

MATEMATIKK PROSJEKT 1

TDAT2002-A 14H

The Euler-Bernoulli beam

Authors:

Lars GARBERG
Bjørn HOXMARK
Borgar LIE
Jørgen WILHELMSEN

Supervisor:

Hans Jakob RIVERTZ

March 18, 2015

1 Forord

Denne rapporten er resultatet av et prosjekt ved dataingeniørlinjen på HiST. Oppgaven har blitt utført våsemesteret 2015.

I vårt arbeid med denne oppgaven har vi benyttet oss av mange teknologier som har forenklet prosessen betraktelig, eksempelvis og spesielt Latex, Github, Google Docs, MatLab og Sublime har alle vært til stor hjelp får å produsere det endelige resultatet.

Vi vil også takke Hans Jakob Rivertz for god veiledning gjennom hele prosjektet.

2 Sammendrag

Denne rapporten omhandler Euler-Bernoulli bjelken (The Euler-Bernoulli beam). Dette er en fundamental modell som sier hvordan forskjellige materialer bøyer seg under påvirkning av diverse krefter. Modellens nøyaktighet ble praktisk demonstrert da den ble brukt til å bygge både Eiffel-tårnet og Pariserhjulet [2]. Det viser seg at diskretisering av differentiaalligningen gjør at vi får et system av lineære ligninger som kan brukes til å finne den vertikale forskyvningen. Jo mindre steglengde vi bruker til diskretiseringen, jo større blir likningssystemet. Euler-Bernoulli modellen er en meget sentral modell innenfor dette området, og det er skrevet mange artikler rundt dette. For eksempel har Timoshenko foreslått en videre forbedring av beam teorien[3] fordi Euler-Bernoulli beam passer best til smalere med lav vibrasjon.

I rapporten går vi først igjennom grunnleggende teori som utgjør grunnlaget for utregningene gjort for å regne ut den vertikale forskyvningen i hvert punkt langs bjelken. På grunn av at oppgaven vi har fått er en faktisk oppgave som står i læreboken, går vi i teoridelen igjennom de fleste formlene boken oppgir, med noen få unntak som spesifikt ikke skulle beskrives. Til slutt i teoridelen følger det 2 bevis. Det ene beviset beviser likning 2.28, som er et uttrykk på den fjerdederiverte til funksjonen y i Euler-Bernoulli likningen. Av grunner beskrevet i teoridelen er ikke denne likningen brukbar langs hele planken, og derfor følger et nytt bevis på den fjerdederiverte i punktet x_1 etter dette.

Etter teoridelen løser vi en rekke oppgaver. Oppgavene vi løser er oppgavene som står til slutt i Reality Check 2, og går ut på forskjellige utregninger knyttet til et stupebrett, som enkelt kan relateres til Euler-Bernoulli-likningen. Oppgavene går fra å lage diverse MatLab-programmer som regner ut den vertikale forskyvningen langs planken, på forskjellige måter, til både det å finne hvor store feil forskjellige funksjoner har. Vi får også oppgitt en løsning på funksjonen, som vi skal vise at tilfredsstiller Euler-Bernoulli funksjonen, gitt en viss påført kraft. Til slutt regner vi også den vertikale forskyvningen når vi påfører vekt på stupebrettet.

Innholdsfortegnelse og figur- og tabelliste

1	Forord	1
2	Sammendrag	2
3	Teori og metode	4
3.1	Generell teori	4
3.2	Exercise 5.1.21	7
3.3	Exercise 5.1.22a	9
4	Resultater	12
4.1	Oppgave 1	12
4.2	Oppgave 2	14
4.3	Oppgave 3	16
4.4	Oppgave 4	17
4.5	Oppgave 5	18
4.6	Oppgave 6	21
5	Konklusjon	24
6	Referanseliste	25
7	Vedlegg	25

3 Teori og metode

3.1 Generell teori

Vi skal i denne oppgaven jobbe mye med Euler-Bernoulli modellen for materialers bøyning under påvirkning av krefter. Modellen yttrykker den vertikale forskyvningen $f(x)$ hvor $0 \leq x \leq L$. x går langs bjelken som har lengde L . Euler-Bernoulli likningen er gitt ved

$$EIy'''' = f(x) \quad (1)$$

hvor E er Youngs modulus til materialet, og I er tregheten. Begge disse er konstante langs hele bjelken. Funksjonen $f(x)$ er den påførte kraften, inkludert bjelkens egenvekt, per lengde-enhet.

I oppgaven (Reality Check 2) har vi oppgitt formlene 2.27 og 2.28 som følger (et bevis på 2.28 kommer senere):

$$EIy'''' = f(x)$$
$$y''''(x) \approx \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4} \quad (2)$$

Vi deler opp planken i n like deler, alle med lengde $h = \frac{L}{n}$. Dette medfører at $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_i$, hvor alle x_i har lengde h . x_0 er starten på planken, x_1 er første steglengde ut på bjelken, $x_1 = 1 \cdot h$. x_2 er på samme måte andre lengde ut på planken, $x_2 = 2 \cdot h$. Videre blir $x_i = i \cdot h$. Hvis vi sier at $y_i = y(x_i)$ og setter dette inn i likning 2.27 får vi at

$$EI \cdot \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} = f(x) \quad (3)$$

Vi gjør om slik at vi får alle leddene som inneholder y på én side:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x_i) \quad (4)$$

Dette er hvordan man kommer frem til likning 2.29.

