相対性理論ノート

Teamil9

2021 年 6 月 13 日

目次

第 I 部

特殊相対性理論

第 1 章

時間と空間

物体の運動などを記述するには座標系と呼ばれる 3 つの変数で空間的位置を指定し、時計によって時刻を指示することが必要不可欠であった。これら座標系と、時計とを合わせたものを基準系と呼ぶ。

また、基準系の中で、自由運動を行う物体が等速直線運動を行う場合があり、そのような基準系を慣性系と呼ぶ。 2 つの基準系が互いに一様な運動をし、その一方が慣性系であれば、他方も慣性系となる。

そして経験から次の原理が要請される。

原理 1. 相対性原理
全ての自然法則はあらゆる慣性基準系において同一である。

これは、あらゆる自然法則を記述する方程式は慣性基準系から慣性基準系への座標変換について共変であるということを意味する。

1.1 相互作用の伝播速度と相対性

私たちは力学の中で粒子間の相互作用というものを扱ってきた。そのとき、粒子間の相互作用が伝播する速度は ∞ であった。つまり、相互作用をしあっている粒子の一方に何かしらの変位が起きた場合、その影響が他方の粒子に及ぶまでの時間差がないものとして扱ってきた。しかし、実験をしていくうちに相互作用の影響が伝播する速度は有限であることが示されてきており、いままで行ってきた力学はある種近似的なものであったことがだんだんとわかってきた。

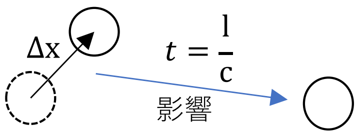

図 1.1 相互作用の伝播の簡易図。○は粒子を表している。

上で示した図において l は相互作用を行っている粒子間の距離、t は影響の伝播までの時間となる。これより、相互作用の伝播速度[*1]というものが、$c = l/t$ であることがわかる。

[*1] 1 つの粒子から他の粒子へと伝わる相互作用は他の粒子に対して第 1 の粒子の受けた変化を”報告する”という見方もでき、この意味で相互作用を”信号”と呼ぶ。この場合、相互作用の伝播速度も”信号速度”という。

この速度を相互作用の最高速度としよう。そして、粒子はこれを超える速度で運動することができないことがここから要請される。理由は、相互作用の速度を超えて運動することができてしまうと、相互作用の可能な最大伝播速度を超える速さで相互作用を実現できてしまうためである。

相対性原理によれば、あらゆる慣性基準系において、自然法則を記述する方程式達は同一であった。したがって、あらゆる慣性基準系の間では相互作用の伝播速度というものは常に一定でなければならないことが要請される。この原理は Einstein の相対性原理と呼ばれ、この原理に基づく力学をよく相対論的であるといわれる。逆に相対論的でない力学は Galilei の相対性原理に基づいており、相対論的力学と古典力学は単に相互作用の伝播速度 c を単に ∞ の極限に飛ばすことでつなぐことが可能となる。

古典力学における空間と時間について見てみよう。

古典力学における空間というのははそれを記述する基準系に依存する。つまり、観測者によって変わり、観測者が”どこで[*2]”それを観測したのか、”どんな見方[*3]をしたのか”という情報があって初めて、その観測したときの空間的情報が意味を持つこととなる。

一方、時間は絶対時間と呼ばれるすべての慣性系に対してただ一つの時の流れのみを考えている。これはつまり、観測者が”どこで””どんな見方”をしたのかという情報を出さずして時間的情報に意味を持たせられるということである。

絶対時間という概念と、Einstein の相対性原理とは全く相入れない概念である。これは、速度の合成則を考えてみるとわかるが、慣性系 O に対して慣性系 O' が $\boldsymbol{V}$ で動いているとした時に、慣性系 O で速度 $\boldsymbol{v}$ で動く粒子は、慣性系 O' では

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} \tag{1.1}$$

と書ける。速度の合成則は普遍的なものであるため、これは相互作用の伝播速度に関しても適用されるべきである。しかし次に触れる Michelson-Morley の実験によって、これが間違いであることが示される。

1.1.1 Michelson-Morley の実験

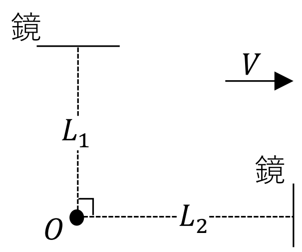

図 1.2　右側に速度 V で動いている実験室で行う。位置 O から右側と、そこに直交した方向に同時に光を放ち、鏡に反射して返ってきた時の光の干渉縞を見る。

図（1.2）の実験だ。この実験はこの状態と、装置を丸ごと９０°回した状態とで、干渉縞がどのように変わるのかを見るということが目的となる。

経路 L_1 を通る光と、経路 L_2 を通る光とでその所要時間を光が慣性系によってその速度が変わり、全く動いていない慣性系における光の速度は c として計算してみよう。

