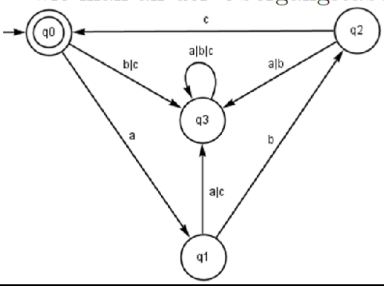
1. Geben Sie bitte die formale Beschreibung von A an und erläutern Sie, ob A deterministisch ist oder nicht?
   $A = (\{q0, q1, q2, q3\}, \{a, b, c, \}, \delta, q0, \{q0\})$
   mit der Übergangstabelle für δ.
   A ist deterministisch, da δ eine Funktion ist, wie man an der Übergangstabelle für δ sieht.

δ	a	b	c
$q0$	$q1$	$q3$	$q3$
$q1$	$q3$	$q2$	$q3$
$q2$	$q3$	$q3$	$q0$
$q3$	$q3$	$q3$	$q3$



CNF

$S \to ABS|BCS|BSD|\epsilon$
$A \to AB|C|AC$
$B \to 1B|\epsilon$
$C \to 0A$
$D \to 0D|0$

Lösung:

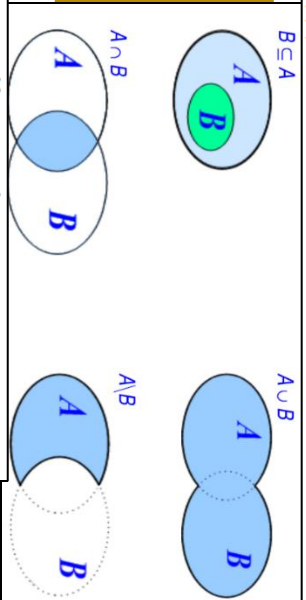
Nutzlose Symbole	$S \to BSD\|\epsilon$ $B \to 1B\|\epsilon$ $D \to 0D\|0$	
ϵ-Regeln	$S' \to S\|\epsilon$ $S \to BSD\|SD\|BD\|D$	$B \to 1B\|1$ $D \to 0D\|0$
Kettenregel	$S' \to BSD\|SD\|BD\|0D\|0\|\epsilon$ $S \to BSD\|SD\|BD\|0D\|0$	$B \to 1B\|1$ $D \to 0D\|0$
Terminale überbrücken	$S' \to BSD\|SD\|BD\|ND\|0\|\epsilon$ $S \to BSD\|SD\|BD\|ND\|0$ $B \to EB\|1$	$D \to ND\|0$ $E \to 1$ $N \to 0$
Regeln aufspalten	$S' \to BX\|SD\|BD\|ND\|0\|\epsilon$ $S \to BY\|SD\|BD\|ND\|0$ $B \to EB\|1$ $D \to ND\|0$	$E \to 1$ $N \to 0$ $X \to SD$ $Y \to SD$

DEA

10^*11 die minimale Pumpinglemma-Konstante ist 4, denn $111 \in 10^*11$ aber nicht aufpumpar, für $n > 0$ ist $10^n11 \in 10^*11$ und $|10^n11| = 3 + n \geq 4$

0^*101^* die minimale Pumpinglemma-Konstante ist 3, denn $01 \in 0^*101^*$ aber nicht aufpumpbar, für $n > 0$ oder $m > 0$ ist $0^n101^m \in 0^*101^*$ und $|0^n101^m| = 2 + n + m \geq 3$

Menge



Gegeben sei ein DEA $D = (Q, \Sigma, q0, \delta, F)$ für eine reguläre Sprache $L = L(D)$. Die zu L gehörige Präfixsprache $PRE(L) = \{w \in \Sigma^* | wu \in L \text{ für ein } u \in \Sigma^*\}$ enthält alle Präfixe der Wörter aus L.

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Präfixsprache. ....**3 Punkte**
   Sei $L = \{(abc)^n \mid n \geq 0\}$, dann ist $PRE(L) = (abc)^*(\epsilon + a + ab)$.
2. Konstruieren Sie bitte aus D einen DEA P, der die zu L gehörige Präfixsprache $PRE(L)$ erkennt. ....**5 Punkte**
   Hinweis: $\widehat{\delta}(q, wu) = \delta(\widehat{\delta}(q, w), u)$

   Es gilt $wu \in L(D)$ gdw $\widehat{\delta}(q, wu) = \delta(\widehat{\delta}(q, w), u)$ akzeptierender Endzustand, dann also $w \in L(P)$, gdw $\widehat{\delta}(q, w) = p$ akzeptierend.