Videre skal vi bruke Euler-Bernoulli likningen på et stupebrett. Et stupebrett er en bjelke som er festet i den ene enden, og den vertikale forskyvningen på starten av brettet er naturligvis lik 0. Hvis vi bruker dette får vi følgende informasjon om starten av brettet ($y(0)$) og slutten av brettet ($y(L)$):

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0 \quad (5)$$

Men, skal vi bruke de tidligere definerte funksjonene får vi et problem. Vi ser at hvis vi har lyst til å finne den vertikale forskyvningen i det første punktet etter starten, altså x_1 , blir dette umulig. Som sagt tidligere er $x_1 = 1 \cdot h$, og setter vi dette inn i formelen vi tidligere har definert for den fjerdederiverte får vi:

$$y''''(x_1) \approx \frac{y((1 \cdot h) - 2h) - 4y((1 \cdot h) - h) + 6y(1 \cdot h) - 4y((1 \cdot h) + h) + y((1 \cdot h) + 2h)}{h^4}$$

$$y''''(x_1) \approx \frac{y(-h) - 4y(0) + 6y(h) - 4y(2h) + y(3h)}{h^4} \quad (6)$$

Bruker notasjonen $y_i = y(x_i)$, hvor x_i er som før, får vi at:

$$y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{h^4}{EI} f(x_1) \quad (7)$$

Det er her vi har et problem. y_{-1} er ikke definert grunnet at vi har ingen punkter som kommer før stupebrettets begynnelse. Derfor trenger vi et nytt uttrykk for $y''''(x)$ som gjelder bare for $x_1 = 1 \cdot h$. Dette uttrykket er som følger (bevis kommer senere) :

$$y''''(x_1) \approx \frac{16y(x_1) - 9y(x_1 + h) + \frac{8}{3}y(x_1 + 2h) - \frac{1}{4}y(x_1 + 3h)}{h^4} \quad (8)$$

Vi har altså et generelt uttrykk for $y''''(x)$, med et unntak for $y(x_1)$. Dette er, som sagt før:

$$y''''(x) \approx \frac{y(x - 2h) - 4y(x - h) + 6y(x) - 4y(x + h) + y(x + 2h)}{h^4} \quad (9)$$

Som vi ser av dette uttrykket bruker det punktene $x + h$ og $x + 2h$. Vi har altså litt av det samme problemet som vi hadde for x_1 : På slutten av planken, ved $x = L$, vil uttrykket inneholde punktene $L + h$ og $L + 2h$. Vi har altså 2 punkter som er lengre enn brettets lengde, og derfor trenger vi nye uttrykk for $y''''(x_{n-1})$ og $y''''(x_n)$. Disse er som følger (skal ikke bevises, antas som gyldige):

$$y''''(x_{n-1}) \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4} \quad (10)$$

$$y''''(x_n) \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4} \quad (11)$$

Vi har nå gyldige uttrykk for hele plankens lengde. I bokas likning/figur 2.34 er matrisen som avbildet i figur 1. Tallene i denne matrisen stemmer godt med likningene vi har funnet. Likningen for x_1 hadde koeffisientene 16, -9, $\frac{8}{3}$ og $-\frac{1}{4}$, og dette stemmer overens med første linje i matrisen. Resten av matrisen, frem til de 2 siste leddene, skulle ha koeffisientene 1, -4, 6, -4 og 1. Linje 2, altså x_2 , har koeffisientene -4, 6, -4 og 1. Dette er fordi det generelle uttrykket er

$$y''''(x) \approx \frac{y(x - 2h) - 4y(x - h) + 6y(x) - 4y(x + h) + y(x + 2h)}{h^4}$$

og i $x = 2h$ er $y((2 \cdot h) - 2h) = y(0) = 0$. De 2 siste linjene i matrisen stemmer overens med uttrykkene vi fant for $y''''(x_{n-1})$ og $y''''(x_n)$.

$$\begin{bmatrix}
16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & \\
-4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\
& 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
& & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
& & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\
& & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_1 \\
y_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
y_{n-1} \\
y_n
\end{bmatrix}
= \frac{h^4}{EI}
\begin{bmatrix}
f(x_1) \\
f(x_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
f(x_{n-1}) \\
f(x_n)
\end{bmatrix}.$$

Figure 1: Matrisen 2.34 fra boken

3.2 Exercise 5.1.21

Følgende kommer et bevis på at den fjerdedederiverte (likning 2.28) kan approksimeres ved:

