August 26, 2025

Introdução a Teoria dos Conjuntos

Introdução

- Teoria dos conjuntos é a teoria matemática que trata das propriedades dos conjuntos;
- Na teoria dos conjuntos, um conjunto descrito como uma coleção de objetos bem definidos;
- Estes objetos são chamados de elementos do conjunto;
- Os elementos podem ser qualquer ente, por exemplo, números, nomes, figuras, conjuntos, etc;
- A Teoria dos Conjuntos exerceu profunda influência na construção de teorias matemáticas, como a lógica.

Definições

- Dentro da Teoria dos Conjuntos existem 3 tipos primitivos: conjunto, elemento e pertinência;
- Um conjunto é uma coleção de objetos, sem repetição e não ordenado;
- Para denotar um conjunto, usa-se letras maiúsculas: $A, B, C, \ldots$
- Para denotar um elemento, usa-se letras minúsculas: $a, b, c, \ldots$
- Se um elemento x pertence a um conjunto A, esta relação é denotada por $x \in A$;
- Se um elemento x não pertence a um conjunto A, esta relação é denotada por $x \notin A$;
- Para exibir os elementos que compõem o conjunto a seguinte representação é utilizada:

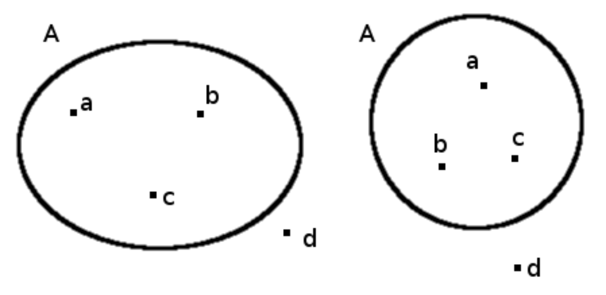
Exemplos

Defina os seguintes conjuntos:

- Conjunto das vogais;
- Conjunto dos naipes do baralho;
- Conjunto dos meses com 31 dias;
- Conjunto dos números primos menores que 20;

Diagrama de Euler-Venn

O diagrama de Euler-Venn, ou simplesmente diagrama de Venn, é uma representação gráfica muito útil para representação das relações primitivas de conjuntos.



Ambos digramas representam o mesmo conjunto, no entanto, Diagramas de Venn são representados por círculos!

Conjunto Unitário, Vazio e Universo

- Conjunto Unitário possui apenas um elemento;
- Conjunto Vazio não possui nenhum elemento;
- O conjunto Vazio é denotado por $\emptyset$;
- O conjunto Universo é o conjunto formado por todos os elementos referentes a um dado problema/definição;
- O conjunto Universo geralmente é denotado por Ω.

Exemplos

- Defina um conjunto Unitário utilizando uma propriedade característica;
- Defina uma propriedade característica cujo conjunto referente é vazio;
- Escreva um conjunto Universo qualquer.

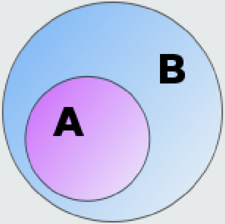
Igualdade entre conjuntos

- Dois conjuntos são iguais se todos elementos presentes em um deles está presente em outro e vice-versa;
- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$;
- Se A não é igual a B, então escrevemos $A \neq B$;
- São iguais os conjuntos abaixo?
  - {a, b, c, d} = {b, c, d, a}
  - {a, b, c, d} = {a, a, b, b, b, c, a, c, d, b}
  - {a, b, c, d} = {b, c, d, a, e}

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Subconjuntos

- Um conjunto A é Subconjunto de B se todo elemento pertencente a A também pertence a B;
- Denotamos a relação acima por $A \subset B$;
- $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $A \subset B$: "A está contido em B"
- $B \supset A$: "B contém A"
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, o que podemos concluir?



Propriedade da inclusão

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer:

1. Inclusão do Vazio: $\emptyset \subset A$
2. Reflexiva: $A \subset A$
3. Anti-simétrica: $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$
4. Transitiva: $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Descrição de um conjunto

- Existem duas formas usuais de definir os elementos de um conjunto:
  - Citar cada elemento do conjunto
  - Apresentar uma propriedade característica que os define de modo geral
- Exemplo: Citar os elementos (já exemplificado)
  - Conj. das vogais. A = {a, e, i, o, u}
  - Conj. dos algarismos romanos. B = {I, V, X, L, C, D, M}
  - Naipes do baralho. C = {Copas, Paus, Ouro, Espada}
  - Conj. dos Inteiros de 0 a 500. D = {0, 1, 2, ..., 500}
- Propriedade característica: A = {x|x tem propriedade P}
- Exemplo:
  - A = {x|x é Estado do sul do Brasil}
  - B = {x|x é divisor inteiro de 3}

