

新三维混沌系统的复杂动力学分析

赵 慧^{1,2}, 赖 强^{3*}(1. 南昌理工学院 电子与信息学院, 南昌 330044; 2. 江西科技师范大学 通信电子学院, 南昌 330013;
3. 华东交通大学 电气与自动化工程学院, 南昌 330013)

摘 要: 提出了一个含立方项的新三维连续混沌系统. 分析了该系统平衡点的稳定性. 运用分岔图、Lyapunov 指数谱、相平面图等数值仿真研究了系统的动力学行为. 对不同的参数值条件, 系统将呈现出单稳定性、单周期、单混沌状态. 对不同的参数值和初值, 系统存在双稳定性、双周期以及双混沌吸引子现象.

关键词: 混沌系统; 平衡点; 分岔图; Lyapunov 指数

中图分类号: O415.5

文献标识码: A

混沌是一类非常重要的物理现象, 具有遍历性、有界性、初值敏感性等典型特征, 可被应用于工程技术的诸多领域, 如保密通信、天气预测、故障诊断等. 自经典的 Lorenz 混沌吸引子被发现以来^[1], 学者们对混沌开展了大量的研究工作. 各种类型的混沌系统被广泛提出, 如 Chen 系统^[2]、Lyu 系统^[3]、Sprott 系统^[4]、无平衡点混沌系统^[5]、指数型混沌系统^[6]、多涡卷和多翅膀混沌系统^[7]等. 近年来, 随着研究的逐步深入, 学者们发现一些具有简单方程组合的连续混沌系统往往能够表现出多个混沌吸引子共存的现象. 这些混沌吸引子具有各自独立的吸引域, 它们的产生并不简单依赖于系统参数, 而且与系统初始条件有密切联系. Li 和 Sprott 提出了一个连续三维自治混沌系统, 该系统能够同时存在一个周期吸引子、两个点吸引子和两个奇怪吸引子^[8]. Guan 等人提出了一个新混沌系统, 运用理论分析和数值仿真充分展示了系统中的多共存吸引子现象^[9]. Kengne 等人对只含一个立方非线性项的 Jerk 系统进行了研究, 指出系统在相平面空间中同时存在两个周期吸引子和两个混沌吸引子^[10]. Wei 等人研究了广义超混沌 Rabinovich 系统, 发现该系统具有隐藏吸引子和多周期吸引子^[11]. Zarei 提出了只含一个平衡点的五维超混沌系统, 该系统有四翼混沌吸引子和多共存吸引子^[12]. 尽管目前已有部分关于含多个吸引子的混沌系统的研究工作, 但总体来说该类研究还处在初

步阶段, 仍需要深入展开. 此外, 构造一些新的具有不同拓扑结构和复杂动态行为的混沌系统仍然是混沌研究的一个重要且有挑战的研究课题, 能够为混沌应用提供更多的可能.

基于上述考虑, 本文提出了一个新的三维混沌系统, 该系统具有如下几个方面特点: 1) 有立方项和常数项; 2) 对不同的参数条件, 系统分别对应有一个稳定平衡点、两个稳定平衡点和一个不稳定平衡点、三个不稳定平衡点; 3) 系统有丰富的动力学行为, 对不同的参数和初值条件, 系统表现出单稳定性和双稳定性、单周期和双周期、单混沌和双混沌吸引子. 理论和仿真分析了系统的复杂动力学行为.

1 系统描述

本文提出的新三维混沌系统可用如下微分方程描述

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - yz, \\ \dot{y} = -by + xz, \\ \dot{z} = -cz + xyz + d, \end{cases} \quad (1)$$

其中, a, b, c, d 均为大于零的实数. 当 $a = 4, b = 9, c = 4, d = 4$ 时, 系统 (1) 有一个混沌吸引子, 如图 1 所示. 图 1(a)–1(c) 分别为系统 (1) 的三维相图、 $x-y$ 平面投影和 $x-z$ 平面投影. 图 1(d)–1(f) 为系统 (1) 的时间序列、Lyapunov 指数、Poincaré 截面. 此时系统的 Lyapunov 指数为 $L_1 =$

收稿日期: 2016-09-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61603137).

* 通讯联系人. E-mail: laiqiang87@126.com.