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} \quad (12)$$

Først setter vi opp taylor-rekker for punktene $x+2h$, $x-2h$, $x+h$, $x-h$ [4]:

$$\begin{aligned} f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + h^6 \\ f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + h^6 \\ f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2f''(x)}{2} + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + h^6 \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2f''(x)}{2} - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + h^6 \end{aligned} \quad (13)$$

Deretter legger vi først sammen $f(x+2h)$ og $f(x-2h)$:

$$\begin{aligned} f(x+2h) + f(x-2h) &= \\ f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + h^6 &+ \\ f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + h^6 &= \\ 2f(x) + 4h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^4f^{(4)}(x) + h^6 \end{aligned}$$

Deretter legger vi sammen $f(x+h)$ og $f(x-h)$:

$$\begin{aligned}
& f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f'''(x)}{3!} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{4!} + \frac{h^5 f^{(5)}(x)}{5!} + h^6 \\
& + \\
& f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f'''(x)}{3!} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{4!} - \frac{h^5 f^{(5)}(x)}{5!} + h^6 \\
& = \\
& 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{12} + h^6
\end{aligned}$$

Til slutt legger vi sammen $f(x+h) + f(x-h)$ og $\frac{f(x+2h)+f(x-2h)}{-4}$:

$$\begin{aligned}
& 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{12} + h^6 \\
& + \\
& \frac{2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^4 f^{(4)}(x) + h^6}{-4} \\
& = \\
& \frac{3}{2}f(x) - \frac{3}{12}h^4 f^{(4)}(x) + h^6
\end{aligned} \tag{14}$$

Deretter løser vi likningen med hensyn på $f^{(4)}(x)$:

$$\begin{aligned}
& f(x+h) + f(x-h) - \frac{f(x+2h)}{4} - \frac{f(x-2h)}{4} = \frac{3}{2}f(x) - \frac{3}{12}h^4 f^{(4)}(x) + h^6 \\
& -3h^4 f^{(4)}(x) = 12f(x+h) + 12f(x-h) - 3f(x+2h) - 3f(x-2h) - 18f(x) + h^6 \\
& f^{(4)}(x) = \frac{-4f(x-h) + f(x-2h) + 6f(x) + f(x+2h) - 4f(x+h)}{h^4}
\end{aligned} \tag{15}$$

3.3 Exercise 5.1.22a

Bevis at hvis $f(x) = f'(x) = 0$, så vil

$$f^{iv}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2)$$

(16)

Vi får oppgitt i oppgaveteksten at hvis $f(x) = f'(x) = 0$, er

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$$

(17)

I 13, fant vi taylorrekkene for punktene $x-h$, $x+h$, $x+2h$. Vi finner her taylorrekkene for punktene $x+3h$ og $x+4h$:

$$\begin{aligned} f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + 3h^3f'''(x) + \frac{27h^4}{8}f^{iv}(x) + \frac{81h^5}{40}f^v(x) + h^6 \\ f(x+4h) &= f(x) + 4hf'(x) + 8h^2f''(x) + \frac{32h^3}{3}f'''(x) + \frac{32h^4}{3}f^{iv}(x) + \frac{128h^5}{15}f^v(x) + h^6 \end{aligned}$$

Setter så inn koeffisientene vi ble gitt i hintet foran taylor-rekkene.

$$\begin{aligned} f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6) \\ 10f(x+h) &= 10f(x) + 10hf'(x) + 5h^2f''(x) + \frac{5h^3}{3}f'''(x) + \frac{5h^4}{12}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{12}f^{(5)}(x) + O(h^6) \\ 5f(x+2h) &= 5f(x) + 10hf'(x) + 10h^2f''(x) + \frac{20h^3}{3}f'''(x) + \frac{10h^4}{3}f^{(4)}(x) + \frac{4h^5}{3}f^{(5)}(x) + O(h^6) \\ \frac{5}{3}f(x+3h) &= \frac{5}{3}f(x) + 5hf'(x) + \frac{15h^2}{2}f''(x) + \frac{15h^3}{2}f'''(x) + \frac{45h^4}{8}f^{iv}(x) + \frac{27h^5}{8}f^v(x) + O(h^6) \\ \frac{1}{4}f(x+4h) &= \frac{1}{4}f(x) + hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \frac{8h^4}{3}f^{iv}(x) + \frac{32h^5}{15}f^v(x) + O(h^6) \end{aligned}$$

Siden $f(x) = f'(x) = 0$, kan uttrykk med $f(x)$ og $f'(x)$, i Taylorrekkene fjernes. Vi setter inn disse Taylorrekkene i hintet 17:

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O_1(h^6) \\
& \quad - \\
& (5h^2f''(x) + \frac{5h^3}{3}f'''(x) + \frac{5h^4}{12}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{12}f^{(5)}(x) + O_2(h^6)) \\
& \quad + \\
& 10h^2f''(x) + \frac{20h^3}{3}f'''(x) + \frac{10h^4}{3}f^{(4)}(x) + \frac{4h^5}{3}f^{(5)}(x) + O_3(h^6) \\
& \quad - \\
& (\frac{15h^2}{2}f''(x) + 5h^3f'''(x) + \frac{45h^4}{8}f^{iv}(x) + \frac{15h^5}{4}f^v(x) + O_4(h^6)) \\
& \quad + \\
& 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \frac{8h^4}{3}f^{iv}(x) + \frac{32h^5}{15}f^v(x) + O_5(h^6) \\
& \quad = \\
& 0f''(x) + 0f'''(x) + 0f^{iv}(x) + 0f^v(x) + O(h^6) \\
& \quad = \\
& O(h^6)
\end{aligned} \tag{18}$$

Har da vist at hintet gitt i oppgaven stemmer.

