RELATIVITY

FOR
PHYSICS STUDENTS IN JAPAN

BY
TEAMIL9

はじめに

あわわ

目次

0 CHAPTER 数学的な基礎

一般相対性理論を学ぶためにはいくらかの数学的な準備が必要となる。ここでは、必要となる数学の知識（多様体論等）を解説していく。ここでの議論は一般相対性理論を学ぶに筆者が必要と判断した議論のみしか扱われない。したがって、詳しい内容に関しては

0.1 位相空間論

一般の幾何学でも、開集合というものをより一般の集合にも定義できるようにしたい。そのためにも、Euclid 空間の開集合というもののその性質を見て、それを一般化していくことがこの節での目標となる。

Euclid 空間における開集合の性質

また Euclid 空間には距離が定義されており具体的には、ある $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{E}^d$ について、

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x^i - y^i)} \tag{1}$$

というような実数が対応づいている。ここで、Euclid 空間のある元 $\boldsymbol{x}$ を中心として距離が r 未満となる元全ての集合として開球体

$$\mathrm{Ball}(\boldsymbol{x}, r) = \left\{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathbb{E}^d, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < r \right\} \tag{2}$$

これを用いて、Euclid 空間のある部分集合 M に関して、Euclid 空間中に次のような 3 種類の集合が生まれるだろう。

1. M^o を M の内部と言い、任意の $\boldsymbol{y} \in M^o$ について、$\boldsymbol{y}$ を中心とする開球体がすべて M に含まれるような r が存在する。
2. M^e を M の外部と言い、任意の $\boldsymbol{y} \in M^o$ について、$\boldsymbol{y}$ を中心とする開球体がすべて M に含まれないような r が存在する。
3. M^f を M の境界と言い、M^e と M^o 以外の Euclid 空間の元全体の集合である。

この分類から、開集合と閉集合の定義は次のように書くことができる。

定義 0.1: 開集合・閉集合

M と M^o が一致するとき、つまり、M 自身が自身の内部であるならば、M は開集合であるという。
M と $M^i \cap M^f$ が一致する時、M は閉集合であるという。

また、一般に開集合の補集合は閉集合となることにも注意が必要となる。

さて、開集合の定義ができたわけだが、これを一般の集合に拡張するとなると、やはり Euclid 空間が持っている概念である距離を用いた定義ではいささか難しいだろう。かといって、それぞれの集合に固有の概念を用いた定義をしても良い定義にはならないし、どうしてその定義を用いるかも明瞭にはならない。このような考察の果てに全ての集合が持つ普遍的な何かによる性質を見ればいいのではないかということに気付ける。ここで、全ての集合が持つ普遍的なものといえば、集合の演算である和集合 ($\cup$)、共通部分 ($\cap$) だろう。これらに対して、開集合がどのような性質を示すかを見れば、その性質を持つものとして一般の集合に開集合を定義してやれば良さそうだと検討がつく。

まず、和集合に関して開集合と開集合の和集合は開集合だろう。このことはすぐにわかるはずだ。また、そうして和集合をどんどん取っていけば一つの限界として集合全体に辿りつく。つまり、Euclid 空間全体（集合全体）は開集合であるのだ。

次に、共通部分に関して開集合と開集合の共通部分も開集合だろうこともすぐに気付ける。しかし、ある一点を必ず含むようにして無限個の開集合の共通部分をとると、全体としては一点となる。ここで、果たして Euclid 空間における点は開集合たり得るのかという疑問が生じるが、実は点は開集合ではない。どのように開球体を作ってもその点以外の元も含まれてしまうためだ。また、交わらない 2 つの開集合の共通部分は $\emptyset$ である。すなわち、$\emptyset$ も開集合なのだ。

