場の量子論を一歩一歩数式で理解したい

Teamil9

2021 年 8 月 23 日

第 1 章

群と表現論

第 2 章

Lorentz 群

2.1 相対論的記述

2.2 Lorentz 変換と群

特殊相対性理論において光速度不変に基づく特殊相対性原理によって、Lorentz 変換は定義される。ここではその Boost 変換を表現論の観点から考えよう。

始めに単なるベクトルの Lorentz 変換：

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.1}$$

ここで、Einstein の縮約記法を用いている。以降も添字に関しては Einstein の縮約記法を用いていることに注意していただきたい。

今考えた Lorentz 変換が微小変換だと考えると、次のような変換となる。

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta + \varepsilon)^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.2}$$

ここで、不変テンソルの定義より、計量テンソルが

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{2.3}$$

なので、これらが微小 Lorentz 変換であると考えると、

$$g_{\mu\nu}(\delta+\varepsilon)^\mu{}_\rho(\delta+\varepsilon)^\nu{}_\sigma = g_{\mu\nu}\big(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma + \delta^\mu_\rho\varepsilon^\nu{}_\sigma + \delta^\nu_\sigma\varepsilon^\mu{}_\rho + O\big(\varepsilon^2\big)\big) \tag{2.4}$$

$$= g_{\rho\sigma} \tag{2.5}$$

であり、計量テンソルが添字の上げ下げに対応することを考えれば、

$$\varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0 \tag{2.6}$$

つまり、$\varepsilon_{\mu\nu}$ が反対称テンソル[*1]であることが示される。この結果を用いて、先の Lorentz 変換にて現れた $\varepsilon^\mu{}_\nu$ を次のように変形する。

$$\varepsilon^\mu{}_\nu = g_{\nu\rho}\varepsilon^{\rho\nu} = \frac{1}{2}[g_{\nu\sigma}\varepsilon^{\sigma\mu} - g_{\nu\rho}\varepsilon^{\mu\rho}] \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{2}\big[g_{\nu\sigma}\delta^\mu_\rho\varepsilon^{\rho\sigma} - g_{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma}\big] \tag{2.8}$$

[*1] つまり、独立なパラメータを 6 つ持つ。

ここで、$g_{\mu\nu}$ が対称テンソルであることなどを用いると、

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\left[i\left(\delta^{\mu}_{\rho}g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma}g_{\rho\nu}\right)\right] \tag{2.9}$$

と変形できて、

$$(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} := i\left(\delta^{\mu}_{\rho}g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma}g_{\rho\nu}\right) \tag{2.10}$$

と定義してやれば、

$$x'^{\mu} = \left(1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.11}$$

という形で表すことができる。ここで量子力学において考えていた座標変換の演算子を思い出すと、以上の式変形を行った理由がわかるかと思う。[*2]この M は抽象 Lorentz 群の Lie 代数の表現また 1/2 の意味については、式（2.10）を見て $(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ は ρ と σ の入れ替えに対して反対称であることを考えれば良いだろう。また、$M_{\mu\nu}$ は次の代数を満たす：

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\sigma}) \tag{2.12}$$

この計算は多少大変ではあるが、以下のように一歩一歩計算を行えば示すことができる。ここで、$M_{\mu\nu}$ は $(M_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}$ の成分であると考えて、

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} &= (M_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}(M_{\rho\sigma})^{\beta}{}_{\gamma} = -\left(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta} - \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}\right)\left(\delta^{\beta}_{\rho}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\beta}_{\sigma}g_{\rho\gamma}\right) \\
&= -\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta}\delta^{\beta}_{\rho}g_{\sigma\gamma} + \delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta}\delta^{\beta}_{\sigma}g_{\rho\gamma} + \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}\delta^{\beta}_{\rho}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}\delta^{\beta}_{\sigma}g_{\rho\gamma} \\
&= -g_{\nu\rho}\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\sigma\gamma} + g_{\nu\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\gamma} + g_{\mu\rho}\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\sigma\gamma} - g_{\mu\sigma}\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\gamma}
\end{aligned}$$

と、この計算結果を ρ と μ、σ と ν をそれぞれ入れ替えて得られる

$$M_{\rho\sigma}M_{\mu\nu} = -g_{\sigma\mu}\delta^{\alpha}_{\rho}g_{\nu\gamma} + g_{\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}g_{\mu\gamma} + g_{\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\nu\gamma} - g_{\rho\nu}\delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\mu\gamma}$$

を用いて、交換子を計算してやれば、計量テンソルが対称テンソルであることに注意して、

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]^{\alpha}{}_{\gamma} &= -g_{\nu\rho}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\mu\gamma}\right) + g_{\nu\sigma}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\gamma} - \delta^{\alpha}_{\rho}g_{\mu\gamma}\right) + g_{\mu\rho}(\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\nu\gamma}) - g_{\mu\sigma}\left(\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\gamma} - \delta^{\alpha}_{\rho}g_{\nu\gamma}\right) \\
&= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\sigma})
\end{aligned}$$