1.7729, $L_2 = 0, L_3 = -7.5949$, 对应的 Lyapunov 维数为 $D_L = 2 - L_1/L_3 = 2.2334$. 系统 (1) 是分数维的, 且有正的 Lyapunov 指数, 故系统存在混沌吸引子.

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, 可以求得系统 (1) 的平衡点. 当 $d \geq c\sqrt{ab}$, 系统 (1) 有唯一的平衡点 $O(0, 0, d/c)$; 当 $d < c\sqrt{ab}$, 系统 (1) 有如下 3 个平衡点:

$$O(0, 0, d/c),$$

$$O_1(\sqrt{(c\sqrt{ab}-d)/a}, \sqrt{(c\sqrt{ab}-d)/b}, \sqrt{ab}),$$

$$O_2(-\sqrt{(c\sqrt{ab}-d)/a}, -\sqrt{(c\sqrt{ab}-d)/b}, \sqrt{ab}).$$

系统 (1) 在平衡点 O 处对应的特征方程为 $(\lambda + c)[c^2\lambda^2 + (b-a)c^2\lambda - abc^2 + d^2] = 0$. 根据 Routh-Hurwitz 定理可知: 当 $d < c\sqrt{ab}$, 平衡点 O 是不稳定的; 当 $d > c\sqrt{ab}, b > a$, 平衡点 O 是稳定的. 当 $d = c\sqrt{ab}$, 此时特征方程的根为分别 $\lambda_1 =$