Vi endrer så dette uttrykket til å være lik $O(h^2)$, likt som i likning 16.

$$\frac{f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2) \tag{19}$$

Vi endrer uttrykket vi kom fram til i 15 fra $f^{iv}(x)$ til $f^{iv}(x+h)$ og får:

$$f^{iv}(x+h) = \frac{f(x-h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2) \tag{20}$$

Utrykket funnet i 19 settes inn i uttrykket vi fant i 20:

$$\begin{aligned}
& f^{iv}(x+h) - O(h^2) \\
& = \\
& \frac{f(x-h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2) \\
& - \\
& \frac{f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} \\
& = \\
& \frac{-4f(x) + 16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2)
\end{aligned}$$

Siden $f(x) = f'(x) = 0$, kan deler fra uttrykket fjernes. Vi får

$$\frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2) \quad (21)$$

Vi ser at det uttrykket er veldig likt uttrykket vi har i 16. Vi endrer på uttrykket $f^{iv}(x+h) - (f^{iv}(x+h) - O(h^2))$ som ble funnet i 21.

$$\begin{aligned}
& f^{iv}(x+h) - (f^{iv}(x+h) - O(h^2)) \\
& = \\
& f^{iv}(x+h) - \left(\frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2) \right) \\
& = \\
& f^{iv}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2) \quad (22)
\end{aligned}$$

Og dermed er oppgaven bevist.

4 Resultater

4.1 Oppgave 1

Write a Matlab program to define the structure matrix A in (2.34). Then, using the Matlab \command or code of your own design, solve the system for the displacements y_i using $n = 10$ grid steps.

Løsning

Listing 1: oppgave1.m

```
format long
%følgende kommando ganger ( $h^4 / EI * F(x)$ ) med invers av matrisen som
%er resultat av lagmatrise, som er matrisen gitt i oppgaven.
ys = lagmatrise(10)\konstantkrefter(10);
disp(ys);
```

Listing 2: lagmatrise.m

```
function [A] = lagmatrise(n)
%legger inn rader fra oppgaveteksten.
A = sparse(n,n);
A(1,1) = 16;
A(1,2) = -9;
A(1,3) = 8/3;
A(1,4) = -1/4;
A(2,1) = -4;
A(2,2) = 6;
A(2,3) = -4;
A(2,4) = 1;
%legger inn repeterende rader i midten av matrisen, fra tredje rad til og
%med tredje siste rad.
for x=3:n-2
    A(x,x-2)=1;
    A(x,x-1)=-4;
    A(x,x)=6;
    A(x,x+1)=-4;
    A(x,x+2)=1;
end
%legger inn de 2 siste radene.
A(n-1,n-3) = 16/17;
A(n-1,n-2) = -60/17;
A(n-1,n-1) = 72/17;
A(n-1,n) = -28/17;
A(n,n-3) = -12/17;
A(n,n-2) = 96/17;
A(n,n-1) = -156/17;
A(n,n) = 72/17;
```

Listing 3: konstantkrefter.m

```
function [B] = konstantkrefter(n)
%lager høyresiden av matriseligningen. (h^4/EI) * f(x)
%deler opp bjelken i n lengder med lengde h
h = 2 / n;
%regner ut kraften f(x)
kraft = -9.81*480*0.3*0.03;
%definerer E og I som gitt i oppgaven
E = 1.3*10.^(10);
I = (0.3*0.03.^3)/12;
%lager en n høy matrise, bredde 1, av enere, som ganges med kraft og
    h^4/EI.
B = ones(n, 1) * h^4/(E*I) * kraft;
```

```
>> oppgave1
-0.000180624738462
-0.000674847507692
-0.001416986584615
-0.002349087507692
-0.003420923076923
-0.004589993353846
-0.005821525661539
-0.007088474584616
-0.008371521969231
-0.009659076923077
```

Figure 2: Vertical Displacement

Vektoren gitt i figur 2 er resultatene av `disp(ys)` og viser den vertikale forskyvningen til bjelken relativt til utgangspunktet.

4.2 Oppgave 2

Plot the solution from Step 1 against the correct solution

$$y(x) = (f/24EI)x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (23)$$

where $f = f(x)$ is the constant defined above.

Check the error at the end of the beam, $x = L$ meters. In this simple case the derivative approximations are exact, so your error should be near machine roundoff.

