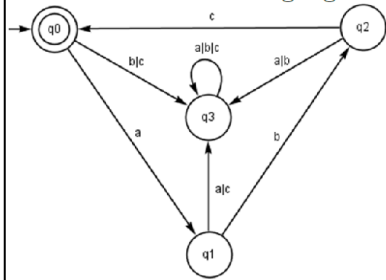


1. Geben Sie bitte die formale Beschreibung von A an und erläutern Sie, ob A deterministisch ist oder nicht?

$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0\})$
mit der Übergangstabelle für δ .

A ist deterministisch, da δ eine Funktion ist, wie man an der Übergangstabelle für δ sieht.



δ	a	b	c
q_0	q_1	q_3	q_3
q_1	q_3	q_2	q_3
q_2	q_3	q_3	q_0
q_3	q_3	q_3	q_3

$S \rightarrow ABS|BCS|BSD|\epsilon$
 $A \rightarrow AB|C|AC$
 $B \rightarrow 1B|\epsilon$
 $C \rightarrow 0A$
 $D \rightarrow 0D|0$

CNF

Lösung:

Nutzlose Symbole $S \rightarrow BSD|\epsilon$
 $B \rightarrow 1B|\epsilon$
 $D \rightarrow 0D|0$

ϵ -Regeln $S' \rightarrow S|\epsilon$
 $S \rightarrow BSD|SD|BD|D$ $B \rightarrow 1B|1$
 $D \rightarrow 0D|0$

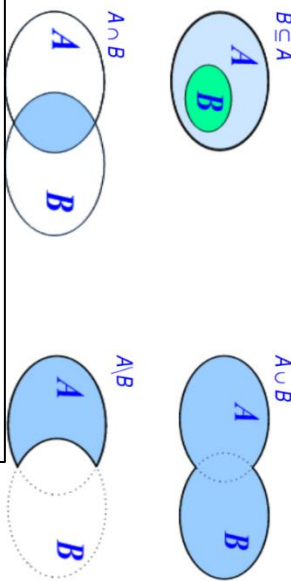
Kettenregel $S' \rightarrow BSD|SD|BD|0D|0|\epsilon$ $B \rightarrow 1B|1$
 $S \rightarrow BSD|SD|BD|0D|0$ $D \rightarrow 0D|0$

Terminale überbrücken $S' \rightarrow BSD|SD|BD|ND|0|\epsilon$ $D \rightarrow ND|0$
 $S \rightarrow BSD|SD|BD|ND|0$ $E \rightarrow 1$
 $B \rightarrow EB|1$ $N \rightarrow 0$

Regeln aufspalten $S' \rightarrow BX|SD|BD|ND|0|\epsilon$ $E \rightarrow 1$
 $S \rightarrow BY|SD|BD|ND|0$ $N \rightarrow 0$
 $B \rightarrow EB|1$ $X \rightarrow SD$
 $D \rightarrow ND|0$ $Y \rightarrow SD$

DEA

Menge



Gegeben sei ein DEA $D = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ für eine reguläre Sprache $L = L(D)$.

Die zu L gehörige Präfixsprache $PRE(L) = \{w \in \Sigma^* | wu \in L \text{ für ein } u \in \Sigma^*\}$ enthält alle Präfixe der Wörter aus L .

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Präfixsprache. 3 Punkte
 Sei $L = \{(abc)^n \mid n \geq 0\}$, dann ist $PRE(L) = (abc)^*(\epsilon + a + ab)$.

2. Konstruieren Sie bitte aus D einen DEA P , der die zu L gehörige Präfixsprache $PRE(L)$ erkennt. 5 Punkte
 Hinweis: $\hat{\delta}(q, wu) = \delta(\hat{\delta}(q, w), u)$

Es gilt $wu \in L(D)$ gdw $\hat{\delta}(q, wu) = \delta(\hat{\delta}(q, w), u)$ akzeptierender Endzustand, dann also $w \in L(P)$, gdw $\hat{\delta}(q, w) = p$ akzeptierend.

Sei also $U = \{p \in Q \mid \hat{\delta}(p, u) \in F\} \subset Q$, dann ist $P = (Q, \Sigma, q_0, \delta, U)$ der gesuchte Automat, der die Präfixe der Wörter aus L erkennt.