となって、得られる。

先ほどの（2.11）式の書き直しは、その際にも触れたが、抽象的な本義 Lorentz 群 SO(3, 1) の元 $\hat{\Lambda}$ を

$$\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\hat{M}_{\rho\sigma}\right) \simeq 1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\hat{M}_{\rho\sigma} \tag{2.13}$$

と書くことと対応している。[*3]このことから Lorentz 変換の生成子改め、本義 Lorentz 群に対応する Lie 代数の生成子と $\hat{M}_{\rho\sigma}$ のことを呼ぶ。

[*2] $\exp(i\cdot)$ の形 (Lie 代数) にしたいのだ。

[*3] 量子力学において現れた座標変換演算子も同じような形だった。

第 3 章

場の解析力学

3.1 Lagrangian 密度

3.1.1 場の量の微分

ϕ_α をある場の量とし、この場の量は位置に依存するとしよう。この場の量の多項式を

$$f[x] = f[\phi_\alpha(x)] = \sum_n a_n \phi_\alpha^n(x) \tag{3.1}$$

と置く。このとき、$f[x]$ の偏微分を無限小の場の量 η_α を用いて次のように定義する。

$$f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha] - f[\phi_\alpha(x)] = \frac{\partial f[\phi_\alpha(x)]}{\partial \phi_\beta}\eta_\beta \tag{3.2}$$

この定義は Taylor 展開から考えることができるだろう。[*1] この多項式 f が場の量の微分 $\partial_\mu \phi_\alpha$ にも依っているとした時の偏微分についても Taylor 展開の考えからすぐに

$$\begin{aligned} &f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \eta_{\mu\alpha}] - f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)] \\ &= \frac{\partial f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)]}{\partial \phi_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_{\nu\beta} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と定義すれば良いことがすぐにわかると思う。なお、Einstein の縮約は用いられていることには注意が必要である。加えて、ここまでで現れた η_μ や $\eta_{\mu\alpha}$ にある成分はそれぞれは互いに独立な任意の無限小関数である。

また、$\eta_{\mu\alpha} = \partial_\mu \eta_\alpha$ という関係がある場合にはこの偏微分は変形ができて、

$$\begin{aligned} f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \eta_{\mu\alpha}] - f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)] \\ = \frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_{\nu\beta} \\ = \frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta}\eta_\beta - \left(\partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \partial_\nu\left(\frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta\right) \\ = \left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \partial_\nu\left(\frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta\right) \end{aligned}$$

とできる。

[*1] 無限小の量の二次項は無視している。

3.2 変分

場の量の微分が考えられたので、質点の時と同じように場の量もある汎関数の変分でその性質が決定されるということを見ていこう。

場の量 $\phi_\alpha[x]$ に対して、それを任意に変化させたものを $\phi'_\alpha[x]$ とおこう。この時、これらの差

$$\phi'_\alpha[x] - \phi_\alpha[x] =: \eta_\alpha[x] \tag{3.4}$$

を ϕ_α の全変分という。$\eta_\alpha[x]$ が一次の無限小ならば、これを一次の全変分と呼ぶ。Lagrangian のときと同じように場の量とその微分の関数を $\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ とおいてその 4 次元体積積分は

$$I[\phi_\alpha] = \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \mathcal{L}[x] \tag{3.5}$$

のように書ける。この時、$S[\phi_\alpha]$ というのは x で積分されているので x にはすでによらず、ϕ_α の形にしかよらない。なので ϕ_α の全変分を与えると、$S[\phi_\alpha]$ は変化し、

$$\delta S[\phi_\alpha] := S[\phi'_\alpha] - S[\phi_\alpha] \tag{3.6}$$

を S の変分という。これを計算すると、

$$\begin{aligned}
\delta I[\phi_\alpha] &= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x (f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \eta_{\mu\alpha}] - f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)]) \\
&= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \left[\left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \partial_\nu\left(\frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta\right)\right] \\
(\text{Gauss's Thm}) &= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \frac{1}{c}\int_S \mathrm{d}^3x \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta \\
&= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta
\end{aligned}$$

最後の式変形では V_4 の境界上で η_α が 0 であることを用いている。なお、この後 $I[\phi_\alpha]$ や $\mathcal{L}[x]$ の定義に入っていくが、ここまでの話はその定義によらない一般的な汎関数としての I を考えている。これは則ちここまでの議論は仮定していた条件を満たしていればこの後に定義されるもの以外にも適用ができることをよく認識してほしい。

さて、ここまでの式変形を見てきて、解析力学の最初の流れを思い出した方も多いと思う。その方々が予想した通り今出してきたこれをそのまま、場の量の作用や Lagrangian といったものとするのである。しっかりと形式として書くならば、作用積分をある関数 $\mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ を用いて

$$I[\phi_\alpha] = \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \mathcal{L}(x) \tag{3.7}$$

と定義する。このときに現れる $\mathcal{L}$ を Lagrangian 密度と言う。そして場の量における Hamilton の原理はこの作用積分の変分が 0 になることである。つまり、

$$\delta I[\phi_\alpha] = 0 \tag{3.8}$$

であり、これを計算した結果から、

$$\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)} = 0 \tag{3.9}$$

これが場の Euler-Lagrange 方程式で、場の量が満たすべき微分方程式となる。