Løsning

Listing 4: oppgave2.m

```
tall1 = lagmatrise(10)\konstantkrefter(10);
tall2 = korrektutregning(10);
format long
%skriver ut forskjellen mellom slutten av planken for de 2 forskjellige
    utregningene
disp(tall1(10)-tall2(10));
%lager x-verdier til grafen
x = (1:10)/5;
%lager graf med x som
plot(x, tall1, x, tall2);
```

```
>> oppgave2
-1.856154119295184e-16
```

Figure 3: Error - end of beam

Plottingen vises i figur 4, og man kan se at de to linjene ligger veldig nærme hverandre, som vil si at feilen er svært liten.

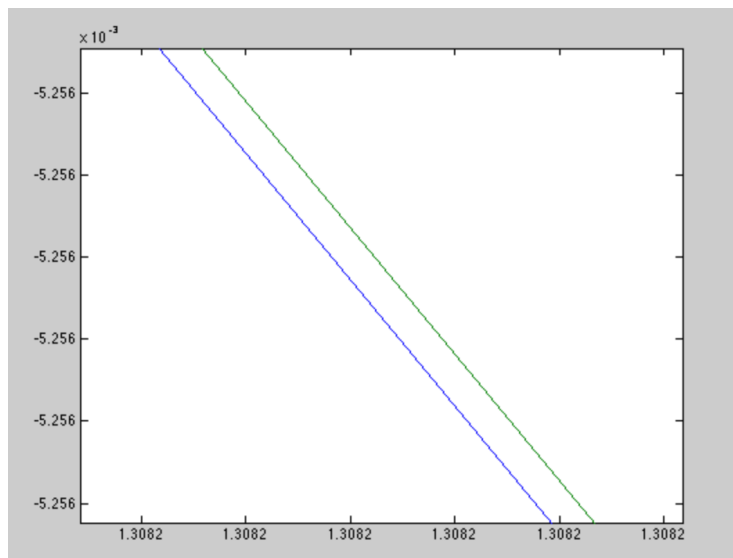


Figure 4: Error plot

4.3 Oppgave 3

Rerun the calculation in Step 1 for $n = 10 \cdot 2^k$, where $k = 1, \dots, 11$. Make a table of the errors at $x = L$ for each n . For which n is the error smallest? Why does the error begin to increase with n after a certain point? You may want to make an accompanying table of the condition number of A as a function of n to help answer the last question. To carry out this step for large k , you may need to ask Matlab to store the matrix A as a sparse matrix to avoid running out of memory. To do this, just initialize A with the command $A = \text{sparse}(n,n)$, and proceed as before. We will discuss sparse matrices in more detail in the next section.

Løsning

Listing 5: oppgave3.m

```
feiltab = zeros(11,1);
kondtab = zeros(11,1);
for(eksp=1:11)
    n=10*(2.^eksp);
    tall1 = lagmatrise(n)\konstantkrefter(n);
    tall2 = korrektutregning(n);
    tall3 = tall1(n)-tall2(n);
    feiltab(eksp) = tall3;
    kondtab(eksp)=condest(lagmatrise(n));
end;
disp('Feilene er som følger:');
disp(feiltab);
disp('Kondisjonstallene er som følger: ');
disp(kondtab);
```

Feilene er som følger:
1.0e-04 *

```
0.00000000137633
0.000000001473335
0.000000006663611
-0.000000086099478
0.000001728762827
-0.000008319528816
-0.000222848915710
0.001038814576113
0.016655832396559
-0.436949342139930
-0.318512163212919
```

Figure 5: Errors

Kondisjonstallene er som følger:
1.0e+17 *

```
0.00000000005303
0.000000000084493
0.000000001348213
0.000000021538773
0.000000344346455
0.000005507300301
0.000088098611514
0.001409425687578
0.022550752252394
0.363707079620703
6.608363983877146
```

Figure 6: Condition Numbers

Feilene vises i figur 5, og man kan se at feilen øker når n øker, dette kan man se har en sterk sammenheng med kondisjonstallene som vist i figur 6. Den minste feilen er når $k = 1$, altså når $n = 10 \cdot 2^1 = 20$.

4.4 Oppgave 4

Add a sinusoidal pile to the beam. This means adding a function of form $s(x) = -pg \sin(\frac{\pi}{L}x)$ to the force term $f(x)$. Prove that the solution

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{pgL}{EI\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{L}{2}x^2 - \frac{L^2}{\pi^2}x \right) \quad (24)$$

satisfies the Euler–Bernoulli beam equation and the clamped-free boundary conditions.