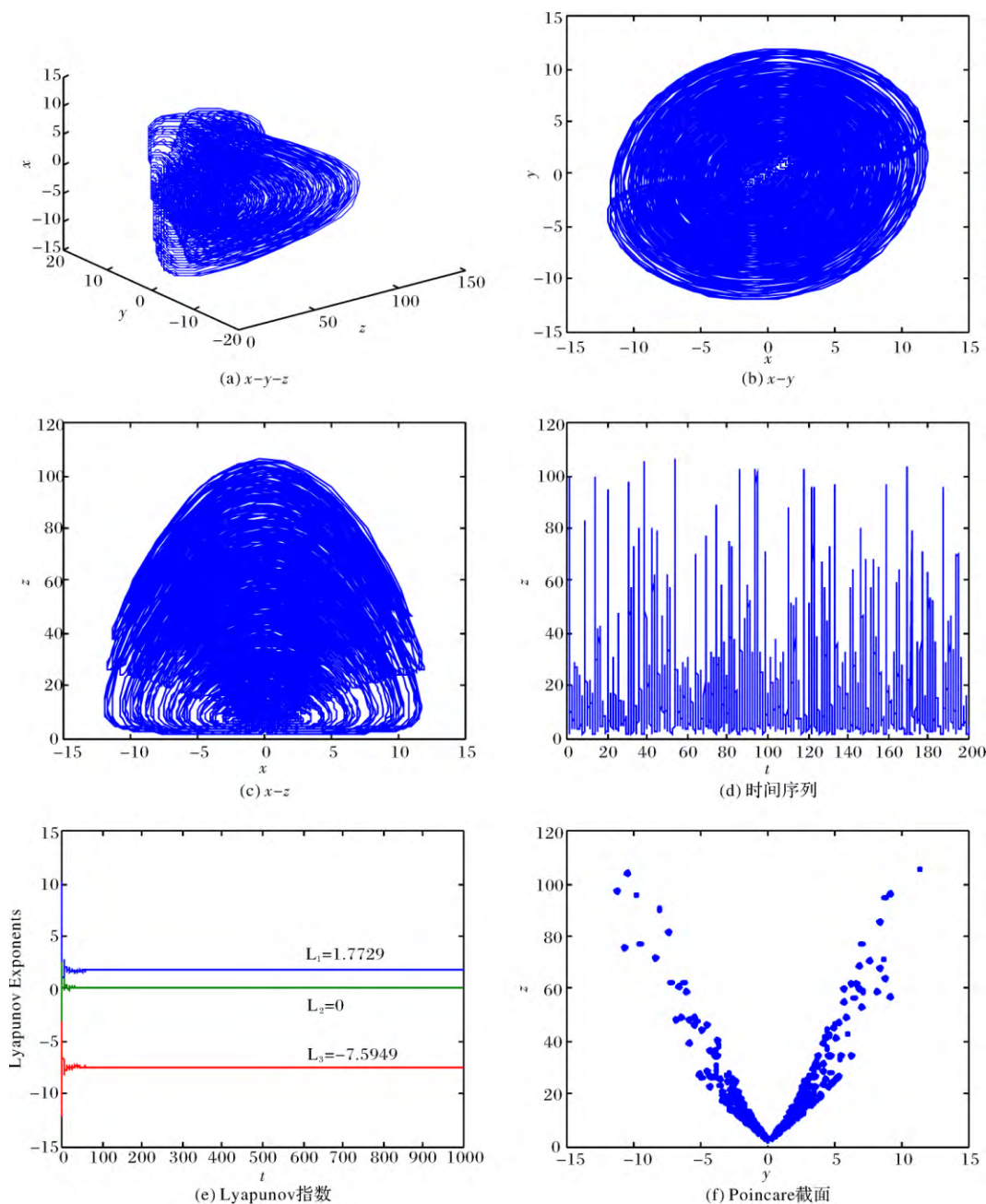


图 1 系统 (1) 的混沌吸引子

Fig. 1 Chaotic attractor of system

$-c, \lambda_2 = a - b, \lambda_3 = 0$, 有实部为 0 的根, 故平衡点 O 是非双曲平衡点, 其稳定性可由中心流形定理判定.

系统 (1) 在平衡点 O_1, O_2 处有相同的特征方程

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0,$$

其中,

$$p_1 = \left(b - a + \frac{d}{\sqrt{ab}}\right),$$

$$p_2 = (a - b)\left(c - \frac{2d}{\sqrt{ab}}\right),$$

$$p_3 = 4ab\left(c - \frac{d}{\sqrt{ab}}\right).$$

如果 $b > a, d < c\sqrt{ab} < 2d$, 则参数 p_1, p_2, p_3 均大于零. 根据 Routh-Hurwitz 定理可知, 若此时有 $p_1 p_2 > p_3$, 则平衡点 O_1, O_2 稳定.

当 $a = 4, b = 9, c = 4, d = 4$, 系统的平衡点为 $O(0, 0, 1), O_1(2.828, 1.886, 6), O_2(-2.828, -1.886, 6)$, 其中 O 对应的特征值为 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -8.9226, \lambda_3 = 3.9226$, O_1, O_2 对应的特征值为 $\lambda_1 = -10.9162, \lambda_{2,3} = 2.6248 \pm 6.0895i$. 显然 O, O_1, O_2 都为不稳定鞍点.

2 动态行为分析

取系统参数 $a = 4, b = 9, c = 4$, 初值为 $x_0 = (1, 1, 1)$, 可得系统 (1) 随参数 d 变化的分岔图和 Lyapunov 指数如图 2 所示. 从图 2 可知, 参数 d 从 5 增加到 25 的过程中, 系统 (1) 分别经历了混沌、周期以及稳定状态. 当 $d = 6$ 或 $d = 9$ 时, 系统 (1) 有一个混沌吸引子如图 3(a) 和 3(a) 所示. 当 $d = 18$ 时, 系统有一个周期吸引子如图 3(c) 所示. 当 d

$= 19$ 时, 系统 (1) 有 3 个不稳定的平衡点, 此时可以观察到系统 (1) 从两个不同初值 $x_0 = (1, 1, 1)$ (实线) 和 $x'_0 = (-1, -1, 1)$ (虚线) 出发的轨线最终趋于不同的周期状态, 即系统 (1) 同时存在两个周期吸引子, 如图 3(d) 所示. 当 $d = 20$, 系统 (1) 有一个不稳定平衡点 $O(0, 0, 5)$ 和两个稳定平衡点 $O_1(1, 2/3, 6), O_2(-1, -2/3, 6)$. 仿真可得系统 (1) 有两个不同的稳定状态分别对应于初值 x_0 (实线) 和 x'_0 (虚线), 如图 3(e) 所示. 当 $d = 25$ 时, 系统 (1) 只有一个稳定的平衡点 $O(0, 0, 25/4)$, 此时系统 (1) 从初值 $x_0, x'_0, x_1 = (0.5, 0.5, 1), x'_1 = (-0.5, -0.5, 1)$ 出发的轨线最终渐近趋于平衡点 O , 如图 3(f) 所示.