   Sei also $U = \{p \in Q \mid \widehat{\delta}(p, u) \in F\} \subset Q$, dann ist $P = (Q, \Sigma, q0, \delta, U)$ der gesuchte Automat, der die Präfixe der Wörter aus L erkennt.
3. Beweisen Sie bitte, dass $L(P) = PRE(L)$. ....**7 Punkte**
   ZZ ist also $L(P) \subseteq PRE(L)$ und $PRE(L) \subseteq L(P)$:
   - Sei $w \in L(P)$, dann ist $\widehat{\delta}(q0, w) \in U$, aber dann gibt es $u \in \Sigma^*$ mit $\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, w), u) = \widehat{\delta}(q, wu) \in F$, also ist $wu \in L$, dann ist aber auch $w \in PRE(L)$.
   - Sei $w \in PRE(L)$, dann gibt es $u \in \Sigma^*$ mit $wu \in L$, also gilt $\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, w), u) = \widehat{\delta}(q, wu) \in F$, dann $\widehat{\delta}(q, w) \in U$ und damit $w \in L(P)$.

PL

1. Beweisen oder widerlegen Sie:
$$(L_1 \cap L_2) \circ L_3 = (L_1 \circ L_3) \cap (L_2 \circ L_3)$$
....**7 Punkte**
GegenBSP:
$$(\{ab\} \cap \{a\}) \circ \{a, ba\} = \emptyset \circ \{a, ba\} = \emptyset$$
$$\neq \{aba\} = \{aba, abba\} \cap \{aa, aba\} = (\{ab\} \circ \{a, ba\}) \cap (\{a\} \circ \{a, ba\})$$
2. Beweisen oder widerlegen Sie:
$$(L_1 \cup L_2) \circ L_3 = (L_1 \circ L_3) \cup (L_2 \circ L_3)$$
....
Direkter Beweis:
$$\begin{aligned}(L_1 \cup L_2) \circ L_3 &= \{vw \mid (v \in L_1 \vee v \in L_2) \wedge w \in L_3\}\\ &= \{vw \mid (v \in L_1 \wedge w \in L_3) \vee (v \in L_2 \wedge w \in L_3)\}\\ &= \{vw \mid (v \in L_1 \wedge w \in L_3)\} \cup \{(v \in L_2 \wedge w \in L_3)\}\\ &= (L_1 \circ L_3) \cup (L_2 \circ L_3)\end{aligned}$$

E-Hüllen

$\widehat{\delta}(q0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q0) = \{q0, q3\}$
$\widehat{\delta}(q0, b) = \epsilon\text{-Hülle}(\bigcup_{q \in \widehat{\delta}(q0,\epsilon)} \delta(q, b))$
$= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q0, b) \cup \delta(q3, b)) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q0, q4\}) = \{q0, q3, q4\}$
$\widehat{\delta}(q0, bb) = \epsilon\text{-Hülle}(\bigcup_{q \in \widehat{\delta}(q0,b)} \delta(q, b))$
$= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q0, b) \cup \delta(q3, b) \cup \delta(q4, b)) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q0, q4\})$
$= \{q0, q3, q4\}$
$\widehat{\delta}(q0, bba) = \epsilon\text{-Hülle}(\bigcup_{q \in \widehat{\delta}(q0,bb)} \delta(q, a))$
$= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q0, a) \cup \delta(q3, a) \cup \delta(q4, a))$
$= \epsilon\text{-Hülle}(\{q1, q2\}) = \{q1, q2, q4\}$
weil $\{q1, q2, q4\} \cap F = \{q2\} \neq \emptyset$ ist $bba \in L(A)$

Aufgabe D : Zeigen Sie bitte, dass $L = \{ab^nc^{2n} \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.
Sei L regulär.
Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p \in \mathbb{N}$.
Dann gibt das ein Wort $w = ab^pc^{2p} \in L$ mit $|w| = 3p + 1 \geq p$, so dass für jede Zerlegung in $w = xyz$ – nämlich

Fall 1: $x = \epsilon$

$y = ab^i$ mit $0 \leq i \leq p-1$

$z = b^{p-i}c^{2p}$

gilt :

- $|xy| = i + 1 \leq p$,laut Zerlegung
- $y \neq \epsilon$, weil $a \neq \epsilon$
- *aber* $xy^2z = ab^iab^ib^{p-i}c^{2p} \notin L$, weil
aus L

Fall 2: $x = ab^i$ mit $0 \leq i \leq p-1$

$y = b^j$ für $j > 0$ und $i + j \leq p - 1$

$z = b^{p-i-j}c^{2p}$

gilt :

- $|xy| = i + j + 1 \leq p$, weil $i + j \leq p - 1$
- $y \neq \epsilon$, weil $j > 0$
- *aber* $xy^0z = ab^{p-j}c^{2p} \notin L$, weil $2(p-j) \neq 2p$ für $j > 0$

Also ist L nicht regulär.

Aufgabe E : Zeigen Sie bitte, dass $L = \{0^n1^m0^{n \cdot m} \mid n, m \geq 0\}$ nicht regulär ist.
Sei L regulär.
Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p \in \mathbb{N}$.
Dann gibt das ein Wort $w = 0^p10^p \in L$ mit $|w| = 2p + 1 \geq p$, so dass für jede Zerlegung in $w = xyz$ – nämlich

$x = 0^i$

$y = 0^j$ für $j > 0$ und $i + j \leq p$

$z = 0^{p-i-j}10^p$

PL

gilt :

- $|xy| = i + j \leq p$, laut Zerlegung
- $y \neq \epsilon$, weil $j > 0$
- *aber* $xy^2z = 0^{p+j}10^p \notin L$, weil $(p-j) \cdot 1 \neq p$ für $j > 0$

WIDERSPRUCH!!!