Løsning

Skal bevise at:

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{pgL}{EI\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{L}{2}x^2 - \frac{L^2}{\pi^2}x \right)$$

Vi starter med å få EI på venstre side

$$\begin{aligned} EIy(x) &= \frac{f}{24}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{pgL}{\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{L}{2}x^2 - \frac{L^2}{\pi^2}x \right) \\ EIy(x) &= \frac{f}{24}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) - \frac{pgL}{\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{L}{2}x^2 - \frac{L^2}{\pi^2}x \right) \end{aligned}$$

Fjerdederiverer på hver side

$$\begin{aligned} EIy'(x) &= \frac{f}{24}(4x^3 - 12Lx^2 + 12L^2x) - \frac{pgL}{\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \cos(\frac{\pi}{L}x) \cdot \frac{\pi}{L} - \frac{3x^2}{6} + \frac{2L}{2}x - \frac{L^2}{\pi^2} \right) \\ EIy''(x) &= \frac{f}{24}(12x^2 - 24Lx + 12L^2) - \frac{pgL}{\pi} \left(\frac{L^2}{\pi^2}(-\sin(\frac{\pi}{L}x) \cdot \frac{\pi}{L}) - x + L \right) \\ EIy'''(x) &= \frac{f}{24}(24x - 24L) - \frac{pgL}{\pi} \left(\frac{L}{\pi}(-\cos(\frac{\pi}{L}x) \cdot \frac{\pi}{L}) - 1 \right) \\ EIy''''(x) &= \frac{f}{24}(24) - \frac{pgL}{\pi} \left(\sin(\frac{\pi}{L}x) \cdot \frac{\pi}{L} \right) \\ EIy''''(x) &= \frac{f24}{24} - pg \cdot \sin(\frac{\pi}{L}x) \\ EIy''''(x) &= f - pg \cdot \sin(\frac{\pi}{L}x) \end{aligned} \quad (25)$$

Vi ser ut ifra resultatet i bevis 25 at ligningen er ekvivalent med $s(x)$.

4.5 Oppgave 5

Rerun the calculation as in Step 3 for the sinusoidal load. (Be sure to include the weight of the beam itself.) Set $p = 100$ kg/m and plot your computed solutions against the correct solution. Answer the questions from Step 3, and in addition the following one: Is the error at $x = L$ proportional to h^2 as claimed above? You may want to plot the error versus h on a log-log graph to investigate this question. Does the condition number come into play?

Løsning

Listing 6: Oppgave5.m

```
feiltab = zeros(11,1);
konddtab = zeros(11,1);
h = zeros(11,1);
minst = 100;
minstTall = 100;
for(eksp=1:11)
    n=10*(2.^eksp);
    h(eksp) = 2 / n;
    tall1 = lagmatrise(n)\konstantkrefter2(n);
    tall2=korrektutregning2(n);
    tall3 = tall1(n)-tall2(n);
    if abs(tall3)<abs(minstTall)
        minst=n;
        minstTall = tall3;
    end
    feiltab(eksp)=abs(tall3);
    konddtab(eksp)=condest(lagmatrise(n));
end;
disp(minst);
display long;
disp('Feilene er som følger:');
disp(feiltab);
disp('Kondisjonstallene:');
disp(konddtab);
% plot med logaritmiske akser, error vs h^2
loglog(h, h.^2, h, feiltab);
```

Listing 7: konstantkrefter2.m

```
function [B] = konstantkrefter2(n)
%legger inn rader fra oppgaveteksten.
%lager høyresiden av matriseligningen. (h^4/EI) * f(x)
%deler opp bjelken i n lengder med lengde h
h = 2 / n;
L=2;
p=100;
```

```

g=-9.81;
d=480;
w=0.3;
t=0.03;
p = 100;
%regner ut kraften f(x)
kraft = d*w*t*g;
%lager lengdevektor (langt ut på brettet)
%definerer E og I som gitt i oppgaven
E = 1.3*10.^(10);
I = (w*t.^3)/12;
B = ones(n, 1);
for k=1:n
    xi=k*h;
    B(k, 1)=g*d*w*t+(p*g*sin(xi*(pi/2)));
end;
B=B*h^4/(E*I);

```

Listing 8: korrektutregning2.m

```

function [riktig] = korrektutregning2(n)
%delar opp bjelken i n lengder med lengde h
h = 2 / n;
%regner ut kraften f(x)
kraft = -9.81*480*0.3*0.03;
%definerer E og I som gitt i oppgaven
E = 1.3*10.^(10);
I = (0.3*0.03.^3)/12;
L=2;
p=100;
g=-9.81;
%initierer matrisen med høyde n
riktig = zeros(n, 1);
for k=1:n
    %hver x er lengden ut i planken vi befinner oss
    x = h * k;
    %formel fra boken, oppgitt i oppgave 4.
    riktig(k,1)=kraft/(24*E*I)*x.^2*(x.^2-4*L*x+6*(L.^2))
        +(p*g*L/(E*I*pi))*(L.^3/(pi.^3)*sin(pi/L*x)-(x.^3)/6+(L/2)*x.^2-L.^2/(pi.^2)*x);
end