[*2] ここでのどことは座標の原点をどこにとるのかを意味する。

[*3] ここでの見方は座標系の取り方を意味する

まず L_1 について。L_1 は単に片道にかかる時間をそのまま 2 倍にしてやれば良いので、

$$\frac{ct_1}{2} = \sqrt{\frac{Vt_1}{2}^2 + L_1^2} \tag{1.2}$$

として、これを 2 乗して、t_2 に関して解いてやれば、

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\frac{2L_1}{c} \tag{1.3}$$

と得られることができる。次に L_2 については、行きの光の速さは $c-V$、戻りの光の速さは $c+V$ になるので、

$$t_2 = \frac{L_2}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{1}{1-\left(\frac{V}{c}^2\right)}\frac{2L_2}{c} \tag{1.4}$$

となる。

この t_1, t_2 から光路差 Δ は

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = 2\left(\frac{L_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} - \frac{L_2}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\right) \tag{1.5}$$

実験装置を 90°回転させた後の光路差　Δ' は

$$\Delta' = 2\left(\frac{L_1}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} - \frac{L_2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right) \tag{1.6}$$

実験装置を 90°回転させた前後での光路差の差は、　$c >> V$ であることを用いて、

$$2\left(\frac{1}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right) \simeq \left(\frac{V}{c}\right)^2 \tag{1.7}$$

と近似できることを用いて、

$$\Delta' - \Delta = (L_1 - L_2)\left(\frac{V}{c}\right)^2 \tag{1.8}$$

することができる。これが期待する干渉縞の違いとなる。この実験は様々な場所で行われ、気球での実験も行われもした。しかし、そのどれについても、以上のような結果を得ることはなかった。

1.1.2　同時が非同時？

Michelson-Morley の実験がうまくいかなかった理由は、光の速度が慣性系によって変わると考えていたことにある。このことは時間が絶対的ではないということに結びつく。

では、相対的である時間とはなんだろうか？これは、慣性基準系によって、時間の流れ方が異なるということを意味する。つまり、ある定まった時間が経過したという主張は実際にどの慣性基準系で観測したのかということも伝えなければ意味がないということである。また、ある慣性基準系で同時となる事象も、他の慣性基準系では同時ではなくなるというものも出てくる。

この事態を少し掘り下げて考えてみよう。

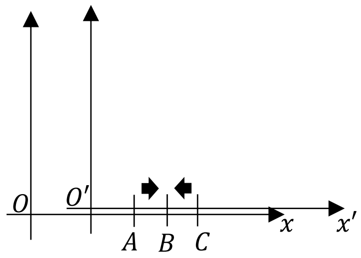

図 1.3　慣性基準系 O' は慣性基準系 O から見ると x 軸方向に速さ V で動いているとし、$A-B$ 間と $B-C$ 間の距離は慣性基準系 O' において同じであるとする。

位置 B から x 軸の正の方向と x 軸の負の方向に対し、信号を送る。すると、O' 系では同時に位置 A と位置 B につくことだろう。しかし O 系からみると、位置 A は時間とともに位置 B に近づき、位置 C は逆に遠ざかる。ここで、光の速度は慣性基準系によらないのだから、B の方が早く信号を受け取るように見えるのだ！

1.1.3　光速度不変と時空図と

これまでとこれからで事象（event）という言葉を用いる。これは時間軸と 3 つの空間軸で貼られる 4 次元空間 O-$x^0x^1x^2x^3$ の点だと考えれば良い。そして、粒子は点であり、静止もしくは運動したとしてもある曲線を描く。この曲線を世界線と呼ぶ。

光速度不変の原理についてより定量的に見ていこう。二つの慣性基準系 K, K' について考えよう。K 系で時刻 t_1 に位置 (x_1, y_1, z_1) から光を放ち、時刻 t_2 に K 系で位置 (x_2, y_2, z_2) で受け取ったとする。

これはつまり

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c(t_2 - t_1)^2 \tag{1.9}$$

が成り立つということである。

これを K' 系から見たら t'_1 に位置 $(x'_1, y'_1 z'_1)$ から光を放ち、時刻 t'_2 に位置 (x'_2, y'_2, z'_2) で受け取ったように見えた。つまり、