Also ist L nicht regulär.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $L = \{(a^nb)^n | n \in \mathbb{N}_0$ regulär ist.
L ist nicht regulär. Beweis durch Widerspruch:
Sei L regulär. Es gibt ein Wort $w = (a^pb)^p = \underbrace{a^pba^pb...a^pb}_{p\text{-mal}}$ mit $|w| = p^2 + p \geq p$, so dass für jede Zerlegung $w = xyz$ mit

- $x = a^i$ für $0 \leq i \leq p$
- $y = a^j$ für $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = a^{p-i-j}b(a^pb)^{p-1}$

Ist diese Sprache $L = \{a^nb^ma^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}$ regulär?
Bitte beweisen oder widerlegen sie das. L ist nicht regulär. Beweis
Sei L regulär.
Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p > 0$.
Dann gibt das ein Wort $w = a^pb^p \in L$ mit $|w| = 2p \geq p$, so dass für jede Zerlegung in $w = xyz$ – nämlich

- $x = a^i$
- $y = a^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = a^{p-i-j}b^pa^{p^2}$

gilt :

- $|xy| = i + j \leq p$
- $y \neq \epsilon$, weil $j \geq 0$
- **aber** $xy^0z = a^{p-j}b^p \notin L$, weil $p - j < p$ für $j > 0$

Also ist L nicht regulär.

Gegeben $L = \{a^nb^mc^{m-n} | 0 \leq n < m\}$. Ist L regulär oder nicht?
Bitte beweisen Sie ihre Antwort.
Lösung:

L ist **nicht** regulär.
Beweis durch Widerspruch mit Hilfe des Pumping Lemmas:
Sei L regulär.
Dann gilt für beliebige PL-Konstante $p > 0$, und für $w = b^pc^p \in L$ mit $|w| = 2p \geq p$ dass jede Zerlegung von $w = xyz$ mit

- $x = b^i$ mit $i \geq 0$
- $y = b^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = b^{p-i-j}c^p$

zu $xy^2z = b^i(b^j)^2b^{p-i-j}c^p = b^{p+j}c^p \notin L$ führt, da $p + j \neq p$ für $j > 0$. WIDERSPRUCH!!
Also L nicht regulär.

Ist diese Sprache $L = \{a^{k^3} \mid k \geq 0\}$ regulär?
Bitte beweisen oder widerlegen Sie das. L ist nic
Widerspruch.
Sei L regulär.
Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p \in \mathbb{N}$.
Dann gibt das ein Wort $w = a^{p^3} \in L$ mit $|w| = p^3 \geq p$, so dass für jede Zerlegung in $w = xyz$ – nämlich

- $x = a^i$
- $y = a^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = a^{p^3-i-j}$

gilt :

- $|xy| = i + j \leq p$
- $y \neq \epsilon$, weil $j \geq 0$
- **aber** $xy^2z = a^{p^3+j}L$, weil $p^3 + j < (p+1)^3$ für $j > 0$ und $3p^3 + 3p + 1 > p > j$

WIDERSPRUCH!!!

Also ist L nicht regulär.

Sei L nicht regulär, dann gibt für jede PL-Konst. $p > 0$ das Wort $w = ca^pca^pc$ mit $|w| = 2p + 3 \geq p$, so dass für jede Zerlegung $w = xyz$,

Fall 1:
$x = \epsilon$
$y = ca^j$ mit $0 \leq j \leq p - 1$
$z = a^{p-j}ca^pc$ gilt

Fall 2:
$x = ca^i$ mit $0 \leq i < p - 1$
$y = a^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p - 1$
$z = a^{p-(i+j)}ca^pc$ gilt

Aufgabe F : Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.
Ist $L = \{(\bigcirc_{1=i}^{n} 1^{k_i}0) |$ mit $k_i > 0$ und $k_{i+1} = k_i + 1\}$,
wobei $\bigcirc_{1=i}^{n} w_i := w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n$ ist,
regulär oder nicht?

Bitte beweisen Sie Ihre Aussage.

Wörter aus dieser Sprache sind beispielsweise: $10, 101101110, 1101110, 1^4 01^5 01^6 01^7 0$
Sie enthalten also i Folgen von Einsen, denen eine einzelne Null folgt, so dass die jeweils nächste Folge von Einsen genau eine Eins mehr hat. L ist also nicht regulär.

Beweis durch Widerspruch:
Sei L regulär.
Sei PL-Konstante p beliebig. Dann gibt es das Wort $w = 1^p 0 1^{(p+1)} 0 \in L$ mit $|w| = 2p + 3 \geq p$, so dass für jede Zerlegung $w = xyz$ mit
$x = 1^k$
$y = 1^l$ mit $l > 0$ und $k + l \leq p$ und
$z = 1^{p-k-l} 0 1^{p+1} 0$

Aber $xy^3z = 1^{p+2l} 0 1^{p+1} 0 \notin L$, weil $p + 2l \neq p + 1$ für $l > 0$. WIDERSPRUCH

Also ist L nicht regulär.