3. Beweisen Sie bitte, dass $L(P) = PRE(L)$ 7 Punkte
 ZZ ist also $L(P) \subseteq PRE(L)$ und $PRE(L) \subseteq L(P)$:

- Sei $w \in L(P)$, dann ist $\hat{\delta}(q_0, w) \in U$, aber dann gibt es $u \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), u) = \hat{\delta}(q, wu) \in F$, also ist $wu \in L$, dann ist aber auch $w \in PRE(L)$.
- Sei $w \in PRE(L)$, dann gibt es $u \in \Sigma^*$ mit $wu \in L$, also gilt $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), u) = \hat{\delta}(q, wu) \in F$, dann $\hat{\delta}(q, w) \in U$ und damit $w \in L(P)$.

$$(L_1 \cap L_2) \circ L_3 = (L_1 \circ L_3) \cap (L_2 \circ L_3)$$

..... 7 Punkte

GegenBSP:

$$(\{ab\} \cap \{a\}) \circ \{a, ba\} = \emptyset \circ \{a, ba\} = \emptyset$$

$$\neq \{aba\} = \{aba, abba\} \cap \{aa, aba\} = (\{ab\} \circ \{a, ba\}) \cap (\{a\} \circ \{a, ba\})$$

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$(L_1 \cup L_2) \circ L_3 = (L_1 \circ L_3) \cup (L_2 \circ L_3)$$

Direkter Beweis:

$$(L_1 \cup L_2) \circ L_3 = \{vw \mid (v \in L_1 \vee v \in L_2) \wedge w \in L_3\}$$

$$= \{vw \mid (v \in L_1 \wedge w \in L_3) \vee (v \in L_2 \wedge w \in L_3)\}$$

$$= \{vw \mid (v \in L_1 \wedge w \in L_3)\} \cup \{(v \in L_2 \wedge w \in L_3)\}$$

$$= (L_1 \circ L_3) \cup (L_2 \circ L_3)$$

E-Hüllen

$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, b) = \epsilon\text{-Hülle}(\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, \epsilon)} \delta(q, b))$
 $= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_3, b)) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0, q_4\}) = \{q_0, q_3, q_4\}$
 $\hat{\delta}(q_0, bb) = \epsilon\text{-Hülle}(\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, b)} \delta(q, b))$
 $= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_3, b) \cup \delta(q_4, b)) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0, q_4\})$
 $= \{q_0, q_3, q_4\}$
 $\hat{\delta}(q_0, bba) = \epsilon\text{-Hülle}(\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, bb)} \delta(q, a))$
 $= \epsilon\text{-Hülle}(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_3, a) \cup \delta(q_4, a))$
 $= \epsilon\text{-Hülle}(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2, q_4\}$
 weil $\{q_1, q_2, q_4\} \cap F = \{q_2\} \neq \emptyset$ ist $bba \in L(A)$

PL

Aufgabe D : Zeigen Sie bitte, dass $L = \{ab^n c^{2n} \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Sei L regulär.

Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p \in \mathbb{N}$.

Dann gibt das ein Wort $w = ab^p c^{2p} \in L$ mit $|w| = 3p + 1 \geq p$, so dass für jede Zerlegung in $w = xyz$ – nämlich

Fall 1:

$$x = \epsilon$$

$$y = ab^i \text{ mit } 0 \leq i \leq p-1$$

$$z = b^{p-i} c^{2p}$$

gilt :

- $|xy| = i + 1 \leq p$, laut Zerlegung
- $y \neq \epsilon$, weil $a \neq \epsilon$
- aber $xy^2 z = ab^i ab^i b^{p-i} c^{2p} \notin L$, weil

aus L

Fall 2:

$$x = ab^i \text{ mit } 0 \leq i \leq p-1$$

$$y = b^j \text{ für } j > 0 \text{ und } i + j \leq p-1$$

$$z = b^{p-i-j} c^{2p}$$

gilt :

- $|xy| = i + j + 1 \leq p$, weil $i + j \leq p-1$
- $y \neq \epsilon$, weil $j > 0$
- aber $xy^0 z = ab^{p-j} c^{2p} \notin L$, weil $2(p-j) \neq 2p$ für $j > 0$

Also ist L nicht regulär.

Aufgabe E : Zeigen Sie bitte, dass $L = \{0^n 1^m 0^{n-m} \mid n, m \geq 0\}$ nicht regulär ist.

Sei L regulär.

Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p \in \mathbb{N}$.

Dann gibt das ein Wort $w = 0^p 10^p \in L$ mit $|w| = 2p + 1 \geq p$, so dass für jede Zerlegung in $w = xyz$ – nämlich

$$x = 0^i$$

$$y = 0^j \text{ für } j > 0 \text{ und } i + j \leq p$$

$$z = 0^{p-i-j} 10^p$$

gilt :

- $|xy| = i + j \leq p$, laut Zerlegung
- $y \neq \epsilon$, weil $j > 0$
- aber $xy^2 z = 0^{p+j} 10^p \notin L$, weil $(p-j) \cdot 1 \neq p$ für $j > 0$

WIDERSPRUCH!!!

Also ist L nicht regulär.

WIDERSPRUCH!!!

PL

Ist diese Sprache $L = \{a^n b^m a^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}$ regulär?

Bitte beweisen oder widerlegen sie das. L ist nicht regulär. Beweis durch Widerspruch.

Sei L regulär.

Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p > 0$.

Dann gibt das ein Wort $w = a^p b^p \in L$ mit $|w| = 2p \geq p$, so dass für jede Zerlegung in

$w = xyz$ – nämlich

- $x = a^i$
- $y = a^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = a^{p-i-j} b^p a^{p^2}$

gilt :

- $|xy| = i + j \leq p$
- $y \neq \epsilon$, weil $j \geq 0$
- aber $xy^0 z = a^{p-j} b^p \notin L$, weil $p-j < p$ für $j > 0$

Also ist L nicht regulär.