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 \tag{1.10}$$

となる。

ここで、t_1, x_1, y_1, z_1 と t_2, x_2, y_2, z_2 を任意の 2 つの事象とすると、

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \tag{1.11}$$

という量は世界間隔とよばれる。この量を二乗した値によって、二つの事象の間の関係を次のように定義する。

$$s_{12}^2 = \begin{cases} > 0 & (\text{時間的}) \\ = 0 & (\text{光的}) \\ < 0 & (\text{空間的}) \end{cases} \tag{1.12}$$

この関係については時空図についてや 4 元ベクトルを考える際にまた触れる。二つの事象が互いに無限に漸近している場合には、

$$ds_{12}^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.13}$$

となる。この関係は、数学的に言えば、4 次元空間内の 2 点間の距離である。[*4]

ds は微小量であった。このことから、

$$ds'(ds) = a_0 + a_1 ds \tag{1.14}$$

と見做せ、先ほど（(1.9)、(1.10) 式）見たようにある慣性基準系において世界間隔が 0 となるならば、他の慣性基準系でも世界間隔は 0 となるという関係があったので、

$$ds' = a_1 ds \tag{1.15}$$

となることがわかる。そして、両辺を二乗してやれば、

$$ds'^2 = a ds^2 \tag{1.16}$$

という関係があることが見えてくる。ここで $a = a_1^2$ としている。さて、ここで疑問となるのは a は何によるものであろうかということである。もしもこれが時間や空間に依るものであったならば、時空の一様性が破られてしまう。このことから、慣性基準系の相対速度に依りそうだということがわかってくる。しかし、相対速度の向きにはよらないことは空間の等方性から約束されている。速度の絶対値に依る量だと仮定することができる。次のような状況を考えよう。

三つの慣性基準系が存在し、慣性基準系 O 系に対して、慣性基準系 O_1 系はある方向に速さ V_1 で動いており、慣性基準系 O_2 系は速さ V_2 で動いているとする。すると、慣性基準系 O 系と慣性基準系 O_1系, O_2系 との世界間隔の間の関係は

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2 = a(V_2) ds_2^2 \tag{1.17}$$

となる。一方、慣性基準系 O_1 系と O_2 系との世界間隔の関係は、

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2 \tag{1.18}$$

となる。V_{12} は慣性基準系 O_1 系からみた O_2 系の速さである。この関係から、

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}) \tag{1.19}$$

となる。しかし、相対速度というものは、V_1 と V_2 の絶対値だけでなく、その角度にも依存してくるものである。したがって、この関係式は $a(V)$ が定数であるときにのみ成り立つという結論が得られる。

$$ds^2 = a ds_1^2 = a^2 ds_2^2 = a^3 ds^2 = a^n ds^2 \tag{1.20}$$

という関係式が得られることから、$a = 1$ であることがわかる。なお、n は任意の自然数である。

以上の結果から、任意の慣性基準系 O と O' の間で

$$ds^2 = ds'^2 \tag{1.21}$$

が成立し、これを用いて、

$$\int ds^2 = s^2 = \int ds'^2 = s'^2 \tag{1.22}$$

となって、有限の世界間隔が任意の慣性基準系の間で等しいということが示される。

[*4] 計量の取り方が私たちのこれまで用いてきたものとは異なり、Mincowski 計量 $diag(g_{ik}) = (1. -1. -1. -1)$ となっている。このような幾何学は通常の Euclid 幾何学と区別して、擬 Euclid 幾何学と呼ばれる。計量については付録を参照してほしい。

1.1.4 時計合わせの方法

1.2 座標系と座標変換

1.2.1 座標系

1.2.2 慣性基準系間での座標の関係

1.2.3 座標変換群

1.3 時空図

第 2 章

電磁場

第 II 部

一般相対性理論

第 3 章

曲がった時空

付録 A

位相空間

付録 B

多様体

この章は参考文献 [2] を中心にする。また、位相の概念についてすこし勉強したもの向けである。

B.1　多様体の定義

$\mathbb{R}^n$ における開球体（Ball）は次のようであった。

B.2　接ベクトル空間

付録 C

スピノル

付録 D

参考文献

[1]
Landau, Lifshitz 著
恒藤　敏彦, 広重　徹 訳
『場の古典論』
この本はこの pdf を作るにあたっての軸としている。
[2]
Robert M Wald 著
『General Relativity』
[3]