抽象線形代数学を知りたい！

Teamil9

2021 年 9 月 1 日

目次

第 1 章

ベクトル空間

1.1　線形空間とその周辺

1.1.1　線形空間と基底

ここでは線形空間、特にベクトル解析に関連する内容を紹介する。

定義 1.1. 線形空間
集合 V について、係数体 $\mathbb{K}$ が存在し、和とスカラー倍の演算が定義され、次を満たす時集合 V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間と呼ぶ。以下、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は V の任意の元とし、a, b は $\mathbb{K}$ の任意の元で 1 は $\mathbb{K}$ の積に関する単位元である。

1. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
2. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
3. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{0} \in V$ が存在する。
4. $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となるような $-\boldsymbol{x} \in V$ が存在する。
5. $(a+b)(\boldsymbol{x})=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$
6. $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$
7. $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$
8. $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

定義 1.2.

1.1.2　双対空間

定義 1.3. 線形写像 V, V' をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする。この間にある写像 $T: V \to V'$ が次の条件を満たすとき、T を線形写像と呼ぶ。

1. 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ と任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ について、

$$T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=aT(\boldsymbol{x})+bT(\boldsymbol{y}) \tag{1.1}$$

また、特に、$V'=\mathbb{R}$ である場合には線形写像のことを（汎）線形関数と呼ぶ。

この線形関数は線形空間を成し、この線形空間を V の双対空間と言い、V^* と書く。また、双対空間 V^* に対する双対空間は元の線形空間 V となり、この意味で、線形空間 V の元は線形写像と同一視される。

第 2 章

テンソル空間

第 3 章

Grassmann 代数

3.1　定義とその性質

V をベクトル空間テンソル代数

$$T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus \left(\otimes^2 V\right) \oplus \dots \tag{3.1}$$

に対し、$\forall x \in V$ に対して、$x \otimes x \in \otimes^2 V$ を含む $T(V)$ 中の最小のイデアルを考えると、イデアルの特性より、

$$\xi \otimes x \otimes x \otimes \eta \in I \ \ (\forall \xi, \eta \in T(V)) \tag{3.2}$$

であるし、

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i \otimes x_i \otimes x_i \otimes \eta_i \in I \ \ (\xi, \eta \in T(V), x_i \in V) \tag{3.3}$$

である。ここで、$s = 1, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ であると、$x \otimes x$ も I に含まれることもわかり、上の形で表せる元全体が最小のイデアルと見ることができる。

定義 3.1. イデアル I を

$$I := \left\{ \sum_{i=1}^{s} \xi_i \otimes x_i \otimes x_i \otimes \eta_i \in I \mid \xi, \eta \in T(V), x_i \in V, s = \mathbb{Z} \right\} \tag{3.4}$$

と定義するとき、I を $x \otimes x (x \in V)$ より生成されたイデアルと呼び、このイデアルによって、$T(V)$ を分類する商代数

$$E(V) = T(V)/I \tag{3.5}$$

を V 上の外積代数もしくは Grassmann 代数と呼ぶ。

そして、写像 $\pi : T(V) \to E(V)$ を標準射影とする。この写像 π を用いて新たな演算を次のように定義する。

定義 3.2. 標準射影 $\pi : T(V) \to E(V)$ による二階のテンソルの射影先を

$$\pi(\xi) \wedge \pi(\eta) := \pi(\xi \otimes \eta) \ \ (\xi, \eta \in T(V)) \tag{3.6}$$

と書き、これを $\pi(\xi)$ と$\pi(\eta)$ の外積と呼ぶ。

また、すでに賢明な読者たちはすぐに気づくことだが、π は $\mathbb{R} \oplus V$ 上において 1 対 1 である。このことから、$\boldsymbol{R} \oplus V$ の元において π で移した先も同じ記号と表そう。すると外積は次のように書ける。

$$\pi(x \otimes y) = \pi(x) \wedge \pi(y) = x \wedge y \tag{3.7}$$

そして、よくよく考えると、$x \otimes x \in I$ であることから、$\pi(x) \otimes \pi(x) = 0$ がわかる。したがって、$\otimes^2 V$ の π による像は

$$x \wedge y \tag{3.8}$$

と書き表せる。したがって、

$$\wedge^2 V := \pi\big(\otimes^2 V\big) = \{x \wedge y \mid x, y \in V\} \tag{3.9}$$