```

Feilene vises i figur 7, i motsetning til hvordan feilen økte med n i oppgave 3, så er den minste feilen her når $n = 1280$. Før dette vil feilen minke, men etterpå ser det ut som at kondisjonstallet har en større påvirkning, og feilen vil øke proporsjonalt med h^2 som man kan se i figur 9.

```

>> Oppgave5
      1280

long
Feilene er som følger:
1.0e-03 *

0.537696008039101
0.135464870643753
0.033930913051872
0.008486895086757
0.002119384921007
0.000542935457787
0.000459131606567
0.001488144775325
0.024717135159363
0.649947717567573
0.564484538488952

Kondisjonstallene:
1.0e+17 *

0.00000000005303
0.000000000084493
0.000000001348213
0.000000021538773
0.000000344346455
0.00005507300301
0.00088098611514
0.001409425687578
0.022550752252394
0.363707079620703
6.608363983877146

```

Figure 7: Errors - Exercise 5

Figure 8: Condition numbers - Ex5

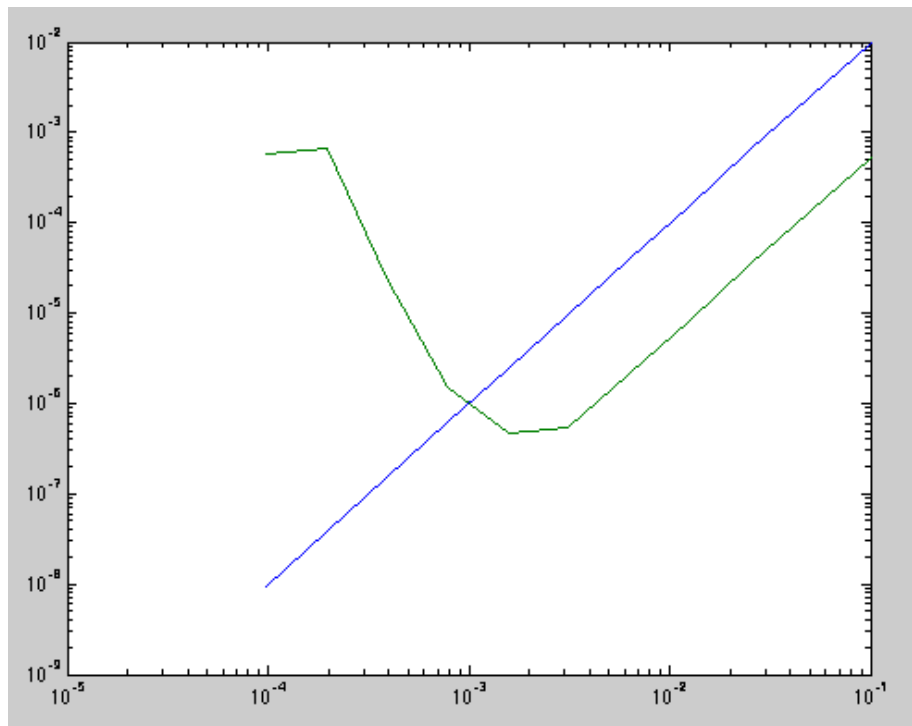


Figure 9: Loglog plot - Error(grønn) vs h^2

4.6 Oppgave 6

Now remove the sinusoidal load and add a 70 kg diver to the beam, balancing on the last 20 cm of the beam. You must add a force per unit length of $-g$ times $70/0.2$ kg/m to $f(x_i)$ for all $1.8 \leq x_i \leq 2$, and solve the problem again with the optimal value of n found in Step 5. Plot the solution and find the deflection of the diving board at the free end.

Løsning

Listing 9: Oppgave6regning.m

```
function [B] = Oppgave6Regning(n)
%deler først opp bjelken i n lengder med lengde h
h = 2 / n;

%Definerer konstanter. Lengden av planken = 2. g, d, w og t er
    konstanter i oppgaven.
L=2;
g=9.81;
d=480;
w=0.3;
t=0.03;

%regner ut kraften f(x)
kraft = -d*w*t*g;

%definerer E og I som gitt i oppgaven
E = 1.3*10.^(10);
I = (w*t.^3)/12;

%Lager en matrise B med høyde n og bredde 1.
B = ones(n, 1);

%looper igjennom n
for k=1:n
    %definerer xi for hvert steg ut på brettet
    xi=k*h;

    %Hvis vi befinner oss på slutten av planken (x mellom 1.8 og 2) er
        kraften annerledes. (gitt i oppgaven, vekten av stuperen)
    if xi>=1.8
        B(k, 1)=kraft-g*(70/0.2);

    %Hvis ikke er kraften som vanlig:
    else
        B(k, 1)=kraft;
    end
end;
end;
```

```
%Til slutt ganger vi hele matrisen med  $h^4/(E \cdot I)$   
B=B*h^4/(E*I);
```

Vi bruker denne koden til å få den vertikale forskyvningen på slutten av brettet, og lager en graf av brettets vertikale forskyvning:

Listing 10: Oppgave6.m

```
%Regner matrisen A med alle vertikale forskyvninger langs stupebrettet.  
Den  
%optimale n funnet i forrige oppgave er 1280.  
A=Oppgave6Regning(1280);  
  
%Definerer matrisen B på samme måte som før  
B= lagmatrise(1280);  
  
%Regner ut C, som vil inneholde den vertikale forskyvningen til hvert  
punkt  
%langs stupebrettet. (C=A*Binvers)  
C=B\A;  
  
%Skriver ut den siste vertikale forskyvningen, altså forskyvningen på  
%slutten av brettet.  
disp('Vertikal forskyvning på slutten av stupebrettet: ');  
disp(C(1280));  
  
%Lager en x-vektor med x-verdier  
x=0:(2/1280):(2-2/1280);  
  
%Lager en graf av x-verdiene og den vertikale forskyvningen  
plot(x',C);
```