PL

Zu zeigen: L ist nicht regulär.

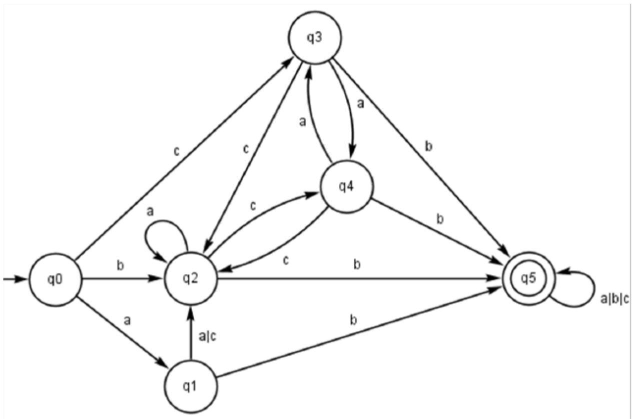
Beweis durch Widerspruch: Sei L regulär.
Sie zeigen

1. Sei PL-Konstante p **beliebig** (oder größer einer geeigneten Zahl).
2. **Wählen** Sie ein **geeignetes** Wort $w \in L$ mit $|w| \geq p$
3. und zeigen Sie für alle **erlaubten** Zerlegungen (also mit $|xy| \leq p$ und $|y| > 0$)
   $w = xyz$
4. dass für **ein** $k \geq 0$ das Wort $xy^kz \notin L$.

Also ist L nicht aufpumpbar, also wegen des PL WIDERSPRUCH!!!
Also L ist doch nicht regulär.

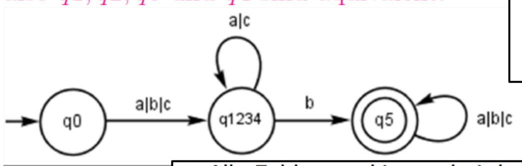
Minimieren Sie bitte diesen DEA mit Hilfe des Table-Fillings.

	a	b	c
$\rightarrow q0$	$q1$	$q2$	$q3$
$q1$	$q2$	$q5$	$q2$
$q2$	$q2$	$q5$	$q4$
$q3$	$q4$	$q5$	$q2$
$q4$	$q3$	$q5$	$q2$
$*q5$	$q5$	$q5$	$q5$



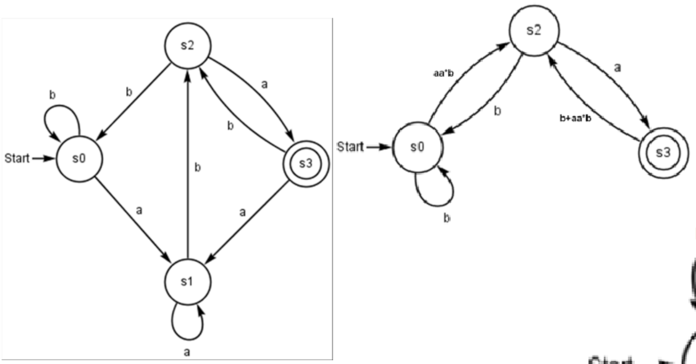
$q1$	X				
$q2$	X				
$q3$	X				
$q4$	X				
$q5$	X	X	X	X	X
	$q0$	$q1$	$q2$	$q3$	$q4$

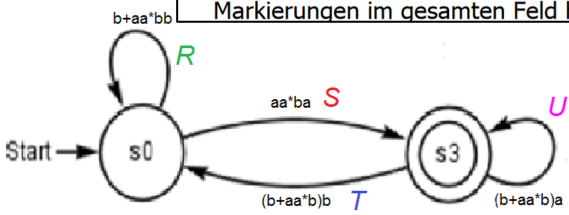
also $q1, q2, q3$ und $q4$ sind äquivalent.



Eliminierung: NEA → RA

- Alle Felder markieren, bei denen ein Zustand akzeptierend und der andere nicht akzeptierend ist.
  Formal:
  Alle Felder (p, q) mit $(p \in F \wedge q \notin F) \vee (p \notin F \wedge q \in F)$ markieren.
- Für alle unmarkierten Felder (r, s) überprüfen, ob es ein Eingabezeichen $a \in \Sigma$ gibt, für das es Kanten von r und s auf ein markiertes Feld gibt (also zu einem Paar nicht-äquivalenter Zustände).
  Formal:
  Wenn $(\delta(r,a), \delta(s,a))$ markiert, dann (r, s) markieren.
- Für alle unmarkierten Felder wiederholen, bis keine neuen Markierungen im gesamten Feld hinzukommen.