Gegeben $L = \{a^n b^m c^{m-n} \mid 0 \leq n < m\}$. Ist L regulär oder nicht?

Bitte beweisen Sie ihre Antwort.

Lösung:

L ist nicht regulär.

Beweis durch Widerspruch mit Hilfe des Pumping Lemmas:

Sei L regulär.

Dann gilt für beliebige PL-Konstante $p > 0$, und für $w = b^p c^p \in L$ mit $|w| = 2p \geq p$ dass jede Zerlegung von $w = xyz$ mit

- $x = b^i$ mit $i \geq 0$
- $y = b^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = b^{p-i-j} c^p$

zu $xy^2 z = b^i (b^j)^2 b^{p-i-j} c^p = b^{p+j} c^p \notin L$ führt, da $p+j \neq p$ für $j > 0$. **WIDERSPRUCH!!!**
Also L nicht regulär.

Ist diese Sprache $L = \{a^{k^3} \mid k \geq 0\}$ regulär?

Bitte beweisen oder widerlegen Sie das. L ist nicht regulär. Beweis durch Widerspruch.

Sei L regulär.

Gegeben sei beliebige PL-Konstante $p \in \mathbb{N}$.

Dann gibt das ein Wort $w = a^{p^3} \in L$ mit $|w| = p^3 \geq p$, so dass für jede Zerlegung in

$w = xyz$ – nämlich

- $x = a^i$
- $y = a^j$ mit $j > 0$ und $i + j \leq p$
- $z = a^{p^3-i-j}$

gilt :

- $|xy| = i + j \leq p$
- $y \neq \epsilon$, weil $j \geq 0$
- aber $xy^2 z = a^{p^3+j} \in L$, weil $p^3 + j < (p+1)^3$ für $j > 0$ und $3p^3 + 3p + 1 > p > j$

Also ist L nicht regulär.

Sei L nicht regulär, dann gibt für jede PL-Konst. $p > 0$ das Wort $w = ca^p ca^p c$ mit $|w| = 2p + 3 \geq p$, so dass für jede Zerlegung $w = xyz$,

Fall 1:

$$x = \epsilon$$

$$y = ca^j \text{ mit } 0 \leq j \leq p-1$$

$$z = a^{p-j} ca^p c$$

Fall 2:

$$x = ca^i \text{ mit } 0 \leq i < p-1$$

$$y = a^j \text{ mit } j > 0 \text{ und } i + j \leq p-1$$

$$z = a^{p-(i+j)} ca^p c$$

WIDERSPRUCH!!!

Aufgabe F : Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

Ist $L = \{(\bigcirc_{i=1}^n 1^{k_i} 0) \mid \text{mit } k_i > 0 \text{ und } k_{i+1} = k_i + 1\}$,

wobei $\bigcirc_{i=1}^n w_i := w_1 \circ w_2 \circ \dots \circ w_n$ ist,

regulär oder nicht?

Bitte beweisen Sie Ihre Aussage.

Wörter aus dieser Sprache sind beispielsweise: 10, 101101110, 1101110, $1^4 0 1^5 0 1^6 0 1^7 0$

Sie enthalten also i Folgen von Einsen, denen eine einzelne Null folgt, so dass die jeweils nächste Folge von Einsen genau eine Eins mehr hat. L ist also nicht regulär.

Beweis durch Widerspruch:

Sei L regulär.

Sei PL-Konstante p beliebig. Dann gibt es das Wort $w = 1^p 0 1^{(p+1)} 0 \in L$ mit $|w| = 2p + 3 \geq p$, so dass für jede Zerlegung $w = xyz$ mit

$x = 1^k$

$y = 1^l$ mit $l > 0$ und $k + l \leq p$ und

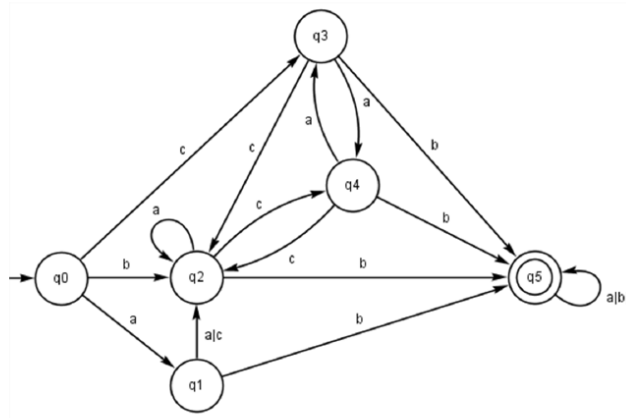
$z = 1^{p-k-l} 0 1^{p+1} 0$

Aber $xy^3z = 1^{p+2l} 0 1^{p+1} 0 \notin L$, weil $p + 2l \neq p + 1$ für $l > 0$. **WIDERSPRUCH**

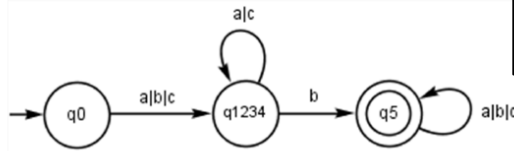
Also ist L nicht regulär.

