場の量子論を一歩一歩数式で理解したい

Teamil9

2021 年 9 月 18 日

概要

この pdf は主に場の量子論を学ぶにあたって私が詰まったところや、考えるのが難しいと感じたところを解きほぐすためのノートです。九後ゲの流れで作成しておりまして、文章のほとんどは九後ゲの言葉を自分なりに変更したりしなかったりしているものとなってますので、かなり著作権的に怪しいものとなってます。したがって、絶対に二次配布などは行わないでください。（私も一般向けに公開ということはしないつもりで、一般に公開を行うとなった際にはこの pdf を掲載からはずし、新たに自身でまとめた pdf をアップする予定[*1]です。）

[*1] できるなら

目次

第 1 章

群と表現論

ここでは学部 1 年程度の集合論の知識を仮定して群についての話から表現論への話へつなげていくことを考えている。

1.1　群の知識

群とは集合の中にある演算を考えた時に考えることになるもので次のような定義をなされる。

定義 1.1. G を集合とし、G の任意の 2 元 a, b の間にが演算 ab が G 内で定義され次の 3 つを満たす時 G を群と呼ぶ。

1.（結合則）

$$\forall a, b, c \in G,\ \ (ab)c = a(bc) \tag{1.1}$$

2.（単位元の存在）

$$\exists e \in G\ \forall a \in G,\ \ ae = ea = a \tag{1.2}$$

3.（逆元の存在）

$$\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G,\ \ aa^{-1} = a^{-1}a = e \tag{1.3}$$

この定義に関連して、演算が可換である群であれば、その群を可換群

定義 1.2. 部分群 集合 H が集合 G の部分群であるとは、集合 H が G の部分集合であり、かつ、集合 H が集合 G の演算において、群の定義 1.1 を満たすことを言う。

命題 1.1. 群 G の部分集合 H が部分群となることと、次の二つの条件は必要十分である。

1. $\forall h_1, h_2 \in H$ について $h_1 h_2 \in H$

2. $\forall h \in H$ について $h^{-1} \in H$

[証明]

群 G の部分集合 H が部分群であるときに二つの条件を満たすことを示す。
H が部分群であることから H は演算について閉じていることから条件 1 を満たす。また、逆元の存在より、条件 2 を満たすこともわかる。

二つの条件を見たすとき、群 G の部分集合 H が部分群となることを示す。
H が演算について閉じていることと、演算の結合律、逆元の存在は示されている。単位元の存在については逆元の存在と、演算について閉じていることより、

$$hh^{-1} = e \in H \tag{1.4}$$

が示され、群の定義を満たしていることから、H が部分群であることが示される。 □

定理 1.1. 準同型定理

1.2　群の表現

定義 1.3. あうあう

1.3　ヤング図と置換対称性と SU(2)

第 2 章

Lorentz 群

2.1　相対論的記述と Lorentz 変換

相対性理論において、時間と空間とは等価なものとして扱い、これらをまとめて時空と称し、扱う空間の次元を時空の 4 次元で、その位置（時刻と空間位置）を表すベクトルを

$$x^\mu := (ct, \boldsymbol{x}) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \tag{2.1}$$

と書き表して、これを（上付き添字の）4 元ベクトル[*1]と呼ぶ。

また、本 pdf では Einstein の縮約記法として、上下で同じ添字が 2 回出たならば、その添字についての和を取っていることを採用している:

$$x^\mu y_\mu := \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu y_\mu \tag{2.2}$$

加えて、特殊相対性理論の要請より光速度が不変であることが要請されることから、2 つの 4 元ベクトルの内積は

$$x.y := x^0 y^0 - \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} \tag{2.3}$$

と表される。この関係より、基底の内積の関係を表す計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

と表され、これの逆行列のテンソル $g^{\mu\nu}$ と同一である。:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{2.5}$$

[*1] または反変ベクトル

また、添字の上げ下げに関する操作も存在し、

$$x_\mu =: g_{\mu\nu} x^\nu, \;\; x^\mu =: g^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.6}$$

と定義される。[*2]

同様に任意のテンソル $T^{\mu\nu}$ の任意の添字も次のように上げ下げが可能となる。

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma}, \;\; T_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} T^{\rho\nu} \tag{2.7}$$