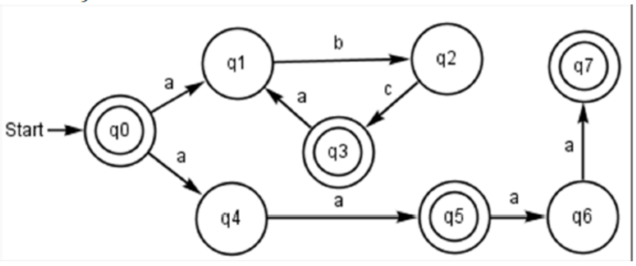
$(R + SU^*T)^*SU^*$

Resultierender Ausdruck:

$(b + aa^*bb + ((aa^*ba)((b + aa^*b)a)^*(b + aa^*b)b)^*(aa^*ba)((b + aa^*b)a)^*$

2. $L_2 = \{(abc)^n | n \geq 0\} \cup \{(aa)^n | \mathbf{1} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{2}\}$

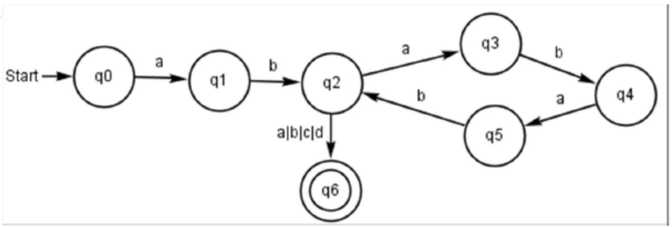
Automat:



Begründung: $\epsilon = (abc)^0$ wird erkannt, da $q0 \in F$.
Nicht deterministisch wird entschieden, ob $(abc)^n$ oder aa bzw $aaaa$ erkannt wird.
Im ersten Fall geht der Automat in Zustand $q1$ und dann arbeitet er b und c ab und ist in $q3 \in F$. Danach kann er abc beliebig oft wiederholen.
Im zweiten Fall geht der Automat in Zustand $q4$ und dann mit a in $q5 \in F$ oder er kann noch zwei a's machen und ist in $q6 \in F$.
Was anderes kann er nicht.

3. $L_3 = \{(ab)^{2n+1} | n \geq 0\} \circ \{a, b, c, d\}$

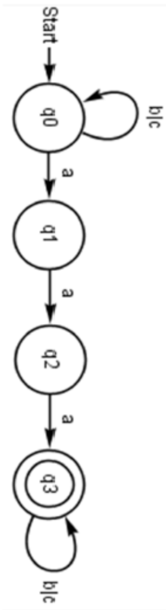
Automat:



Begründung: Zuerst muss der Automat ab erkennen.
Dann kann er beliebig häufig $abab$ erkennen, insgesamt also eine ungerade Anzahl von ab's. Danach kann er mit a oder b oder c oder d in den Zustand $q6 \in F$ übergehen und akzeptieren.

1. $L_1 = \{w \cdot aaa \cdot v | w, v \in \{b, c\}^*\}$

Automat:



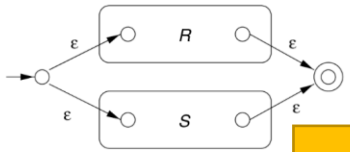
Begründung: Erst beliebige Wörter aus $\{b, c\}^*$, dann 3a's, dann wieder beliebige Wörter aus $\{b, c\}^*$.

NEA

RA → E-NEA

a) Vereinigung: ***R + S***

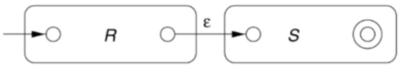
L (ε-NEA) = L (R) ∪ L (S)



(a)

b) Verkettung: ***RS***

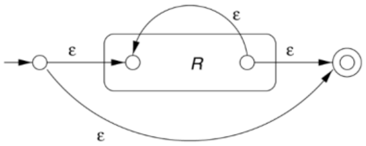
L (ε-NEA) = L (R) L (S)



(b)

c) Hülle: ***R****

L (ε-NEA) = {ε} ∪ L (R) ∪ L (R) L (R) ∪ L (R) L (R) L (R)... = L (R *)



(c)

Sind die kontextfreien Sprachen unter der Vereinigung abgeschlossen?
Die kontextfreien Sprachen sind unter der Vereinigung abgeschlossen.
Gegeben seien die kontextfreien Spachen $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ mit $G_i = (N_i, T, S_i, R_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ und $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.
Dann gibt es $G_3 = (N_1 \cup N_2 \uplus \{S\}, T, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$ und es gilt $L(G_3) = L_1 \cup L_2$, denn:
$w \in L(G_3)$
gdw $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$ gdw $S \Longrightarrow S_1 \mid S_2 \overset{*}{\Longrightarrow} w$ gdw $S_1 \overset{*}{\Longrightarrow} w$ oder $S_2 \overset{*}{\Longrightarrow} w$
gdw $w \in L(G_1)$ oder $w \in L(G_2)$ gdw $w \in L(G_1) \cup L(G_2)$
gdw $w \in L(G_1) \cup L(G_2)$

Chomsky-Hierarchie

Grammatik	Regeln	Sprachen	Automat	Abge-schlossenheit
Typ 0	$\alpha \to \beta$	aufzählbar	Turing Maschine	KSV*
Typ 1	$\alpha \to \beta$ mit $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$	kontext-sensitiv	Linear platzbeschränkte, nicht-deterministische Turingmaschine	CKSV*
Typ 2	$A \to \gamma$	kontextfrei	Nichtdeterminister Pushdown Automat	KV*
		LR(k)	Determinister Pushdown Automat	C
Typ 3	$A \to aB$ und $A \to a$	regulär	Endlicher Automat	CKSV*

