DEA（数据包络分析法）

汇报人：李梦冉

汇报时间：2022.10.30

一、数据包络分析法概念

数据包络分析（Data Envelopmengt Analysis,DEA）是一种基于被评价对象间相对比较的非参数技术效率分析方法，是由美国的Charnes、Cooper和Rhodes三人于1978年首次提出的。1978年Charnes、Cooper和Rhodes三人在《欧洲运筹学杂志》（European Journal of Operational Research）上发表了论文“Measuring the efficiency of decision making units”，创立了DEA理论方法（Charnes A,et al.,1978）。

由此产生第一个DEA模型，在后来的DEA文献中，以Charnes、Cooper和Rhodes三人姓氏的首字母来命名他们创立的第一个DEA模型，即CCR模型。CCR模型假设规模收益不变（Constant Returns to Scale,CRS），其得出的技术效率包含了规模效率的成分，因此通常被称为**综合技术效率**。其中，被评估单位或组织称为决策单元（Decision Making Unit），简称DMU。DMU之间具有可比性。

传统DEA模型具体又可细分为两种类型：

（1）DEA-CCR 模型：假定规模报酬不变的基础上，测量综合技术效率；

（2）DEA-BCC 模型：假设规模报酬可变，进一步测量纯技术效率和规模效率。

假设我们要测量一组共n个DMU的技术效率，记为DMU_J(j=1,2,⋯,n)；每个DMU有m种投入，记为x_i（i=1,2,⋯,m），投入的权重表示为v_i（i=1,2,⋯,m)；q种产出，记为y_r（r=1,2,⋯,q)，产出的权重表示为u_r（r=1,2,⋯,q)。当前要测量的DMU记为DMU_k，其产出投入比为：

$$h_k = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \cdots + u_q y_{qk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \cdots + v_m x_{mk}} = \frac{\sum_{r=1}^{q} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}} (v \geq 0; u \geq 0)$$

接下来给要测量的技术效率值附加一项条件，将所有DMU采用上述权重得出的效率值θ_j限定在[0,1]的区间内，即

$$\frac{\sum_{r=1}^{q} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}} \leq 1$$

(1) 投入导向的CCR模型的规划式

CCR模型是基于规模收益不变的模型，其线性规划模型表示为：

$$\max \frac{\sum_{r=1}^{q} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}}$$

$$s.t. \frac{\sum_{r=1}^{q} u_r y_{ir}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1$$

$$V \geq 0; u \geq 0$$

$$i = 1,2, \ldots, m; r = 1,2, \ldots, q; j = 1,2, \ldots, n \qquad \textbf{(1-1)}$$

这一线性规划模型的含义在于，在使所有DMU的效率值都不超过1的条件下，使被评价DMU的效率值最大化，因此模型确定的权重u和v是对被评价DMU_K最有利的。

为什么说CCR模型是基于规模收益不变的呢？

假设一项生产技术的规模收益不变，则在技术效率保持不变的条件下，如果一个DMU的投入变为原来的t倍（t>0），其产出也会相应的变为原来的t倍。

DMU_K的投入和产出都变为原来的t倍后，CCR模型的目标函数为：

$$max\frac{\sum_{r=1}^{q}u_r t y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v_i t x_{ik}}=\frac{t\sum_{r=1}^{q}u_r y_{rk}}{t\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}}=\frac{\sum_{r=1}^{q}u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}}$$

式（1-1）所示的CCR模型存在的问题是此公式是非线性规划，并且存在无穷多个最优解。假设向量u和v是模型的一个最优解，则tu和tv肯定也是模型（1-1）的最优解。

那么，则令$\mu = tu, v = tv$，非线性模型（1-1）变换为等价的线性规划模型，即投入导向的CCR模型：

$$max \sum_{r=1}^{q} \mu_r \, y_{rk}$$

$$s.t. \sum_{r=1}^{q} \mu_r \, y_{rj} \text{-} \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} = 1$$

$$v \geq 0; \mu \geq 0$$

$$i = 1,2, \ldots, m; r = 1,2, \ldots, q; j1,2, \ldots, n \qquad \textbf{(1-2)}$$

模型（1-2）是以求解DMU_K为例来表述投入导向CCR模型的线性规划。

(2)产出导向CCR模型：

$$\min \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}$$

$$s.t. \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le o$$

$$\sum_{r=1}^{q} \mu_r \, y_{rk} = 1$$

$$v \ge 0; \mu \ge 0$$

$$i = 1,2,\dots,m; r = 1,2,\dots,q; j = 1,2,\dots,n \qquad （2\text{-}1）$$

产出导向是以投入既定的条件下，各项产出可以等比例增长的程度来对无效率的状况进行测量，因此被称为产出导向的CCR模型。

二、基于规模报酬可变的BCC模型

CCR模型假设生产技术的规模收益不变，或者虽然生产技术规模收益可变，但假设所有被评价的DMU均处于最有生产规模阶段，即处于规模收益不变的阶段。但实际生产中，许多生产单位并没有处于最优规模的生产状态，因此CCR模型的出的技术效率包含了规模效率的成分。