Minimieren Sie bitte diesen DEA mit Hilfe des Table-Fillings.

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_2	q_5	q_2
q_2	q_2	q_5	q_4
q_3	q_4	q_5	q_2
q_4	q_3	q_5	q_2
$*q_5$	q_5	q_5	q_5



also q_1, q_2, q_3 und q_4 sind äquivalent.



q_1	X				
q_2	X				
q_3	X				
q_4	X				
q_5	X	X	X	X	X
q_0		q_1	q_2	q_3	q_4

Zu zeigen: L ist nicht regulär.

Beweis durch Widerspruch: Sei L regulär. Sie zeigen

1. Sei PL-Konstante p beliebig
2. Wählen Sie ein geeignetes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq p$
3. und zeigen Sie für alle erlaubten Zerlegungen

(oder größer einer geeigneten Zahl).

$w = xyz$

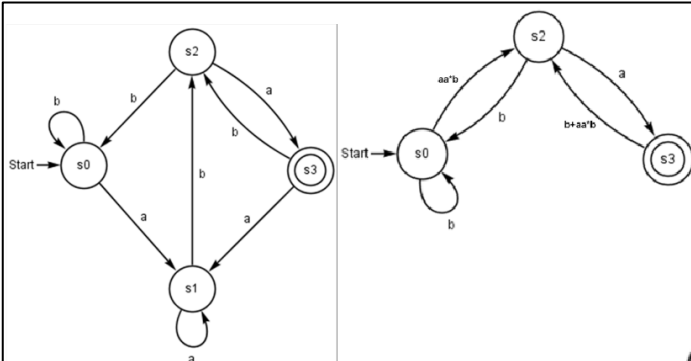
4. dass für ein $k \geq 0$ das Wort $xy^k z \notin L$.

Also ist L nicht aufpumpbar, also wegen des PL **WIDERSPRUCH!!!**

Also L ist doch nicht regulär.

(also mit $|xy| \leq p$ und $|y| > 0$)

Eliminierung: NEA \rightarrow RA



Resultierender Ausdruck:

$$(b + aa^*bb + ((aa^*ba)((b + aa^*b)a)^*(b + aa^*b)b)^*(aa^*ba)((b + aa^*b)a)^*$$

■ Alle Felder markieren, bei denen ein Zustand akzeptierend und der andere nicht akzeptierend ist.

Formal:

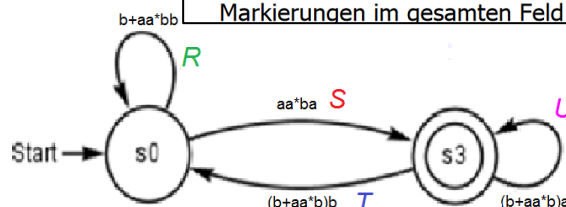
Alle Felder (p, q) mit $(p \in F \wedge q \notin F) \vee (p \notin F \wedge q \in F)$ markieren.

■ Für alle unmarkierten Felder (r, s) überprüfen, ob es ein Eingabezeichen $a \in \Sigma$ gibt, für das es Kanten von r und s auf ein markiertes Feld gibt (also zu einem Paar nicht-äquivalenter Zustände).

Formal:

Wenn $(\delta(r, a), \delta(s, a))$ markiert, dann (r, s) markieren.

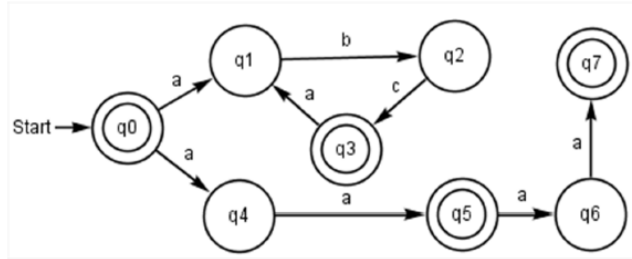
■ Für alle unmarkierten Felder wiederholen, bis keine neuen Markierungen im gesamten Feld hinzukommen.



$$(R + SU^*T)^*SU^*$$

$$2. L_2 = \{(abc)^n | n \geq 0\} \cup \{(aa)^n | 1 \leq n \leq 2\}$$

Automat:



Begründung: $\epsilon = (abc)^0$ wird erkannt, da $q0 \in F$.

Nicht deterministisch wird entschieden, ob $(abc)^n$ oder aa bzw $aaaa$ erkannt wird.