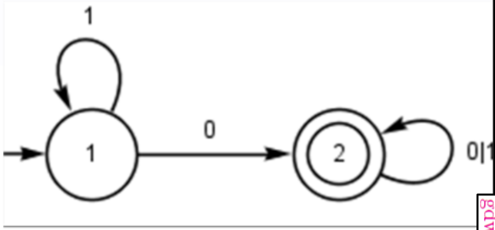
A, B: Nichtterminale **a, b**: Zeichenketten aus Terminalen **α, β, γ**: beliebig
C: Komplement **K**: Verkettung **S**: Schnitt **V**: Vereinigung *****: Kleene

Abgeschlossen

Abgeschlossen

k-Pfade

durch den Automaten



k-Pfad	reg. Ausdruck
$R_{11}^{(0)}$	$\epsilon + 1$
$R_{12}^{(0)}$	0
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(0)}$	$\epsilon + 0 + 1$

k-Pfad	vereinf. Ausdruck
$R_{11}^{(1)}$	1^*
$R_{12}^{(1)}$	1^*0
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\epsilon + 0 + 1$

k-Pfad	ind. Pfadausdruck	reg. Ausdruck
$R_{11}^{(2)}$	$1^* + 1^*0(\epsilon+0+1)^*\emptyset$	1^*
$R_{12}^{(2)}$	$1^*0 + 1^*0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$	$1^*0(0+1)^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*\emptyset$	$\emptyset$
$R_{22}^{(2)}$	$(\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$	$(0+1)^*$

K-Pfade

Sind die kontextfreien Sprachen unter der Verkettung abgeschlossen?
Die kontextfreien Sprachen sind unter der Verkettung abgeschlossen.
Gegeben seien die kontextfreien Spachen $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ mit $G_i = (N_i, T, S_i, R_i)$ für $i \in \{1,2\}$ und $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.
Dann gibt es $G_3 = (N_1 \cup N_2 \uplus \{S\}, T, S, R_1 \cup R_2 \circ \{S \to S_1S_2\}$ und es gilt $L(G_3) = L_1 \cup L_2$, denn:
$w \in L(G_3)$
gdw $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$ gdw $S \Longrightarrow S_1S_2 \stackrel{*}{\Longrightarrow} w_1w_2$ mit $w = w_1w_2$ gdw $S_1 \stackrel{*}{\Longrightarrow} w_1$ und $S_2 \stackrel{*}{\Longrightarrow} w_2$
gdw $w_1 \in L(G_1)$ und $w_2 \in L(G_2)$ gdw $w_1w_2 \in L(G_1) \circ L(G_2)$
gdw $w \in L(G_1) \circ L(G_2)$

2. Bei der Konstruktion eines regulären Ausdrucks aus einem DEA durch die k-Pfade wird wie folgt berechnet $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$.
Erläutern Sie bitte diese Berechnung. .... **8 Punkte**

Erläuterung:
Die Pfade in einem DEA werden auf Basis der Kantenbeschriftungen rekursiv in RA überführt. Dafür müssen Zustände des DEA werden in $1, 2, ..., n$ umbenannt werden. Dann bezeichnet der k-Pfad $R_{ij}^{(k)}$ genau den RA, dessen Sprache genau die Wörter umfasst, die den Beschriftungen der Pfade von Zustand i nach Zustand j entsprechen, wobei kein Zustand mit einem Namen $> k$ durchlaufen werden darf. $R_{ij}^{(k)}$ lässt sich aus $R_{ij}^{(k-1)}$ berechnen und der RA ist die Summe aller $R_{1f}^{(k)}$ mit 1 dem Startzustand und $f \in F$ einem Endzustand.

E-Hüllen

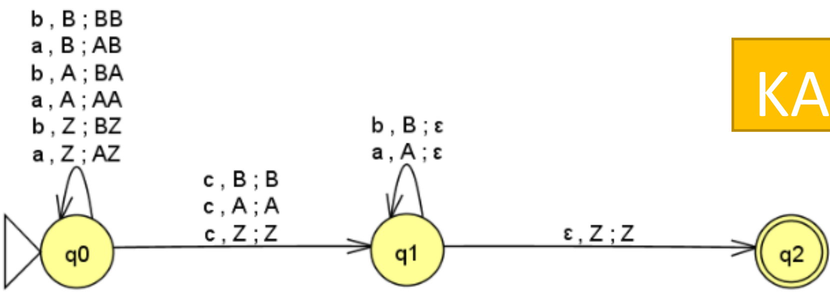
$\hat{\delta}(q0, \epsilon) = \epsilon$-Hülle$\{q0\} = \{q0, q1, q2\}$
$\hat{\delta}(q0, a) = \epsilon$-Hülle$\{\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q0,\epsilon)} \delta(q, a)\} = \epsilon$-Hülle$\{q1\} = \{q1, q2\}$
$\hat{\delta}(q0, ab) = \epsilon$-Hülle$\{\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q0,a)} \delta(q, b)\} = \epsilon$-Hülle$\{q2\} = \{q2\}$
$\hat{\delta}(q0, aba) = \epsilon$-Hülle$\{\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q0,ab)} \delta(q, a)\} = \epsilon$-Hülle$\{\} = \{\}$ da $F \cap \emptyset = \emptyset$ ist also $aba \notin L(A)$.