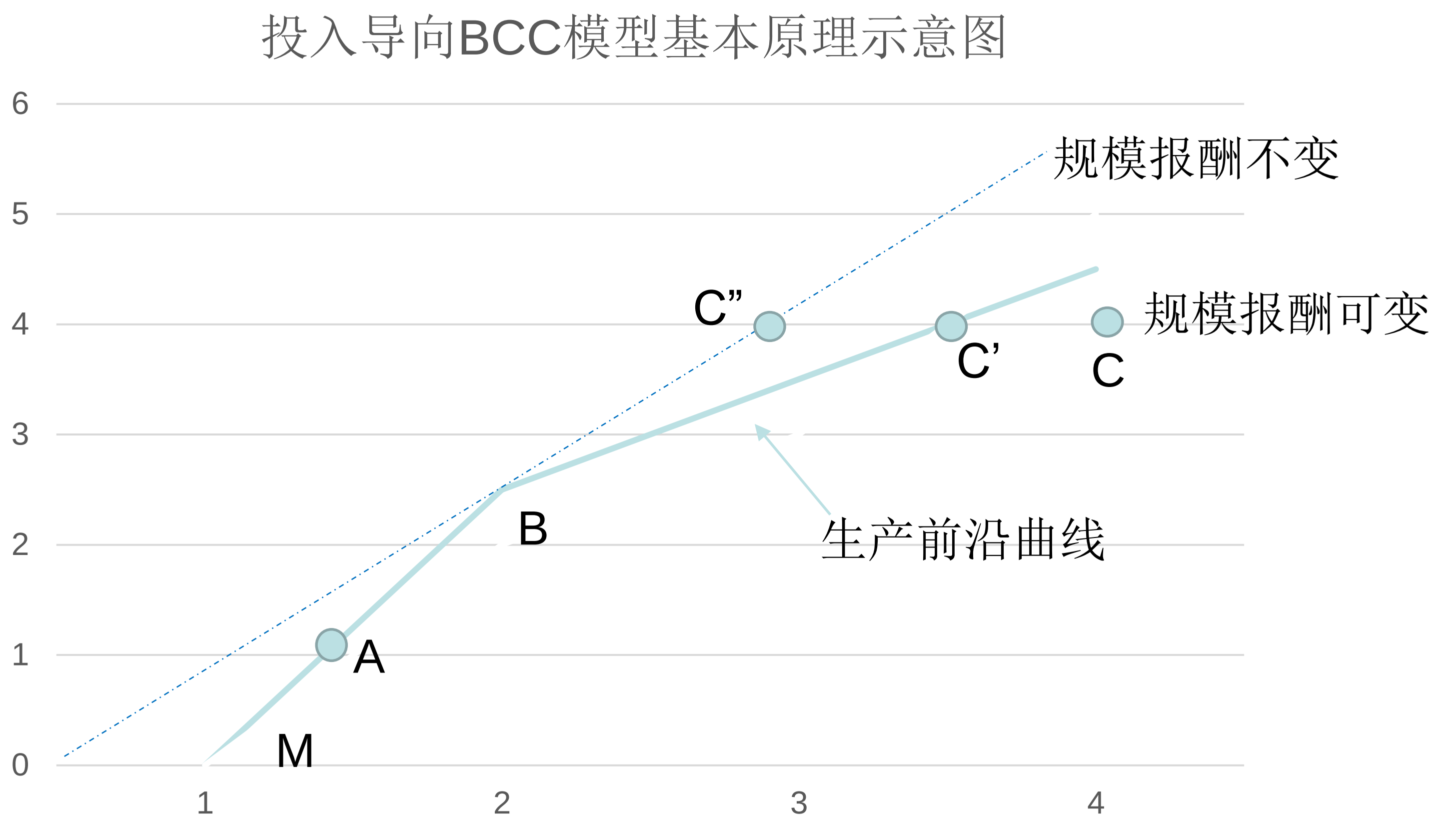
BCC模型基于规模收益可变（Variable Returns to Scale,VRS），得出的技术效率排除了规模的影响，因此称为“纯技术效率”（Pure Technical Efficiency,PTE）。

(1)投入导向BCC模型：

BCC模型是在CCR模型（对偶）的基础上增加了约束条件$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$=1($\lambda \geq 0$)构成的，其作用是使投影点的生产规模与被评价DMU的生产规模处于同一水平。

$$
\begin{gathered}
min\theta \\
s.t.\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\
\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{ij} \geq y_{rk} \\
\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \\
\lambda \geq 0 \\
i = 1,2,\dots,m; r = 1,2,\dots,q; j = 1,2,\dots,n \qquad \textbf{(3-1)}
\end{gathered}
$$

λ表示DMU的线性组合系数；模型的最优解θ代表效率值，θ的范围是(0,1]。



C’-C，规模报酬不变；C” -C，规模报酬可变

(2)产出导向BCC模型：

$$\max \emptyset$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \emptyset y_{rk}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

$$i = 1,2, \dots, m; r = 1,2, \dots, q; j = 1,2, \dots, n \qquad \text{（3-2）}$$

Q&A