量子力学 ～摂動と量子情報を主として～

Teamil9

2021 年 10 月 10 日

概要

目次

第 1 章

基本知識

1.1　解析力学と正準量子化

解析力学の基礎的な知識

多粒子の Lagrangian は次のように定義できる。

$$L = \sum_k \frac{m}{2} \dot{q_k}^i \dot{q_k}_i - V(q_1, \ldots) \tag{1.1}$$

この時 q に対応する正準運動量 p は、

$$p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.2}$$

と定義され、Hamiltonian は、

$$H := p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{1.3}$$

となる。また、Poisson bracket は次のように定義される：

$$\{f, g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} \tag{1.4}$$

ブラとケット

量子力学における

正準量子化

正準量子化は量子力学における演算子の交換子と古典力学における Poisson bracket とが次の関係を結ぶことを言う。：

$$\left[\hat{f}, \hat{g}\right]_q = i\hbar\{f, g\}_c \tag{1.5}$$

ここで、f, g は演算子 $\hat{f}, \hat{g}$ の古典的な対応物となる物理量である。これにより、位置演算子と、運動量演算子の間の関係は次を満たすこととなる。

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1.6}$$

第 2 章

二準位系と多準位系

第 3 章

摂動論

3.1　時間を含まない摂動論

3.1.1　縮退がない場合

3.1.2　縮退のある場合

3.2　時間を含む摂動論

3.2.1　相互作用表示

まず考える系の Hamiltonian が、

$$H = H_0 + V(t) \tag{3.1}$$

と書けると考える。ここに、H_0 についての固有値方程式

$$H_0 \left|\psi_n\right\rangle = E_n \left|\psi_n\right\rangle \tag{3.2}$$

は解けており、E_n は固有値、$\left|\psi_n\right\rangle$ は対応する固有状態であるとする。そして、V は H_0 に比べて小さいとする。さて、私たちは系の状態の時間の依存性を考えるにあたって二つの表示の仕方があることを知っている。それは Schrodinger-表示と Heisenberg-表示である。Schrodinger-表示では系の状態が時々刻々と移り変わっていくと考えるため、系の状態を決める方程式、Schrodinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle_{\mathrm{S}} = \hat{H}\left|\psi\right\rangle_{\mathrm{S}} \tag{3.3}$$

一方で Heisenberg-表示では系の状態が変わるのではなく、演算子が時間によって変わっていくと考えて、

$$i\hbar\frac{\partial\hat{O}}{\partial t} = \left[\hat{O}, \hat{H}\right] \tag{3.4}$$

しかし、私たちが考えている Hamiltonian は解の知っている H_0 と V の和として考えているため、なんとかして表示の中で解の知っている H_0 と V とを分離させたいと考えられるだろう。だから次のような状態の新

たな表示を考えよう。

$$|\psi\rangle_{\mathrm{I}} := \exp\left(\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right)|\psi\rangle_{\mathrm{S}} \tag{3.5}$$

$$\hat{O}_{\mathrm{I}} := \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)\hat{O}_{\mathrm{S}}\exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) \tag{3.6}$$

この表示を相互作用表示もしくは Dirac 表示と呼ぶ。この表示の状態ケットの時間発展を考えてみると、

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_{\mathrm{I}} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)|\psi\rangle_{\mathrm{S}}\right)\\
&= -H_0\exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)|\psi\rangle_{\mathrm{S}} + i\hbar\exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_{\mathrm{S}}\\
&= -H_0\exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)|\psi\rangle_{\mathrm{S}} + \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)(H_0 + V(t))|\psi\rangle_{\mathrm{S}}\\
&= \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)V(t)_{\mathrm{S}}\exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)|\psi\rangle_{\mathrm{S}}\\
&= V_{\mathrm{I}}|\psi\rangle_{\mathrm{I}}
\end{aligned}$$

一方で、演算子の時間発展の方を考えてみると、

$$\frac{\partial\hat{O}_{\mathrm{I}}}{\partial t} = -\frac{H_0}{i\hbar}\hat{O}_{\mathrm{I}} + \frac{\hat{O}_{\mathrm{I}}H_0}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{O}_{\mathrm{I}}, H_0\right]$$

となる。まとめると、相互作用表示において状態ケットと演算子の時間発展は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{I}}|\psi\rangle_{\mathrm{I}} \tag{3.7}$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{O}_{\mathrm{I}}}{\partial t} = \left[\hat{O}_{\mathrm{I}}, H_0\right] \tag{3.8}$$

これと先の Schrodinger 方程式と Heisenberg 表示とを見比べると、ちょうど中間のような形になっていることが見える。この関係を次の表にまとめておく。

表 3.1　S-表示,I-表示,H-表示の時間依存性早見表

	S-表示	I-表示	H-表示
状態ケット	H	V	なし
演算子	なし	H_0	H

この表を見れば、演算子は書かれている交換子を考えればよく、状態ケットであれば書かれている演算子をケットにかけたものが $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ のかけられたものと等号で結ばれる。

さて、$|\psi\rangle_{\mathrm{I}}$ を H_0 の固有ケットで展開する。

$$|\psi\rangle_{\mathrm{I}} = \sum_n c_n(t)|\psi_n\rangle \tag{3.9}$$

Hamiltonian が時間に応じて変化することから、各ケットの係数 c_n も時間に依るだろう。これを相互作用表示の式（**??**）に代入し、左から $\langle\psi_m|$ を代入して、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_n|\sum_n c_n(t)|\psi_n\rangle = \langle\psi_m|V_{\mathrm{I}}\sum_n c_n(t)|\psi_n\rangle \tag{3.10}$$

第 4 章

同種粒子の量子論

第 5 章

量子統計力学への道標

第 6 章

散乱問題