同様にして、

$$\wedge^k V := \pi\big(\otimes^k V\big) = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{k} x \mid x_i \in V \right\} \tag{3.10}$$

以上より、Grassmann 代数は次のような形で分解することができるようになる。

$$E(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus \wedge^2 V \oplus \wedge^3 V \oplus \ldots \oplus \wedge^k V \oplus \ldots \tag{3.11}$$

ここからは外積の計算の詳細について考えよう。先ほど、$x \wedge x = 0$ であることは $x \otimes x \in I$ から導かれたが、このことより、$x, y \in V$ に対して、

$$x \wedge y = -y \wedge x \tag{3.12}$$

となる。このことは次のように示される。$(x + y) \wedge (x + y) = 0$ であるから、

$$x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y = 0 \tag{3.13}$$

したがって、

$$x \wedge y = -y \wedge x \tag{3.14}$$

このことを考えると、$\wedge^4 V$

$$x \wedge y \wedge z = -y \wedge x \wedge z = y \wedge z \wedge x \tag{3.15}$$

となることが言える。これを示すことは演習問題としよう。

一般に次が言える。

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_j \wedge \ldots \wedge x_k = -x_1 \wedge \ldots \wedge x_j \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_k \tag{3.16}$$

さらに一般的に $\omega \in \wedge^k V, \omega' \in \wedge^l V$ において、

$$\omega \wedge \omega' = -1^{kl} \omega' \wedge \omega \tag{3.17}$$

が示される。

3.2 Grassmann 代数の基底

ここまで考えた外積の演算において、出てくるベクトルの基底の考慮をしなかった。基底のことを考えた時には一体どうなるのかをここから見ていく。ベクトル空間 V の基底として、$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を考えよう。この時に V の 2 次テンソル積 $\otimes^2 V$ の基底はこの基底のテンソル積となるので、$\wedge^2 V$ の元は

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} e_i \wedge e_j \tag{3.18}$$

と書けることがわかるし、$e_i \wedge e_i = 0$ であることや、$a^{ij} = -a^{ji}$ であることを用いれば、

$$\sum_{i<j}^{n} \bar{a}^{ij} e_i \wedge e_j \tag{3.19}$$

と書き直せる。そして、ここに現れる項は $i < j$ であることから、

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \tag{3.20}$$

である。以上と同様にしてウェッジの高次についても考えるならば、つまり、$\wedge^k V$ の元の表示について考えるならば、

$$\sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k}^{n} a^{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \tag{3.21}$$

となることは予想がつくはずだ。そして、項の個数は、

$${}_nC_k \tag{3.22}$$

となるであろう。しかし、ここで持つべき疑問がある。k の制限はなくてもよいのだろうか？もし、k が V の次元数よりも大きい場合どうなるのか。かならず基底の重複が起きる。すなわちどの項もゼロになってしまう：

$$\text{if } k > \dim V,\ \wedge^k V = 0 \tag{3.23}$$

以上の結果より、イデアルはこれまでとても小さいものという認識であったと思うが、

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} V^{n+i} \subset I \tag{3.24}$$

であることが示された。

さて、ここで気になる $\wedge^k V$ の基底だが、次の定理で示される。

定理 3.1. $k \leq \dim V$ 　に対して、

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge i_1 < i_2 < \ldots < i_k \tag{3.25}$$

は $\wedge^k V$ の基底を構成する。

また、$\wedge^k V$ の基底は k を動かしたとしてもその間では全体として *1* 次独立で、これらは $\mathbb{R}$ の基底とともに $E(V)$ の基底となる。

第 4 章

微分形式