ここで、この添字の上下によってテンソルの成分が一体どのように変化することを見よう。テンソルの成分は次のようにする。

$$T^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

このとき、添字が全て下付きに変化した時、次のように成分が異なることとなる。

$$T_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} T^{00} & -T^{01} & -T^{02} & -T^{03} \\ -T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ -T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ -T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$T_\mu{}^\nu$ や $T^\mu{}_\nu$ といったテンソルもあるがこれらがどのようになるのかについては読者への課題としよう。[*3]

2.2 Lorentz 変換と群

特殊相対性理論において光速度不変に基づく特殊相対性原理によって、Lorentz 変換は定義される。ここではその変換を表現論の骨身が見えるようにして考えていこう。

始めに単なるベクトルの Lorentz 変換：

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.10}$$

ここで、Einstein の縮約記法を用いている。以降も添字に関しては Einstein の縮約記法を用いていることに注意していただきたい。

今考えた Lorentz 変換が微小変換だと考えると、次のような変換となる。

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta + \varepsilon)^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.11}$$

[*2] 計量について勉強するとこのあたりについてのトリックの種がわかると思う。

[*3] そんな難しくないと思います。

ここで、不変テンソルの定義より、計量テンソルが

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{2.12}$$

なので、これらが微小 Lorentz 変換であると考えると、

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\delta+\varepsilon)^{\mu}{}_{\rho}(\delta+\varepsilon)^{\nu}{}_{\sigma} &= g_{\mu\nu}\left(\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \delta^{\mu}_{\rho}\varepsilon^{\nu}{}_{\sigma} + \delta^{\nu}_{\sigma}\varepsilon^{\mu}{}_{\rho} + O\left(\varepsilon^2\right)\right) & (2.13) \\ &= g_{\rho\sigma} & (2.14) \end{aligned}$$

であり、計量テンソルが添字の上げ下げに対応することを考えれば、

$$\varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0 \tag{2.15}$$

つまり、$\varepsilon_{\mu\nu}$ が反対称テンソル[*4]であることが示される。この結果を用いて、先の Lorentz 変換にて現れた $\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$ を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\rho}\varepsilon^{\rho\nu} &= \frac{1}{2}[g_{\nu\sigma}\varepsilon^{\sigma\mu} - g_{\nu\rho}\varepsilon^{\mu\rho}] & (2.16) \\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\nu\sigma}\delta^{\mu}_{\rho}\varepsilon^{\rho\sigma} - g_{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma}\right] & (2.17) \end{aligned}$$

ここで、$g_{\mu\nu}$ が対称テンソルであることなどを用いると、

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\left[i\left(\delta^{\mu}_{\rho}g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma}g_{\rho\nu}\right)\right] \tag{2.18}$$

と変形できて、

$$(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} := i\left(\delta^{\mu}_{\rho}g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma}g_{\rho\nu}\right) \tag{2.19}$$

と定義してやれば、

$$x'^{\mu} = \left(1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.20}$$

という形で表すことができる。ここで量子力学において考えていた座標変換の演算子を思い出すと、以上の式変形を行った理由がわかるかと思う。[*5]この M は抽象 Lorentz 群の Lie 代数の表現と呼ぶ。また 1/2 の意味については、式（2.19）を見て $(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ は ρ と σ の入れ替えに対して反対称であることを考えればその意味が自ずから見えると思う。また、$M_{\mu\nu}$ は次の代数を満たす：

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\sigma}) \tag{2.21}$$

[*4] つまり、独立なパラメータを 6 つ持つ。

[*5] $\exp(i\cdot)$ の形 (Lie 代数) にしたいのだ。

この計算は多少大変ではあるが、以下のように一歩一歩計算を行えば示すことができる。ここで、$M_{\mu\nu}$ は $(M_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}$ の成分であると考えて、

$$
\begin{aligned}
M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} &= (M_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}(M_{\rho\sigma})^{\beta}{}_{\gamma} = -\bigl(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta} - \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}\bigr)\bigl(\delta^{\beta}_{\rho}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\beta}_{\sigma}g_{\rho\gamma}\bigr) \\
&= -\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta}\delta^{\beta}_{\rho}g_{\sigma\gamma} + \delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta}\delta^{\beta}_{\sigma}g_{\rho\gamma} + \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}\delta^{\beta}_{\rho}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}\delta^{\beta}_{\sigma}g_{\rho\gamma} \\
&= -g_{\nu\rho}\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\sigma\gamma} + g_{\nu\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\gamma} + g_{\mu\rho}\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\sigma\gamma} - g_{\mu\sigma}\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\gamma}
\end{aligned}
$$