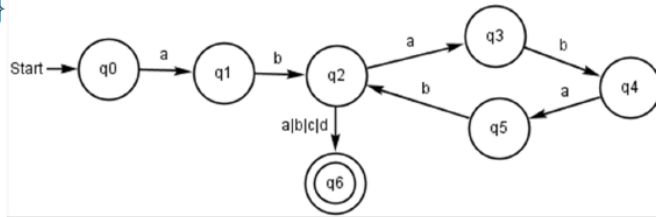
Im ersten Fall geht der Automat in Zustand $q1$ und dann arbeitet er b und c ab und ist in $q3 \in F$. Danach kann er abc beliebig oft wiederholen.

Im zweiten Fall geht der Automat in Zustand $q4$ und dann mit a in $q5 \in F$ oder er kann noch zwei a 's machen und ist in $q6 \in F$.

Was anderes kann er nicht.

$$3. L_3 = \{(ab)^{2n+1} | n \geq 0\} \circ \{a, b, c, d\}$$

Automat:

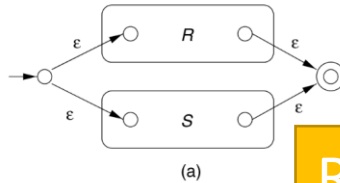


Begründung: Zuerst muss der Automat ab erkennen.

Dann kann er beliebig häufig $abab$ erkennen, insgesamt also eine ungerade Anzahl von ab 's. Danach kann er mit a oder b oder c oder d in den Zustand $q6 \in F$ übergehen und akzeptieren.

a) Vereinigung: $R + S$

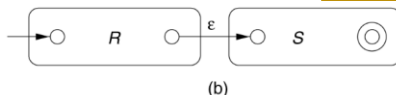
$$L(\epsilon\text{-NEA}) = L(R) \cup L(S)$$



(a)

b) Verkettung: RS

$$L(\epsilon\text{-NEA}) = L(R)L(S)$$



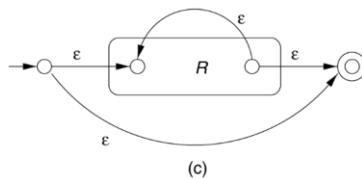
(b)

c) Hülle: R^*

$$L(\epsilon\text{-NEA}) = \{\epsilon\} \cup L(R) \cup$$

$$L(R)L(R) \cup$$

$$L(R)L(R)L(R)\dots = L(R^*)$$



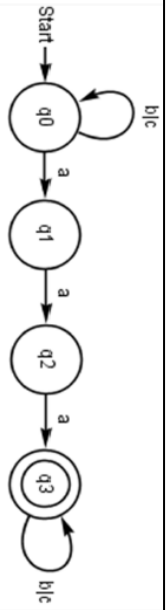
(c)

NEA

RA \rightarrow E-NEA

1. $L_1 = \{w \cdot aaa \cdot v | w, v \in \{b, c\}^*\}$
Automat:

Begründung: Erst beliebige Wörter aus $\{b, c\}^*$, dann $3a$'s, dann wieder beliebige Wörter aus $\{b, c\}^*$.



Sind die kontextfreien Sprachen unter der Vereinigung abgeschlossen?
Die kontextfreien Sprachen sind unter der Vereinigung abgeschlossen.
Gegeben seien die kontextfreien Sprachen $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ mit $G_1 = (N_1, T, S_1, R_1)$ für $i \in \{1, 2\}$ und $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.
Dann gibt es $G_3 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\})$ und es gilt $L(G_3) = L_1 \cup L_2$, denn:
 $w \in L(G_3)$
gdw $S \xRightarrow{*} w$ gdw $S \xRightarrow{*} S_1 \mid S_2 \xRightarrow{*} w$ gdw $S_1 \xRightarrow{*} w$ oder $S_2 \xRightarrow{*} w$
gdw $w \in L(G_1)$ oder $w \in L(G_2)$ gdw $w \in L(G_1) \cup L(G_2)$
gdw $w \in L(G_3)$

Grammatik	Regeln	Sprachen	Automat	Abgeschlossenheit
Typ 0	$\alpha \rightarrow \beta$	aufzählbar	Turing Maschine	KSV*
Typ 1	$\alpha \rightarrow \beta$ mit $ \alpha \leq \beta $	kontextsensitiv	Linear platzbeschränkte, nicht-deterministische Turingmaschine	CKSV*
Typ 2	$A \rightarrow \gamma$	kontextfrei	Nichtdeterministischer Pushdown Automat	KV*
		LR(k)	Deterministischer Pushdown Automat	C
Typ 3	$A \rightarrow aB$ und $A \rightarrow a$	regulär	Endlicher Automat	CKSV*