取系统参数 $a = 2, b = 8, d = 4$, 初值为 $x_0 = (1, 1, 1)$, 可得系统 (1) 随参数 c 变化的分岔图和 Lyapunov 指数如图 4 所示. 对于不同的参数值 c , 系统 (1) 将出现不同的稳定状态、周期状态以及混沌状态. 当 $c = 1$ 时, 系统 (1) 只有一个稳定平衡点 $O(0, 0, 4)$, 从不同初值出发的轨线最终都将趋于该平衡点, 系统 (1) 是稳定的. 当 $c = 1.2$ 时, 系统 (1) 有一个不稳定的平衡点和两个稳定的平衡点. 仿真可得系统 (1) 有两个不同的稳定状态分别对应于初值 $x_0 = (1, 1, 1)$ (实线) 和 $x'_0 = (-1, -1, 1)$ (虚线), 如图 5 所示. 当 $c = 1.5$ 时, 系统 (1) 有存在两个周期吸引子分别对应于初值条件 x_0, x'_0 , 如图 6 所示. 当 $c = 2$ 时, 系统只含有一个周期吸引子, 如图 7 所示. 当 $c = 2.9$ 时, 系统有两个不同的混沌吸引子分别对应于初值 x_0, x'_0 , 如图 8 所示. 当 $c = 6$ 时, 系统有一个混沌吸引子, 如图 9 所示.

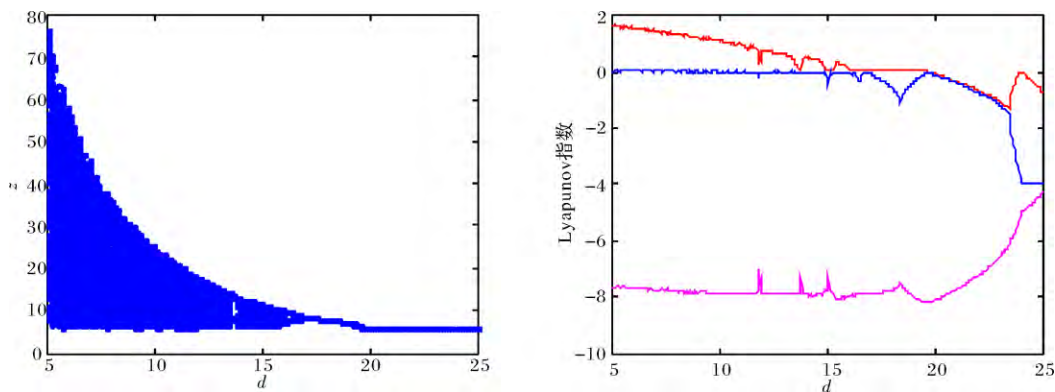


图2 系统 (1) 对应参数 $d \in (5, 25)$ 的分岔图和 Lyapunov 指数

Fig. 2 Bi-furcation diagram and Lyapunov exponents of system (1) versus $d \in (5, 25)$