と、この計算結果を ρ と μ、σ と ν をそれぞれ入れ替えて得られる

$$
M_{\rho\sigma}M_{\mu\nu} = -g_{\sigma\mu}\delta^{\alpha}_{\rho}g_{\nu\gamma} + g_{\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}g_{\mu\gamma} + g_{\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\nu\gamma} - g_{\rho\nu}\delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\mu\gamma}
$$

を用いて、交換子を計算してやれば、計量テンソルが対称テンソルであることに注意して、

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]^{\alpha}{}_{\gamma} &= -g_{\nu\rho}\bigl(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\mu\gamma}\bigr) + g_{\nu\sigma}\bigl(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\gamma} - \delta^{\alpha}_{\rho}g_{\mu\gamma}\bigr) + g_{\mu\rho}(\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\sigma}g_{\nu\gamma}) - g_{\mu\sigma}\bigl(\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\gamma} - \delta^{\alpha}_{\rho}g_{\nu\gamma}\bigr) \\
&= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\sigma})
\end{aligned}
$$

となって、得られる。

先ほどの（2.20）式の書き直しは、その際にも触れたが、抽象的な本義 Lorentz 群 SO$(3,1)$ の元 $\hat{\Lambda}$ を

$$
\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\hat{M}_{\rho\sigma}\right) \simeq 1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\hat{M}_{\rho\sigma} \tag{2.22}
$$

と書くことと対応している。[*6]このことから Lorentz 変換の生成子改め、本義 Lorentz 群に対応する Lie 代数の生成子と $\hat{M}_{\rho\sigma}$ のことを呼ぶ。

2.3　Lorentz 群の表現

場の理論

2.4　場の量の表現

スカラー

４元ベクトル

２階反対称テンソル

複素数の 2 階反対称テンソル $F^{\pm}{}_{\mu\nu}$ が

$$
F^{\pm\mu\nu} = \pm\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\pm}{}_{\rho\sigma} \tag{2.23}
$$

[*6] 量子力学において現れた座標変換演算子も同じような形だった。

を満たすとき、F^+ を自己双対な、F^- を反自己双対なテンソルと呼ぶ。これはそれぞれ反対称テンソルであることから、それぞれ 3 成分の複素数の量を持つ。A-スピンと B-スピンが $(0,1),(1,0)$ となるの量もそれぞれ点なしスピノール同士、点付きスピノール同士を対象に組んで得られる 3 成分の量である。

$$F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\xi_\alpha\Xi_\beta+\xi_\beta\Xi_\alpha)=:\frac{1}{2}\xi_{(\alpha}\Xi_{\beta)},\quad \bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta}=\frac{1}{2}\beta_{(\dot\alpha}H_{\dot\beta)} \tag{2.24}$$

このような対称純粋スピノール $F_{\alpha\beta}$と$\bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta}$ はそれぞれ自己双対および反自己双対な 2 階反対称テンソル $F^{\pm}_{\mu\nu}$ と等価で、その間をつなぐ変換行列は、

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta:=\frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu-\sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta \tag{2.25}$$

$$(\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}:=\frac{i}{2}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu-\bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{2.26}$$

となる。スピノール添字がこの位置になっている理由はそれぞれの $\sigma^\mu,\bar\sigma^\mu$ の標準位置の添字を用いた場合にこの順で積をとると考えればわかる。実際、一つの項のみを取り出せば、

$$\sigma^\mu\bar\sigma^\nu=(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}(\bar\sigma^\nu)^{\dot\gamma\beta}=(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu)_\alpha{}^\beta \tag{2.27}$$

$$\bar\sigma^\mu\sigma^\nu=(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\gamma}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}=(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{2.28}$$