Sind die kontextfreien Sprachen unter dem Schnitt abgeschlossen?
Die kontextfreien Sprachen sind unter dem Schnitt nicht abgeschlossen.
Gegeben seien die kontextfreien Sprachen $L_1 = \{a^nb^nc^m | n, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{a^nb^mc^m | n, m \geq 0\}$.
Der Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ ist NICHT kontextfrei, also sind die kontextfreien Sprachen unter dem Schnitt nicht abgeschlossen.

Abgeschlosse

Aufgabe B : Gegeben die Sprache $L = \{wcw^R | w \in \{a,b\}^*\}$ und der deterministische Kellerautomat D:

KA



Beweisen Sie bitte, dass $L(D) = L$.
ZZ $L \subseteq L(D)$ und $L(D) \subseteq L$.

- $wcw^R \in L \Longrightarrow wcw^R \in L(K)$ mit Induktion über $n = |w|$

Beweis

IA $w = \epsilon$, dann $wcw^R = c$ und $c \in L(D)$, dennn
$(q0, c, Z_0) \mapsto (q1, \epsilon, Z_0) \mapsto (q2, \epsilon, Z_0)$

IB für w mit $|w| = n$ für bel. $n \in \mathbb{N}$ gelte, $wcw^R \in L(D)$,
$(q0, wcw^R, Z_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q0, cw^R, w^R Z_0) \mapsto (q1, w^R, w^R Z_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q1, \epsilon, Z_0)$

IS Für v mit $|v| = n+1$ gilt $v = xw$ und zz $xwcw^Rx \in L(K)$
$(q0, xwcw^Rx, Z_0) \mapsto$
$\underbrace{(q0, wwcw^Rx, xZ_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q0, cw^Rx, w^RxZ_0) \mapsto (q1, w^Rx, w^RxZ_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q1, x, xZ_0)}_{IB}$
$\mapsto (q1, \epsilon, Z_0) \mapsto (q2, \epsilon, Z_0)$

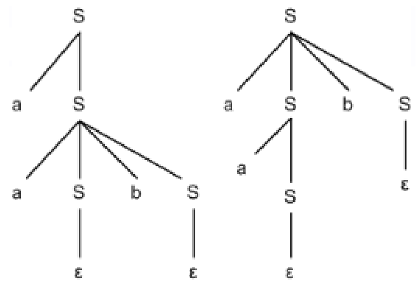
- $w \notin L(D) \Longrightarrow w \notin L(D)$
Fallunterscheidung:
  - $w \in \{a,b\}^* \notin L(D)$, denn $(q0, w, Z_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q0, \epsilon, w^R Z_0)$ hat keine Folgekonfiguration.
  - $w = vxucu^Ryv' \notin L(D)$ für $x \neq y$ mit $x, y \in \{a,b\}$ und $u, v, v' \in \{a,b\}^*$, denn $(q0, vxucu^Ryv', Z_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q1, cu^Ryv', u^Rxv^RZ_0) \mapsto (q1, u^Ryv', u^Rxv^RZ_0) \stackrel{*}{\mapsto} (q1, yv', xv^RZ_0)$ hat keine Folgekonfiguration.

Gegeben: $S \to aS|aSbS|\epsilon$
Zeigen Sie bitte, dass für aab je zwei

- Ableitungsbäume
- linksseitige Ableitungen
- rechtsseitige Ableitungen

existieren.
Finden Sie für diese Sprache eine Grammatik, die eindeutig ist.

- 2 linksseitige Ableitungen :
  $S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaSbS \Longrightarrow aabS \Longrightarrow aab$ und
  $S \Longrightarrow aSbS \Longrightarrow aaSbS \Longrightarrow aabS \Longrightarrow aab$
- 2 rechtsseitige Ableitungen :
  $S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaSbS \Longrightarrow aaSb \Longrightarrow aab$ und
  $S \Longrightarrow aSbS \Longrightarrow aSb \Longrightarrow aaSb \Longrightarrow aab$



Eindeutige Grammatik:
$S \to aS|aTbS|\epsilon$
$T \to aTbT|\epsilon$

KFG: Ableitung & Mehr-u. Eindeutig

- G heißt eindeutig, wenn es zu jedem Wort $w \in L(G)$ nur genau einen Ableitungsbaum gibt.
- G heißt mehrdeutig, wenn es zu einem Wort w mehr als einen Ableitungsbaum gibt.
- Eine Sprache heißt mehrdeutig, falls es keine Möglichkeit gibt eine eindeutige kfG für die Sprache zu erstellen.
- Beispielsweise: $L = \{a^i b^j c^k : i = j \vee j = k\}$

