古典力学 -Newton 力学から一般相対性理論まで-

Teamil9

2021 年 9 月 25 日

概要

この pdf では主に量子論の範囲を含まない力学を主に扱っていき、一般を含む相対性理論までをも解説しようという割と壮大な試みをしようとしている。前提知識としては標準な高校 3 年生ぐらい[*1]を現在考えているが、大学範囲の知識についても遠慮をせずに用いていこうとも考えているため、ゆくゆくは推奨できる読者層としては学部 1, 2 年生になるのではないかと思う。

[*1] 数 III 範囲を既習とする。

目次

第 1 章

座標系とその周辺

第 I 部

Newton 力学

第 II 部

Lagrange-Hamilton 力学

第 III 部

相対性理論

第 2 章

特殊相対論の限界

第 3 章

Scalar, Vector, Tensor

3.1 いろいろなセクション

3.2 まとめ

結局、一般相対性理論においてはスカラー量は一般の座標変換において不変、n 階の共変テンソルと k 階の反変テンソルのテンソル積においては一般の座標変換において、

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \mapsto T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_n} = \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{\partial x'^{\mu'_i}}{\partial x^{\mu_i}} \right] T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \left[\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu'_l}} \right] \tag{3.1}$$

あるいは、

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \mapsto T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_n} = \left[\prod_{i=1}^{k} \partial_{\mu_i}^{\mu_i{}'} \right] T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \left[\prod_{l=1}^{n} \partial_{\nu'_l}^{\nu_l} \right] \tag{3.2}$$

と書ける。共変ベクトル、反変ベクトルについては 1 階のテンソルとして考えることができると考えれば良いということとなる。

第 4 章

接続と Christoffel Symbols

付録 A

Tetrad について

反変な正規直交基底ベクトルを次のように用意します。

$$e^{\mu}_{(a)} \quad (a = 0, 1, 2, 3) \tag{A.1}$$

ここで、”a は 4 つある基底の 1 つずつを表し、μ はそのそれぞれの基底の成分を表す。”この a の組みのことをテトラッドと呼ぶ。そして、このベクトルは基底ベクトルであるので、成分についての添字の上げ下げも単なる反変ベクトルに対するものと同様に、

$$e_{(a)\mu} := g_{\mu\nu} e^{\mu}_{(a)} \tag{A.2}$$

とできる。この基底の内積を考えると、基底同士の内積であるから、

$$e^{\mu}_{(a)} e^{(b)}_{\mu} = \delta^{(b)}_{(a)} \tag{A.3}$$

が、そして、Tetrad の添字をつぶすようにとると、

$$e^{\mu}_{(a)} e^{(a)}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{A.4}$$

となる。また、次のように反変ベクトル同士での積を考えると

$$e^{\mu}_{(a)} e^{\nu(a)} = g^{\mu\nu} \tag{A.5}$$

となる。Tetrad の添字が残るような積を考えると、

$$e_{(a)\mu} e^{(b)\mu} = g_{(a)(b)} \tag{A.6}$$

となる。ここで、$g_{(a)(b)}$ は計量テンソル g と同様の成分を持つとする。

この Tetrad を用いることによって、テンソル $T^{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu} = e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} T_{(a)(b)} \tag{A.7}$$

逆に

$$T_{(a)(b)} = e^{\mu}_{(a)} e^{\nu}_{(b)} T_{\mu\nu} \tag{A.8}$$

Tetrad を用いることによって、成分のみしか見えなかったベクトルが基底まで着目することができるようになった。

付録 B

参考文献

- 物理のページ/一般相対性理論/テトラッド
- 講談社 杉山 直 著
  相対性理論