となって確かにこの位置に添字が来ることがわかる。また、$\sigma^{\mu\nu}$ の成分を行列の形で表すと、

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix}I_2&\sigma^1&\sigma^2&\sigma^3\\-\sigma^1&-I_2&i\sigma^3&-i\sigma^2\\-\sigma^2&-i\sigma^3&-I_2&i\sigma^1\\-\sigma^3&i\sigma^2&-i\sigma^1&-I_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_2&-\sigma^1&-\sigma^2&-\sigma^3\\\sigma^1&-I_2&-i\sigma^3&i\sigma^2\\\sigma^2&i\sigma^3&-I_2&-i\sigma^1\\\sigma^3&-i\sigma^2&i\sigma^1&-I_2\end{pmatrix}\right]^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

$$=\begin{pmatrix}0&i\sigma^1&i\sigma^2&i\sigma^3\\-i\sigma^1&0&\sigma^3&-\sigma^2\\-i\sigma^2&-\sigma^3&0&\sigma^1\\-i\sigma^3&\sigma^2&-\sigma^1&0\end{pmatrix}^{\mu\nu} \tag{2.30}$$

式の形を見るに $\bar\sigma^{\mu\nu}$ に関しては、$0i$ 成分と $i0$ 成分が -1 倍されると考えれば良いから、

$$\bar\sigma^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-i\sigma^1&-i\sigma^2&-i\sigma^3\\i\sigma^1&0&\sigma^3&-\sigma^2\\i\sigma^2&-\sigma^3&0&\sigma^1\\i\sigma^3&\sigma^2&-\sigma^1&0\end{pmatrix}^{\mu\nu} \tag{2.31}$$

となることがわかる。そして、これらをグッと睨むと、次の公式が得られる。

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \tag{2.32}$$

$$\bar\sigma^{\mu\nu}=-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar\sigma_{\rho\sigma} \tag{2.33}$$

ここでグッと睨むコツは、”12 成分と 34 成分”や”21 成分と 34 成分”などの成分の間の関係を見るということである。

　また、$\sigma^{\mu\nu}$ に対して、ε を右からかけたものと、ε^T を $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ を左からかけたものの関係を見ると、

$$\sigma^{\mu\nu}\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^3 & -I_2 & i\sigma^1 \\ i\sigma^3 & 0 & \sigma^1 & -iI_2 \\ I_2 & -\sigma^1 & 0 & -\sigma^3 \\ -i\sigma^1 & iI_2 & \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad \varepsilon^T\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 & -I_2 & -i\sigma^1 \\ -i\sigma^3 & 0 & \sigma^1 & iI_2 \\ I_2 & -\sigma^3 & 0 & -\sigma^3 \\ i\sigma^1 & -I_2 & \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \tag{2.34}$$

なので、

$$(\sigma^{\mu\nu}\varepsilon)_{\alpha\beta} = \left\{\left(\varepsilon^T\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right\}^* \tag{2.35}$$

なる関係があることにも気付ける。さらに、また $\sigma^{\mu\nu}$ の式と、$\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ の式とをグッと睨めば、

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma}) = \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho + i\varepsilon^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \tag{2.36}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\rho\sigma}) = \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho - i\varepsilon^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \tag{2.37}$$

という関係式が得られることもわかる。ここで成分を睨むコツとしてはどの成分とどの成分が I_2 になるのかを見れば良い。[*7]

一般の既約表現

[*7] $\mathrm{tr}(\sigma^\mu) = \delta^\mu_0$ であることに気付こう。

第 3 章

場の解析力学

3.1 Lagrangian 密度

3.1.1 場の量の微分

ϕ_α をある場の量とし、この場の量は位置に依存するとしよう。この場の量の多項式を

$$f[x] = f[\phi_\alpha(x)] = \sum_n a_n \phi_\alpha^n(x) \tag{3.1}$$

と置く。このとき、$f[x]$ の偏微分を無限小の場の量 η_α を用いて次のように定義する。

$$f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha] - f[\phi_\alpha(x)] = \frac{\partial f[\phi_\alpha(x)]}{\partial \phi_\beta} \eta_\beta \tag{3.2}$$

この定義は Taylor 展開から考えることができるだろう。[*1] この多項式 f が場の量の微分 $\partial_\mu \phi_\alpha$ にも依っているとした時の偏微分についても Taylor 展開の考えからすぐに

$$\begin{aligned} &f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \eta_{\mu\alpha}] - f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)] \\ &= \frac{\partial f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)]}{\partial \phi_\beta} \eta_\beta + \frac{\partial f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)} \eta_{\nu\beta} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と定義すれば良いことがすぐにわかると思う。なお、Einstein の縮約は用いられていることには注意が必要である。加えて、ここまでで現れた η_μ や $\eta_{\mu\alpha}$ にある成分はそれぞれは互いに独立な任意の無限小関数である。