以上をまとめて定理としよう。

定理 0.2

Euclid 空間 $\mathbb{E}^d$ の開集合は次の性質を満たす。

1. 空集合と集合全体は開集合である。
2. 有限個の開集合の共通部分は開集合である。
3. 開集合の和集合は開集合である。

こうして、Euclid 空間特有の概念と思われた開集合の集合論的な性質が明らかとなった。

一般の集合における開集合

前節で、開集合の集合論的な性質をみた。この性質を満たすように、一般の集合の開集合を定義しよう。

定義 0.3: 位相空間

集合 S に対して、S の部分集合系[a]$\mathfrak{O}$ が S における 1 つの位相であるとは、次を満たすことを言う。

1. $S \in \mathfrak{O}$ かつ $\emptyset \in \mathfrak{O}$
2. 有限集合 Λ について、$\mathfrak{O}$ の元のいくつかを Λ の元と対応させた $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$$
3. 任意の集合 Λ について、$\mathfrak{O}$ の元のいくつかを Λ の元と対応させた $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$$

位相 $\mathfrak{O}$ の元のことを開集合と呼び、開集合が定義された集合、つまり、集合とその位相の組 $(S, \mathfrak{O})$ のことを位相空間と呼ぶ。

[a] 部分集合の集合のこと

こうして位相空間が定義された。以上の定義を少しわかりやすく噛み砕くと、位相というのは集合の開集合のリストのことで、位相空間というのは開集合が定義された集合のことである。

いくつかの例を見てみよう。

例 0.1. 集合 $S = \{a\}$ の位相は $\mathfrak{O} = \{\emptyset, S\}$ のみである。

例 0.2. 集合 $S = \{a, b\}$ の位相は $\mathfrak{O}_1 = \{\emptyset, S\}, \mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, \{a\}, S\}, \mathfrak{O}_3 = \{\emptyset, \{b\}, S\}, \mathfrak{O}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, S\}$

問題 0.1. 集合 $S = \{a, b, c\}$ が取りうる位相全てを書き記せ。

こうしてみると、任意の集合 S の位相として二つの極端な位相が取れることが見えるだろう。一つは、$\mathfrak{O}^* = \{\emptyset, S\}$。もう一つは、$\mathfrak{O}_* = \mathfrak{P}(S)$ だ。[*1] しかし、前者はそもそも開集合はないし、後者は Euclid 空間の全ての部分集合が開集合になってしまう。これでは異常であろう。ということで、一つ性質の良い位相というものを定義しよう。

定義 0.4: Hausdorff 空間

位相空間 $\{S, \mathfrak{O}\}$ を考える。S の任意の 2 つの元 a, b に対して、$a \in O_a (\in \mathfrak{O})$ と $b \in O_b (\in \mathfrak{O})$ でありかつ、

$$O_a \cap O_b = \emptyset$$

となるような開集合 O_a, O_b が存在するとき、位相空間 $\{S, \mathfrak{O}\}$ を Hausdorff 空間と呼ぶ。

このような位相をとることによって、任意の 2 元を開集合毎で分離することができる。これができなければ、2 元を分離するような開集合をとることができない、つまり 2 元は密着しているということにつながる。

同相写像

一般の集合における開集合について定義できたので、ここからは開集合を定義された集合（位相空間）を結ぶ写像について考えていく。

定義 0.5: 連続写像

2 つの位相空間 M, N を結ぶ写像 $f : M \to N$ が連続写像であるとは、
N の開集合である f の像の部分集合 O が存在した時に、その逆像 $f^{-1}(O)$ が M の開集合であることを言う。

連続写像といえば、解析で $\varepsilon - \delta$ を用いて定義されたことを覚えている方もいるかもしれない。今回の定義と解析での定義とは実は等価な定義となっているのだ。そのことについては、ここでは触れない。[*2]

[*1] 前者は密着位相と呼び、後者はディスクリート（離散）位相と呼ぶ。
[*2] 松本幸夫「多様体の基礎」を参照してほしい。

連続写像からはすぐに同相写像の定義ができる。

定義 0.6: 同相写像

位相空間 M, N を結ぶ連続写像 $f : M \to N$ が次を満たす時、f を同相写像と呼ぶ。

1. f が全単射である。
2. f^{-1} もまた連続である。

0.2 多様体の基礎

ここまでで様々な数学的な定義についてみたところで多様体と呼ばれる概念をここで導入する。ここで、私たちが住んでいる地球を描く地図を思い浮かべると、私たちは地図を通して「地球のどこに何があるのか」、「どこに私たちがいるのか」を把握している。このような物体と地図という関係性を見ていったときに、そもそも物体があって、それをある平面などに落とし込むことによって、物体上の位置を把握できるのではないかと考えられそうだ。多様体とは、とある物体でそれに対しての地図を書くことができる、そのようなものだ。