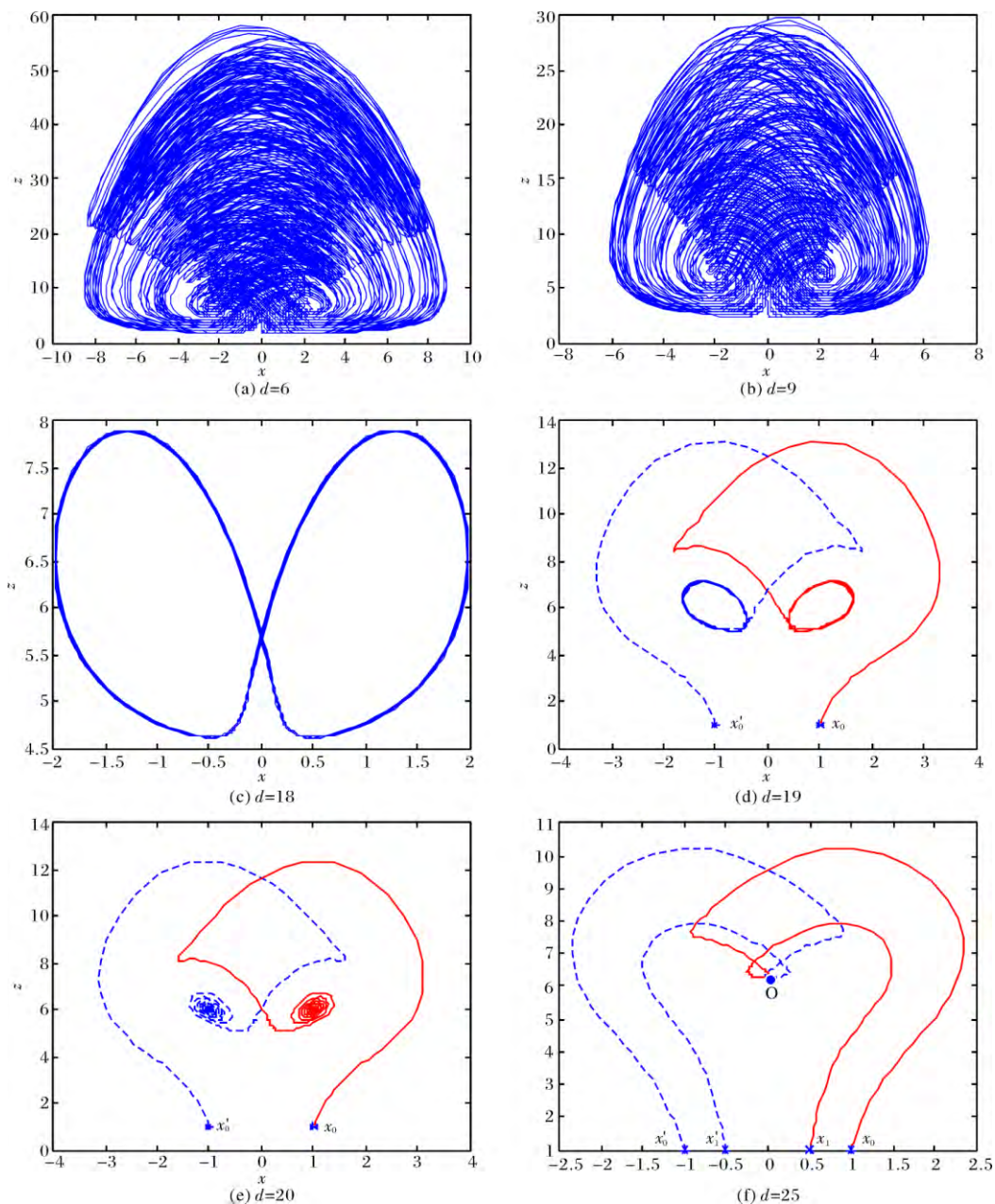
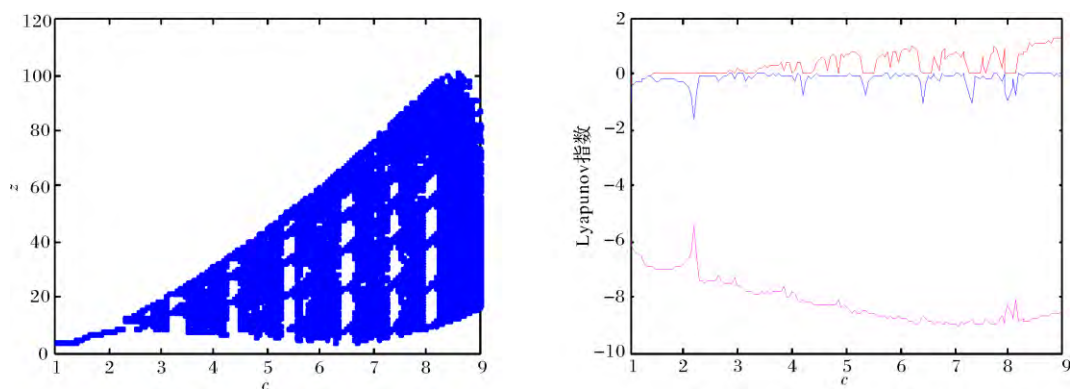
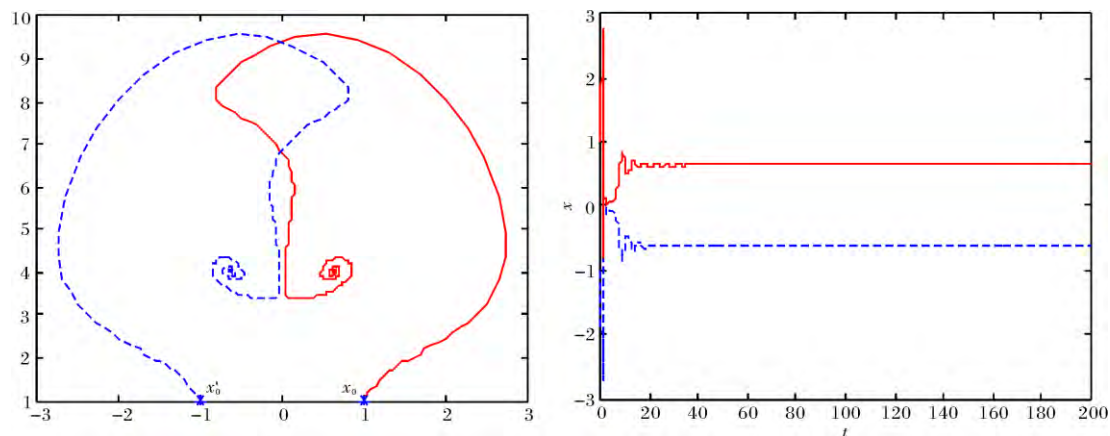
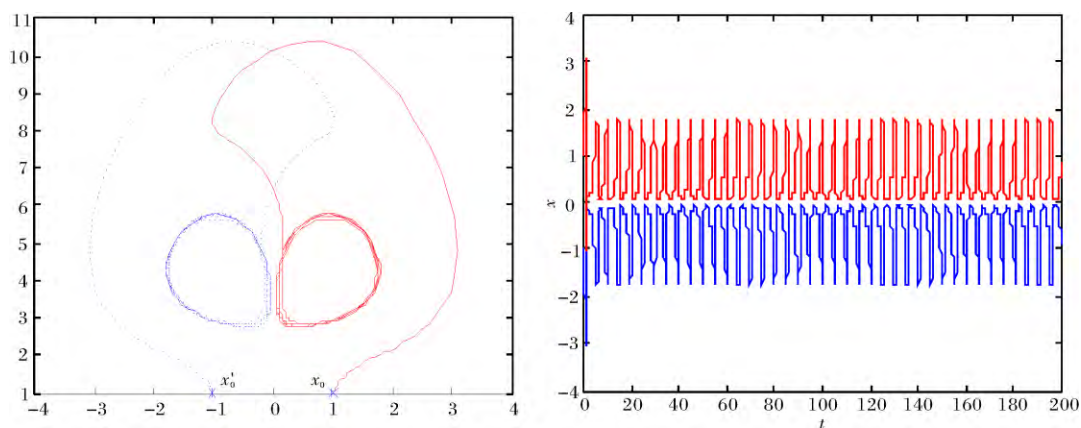