[*1] 無限小の量の二次項は無視している。

また、$\eta_{\mu\alpha} = \partial_\mu \eta_\alpha$ という関係がある場合にはこの偏微分は変形ができて、

$$
\begin{aligned}
f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \eta_{\mu\alpha}] - f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)] \\
= \frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_{\nu\beta} \\
= \frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta}\eta_\beta - \left(\partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \partial_\nu\left(\frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta\right) \\
= \left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \partial_\nu\left(\frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta\right)
\end{aligned}
$$

とできる。

3.2 変分

場の量の微分が考えられたので、質点の時と同じように場の量もある汎関数の変分でその性質が決定されるということを見ていこう。

場の量 $\phi_\alpha[x]$ に対して、それを任意に変化させたものを $\phi'_\alpha[x]$ とおこう。この時、これらの差

$$
\phi'_\alpha[x] - \phi_\alpha[x] =: \eta_\alpha[x] \tag{3.4}
$$

を ϕ_α の全変分という。$\eta_\alpha[x]$ が一次の無限小ならば、これを一次の全変分と呼ぶ。Lagrangian のときと同じように場の量とその微分の関数を $\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ とおいてその 4 次元体積積分は

$$
I[\phi_\alpha] = \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \mathcal{L}[x] \tag{3.5}
$$

のように書ける。この時、$S[\phi_\alpha]$ というのは x で積分されているので x にはすでによらず、ϕ_α の形にしかよらない。なので ϕ_α の全変分を与えると、$S[\phi_\alpha]$ は変化し、

$$
\delta S[\phi_\alpha] := S[\phi'_\alpha] - S[\phi_\alpha] \tag{3.6}
$$

を S の変分という。これを計算すると、

$$
\begin{aligned}
\delta I[\phi_\alpha] &= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x (f[\phi_\alpha(x) + \eta_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \eta_{\mu\alpha}] - f[\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)]) \\
&= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \left[\left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \partial_\nu\left(\frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta\right)\right] \\
(\text{Gauss's Thm}) &= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta + \frac{1}{c}\int_S \mathrm{d}^3x \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\eta_\beta \\
&= \frac{1}{c}\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)}\right)\eta_\beta
\end{aligned}
$$

最後の式変形では V_4 の境界上で η_α が 0 であることを用いている。なお、この後 $I[\phi_\alpha]$ や $\mathcal{L}[x]$ の定義に入っていくが、ここまでの話はその定義によらない一般的な汎関数としての I を考えている。これは則ちここまでの議論は仮定していた条件を満たしていればこの後に定義されるもの以外にも適用ができることをよく認識してほしい。

さて、ここまでの式変形を見てきて、解析力学の最初の流れを思い出した方も多いと思う。その方々が予想した通り今出してきたこれをそのまま、場の量の作用や Lagrangian といったものとするのである。しっかりと形式として書くならば、作用積分をある関数 $\mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ を用いて

$$I[\phi_\alpha] = \frac{1}{c} \int_{V_4} \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(x) \tag{3.7}$$

と定義する。このときに現れる $\mathcal{L}$ を Lagrangian 密度と言う。そして場の量における Hamilton の原理はこの作用積分の変分が 0 になることである。つまり、

$$\delta I[\phi_\alpha] = 0 \tag{3.8}$$

であり、これを計算した結果から、

$$\frac{\partial f[x]}{\partial \phi_\beta} - \partial_\nu \frac{\partial f[x]}{\partial(\partial_\nu \phi_\beta)} = 0 \tag{3.9}$$

これが場の Euler-Lagrange 方程式で、場の量が満たすべき微分方程式となる。

3.3 Noether の定理

3.4 スカラー場の作用積分

3.5 スピノール場の作用積分

3.6 $\mathrm{U}(1)$Gauge 場:電磁場

第 4 章

場の量子化

4.1　自由 scalar 場の量子化

$\lambda\phi^4-$ 模型での Lagrangian 密度は次のようである。

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^2\right)-\frac{1}{4!}\phi^4 \tag{4.1}$$