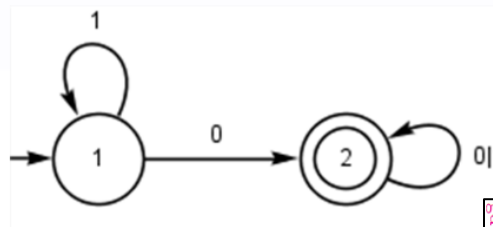
Chomsky-Hierarchie

Abgeschlossen

A, B: Nichtterminale a, b: Zeichenketten aus Terminalen α, β, γ : beliebig
C: Komplement K: Verkettung S: Schnitt V: Vereinigung *: Kleene

k-Pfade

durch den Automaten



Abgeschlossen

k-Pfad	reg. Ausdruck
$R_{11}^{(0)}$	$\epsilon + 1$
$R_{12}^{(0)}$	0
$R_{21}^{(0)}$	\emptyset
$R_{22}^{(0)}$	$\epsilon + 0 + 1$

k-Pfad	vereinf. Ausdruck
$R_{11}^{(1)}$	1^*
$R_{12}^{(1)}$	1^*0
$R_{21}^{(1)}$	\emptyset
$R_{22}^{(1)}$	$\epsilon + 0 + 1$

k-Pfad	ind. Pfadausdruck	reg. Ausdruck
$R_{11}^{(2)}$	$1^* + 1^*0(\epsilon + 0 + 1)^*0$	1^*
$R_{12}^{(2)}$	$1^*0 + 1^*0(\epsilon + 0 + 1)^*(\epsilon + 0 + 1)$	$1^*0(0 + 1)^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\epsilon + 0 + 1)(\epsilon + 0 + 1)^*0$	\emptyset
$R_{22}^{(2)}$	$(\epsilon + 0 + 1) + (\epsilon + 0 + 1)(\epsilon + 0 + 1)^*(\epsilon + 0 + 1)$	$(0 + 1)^*$

K-Pfade

2. Bei der Konstruktion eines regulären Ausdrucks aus einem DEA durch die k -Pfade wird wie folgt berechnet $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^*R_{kj}^{(k-1)}$.

Erläutern Sie bitte diese Berechnung. 8 Punkte

Erläuterung:

Die Pfade in einem DEA werden auf Basis der Kantenbeschriftungen rekursiv in RA überführt. Dafür müssen Zustände des DEA werden in $1, 2, \dots, n$ umbenannt werden. Dann bezeichnet der k -Pfad $R_{ij}^{(k)}$ genau den RA, dessen Sprache genau die Wörter umfasst, die den Beschriftungen der Pfade von Zustand i nach Zustand j entsprechen, wobei kein Zustand mit einem Namen $> k$ durchlaufen werden darf. $R_{ij}^{(k)}$ lässt sich aus $R_{ij}^{(k-1)}$ berechnen und der RA ist die Summe aller $R_{1f}^{(k)}$ mit 1 dem Startzustand und $f \in F$ einem Endzustand.

Sind die kontextfreien Sprachen unter der Verkettung abgeschlossen?
Die kontextfreien Sprachen sind unter der Verkettung abgeschlossen.
Gegeben seien die kontextfreien Sprachen $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ mit $G_1 = (N_1, T, S_1, R_1)$ für $i \in \{1, 2\}$ und $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.
Dann gibt es $G_3 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\})$ und es gilt $L(G_3) = L_1 \cup L_2$,
denn:
 $w \in L(G_3)$
gdw $S \xRightarrow{*} w$ gdw $S \xRightarrow{*} S_1 S_2 \xRightarrow{*} w_1 w_2$ mit $w = w_1 w_2$ gdw $S_1 \xRightarrow{*} w_1$ und $S_2 \xRightarrow{*} w_2$
gdw $w_1 \in L(G_1)$ und $w_2 \in L(G_2)$ gdw $w_1 w_2 \in L(G_1) \circ L(G_2)$
gdw $w \in L(G_1) \circ L(G_2)$

E-Hüllen

$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}\{q_0\} = \{q_0, q_1, q_2\}$
 $\hat{\delta}(q_0, a) = \epsilon\text{-Hülle}\{\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, \epsilon)} \delta(q, a)\} = \epsilon\text{-Hülle}\{q_1\} = \{q_1, q_2\}$
 $\hat{\delta}(q_0, ab) = \epsilon\text{-Hülle}\{\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, a)} \delta(q, b)\} = \epsilon\text{-Hülle}\{q_2\} = \{q_2\}$
 $\hat{\delta}(q_0, aba) = \epsilon\text{-Hülle}\{\bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, ab)} \delta(q, a)\} = \epsilon\text{-Hülle}\{q_1\} = \{q_1, q_2\}$
 $aba \notin L(A)$.

Sind die kontextfreien Sprachen unter dem Schnitt abgeschlossen?

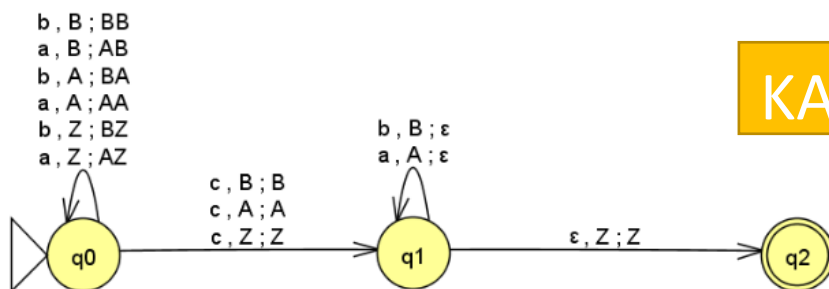
Die kontextfreien Sprachen sind unter dem Schnitt nicht abgeschlossen.