图 3 系统 (1) 的动态演化

Fig. 3 Dynamic evolution of system (1)

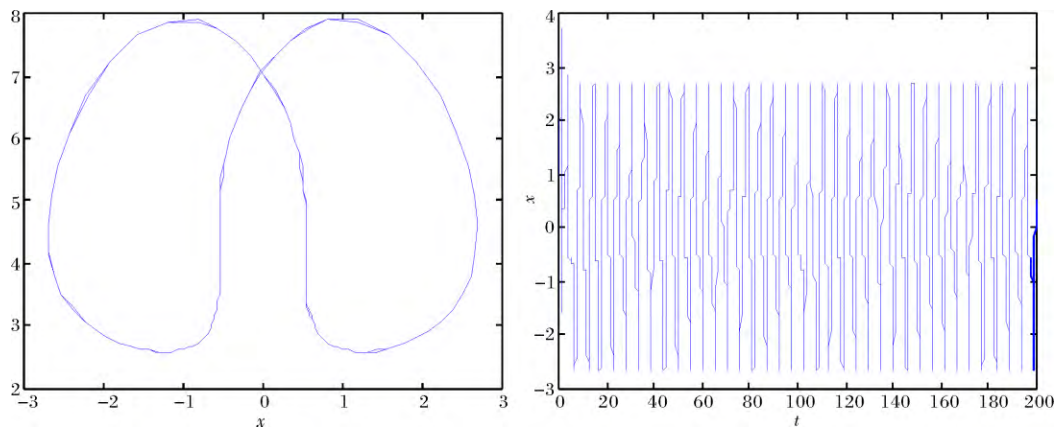
图 4 系统 (1) 对应参数 $c \in (1, 9)$ 的分岔图和 Lyapunov 指数Fig. 4 Bi-furcation diagram and Lyapunov exponents of system (1) versus $c \in (1, 9)$