これを Lagrangian とするためには、空間についての積分を行うこととなる：

$$L:=\int \mathrm{d}x^3\mathcal{L} \tag{4.2}$$

すると作用積分は、

$$S=\int \mathrm{d}x^4\mathcal{L}=\int \mathrm{d}tL \tag{4.3}$$

と書けることとなる。

さて、場の演算子 ϕ に対して共役な運動量 π は、解析力学とのアナロジーから、

$$\pi(x):=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi} \tag{4.4}$$

と考えられる。そして、これらの場の演算子と場の演算子に共役な運動量演算子とが同時刻交換関係：

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.5}$$

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{y},t)]=[\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=0 \tag{4.6}$$

として定義する。このような系の量子化は正準量子化と呼ばれる。

Hamiltonian については次のように得られる。

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left(\pi\dot{\phi}-\mathcal{L}\right)=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}\left(\pi^2+(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2+\mu^2\phi^2\right)+\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right] \tag{4.7}$$

また、量子力学における基礎方程式である Heisenberg 方程式が成立していることは、この Hamiltonian と ϕ, π との交換関係を考えれば出てくる。実際に示してみよう。まず、$[\phi, H]$ について考察しよう。

$$[\phi(y), H] = \left[\phi(y), \int \mathrm{d}^3x \left\{\frac{1}{2}\Big(\pi^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \mu^2\phi^2\Big) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right\}\right] \tag{4.8}$$

ここで、$\phi(y)$ 自体は積分される変数によらないのだから積分の中に入れられて、次のように変形できる。

$$= \int \mathrm{d}^3x \left\{\frac{1}{2}\Big(\big[\phi(y), \pi^2(x)\big] + \Big[\phi(y), (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2(x)\Big] + \big[\phi(y), \mu^2\phi^2(x)\big]\Big) + \left[\phi(y), \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)\right]\right\} \tag{4.9}$$

(4.5) 式の交換関係を用いれば、

$$[\phi(y), H] = i\pi = i\dot{\phi} \tag{4.10}$$

が結論される。もう一方の $[\pi, H]$ についても同様に、

$$[\pi(y), H] = \int \mathrm{d}^3x \left\{\frac{1}{2}\Big(\big[\pi(y), \pi^2(x)\big] + \Big[\pi(y), (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2(x)\Big] + \big[\pi(y), \mu^2\phi^2(x)\big]\Big) + \left[\pi(y), \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)\right]\right\}$$

この場合は各項に対して吟味していく方が良いだろう。１項目は自明であるから飛ばすとして、２項目は、

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \Big[\pi(y), (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2(x)\Big] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \{\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot (x)[\pi(y), (\boldsymbol{\nabla}\phi)(x)] + [\pi(y), (\boldsymbol{\nabla}\phi)(x)] \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi(x)\} \tag{4.11}$$

$$= -i\int \mathrm{d}^3x \boldsymbol{\nabla}\phi(x) \cdot \boldsymbol{\nabla}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{4.12}$$

$$= -i\big[\boldsymbol{\nabla}\phi.\boldsymbol{n}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\big]_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty} + i\int \mathrm{d}^3x\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\nabla^2\phi(x) \tag{4.13}$$

$$= i\nabla^2\phi(y) \tag{4.14}$$

が得られる。ここで、$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}^1 + \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^3$ である。$\big[\pi, \phi^2\big]$ の項については先の計算を用いれば容易に計算できる。最後に残った項は、

$$\frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x \big[\pi(y), \phi^4(x)\big] = \frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x \big\{\phi(x)\big[\pi(y), \phi^3(x)\big] + \big[\pi(y), \phi^3(x)\big]\phi(x)\big\} \tag{4.15}$$

$$= \frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x\phi(x)\big[\pi(y), \phi^2(x)\big]\phi(x) + \big[\pi(y), \phi^2(x)\big]\phi^2(x) + \phi^2(x)\big[\pi(y), \phi^2(x)\big] = \frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{4.16}$$

以上より、

$$[\pi(y), H] = -i\left\{\left(-\nabla^2 + \mu^2\right)\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3\right\} \tag{4.17}$$

この項に $-i\dot{\pi}$ を加えると、これは Lagrangian 密度から得られる Euler-Lagrange 方程式そのものとなることがわかるはずだ。そうして得られる方程式

$$\left(\Box + \mu^2\right)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{4.18}$$

で、$\lambda = 0$ の自由場のものを Klein-Gordon 方程式と呼ぶ。

以降は自由場に限定して考えていく。