Den vertikale forskyvningen på slutten av planken er $C(1280) = -0.2034$

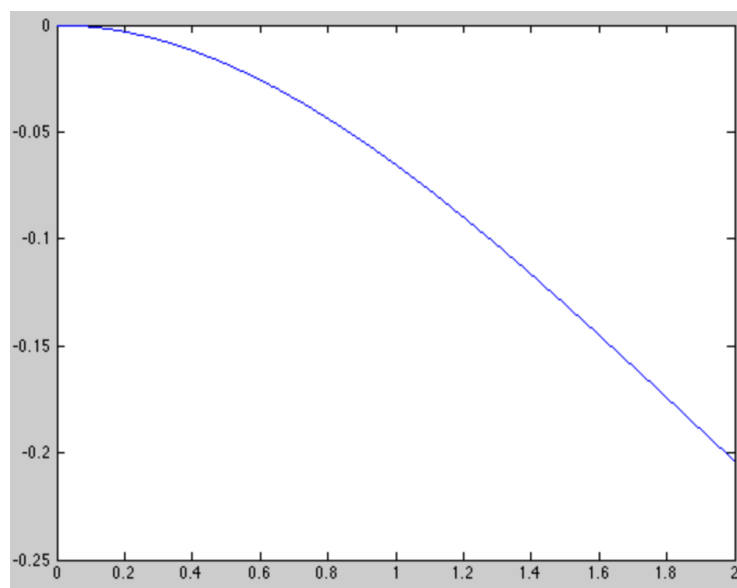


Figure 10: Grafen til stupebrettet påvirket av stuperens vekt

5 Konklusjon

Vi har i denne oppgaven regnet mye på Euler-Bernoulli ligningen for materialers bøyning under påvirkning av ytre- og egenkrefter. Vi har sett at ligningen er svært nøyaktig. Når vi sammenligner den tilnærmede approksimasjonen og den korrekte funksjonen ser vi at feilen i noen tilfeller er lik ϵ_{mach} .⁴

En interessant observasjon vi gjorde, var å se hvordan feilen utviklet seg ved stadig minkende h (steglengde). Feilen i diskretiseringen er bevist ved $O(h^2)$. Av dette følger det at feilen, i teorien, vil gå mot 0 når n går mot uendelig $h = \frac{2}{n}$. Dette vil si at jo flere oppdelinger av bjelken vi foretar oss, jo mindre blir feilen gjort i diskretiseringen.

Dessverre er det ikke slik i vårt tilfelle. I en perfekt verden, hvor datamaskinene og kalkulatorene kan regne med 100% nøyaktige tall uten avrundinger, ville dette vært tilfelle. I et av våre tilfeller fant vi ut at feilen var minst ved $n=1280$. Vi ser av 7 at feilen synker mot $n = 1280$, men deretter øker det. Dette vil si at etter $n = 1280$ har kondisjonstallet en såpass stor påvirkning på utregningene gjort for å finne den vertikale forskyvningen - og derfor stiger feilen. Vi ser at dette stemmer med tabellen over kondisjonstallene 8.

Dette er ikke bare tilfelle hvor vi har en sinusformet belastning på bjelken. Det vil være én n for alle typer vekter påført bjelken hvor feilen er minst, og ved å øke n etter dette punktet vil kondisjonstallet øke for mye i forhold til hvor mye vi reduserer h .

6 Referanseliste

References

- [1] Sause, T. *Numerical Analysis, Second Edition* Pearson Education Limited 2014, Edinburgh Gate, Harlow, England And Associated Companies throughout the world
- [2] Ndogmo, J. C. *Equivalence transformations of Euler-Bernoulli equation*. School of Mathematics, University of the Witwatersrand, Private Bag 3, Wits 2050, South Africa
- [3] Timoshenko, S.P. *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*. Philosophical Magazine 43 (1922) 125–131
- [4] Pauls Online Notes : Calculus II. <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/TaylorSeries.aspx>
- [25.03.2015]

7 Vedlegg

Her vil du plassere alt som ikke er direkte relevant for rapporten, og som kun vil leses av et lite antall mennesker. Selv de fleste sensorer vil kanskje sjekke kun ett vedlegg for å se at det inneholder det du sier og at det er greit disponert. Hvis man utvikler programvare vil vanligvis utskrift av all kode ligge i vedlegg, mens utdrag fra denne legges inn i bilder eller figurer i teksten, der hvor dette er naturlig. Dette er også stedet for matematisk bevis og liknende (det er forskjell på matematiske bevis og matematiske teorier og områder – det siste skal plasseres i teoridelen).