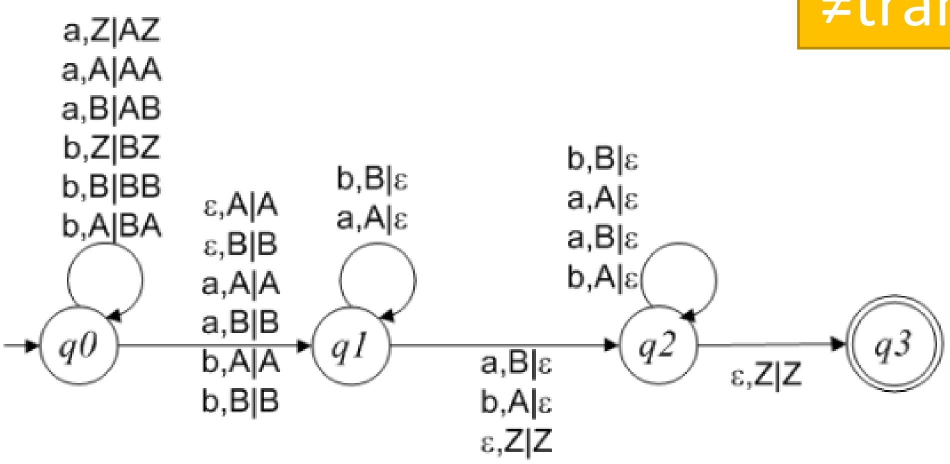
KellerAutomat KA

$L = \{w | w \neq trans(w)$ für $w \in \{a,b\}^*\}$
$S \to aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa$
$X \to aXa \mid aXb \mid bXb \mid bXa \mid a \mid b \mid \epsilon$

1. Geben Sie bitte für $L = \{w | w \neq trans(w)$ für $w \in \{a,b\}^*\}$ mit $trans : \Sigma^* \to \Sigma^*$ und $trans(\epsilon) = \epsilon$ bzw. $trans(aw) = trans(w) \cdot a$ für $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ einen Kellerautomaten A mit $L(A) = L$ an.

2. Gibt es auch einen DKA, der L erkennt? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

≠trans(w)



1.

2. Nein, denn auch hier muss die Mitte des Wortes geraten werden.

$L = \{a^n b^n c^n | n \in N\}$ ist nicht kontextfrei.
Beweis: L sei kontextfrei, also gilt das Pumping-Lemma.
Sei $z = a^p b^p c^p$, dann $z \in L$ und $|z| \geq p$.
vwx enthält nicht alle drei Zeichen a, b und c, denn $|vwx| \leq p$.
Das fehlende Zeichen wird beim Aufpumpen zu uv^2wx^2y nicht vervielfältigt.
Weil aber $|vx| > 0$ werden die Zeichen in vx vervielfältigt.
$uv^2wx^2y \notin L$, denn nicht mehr gleich viele a's, b's und c's
Widerspruch zur Aussage des Pumping-Lemmas.
Daher muss die Annahme falsch sein, d.h. L ist nicht kontextfrei.

PL KFG

Chomsky-Normalform

Nutzlose Symbole	$S \to AaBb\|cABd,\ A \to cBa\|\epsilon,\ B \to bAd\|\epsilon$
Rekursives Startsymbol	--
ϵ-Regeln	$S \to AaBb\|cABd\|aBb\|cBd\|Aab\|cAd\|ab\|cd$ $A \to cBa\|ca,\ B \to bAd\|bd$
Kettenregel	--
Terminale überbrücken	$S \to AX_1BX_2\|X_3ABX_4\|X_1BX_2\|X_3BX_4$ $S \to AX_1X_2\|X_3AX_4\|X_1X_2\|X_3X_4$ $A \to X_3BX_1\|X_3X_1,\ B \to X_2AX_4\|X_2X_4$ $X_1 \to a,\ X_2 \to b,\ X_3 \to c,\ X_4 \to d$
Regeln aufspalten	$S \to AY_1$, $Y_1 \to X_1Y_2$, $Y_2 \to BX_2$, $S \to X_3Y_3$, $Y_3 \to AY_4$, $Y_4 \to BX_4$, $S \to X_1Y_5$, $Y_5 \to BX_2$ $S \to X_3Y_6$, $Y_6 \to BX_4$, $S \to AY_7$, $Y_7 \to X_1X_2$, $S \to X_3Y_8$, $Y_8 \to AX_4$, $S \to X_1X_2\|X_3X_4$ $A \to X_3Y_9$, $Y_9 \to BX_1$, $A \to X_3X_1$, $B \to X_2Y_{10}$, $Y_{10} \to AX_4$, $B \to X_2X_4$, $X_1 \to a, X_2 \to b$, $X_3 \to c, X_4 \to d$

Gegeben sei diese Grammatik:
$S \to AaBb|cABd|cCa$
$A \to cBa|\epsilon$
$B \to bAd|\epsilon$
$C \to Fd|BF$
Geben sie bitte die CNF für G an.

Rekursives Startsymbol .... $S' \to S$
$S \to BSD|\epsilon$