Cardinalidade de um conjunto

- Define-se por "Cardinalidade" a quantidade de elementos de um dado conjunto;
- Existem diferentes formas de denotar a cardinalidade, as mais usuais são: $\Omega(A)$, $\#A$ e $|A|$;
- Exemplo: Se $A = \{a, b, c\}$, então $\#A = 3$

Introdução à Teoria dos Conjuntos

União entre conjuntos

- Dado dois conjuntos A e B quaisquer, a União de A e B é o conjunto formado por todos elementos pertencentes a A ou B;
- A relação de União é denotada por $\bigcup$;
- $A \bigcup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- Exemplo: Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d\}$, então $A \bigcup B = \{a, b, c, d\}$
- Propriedades:
  - Idenpotente: $A \bigcup A = A$
  - Elemento neutro: $A \bigcup \emptyset = A$
  - Comutativa: $A \bigcup B = B \bigcup A$
  - Associativa: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$

Interseção entre conjuntos

- Dado dois conjuntos A e B quaisquer, a Interseção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencentes a A e B, simultaneamente;
- A relação de Interseção é denotada por $\bigcap$;
- $A \bigcap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$
- Exemplo: Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, d, e\}$, então $A \bigcap B = \{c\}$
- Propriedades:
  - Idenpotente: $A \bigcap A = A$
  - Elemento neutro: $A \bigcap \Omega = A$
  - Comutativa: $A \bigcap B = B \bigcap A$
  - Associativa: $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$

Propriedades de Inter-relacionamento

Dados A, B e C conjuntos quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:

- $A \bigcup (A \bigcap B) = A$
- $A \bigcap (A \bigcup B) = A$
- $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$
- $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

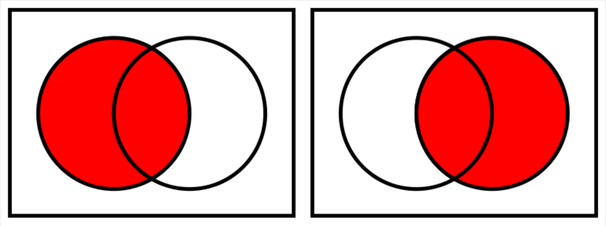
Diferença entre conjuntos

- Dado dois conjuntos A e B quaisquer, a Diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencentes a A e não pertencem a B;
- A diferença entre conjuntos é usualmente denotada por $-$ ou $\setminus$;
- $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$
- Exemplo: $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$
- Exemplo: $\{a, b, c\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$

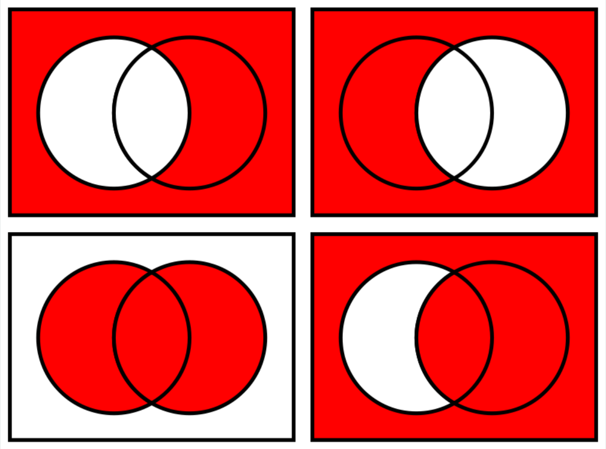
Relações entre conjuntos via diagramas de Venn.

Figuras:http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Venn*.svg

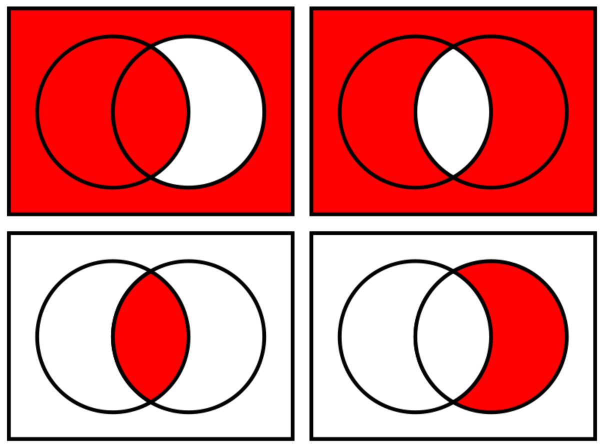
- O entendimento das relações apresentadas até agora podem ser melhorados com sua representação na forma de diagramas de Venn;
- Os exemplos seguintes tratam relações envolvendo apenas dois conjuntos, no entanto, estas relações podem facilmente ser estendida para mais conjuntos;



Determine as relações ilustradas abaixo



Determine as relações ilustradas abaixo



Determine as relações ilustradas abaixo