さて、多様体について定義をしていく前にちょっとした定義を挟む。

定義 0.7: 座標近傍、局所座標系

位相空間 X の開集合 U から、m 次元数空間 $\mathbb{R}^d$ のある開集合 U' への同相写像 $\varphi : U \to U'$ として、U と φ の対 (U, φ) を m 次元座標近傍と呼び、φ を U 上の局所座標系という。

さて今の定義を用いて、

定義 0.8: 位相多様体

位相空間 M が m 次元位相多様体であるとは次を満たすことをいう。

1. M が Hausdorff 空間である。
2. M の任意の点 p について、p を含む m 次元座標近傍が存在する。

こうして多様体の定義をすることができたが、ここで一つ考えなければいけない問題が生じる。私たちは多様体を開集合で覆い尽くすということをしたが、これは開集合なので、覆い尽くす際に必ず重複する点が生じる。[*3]そうなったときに、とても滑らかに多様体上の点を記述できて欲しいと考えることは自然であろうし、異なる座標近傍を繋ぐ写像というものを考えなければならないだろう。ということで、座標変換について考えてみよう。

m 次元位相多様体 M の 2 つの座標近傍 (U, φ) と (V, ψ) が交わる状況を考えると、この共通部分 $U \cap V$ の点 p については二つの座標系 $\varphi(p), \psi(p)$ で表せることとなる。ここで、$\varphi(U)$ から $\psi(V)$ への写像を考えてあげることは、そもそも φ も ψ も全単射なので可能であろう。ということで書いてみると、

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))$$

という形となる。こうすると、$\psi(U \cap V)$ の領域は $\varphi(U \cap V)$ のパラメータで表すことができるし、このパラ

[*3] もしも重複しないように取ろうとすると、閉集合を使わないといけない。

メータはちゃんと $\psi(V)$ 中の座標に対して滑らかに繋がってくれることより、このような座標変換を考えることができる。

この座標変換の微分可能性について言及をした多様体については次のような定義がなされる。

定義 0.9: C^r 級微分可能多様体

r は自然数または ∞ とする。

位相空間 M が次を満たす時、M を m 次元 C^r 級微分可能多様体と呼ぶ。

1. M は Hausdorff 空間である。
2. M は m 次元の座標近傍で被覆される。つまり、座標近傍の集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が存在して、

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

   が成立する。
3. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ であるような任意の $\alpha, \beta \in A$ について、座標変換

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   が C^r 級写像である。

いささかごつい定義の仕方をしたが、2 番目の定義までは位相多様体の定義と同様のことを言っている。

例 0.3. S^2（円）を考える。図 *1* のよう開集合を取り、U_1 を移す座標関数を $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$、$U_2$ を移す座標関数を $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ とした時に、座標関数を

$$\varphi_1 : U_1 \to \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right), \ \ \varphi_2 : U_2 \to \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

というように局所座標系をとってやることができるし、座標変換関数についても、

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\theta) = \theta \tag{3}$$

としてそのまま定義してやれば、これが C^∞ 級であることがわかる。

0.3　計量とテンソル

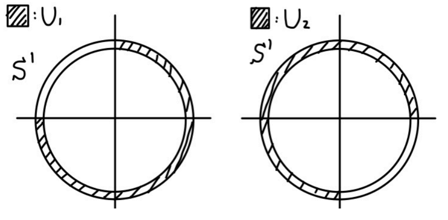

図 1　例 1 の局所座標系の取り方。ここではどちらも端点を含まない。

1

CHAPTER

一般相対性理論