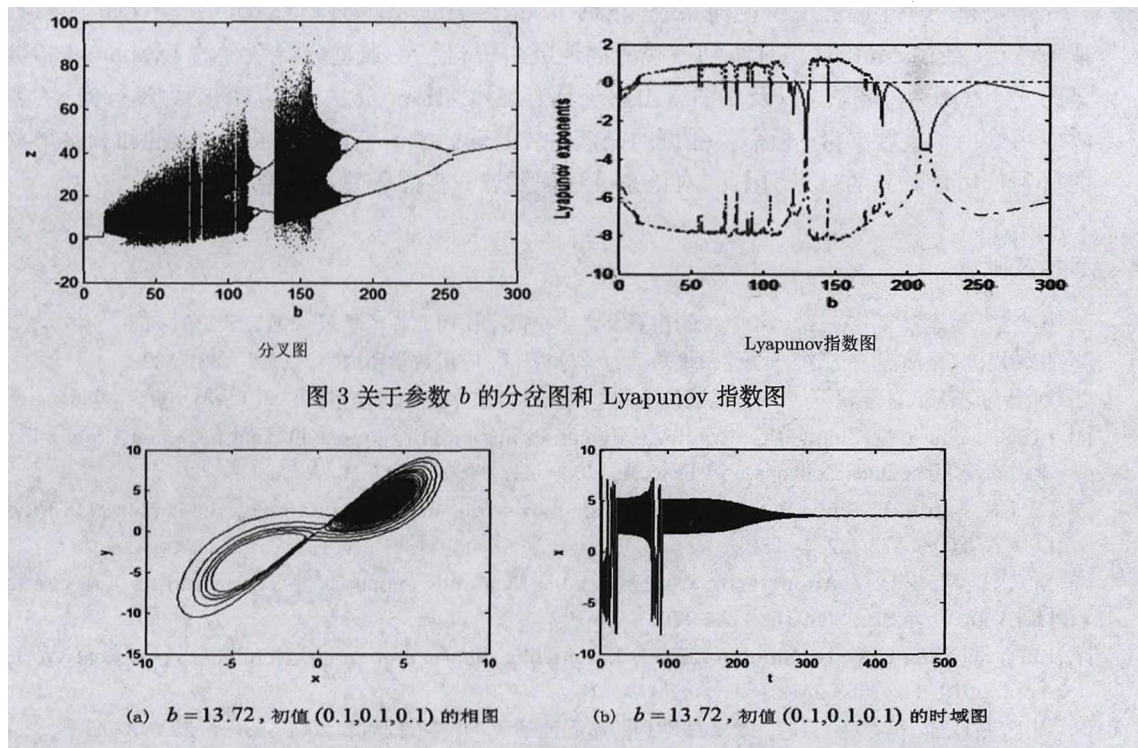
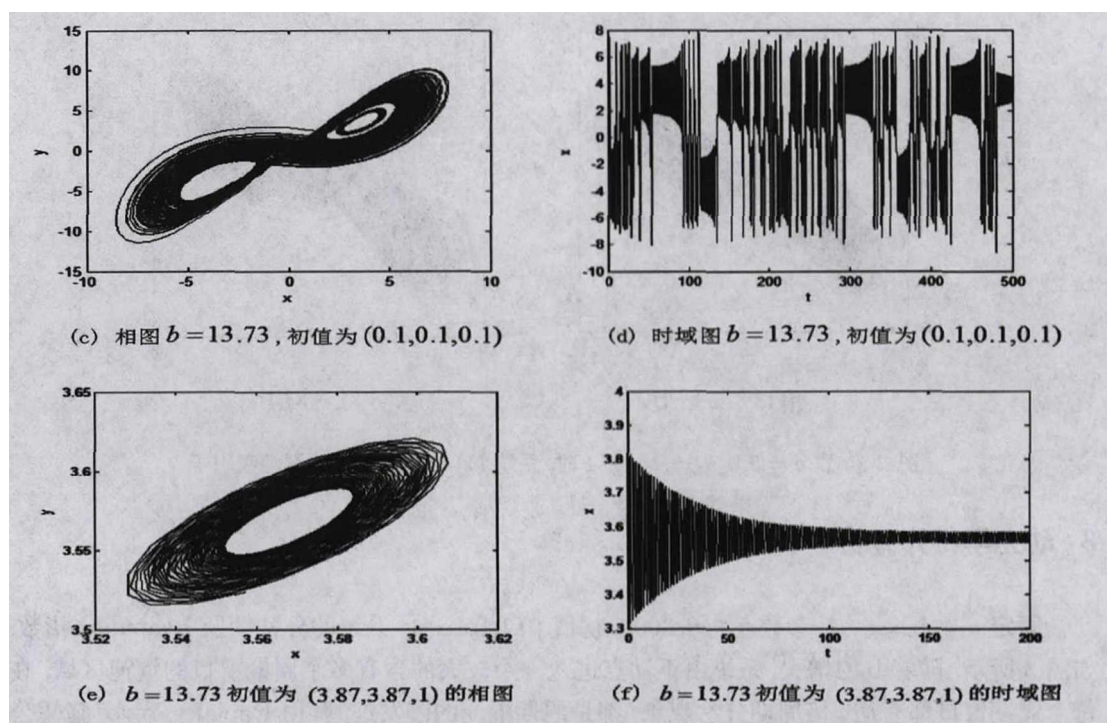