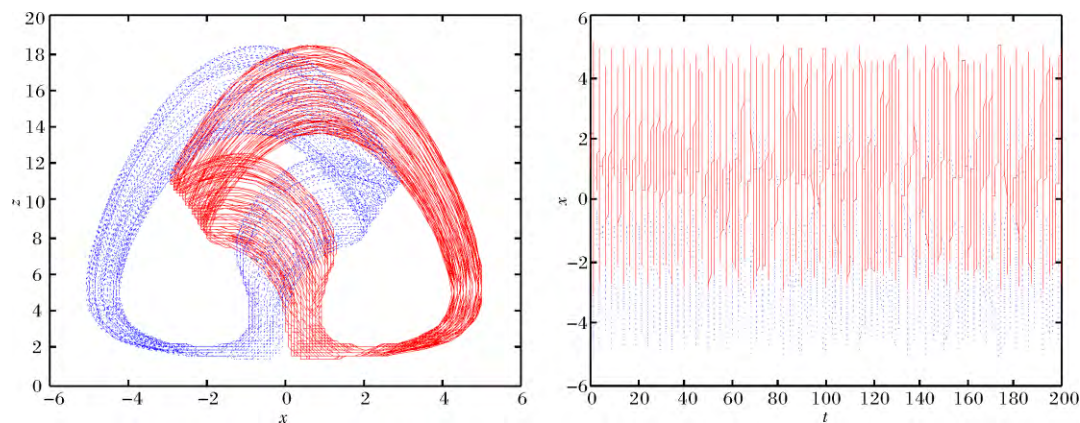
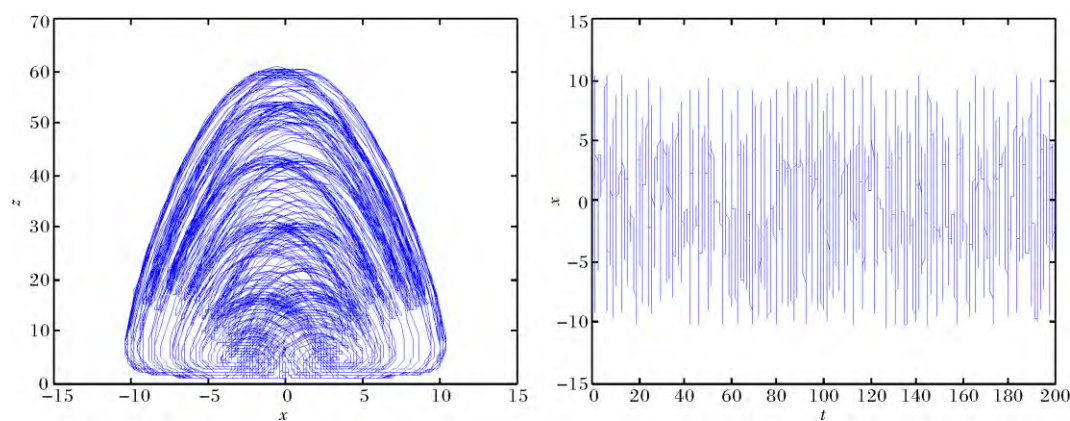
图 5 当 $c = 1.2$ 时, 系统 (1) 的双稳定性Fig. 5 Bi-stability of system (1) with $c = 1.2$ 图 6 当 $c = 1.5$ 时, 系统 (1) 的双周期Fig. 6 Bi-periodicity of system (1) with $c = 1.5$

3 结论

本文提出了一个新三维连续自治混沌, 分析了该系统平衡点的稳定性. 通过数值仿真展示了系统的复杂的动力学行为. 研究结果显示, 当取不同的

参数值时, 系统分别出现单稳定状态、单周期状态和单混沌状态. 对不同的系统初值, 系统还存在多共存吸引子现象, 包括双稳定性、双周期以及双混沌吸引子.