Gegeben seien die kontextfreien Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 0\}$.

Der Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist NICHT kontextfrei, also sind die kontextfreien Sprachen unter dem Schnitt nicht abgeschlossen.

Abgeschlossen

Aufgabe B: Gegeben die Sprache $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und der deterministische Keller-automat D:



KA

Beweisen Sie bitte, dass $L(D) = L$.

ZZ $L \subseteq L(D)$ und $L(D) \subseteq L$.

- $wcw^R \in L \implies wcw^R \in L(D)$ mit Induktion über $n = |w|$

IA $w = \epsilon$, dann $wcw^R = \epsilon$ und $\epsilon \in L(D)$, denn
 $(q_0, \epsilon, Z_0) \mapsto (q_1, \epsilon, Z_0) \mapsto (q_2, \epsilon, Z_0)$

IB für w mit $|w| = n$ für bel. $n \in \mathbb{N}$ gelte, $wcw^R \in L(D)$,
 $(q_0, wcw^R, Z_0) \mapsto^* (q_0, cw^R, w^R Z_0) \mapsto (q_1, w^R, w^R Z_0) \mapsto^* (q_1, \epsilon, Z_0)$

IS Für v mit $|v| = n + 1$ gilt $v = xw$ und zz $xwcw^R x \in L(D)$
 $(q_0, xwcw^R x, Z_0) \mapsto$
 $(q_0, wwcw^R x, x Z_0) \mapsto^* (q_0, cw^R x, w^R x Z_0) \mapsto (q_1, w^R x, w^R x Z_0) \mapsto^* (q_1, x, x Z_0)$
 $\mapsto (q_1, \epsilon, Z_0) \mapsto (q_2, \epsilon, Z_0)$

- $w \notin L(D) \implies w \notin L(D)$
Fallunterscheidung:

– $w \in \{a, b\}^* \notin L(D)$, denn $(q_0, w, Z_0) \mapsto^* (q_0, \epsilon, w^R Z_0)$ hat keine Folgekonfiguration.

– $w = vxucv^R yv' \notin L(D)$ für $x \neq y$ mit $x, y \in \{a, b\}$ und $u, v, v' \in \{a, b\}^*$, denn
 $(q_0, vxucv^R yv', Z_0) \mapsto^* (q_1, cu^R yv', u^R xv^R Z_0) \mapsto (q_1, u^R yv', u^R xv^R Z_0) \mapsto^* (q_1, yv', xv^R Z_0)$
hat keine Folgekonfiguration.

Beweis

Gegeben: $S \rightarrow aS|aSbS|\epsilon$
 Zeigen Sie bitte, dass für aab je zwei

- ▶ Ableitungsbäume
- ▶ linksseitige Ableitungen
- ▶ rechtsseitige Ableitungen

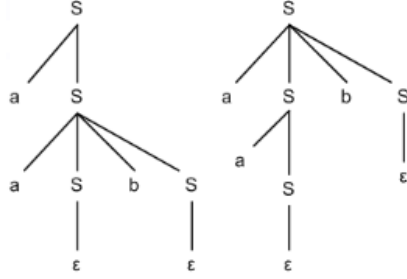
existieren.

Finden Sie für diese Sprache eine Grammatik, die eindeutig ist.

- ▶ 2 linksseitige Ableitungen :
 $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow aabS \Rightarrow aab$ und
 $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow aabS \Rightarrow aab$
- ▶ 2 rechtsseitige Ableitungen :
 $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow aaSb \Rightarrow aab$ und
 $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSb \Rightarrow aab$

Eindeutige Grammatik:

$S \rightarrow aS|aTbS|\epsilon$
 $T \rightarrow aTbT|\epsilon$



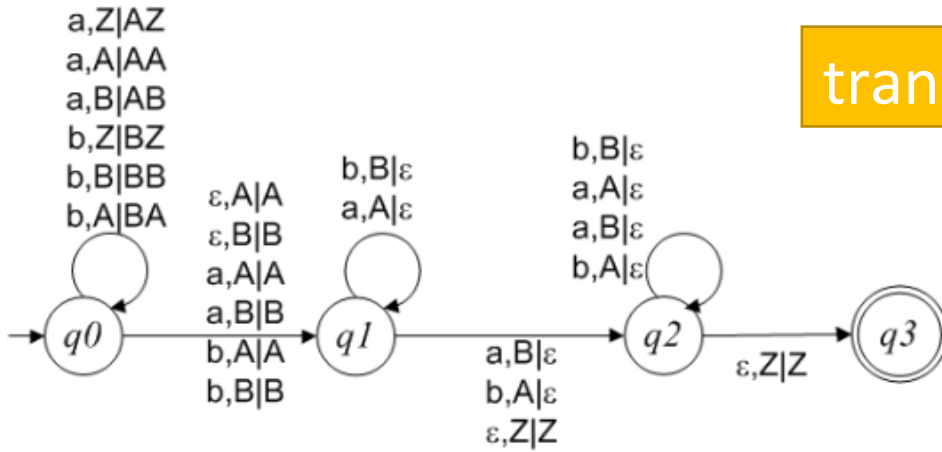
KFG:
 Ableitung &
 Mehr-u.
 Eindeutig

- ▶ G heißt eindeutig, wenn es zu jedem Wort $w \in L(G)$ nur genau einen Ableitungsbaum gibt.
- ▶ G heißt mehrdeutig, wenn es zu einem Wort w mehr als einen Ableitungsbaum gibt.
- ▶ Eine Sprache heißt mehrdeutig, falls es keine Möglichkeit gibt eine eindeutige kfG für die Sprache zu erstellen.
- ▶ Beispielsweise: $L = \{a^i b^j c^k : i = j \vee j = k\}$

KellerAutomat KA

$L = \{w | w \neq trans(w) \text{ für } w \in \{a, b\}^*\}$
 $S \rightarrow aSa | bSb | aXb | bXa$
 $X \rightarrow aXa | aXb | bXb | bXa | a | b | \epsilon$

1. Geben Sie bitte für $L = \{w | w \neq trans(w) \text{ für } w \in \{a, b\}^*\}$ mit $trans : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ und $trans(\epsilon) = \epsilon$ bzw. $trans(aw) = trans(w) \cdot a$ für $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ einen Kellerautomaten A mit $L(A) = L$ an.
2. Gibt es auch einen DKA, der L erkennt? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.



$trans(w)$

- 1.
2. Nein, denn auch hier muss die Mitte des Wortes geraten werden.

Chomsky-
 Normalform

Gegeben sei diese Grammatik:

$S \rightarrow AaBb|cABd|cCa$
 $A \rightarrow cBa|\epsilon$
 $B \rightarrow bAd|\epsilon$
 $C \rightarrow Fd|BF$

Geben sie bitte die CNF für G an.

Nutzlose Symbole	$S \rightarrow AaBb cABd, A \rightarrow cBa \epsilon, B \rightarrow bAd \epsilon$	
Rekursives Startsymbol	---	
ϵ -Regeln	$S \rightarrow AaBb cABd aBb cBd Aab cAd ab cd$ $A \rightarrow cBa ca, B \rightarrow bAd bd$	
Kettenregel	---	
Terminale überbrücken	$S \rightarrow AX_1BX_2 X_3ABX_4 X_1BX_2 X_3BX_4$ $S \rightarrow AX_1X_2 X_3AX_4 X_1X_2 X_3X_4$ $A \rightarrow X_3BX_1 X_3X_1, B \rightarrow X_2AX_4 X_2X_4$ $X_1 \rightarrow a, X_2 \rightarrow b, X_3 \rightarrow c, X_4 \rightarrow d$	
Regeln aufspalten	$S \rightarrow AY_1$ $Y_1 \rightarrow X_1Y_2$ $Y_2 \rightarrow BX_2$ $S \rightarrow X_3Y_3$ $Y_3 \rightarrow AY_4$ $Y_4 \rightarrow BX_4$ $S \rightarrow X_1Y_5$ $Y_5 \rightarrow BX_2$	$S \rightarrow X_3Y_6$ $Y_6 \rightarrow BX_4$ $S \rightarrow AY_7$ $Y_7 \rightarrow X_1X_2$ $S \rightarrow X_3Y_8$ $Y_8 \rightarrow AX_4$ $S \rightarrow X_1X_2 X_3X_4$
	$A \rightarrow X_3Y_9$ $Y_9 \rightarrow BX_1$ $A \rightarrow X_3X_1$ $B \rightarrow X_2Y_{10}$ $Y_{10} \rightarrow AX_4$ $B \rightarrow X_2X_4$ $X_1 \rightarrow a, X_2 \rightarrow b$ $X_3 \rightarrow c, X_4 \rightarrow d$	

$L = \{a^i b^j c^k | n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis: L sei kontextfrei, also gilt das Pumping-Lemma.

Sei $z = a^p b^q c^p$, dann $z \in L$ und $|z| \geq p$.

uvw enthält nicht alle drei Zeichen a, b und c , denn $|uvw| \leq p$.

Das fehlende Zeichen wird beim Aufpumpen zu uv^2wx^2y nicht vervielfältigt.

Weil aber $|x| > 0$ werden die Zeichen in vx vervielfältigt.

$uv^2wx^2y \notin L$, denn nicht mehr gleich viele a 's, b 's und c 's

Widerspruch zur Aussage des Pumping-Lemmas.

Daher muss die Annahme falsch sein, d.h. L ist nicht kontextfrei.

PL KFG