图 3 关于参数  $b$  的分岔图和 Lyapunov 指数图



图4 参数  $a=5, c=-4$  时系统的相图和时域图

## 4 结论

本文建立一个新的三维混沌系统, 依据 Routh - Hurwitz 定理计算出系统不稳定的参数取值范围. 经过 Matlab 仿真得到系统的混沌吸引子. 最后, 通过分析系统的 Lyapunov 指数谱图、分岔图、时域图、以及相图得出系统具有混沌、Hopf 分岔等丰富的动力学行为, 为实际应用给出了重要参考. 但需要强调的是该系统的动力学研究还有待提升, 混沌和分岔形成的机理依然是研究的难点. 因此, 对该系统还需要进一步的研究并完善.

## 参考文献

- [1] 杨留猛, 俞建宁等. 新三维自治系统的仿真及电路模拟 [J]. 河北师范学报, 2013, 7: 354-358.
- [2] 张转周, 陕振沛等. 新三维非线性系统的动力学分析 [J]. 应用数学和力学, 2013: 1321-1326.
- [3] 刘凌, 苏燕辰, 刘崇新. 一个新混沌系统及其电路仿真实验 [J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3933-3936.
- [4] Li X F, Chu Y D, Zhang J G. Nonlinear dynamics and circuit implementation for a new Lorenz-like attractor [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2009, 41: 2360-2370.
- [5] Lü J H, Murali K, Sinha S, et al. Generating multi-scroll chaotic attractors by thresholding [J]. Phys Lett A, 2008, 372: 3234-3239.
- [6] Li C B, Wang D C. An attractor with invariable Lyapunov exponent spectrum and its Jerk circuit [J]. Acta Phys Sin, 2009, 58: 764-770.
- [7] Liu Y J, Yang Q G. Dynamics of a new Lorenz-like chaotic system [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2010, 11: 2563-2572.
- [8] 周平, 危丽佳, 程雪峰. 只有一个非线性项的超混沌系统 [J]. 物理学报, 2009, 58(8): 5201-5208.

- [9] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 [M]. 科学出版社, 2005: 11-19.

## Dynamical Analysis of New Chaotic System

ZHANG Zhuan-zhou, LIU Yan-min, QIN Jin

(College of Mathematics, Zunyi Normal University, Zunyi 563006, China)

**Abstract:** This research is undertaken to build a three-dimensional autonomous chaotic nonlinear system with complex chaotic attractors based on the theory and method of dynamical system, which is similar to the classical chaotic system in structure and behavior. The unstable range of parameters at the equilibrium point of the system is detected through theoretical analysis and Matlab simulation. The research further unfolds many dynamical behaviors of the system by bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum. The theoretical calculation has been proved correct through Matlab simulation.

**Keywords:** Chaotic systems; stability; bifurcation diagram; Lyapunov-exponent spectrum.