图 7 当 $c = 2$ 时, 系统 (1) 的周期吸引子Fig. 7 Periodic attractor of system (1) with $c = 2$

图 8 $c = 2.9$ 时系统 (1) 的两个混沌吸引子Fig. 8 Two coexisting chaotic attractors of system (1) with $c = 2.9$ 图 9 $c = 6$ 时系统 (1) 的混沌吸引子Fig. 9 Chaotic attractor of system (1) with $c = 6$

参考文献:

- [1] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flow[J]. J Atmos Sci, 1963, **20**(2): 130-141.
- [2] CHEN G, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. Int J Bifur Chaos, 1999, **9**(7): 1465-1466.
- [3] LU J, CHEN G. A new chaotic attractor coined[J]. Int J Bifur Chaos, 2002, **12**(3): 659-661.
- [4] SPROTT J C. Simple chaotic systems and circuits[J]. Am J Phys, 2000, **68**(8): 758-763.
- [5] JAFARI S, SPROTT J C, GOLPAYEGAN S M. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria[J]. Phys Lett A, 2013, **377**(9): 699-702.
- [6] 高智中. 一个含指数项的新自治混沌系统的动力学分析[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2013, **47**(3): 312-315.
- [7] LAI Q, GUAN Z H, WU Y, et al. Generation of multi-wing chaotic attractors from a Lorenz-like system[J]. Int J Bifur Chaos, 2013, **23**(9): 1350152(1-10).
- [8] LI C B, SPROTT J C. Multistability in a butterfly flow[J]. Int J Bifur Chaos, 2013, **23**(12): 1294-1296.
- [9] GUAN Z H, LAI Q, CHI M, et al. Analysis of a new three-dimensional system with multiple chaotic attractors[J]. Nonlinear Dyn., 2014, **75**(1): 331-343.
- [10] KENG J, NJITACKE Z T, FOTSIN H B. Dynamical analysis of a simple autonomous jerk system with multiple attractors[J]. Nonlinear Dyn, 2016, **83**(1): 751-761.
- [11] WEI Z, YU P, ZHANG W, et al. Study of hidden attractors, multiple limit cycles from Hopf bifurcation and boundedness of motion in the generalized hyperchaotic Rabinovich system[J]. Nonlinear Dyn, 2015, **82**(1): 131-141.
- [12] ZAREI A. Complex dynamics in a 5-D hyper-chaotic attractor with four-wing, one equilibrium and multiple chaotic attractors[J]. Nonlinear Dyn, 2015, **81**(1): 585-605.

Complex dynamics of a new three-dimensional chaotic system

ZHAO Hui^{1,2}, LAI Qiang³

- (1. School of Electronic & Information, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330044;
2. College of Communication and Electronic, Jiangxi Science & Technology Normal University, Nanchang, 330013;
3. School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013)

Abstract: This paper presents a new three-dimensional continuous chaotic system with cubic nonlinearity. The stability of equilibrium point of the system is analyzed. By using numerical simulations such as bifurcation diagram, Lyapunov exponent spectrum and phase portrait, the dynamical behaviors of the system are investigated. For different parameter values, the system performs mono-stability, mono-cycle and single chaotic state. For different parameter values and initial values, the system performs bi-stability, bi-periodicity and two chaotic attractors.

Key words: chaotic system; equilibrium point; bifurcation diagram; Lyapunov exponent

.....
(上接第 154 页)

The properties of segregation in a vibrated polydispers granular mixtures

LI Rui

(Department of Physics, Hubei University of Education, Wuhan 430205)

Abstract: Using the molecular dynamics simulations, the segregation behavior of a vibrated two-dimensional granular system with a power-law particle size distribution is investigated. Species segregation is observed. It is found that larger particles have a greater extent of condensation in the low-temperature regions than the smaller particles. The granular segregation is more significant with the increase of disparity in particle size. Furthermore, the local particle size distribution maintains the same form as the overall size distribution.

Key words: granular gas; power-law size; segregation